

Statistika Inferensial Lanjut

Pertemuan 11

Trend Kuadratik

- ❑ Untuk jangka waktu yang pendek, kemungkinan trend yang terjadi tidak bersifat linear.
- ❑ Salah satu trend nonlinear yang mungkin terjadi adalah trend kuadratik.
- ❑ Trend kuadratik dapat digunakan apabila penggambaran diagram pencar tidak menunjukkan trend linear tetapi kurvanya membentuk parabola.



□ Persamaan trend kuadratik :

$$\hat{Y} = a + bX + cX^2$$

Di mana

$$a = \frac{(\sum Y)(\sum X^4) - (\sum X^2 Y)(\sum X^2)}{n(\sum X^4) - (\sum X^2)^2} \quad b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} \quad c = \frac{n(\sum X^2 Y) - (\sum X^2)(\sum Y)}{n(\sum X^4) - (\sum X^2)^2}$$



Contoh

Diberikan data kasus Covid di DIY periode 13 Oktober – 29 Oktober 2020. Buatlah persamaan trend kuadratik dari data tersebut dan lakukan peramalan untuk tanggal 1 November 2020!

Tanggal	Kasus Covid
13 Oct	668
14 Oct	672
15 Oct	660
16 Oct	673
17 Oct	649
18 Oct	624
19 Oct	567
20 Oct	529
21 Oct	539
22 Oct	565
23 Oct	568
24 Oct	576
25 Oct	552
26 Oct	549
27 Oct	557
28 Oct	559
29 Oct	589

Tanggal	Kasus Covid (Y)	X	X^2	X^4	X^2Y	XY
13-Oct	668	-8	64	4096	42752	-5344
14-Oct	672	-7	49	2401	32928	-4704
15-Oct	660	-6	36	1296	23760	-3960
16-Oct	673	-5	25	625	16825	-3365
17-Oct	649	-4	16	256	10384	-2596
18-Oct	624	-3	9	81	5616	-1872
19-Oct	567	-2	4	16	2268	-1134
20-Oct	529	-1	1	1	529	-529
21-Oct	539	0	0	0	0	0
22-Oct	565	1	1	1	565	565
23-Oct	568	2	4	16	2272	1136
24-Oct	576	3	9	81	5184	1728
25-Oct	552	4	16	256	8832	2208
26-Oct	549	5	25	625	13725	2745
27-Oct	557	6	36	1296	20052	3342
28-Oct	559	7	49	2401	27391	3913
29-Oct	589	8	64	4096	37696	4712
Jumlah	10096	0	408	17544	250779	-3155

$$a = \frac{(\sum Y)(\sum X^4) - (\sum X^2 Y)(\sum X^2)}{n(\sum X^4) - (\sum X^2)^2} = \frac{10096 \cdot 17544 - 250779 \cdot 408}{17(17544) - (408)^2} = 567,644$$

$$b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{-3155}{408} = -7,733$$

$$c = \frac{n(\sum X^2 Y) - (\sum X^2)(\sum Y)}{n(\sum X^4) - (\sum X^2)^2} = 1,093$$

Dengan demikian, diperoleh persamaan trend kuadratiknya adalah

$$\hat{Y} = 567,644 - 7,733 X + 1,093 X^2$$

Dan hasil peramalan kasus covid tanggal 1 November 2020 ($X=11$) adalah

$$\hat{Y}_{1 \text{ November } 2020} = 567,644 - 7,733 (11) + 1,093 (11)^2 = 614,83 \approx 615$$

Trend Eksponensial

- ❑ Terkadang pada diagram pencar datanya menunjukkan persebaran semakin naik atau semakin turun secara eksponensial.
- ❑ Untuk mengantisipasi hal tersebut digunakan trend eksponensial.
- ❑ Trend Eksponensial adalah trend di mana variable bebasnya naik secara berlipat dan tidak linear.



Persamaan Trend Eksponensial :

$$\hat{Y} = ab^X$$

Akan dicari koefisien eksponensial a dan b

$$\ln \hat{Y} = \ln(ab^X) \leftrightarrow \ln \hat{Y} = \ln a + X \ln b$$

Misalkan $Y^* = \ln \hat{Y}$ dan $a^* = \ln a$ serta $b^* = \ln b$ maka diperoleh bentuk persamaan trend linear $Y^* = a^* + b^*X$.

