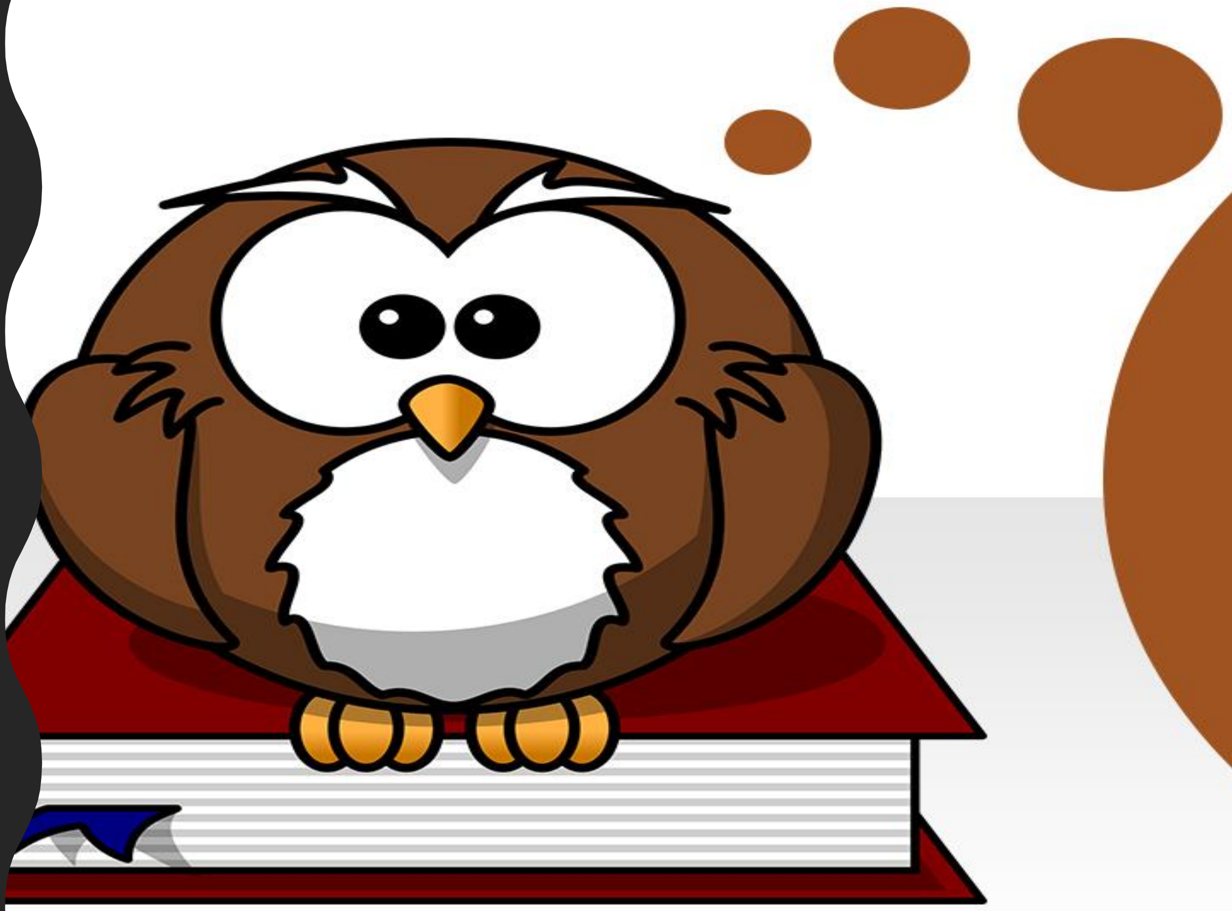
STATISTIKA INFERENSIAL LANJUT

PERTEMUAN 12



Konsep Dasar Pemodelan Runtun Waktu

Proses Stokastik

- Dalam analisis runtun waktu (time series), langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan model matematika yang sesuai untuk data yang dimiliki.
- Biasanya kita menganggap setiap hasil observasi masa depan yang tidak diketahui sebagai realisasi dari suatu peubah acak (variable random) tertentu.
- Dengan demikian, misalkan X_t adalah suatu variable random maka x_t merupakan realisasi dari variable random tersebut.

- **Definisi** :

*Suatu **Proses Stokastik** adalah keluarga variable random* $\{X_t, t \in T\}$ *yang didefinisikan pada ruang probabilitas* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- **Definisi** :

Fungsi $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ *pada* T *disebut sebagai **realisasi atau lintasan sampel** dari proses* $\{X_t, t \in T\}$.