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil diperoleh

$$a^* = \frac{\sum Y^*}{n} \text{ dan } b^* = \frac{\sum XY^*}{\sum X^2}$$

Karena $Y^* = \ln \hat{Y}$, $a^* = \ln a$, $b^* = \ln b$ maka

$$a^* = \frac{\sum Y^*}{n} \leftrightarrow \ln a = \frac{\sum \ln \hat{Y}}{n} \leftrightarrow a = \textit{anti ln} \left(\frac{\sum \ln \hat{Y}}{n} \right)$$

Dan

$$b^* = \frac{\sum XY^*}{\sum X^2} \leftrightarrow \ln b = \ln \left(\frac{\sum X \ln \hat{Y}}{\sum X^2} \right) \leftrightarrow b = \textit{anti ln} \left(\frac{\sum X \ln \hat{Y}}{\sum X^2} \right)$$

Contoh

Diberikan data kasus Covid di DIY periode 13 Oktober – 29 Oktober 2020.

Buatlah persamaan trend

Eksponensial dari data tersebut dan

lakukan peramalan untuk tanggal 1

November 2020!

Tanggal	Kasus Covid
13 Oct	668
14 Oct	672
15 Oct	660
16 Oct	673
17 Oct	649
18 Oct	624
19 Oct	567
20 Oct	529
21 Oct	539
22 Oct	565
23 Oct	568
24 Oct	576
25 Oct	552
26 Oct	549
27 Oct	557
28 Oct	559
29 Oct	589

Tanggal	Kasus Covid (Y)	X	X^2	$\ln Y$	$X \ln Y$
13-Oct	668	-8	64	6.504288	-52.03431
14-Oct	672	-7	49	6.510258	-45.57181
15-Oct	660	-6	36	6.49224	-38.95344
16-Oct	673	-5	25	6.511745	-32.55873
17-Oct	649	-4	16	6.475433	-25.90173
18-Oct	624	-3	9	6.43615	-19.30845
19-Oct	567	-2	4	6.340359	-12.68072
20-Oct	529	-1	1	6.270988	-6.270988
21-Oct	539	0	0	6.289716	0
22-Oct	565	1	1	6.336826	6.336826
23-Oct	568	2	4	6.342121	12.68424
24-Oct	576	3	9	6.356108	19.06832
25-Oct	552	4	16	6.313548	25.25419
26-Oct	549	5	25	6.308098	31.54049
27-Oct	557	6	36	6.322565	37.93539
28-Oct	559	7	49	6.326149	44.28305
29-Oct	589	8	64	6.378426	51.02741
Jumlah	10096	0	408	108.515	-5.150245

Dengan demikian diperoleh

$$a = \text{anti ln} \left(\frac{\sum \ln \hat{Y}}{n} \right) = \text{anti ln} \left(\frac{108,515}{17} \right) = 591,70$$

Dan

$$b = \text{anti ln} \left(\frac{\sum X \ln \hat{Y}}{\sum X^2} \right) = \text{anti ln} \left(\frac{-5,15}{408} \right) = 0,9875$$

Sehingga diperoleh persamaan trend eksponensialnya adalah

$$\hat{Y} = 591,70 \cdot (0,9875)^X$$

Akibatnya, hasil peramalan untuk tanggal 1 November 2020 adalah

$$\hat{Y}_{1 \text{ November } 2020} = 591,70 \cdot (0,9875)^{11} = 514,99 \approx 515$$

Measure of Accuracy

❑ Metode yang digunakan untuk mengukur kebaikan model (akurasi) adalah menentukan tingkat kesalahan (error) prediksi sekecil mungkin.

❑ Beberapa cara menentukan akurasi model :

1. Mean Absolute Percentage Error (MAPE) = $\frac{\sum |(Y - \hat{Y}) / Y|}{n}$

2. Mean Absolute Deviation (MAD) = $\frac{\sum |Y - \hat{Y}|}{n}$

Y : Nilai sebenarnya

\hat{Y} : Nilai Prediksi / Peramalan

3. Mean Squared Deviation (MSD) = $\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n}$





Contoh



Dari hasil penghitungan dengan metode trend linear, trend kuadratik dan trend eksponensial diperoleh MAPE, MAD dan MSD dari masing2 metode sbb :

	Linear	Kuadratik	Eksponensial
MAPE	0,00255	0,0302	0.043639
MAD	25,7171	17,95	25.53325
MSD	1053,69	508,66	1010.951

Karena nilai MAPE dengan Metode Linear paling kecil nilainya maka yang paling akurat adalah trend linear.