Pada Analisis Runtun Waktu, himpunan indeks T merupakan himpunan waktu dan $T \subseteq \mathbb{R}$. Istilah runtun waktu biasanya mengacu pada data dan realisasi dari proses.

Contoh

Misalkan A dan θ adalah variable random dengan $A \geq 0$ dan θ berdistribusi secara seragam pada $[0, 2\pi]$. Suatu proses stokastik $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ dapat didefinisikan untuk $v \geq 0$ dan $r \geq 0$ oleh persamaan

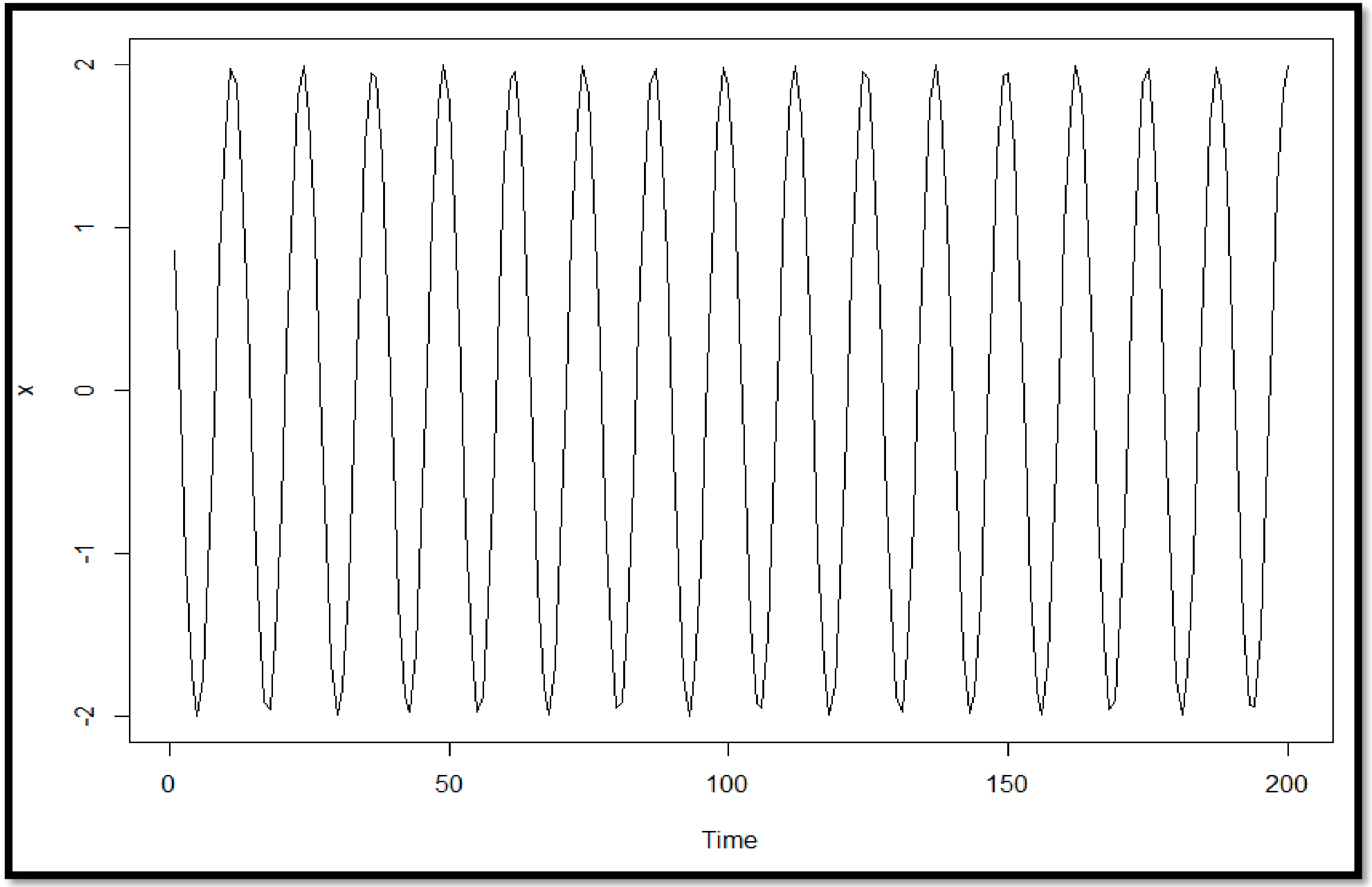
$$X(t) = r^{-1} A \cos(vt + \theta)$$

Sebagai salah satu realisasi dari persamaan tersebut adalah

$$X(t) = 2 \cos(0{,}5t + 0{,}2\pi)$$

Misal akan dibangkitkan 200 amatan dari realisasi tersebut dengan Rstudio

```
> t<- 1:200
> x<- 2*cos(0.5*t + 0.2*pi)
> plot.ts(x)
```



Proses Stasioner

- **Definisi :**

Misalkan $\{X_t\}$ *adalah suatu deret waktu dengan* $E(X_t^2) < \infty$.

1. *Fungsi mean deret* $\{X_t\}$ *adalah* $\mu_X(t) = E(X_t)$.
2. *Fungsi Kovariansi* $\{X_t\}$ adalah

$$\gamma_X(r,s) = cov(X_r, X_s) = E[\big(X_r - \mu_X(r)\big)\big(X_s - \mu_X(s)\big)]$$

Untuk semua $r, s \in \mathbb{Z}$.

- **Definisi :**

Suatu runtun waktu $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ *dikatakan Stasioner Kuat (Strictly Stationary) jika distribusi bersama* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *dan* $(X_{1+h}, X_{2+h}, \cdots, X_{n+h})$ *adalah sama untuk setiap bilangan bulat* h *dan* $n > 0$.

- **Definisi :**

Suatu runtun waktu $\{X_t\}$ *dikatakan Stationer Lemah (Weakly Stationary)/ Stationer kovarians/ stationer tingkat dua jika*

1. $E(X_t^2) < \infty$
2. $E(X_t) = konstanta$
3. $\gamma_X(t+h, t)$, *bebas dari* t *untuk setiap* $h \in T$.

- Secara umum, suatu runtun waktu $\{X_t\}$ dikatakan stasioner jika deret tersebut memenuhi sifat-sifat statistika seperti deret waktu bergeser (*time-shifted*) $\{X_{t+h}, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n\}$ untuk setiap bilangan bulat h.

- **Akibat** :

Berdasarkan kondisi (3) pada definisi stationer lemah, ***fungsi autokovariansi*** *untuk proses* $\{X_t\}$ *pada beda waktu (lag) h didefinisikan sbb*

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = \gamma_X(t + h, t)$$

- **Definisi :**

Misalkan $\{X_t\}$ *adalah deret waktu stasioner.*

1. Fungsi Autokovariansi *pada lag h adalah*

$$\gamma_X(h) = cov(X_{t+h}, X_t) = E\left[\left(X_{t+h} - \mu_X(t+h)\right)\left(X_t - \mu_X(t)\right)\right]$$

2. $\boldsymbol{Fungsi\ Autokorelasi}$ *pada lag h adalah*

$$\rho_X(h) = cor(X_{t+h}, X_t) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}$$

Contoh

Diberikan model deret waktu tanpa pengaruh trend dan musiman dengan amatan-amatan variable random yang saling bebas dan berdistribusi identic (*independent and indentically distributed (IID))* dengan mean 0. Barisan variable random $X_1, X_2, \cdots$ yang memiliki sifat ini disebut IID noise. Jika deret $\{X_t\}$ adalah IID noise dan $E(X_t^2) = \sigma^2 < \infty$ maka $E(X_t) = 0$ untuk semua t. Selanjutnya,

$$\gamma_X(t+h, t) = cov(X_{t+h}, X_t) = E\big[\big(X_{t+h} - \mu(X_{t+h})\big)\big(X_t - \mu(X_t)\big)\big]$$

$$= E[(X_{t+h} - 0)(X_t - 0)] = E(X_{t+h} X_t)$$

- Untuk $h = 0$ maka didapat $\gamma_X(t,t) = E(X_t X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2$
- Untuk $h = -1$ maka didapat $\gamma_X(t-1,t) = E[X_{t-1}X_t] = E(X_{t-1})E(X_t) = 0$
- Untuk $h = 1$ maka didapat $\gamma_X(t+1,t) = E[X_{t+1}X_t] = E(X_{t+1})E(X_t) = 0$