Tangga I	Kasus Covid (Y)	X	\hat{Y}	$ \hat{Y} - Y $	$\frac{ \hat{Y} - Y }{Y}$	$(\hat{Y} - Y)^2$
13-Oct	668	-8	655.684	12.316	0.018	151.68
14-Oct	672	-7	647.951	24.049	0.036	578.35
15-Oct	660	-6	640.218	19.782	0.03	391.33
16-Oct	673	-5	632.485	40.515	0.06	1641.5
17-Oct	649	-4	624.752	24.248	0.037	587.97
18-Oct	624	-3	617.019	6.981	0.011	48.734
19-Oct	567	-2	609.286	42.286	0.075	1788.1
20-Oct	529	-1	601.553	72.553	0.137	5263.9
21-Oct	539	0	593.82	54.82	0.102	3005.2
22-Oct	565	1	586.087	21.087	0.037	444.66
23-Oct	568	2	578.354	10.354	0.018	107.21
24-Oct	576	3	570.621	5.379	0.009	28.934
25-Oct	552	4	562.888	10.888	0.02	118.55
26-Oct	549	5	555.155	6.155	0.011	37.884
27-Oct	557	6	547.422	9.578	0.017	91.738
28-Oct	559	7	539.689	19.311	0.035	372.91
29-Oct	589	8	531.956	57.044	0.097	3254

Trend Linear

MAPE	0.044165
MAD	25.72624
MSD	1053.689

Tanggal	Kasus Covid (Y)	X	\hat{Y}	$ \hat{Y} - Y $	$\frac{ \hat{Y} - Y }{Y}$	$(\hat{Y} - Y)^2$
13-Oct	668	-8	699.46	31.46	0.047	989.73
14-Oct	672	-7	675.332	3.332	0.005	11.102
15-Oct	660	-6	653.39	6.61	0.01	43.692
16-Oct	673	-5	633.634	39.366	0.058	1549.7
17-Oct	649	-4	616.064	32.936	0.051	1084.8
18-Oct	624	-3	600.68	23.32	0.037	543.82
19-Oct	567	-2	587.482	20.482	0.036	419.51
20-Oct	529	-1	576.47	47.47	0.09	2253.4
21-Oct	539	0	567.644	28.644	0.053	820.48
22-Oct	565	1	561.004	3.996	0.007	15.968
23-Oct	568	2	556.55	11.45	0.02	131.1
24-Oct	576	3	554.282	21.718	0.038	471.67
25-Oct	552	4	554.2	2.2	0.004	4.84
26-Oct	549	5	556.304	7.304	0.013	53.348
27-Oct	557	6	560.594	3.594	0.006	12.917
28-Oct	559	7	567.07	8.07	0.014	65.125
29-Oct	589	8	575.732	13.268	0.023	176.04

Trend Kuadratik

MAPE	0.030196
MAD	17.95412
MSD	508.6597

Tanggal	Kasus Covid (Y)	X	\hat{Y}	$ \hat{Y} - Y $	$\frac{ \hat{Y} - Y }{Y}$	$(\hat{Y} - Y)^2$
13-Oct	668	-8	654.4967	13.5033	0.02	182.34
14-Oct	672	-7	646.3155	25.6845	0.038	659.69
15-Oct	660	-6	638.2366	21.7634	0.033	473.65
16-Oct	673	-5	630.2586	42.7414	0.064	1826.8
17-Oct	649	-4	622.3804	26.6196	0.041	708.6
18-Oct	624	-3	614.6006	9.39937	0.015	88.348
19-Oct	567	-2	606.9181	39.9181	0.07	1593.5
20-Oct	529	-1	599.3316	70.3316	0.133	4946.5
21-Oct	539	0	591.84	52.84	0.098	2792.1
22-Oct	565	1	584.442	19.442	0.034	377.99
23-Oct	568	2	577.1365	9.13648	0.016	83.475
24-Oct	576	3	569.9223	6.07773	0.011	36.939
25-Oct	552	4	562.7982	10.7982	0.02	116.6
26-Oct	549	5	555.7633	6.76326	0.012	45.742
27-Oct	557	6	548.8162	8.18378	0.015	66.974
28-Oct	559	7	541.956	17.044	0.03	290.5
29-Oct	589	8	535.1816	53.8184	0.091	2896.4

**Trend
Eksponensial**

MAPE	0.043639
MAD	25.53325
MSD	1010.951

Perbandingan Akurasi

	LINEAR	KUADRATIK	EKSPONENSIAL
MAPE	0.044165	0.030196	0.043639
MAD	25.72624	17.95412	25.53325
MSD	1053.689	508.6597	1010.951

Karena Nilai MAPE Trend Kuadratik adalah yang terkecil maka Trend terbaik untuk data COVID di DIY tanggal 13 Oktober 2020 – 29 Oktober 2020 adalah metode Kuadratik



Menggunakan Rstudio

```
> Covid <- c(668, 672, 660, 673, 649, 624, 567, 529, 539, 565, 568, 576, 552, 549, 557, 559, 589)
> x = -8 : 8
> y = Covid
>
> # Menentukan Trend Linear
>
> Linear = lm(y~x)
> summary(Linear)
```

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-72.615	-10.951	6.919	19.721	56.980

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	593.882	8.381	70.86	< 2e-16 ***
x	-7.733	1.711	-4.52	0.000407 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 34.56 on 15 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5766, Adjusted R-squared: 0.5484

F-statistic: 20.43 on 1 and 15 DF, p-value: 0.0004068

```
> #Menentukan Trend Kuadratik
>
> Kuadratik = lm(y~poly(x, 2, raw=True))
Error in poly(x, 2, raw = True) : object 'True' not found
> Kuadratik = lm(y~poly(x, 2, raw=T))
> summary(Kuadratik)

Call:
lm(formula = y ~ poly(x, 2, raw = T))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-47.470  -8.084  -2.205   13.250   39.360

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    567.6440     9.0679   62.599  < 2e-16 ***
poly(x, 2, raw = T)1  -7.7328     1.2304   -6.285  2.01e-05 ***
poly(x, 2, raw = T)2   1.0933     0.2823    3.873  0.00169 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 24.85 on 14 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7956,    Adjusted R-squared:  0.7664
F-statistic: 27.25 on 2 and 14 DF,  p-value: 1.49e-05
```

```
> #Menentukan Trend Eksponensial
>
> Eksponensial = lm(log(y)~x)
> summary(Eksponensial)

Call:
lm(formula = log(y) ~ x)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.12487 -0.01920  0.01504  0.03326  0.09617

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.383236   0.014101  452.688  < 2e-16 ***
x            -0.012623   0.002878  -4.386  0.000532 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.05814 on 15 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5618,    Adjusted R-squared:  0.5326
F-statistic: 19.23 on 1 and 15 DF,  p-value: 0.000532

> a = exp (6.383236)
> a
[1] 591.8398
> b = exp(-0.012623)
> b
[1] 0.9874563
>
>
```

Khusus untuk Trend Eksponensial :

$$a = \text{anti ln}(\text{Intercept}) = e^{\text{Intercept}} = e^{6,383236} = 591,8398$$

Dan

$$b = \text{anti ln } x = e^x = e^{-0,012623} = 0,9874563$$

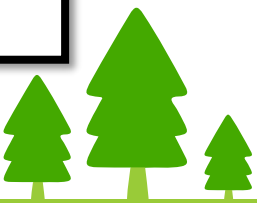
Jadi persamaan trend nya menjadi

$$\hat{Y} = 591,8398 \cdot (0,9874563)^x$$



Menghitung MAPE dengan Rstudio

```
> #Menghitung MAPE
>
> MAPE = function(predict, actual){mean(abs(predict-actual)/actual)}
>
> #MAPE Trend Linear
>
> MAPE_Linear = MAPE(predict(Linear), y)
> MAPE_Linear
[1] 0.04415215
>
>
> #MAPE Trend Kuadratik
>
> MAPE_Kuadratik = MAPE(predict(Kuadratik),y)
> MAPE_Kuadratik
[1] 0.03019797
```



```
> #MAPE Trend Eksponensial
> 
> predict(Eksponensial)
      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10     11
6.484222 6.471599 6.458975 6.446352 6.433729 6.421106 6.408483 6.395860 6.383236 6.370613 6.357990
     12     13     14     15     16     17
6.345367 6.332744 6.320121 6.307498 6.294874 6.282251
> 
> #MAPE EKsponensial
> 
> MAPE_Eksponensial = MAPE(exp(predict(Eksponensial)),y)
> MAPE_Eksponensial
[1] 0.04359283
>
```



Latihan

Diberikan data volume penjualan barang dari Toko XYZ seperti di samping.

- Tentukan trend kuadratik & Trend Eksponensialnya untuk data tersebut!
- Tentukan peramalan penjualan pada tahun 1990
- Tentukan MAPE dari masing-masing metode dan kesimpulan yang dapat diambil!

Tahun	Volume Penjualan (dalam ribuan ton)
1970	93,2
1971	97,4
1972	105,1
1973	110,2
1974	113,6
1975	117
1976	122
1977	138,3
1978	142,5
1979	148,4
1980	200,3
1981	210,5
1982	232,8
1983	244,9
1984	275,2

Tahun	Volume Penjualan (Y)	X	X^2	X^4	X^2Y	XY
1970	93,2					
1971	97,4					
1972	105,1					
1973	110,2					
1974	113,6					
1975	117					
1976	122					
1977	138,3					
1978	142,5					
1979	148,4					
1980	200,3					
1981	210,5					
1982	232,8					
1983	244,9					
1984	275,2					
Jumlah						

Tahun	Y	X	X^2	$\ln Y$	$X \ln Y$
1970	93,2				
1971	97,4				
1972	105,1				
1973	110,2				
1974	113,6				
1975	117				
1976	122				
1977	138,3				
1978	142,5				
1979	148,4				
1980	200,3				
1981	210,5				
1982	232,8				
1983	244,9				
1984	275,2				
Jumlah					

Tahun	Y	\hat{Y}	$ \hat{Y} - Y $	$\frac{ \hat{Y} - Y }{Y}$	$(\hat{Y} - Y)^2$
1970	93,2				
1971	97,4				
1972	105,1				
1973	110,2				
1974	113,6				
1975	117				
1976	122				
1977	138,3				
1978	142,5				
1979	148,4				
1980	200,3				
1981	210,5				
1982	232,8				
1983	244,9				
1984	275,2				
Jumlah					

Trend Kuadratik

MAPE	
MAD	
MSE	

Tahun	Y	\hat{Y}	$ \hat{Y} - Y $	$\frac{ \hat{Y} - Y }{Y}$	$(\hat{Y} - Y)^2$
1970	93,2				
1971	97,4				
1972	105,1				
1973	110,2				
1974	113,6				
1975	117				
1976	122				
1977	138,3				
1978	142,5				
1979	148,4				
1980	200,3				
1981	210,5				
1982	232,8				
1983	244,9				
1984	275,2				
Jumlah					

**Trend
Eksponensial**

MAPE	
MAD	
MSD	

Latihan

Diberikan data Impor karbon hitam setiap tahun di suatu negara ABC seperti di samping.

- Tentukan trend kuadratik & Trend Eksponensialnya untuk data tersebut!
- Tentukan peramalan penjualan pada tahun 2009
- Tentukan akurasi dari masing-masing metode dan kesimpulan yang dapat diambil!

Tahun	Impor Karbon (ribu ton)
2000	92
2001	101
2002	112
2003	124
2004	135
2005	149
2006	163
2007	180

Latihan

Sally's Software Inc. merupakan pemasok software computer yang tumbuh pesat di Sarasota. Penjualan selama 5 tahun tertera pada table di samping.

- Tentukan Persamaan Tren
 Eksponensialnya
- Perkirakan perolehan penjualan pad tahun
2007

Tahun	Penjualan (juta dolar)
2003	1,1
2004	1,5
2005	2
2006	2,4
2007	3,1