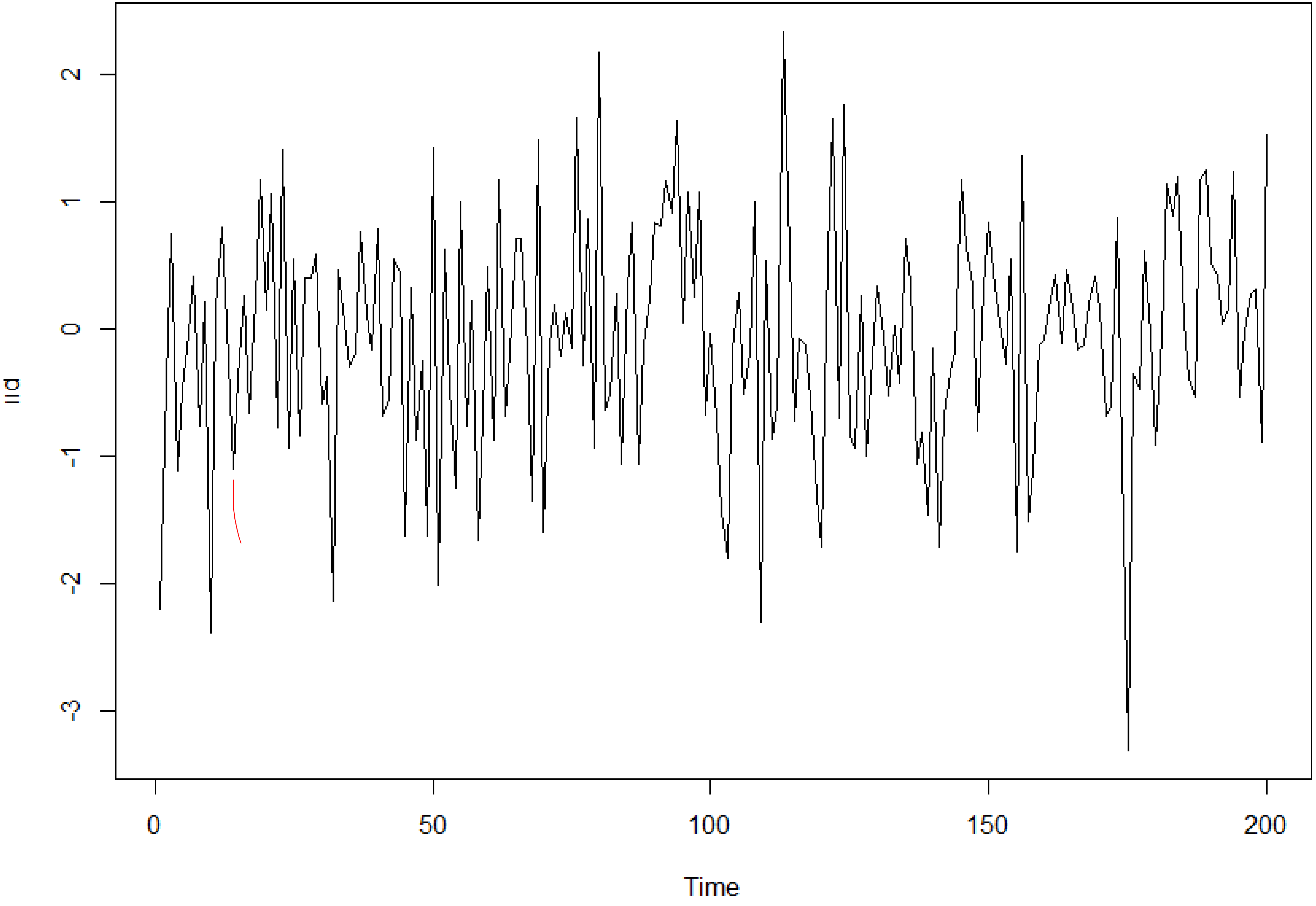
Dengan demikian, nilai $\gamma_X(t+h,t) = 0$ apabila $|h| \neq 0$, maka

$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2, jika\ h = 0 \\ 0, jika\ h \neq 0 \end{cases}$$

Yang tidak bergantung pada t. Jadi, IID noise adalah stasioner dan dinotasikan dengan $\{X_t\} \sim IID(0,\sigma^2)$.

Misal akan dibangkitkan 200 amatan dari realisasi $IID(0,1)$ dengan Rstudio

```
> iid<- rnorm(200,0,1)
> iid
  [1] -2.19704710 -0.41786009  0.74788947 -1.10897344 -0.47394725 -0.04082961  0.41836060
  [8] -0.76701308  0.21453802 -2.38892908  0.15895372  0.79928226  0.02917587 -1.10074854
 [15] -0.39253900  0.26686590 -0.65833860  0.22658343  1.17730894  0.15327573  1.06288666
 [22] -0.78028480  1.41349208 -0.94306432  0.55280470 -0.84237137  0.39583384  0.40655265
 [29]  0.59163877 -0.58437730 -0.37630118 -2.14370284  0.46536406  0.05372331 -0.30273634
 [36] -0.19163654  0.75915722  0.11063006 -0.16226328  0.78417225 -0.68451072 -0.55289964
 [43]  0.55079699  0.43422971 -1.62481479  0.32022489 -0.86857804 -0.24698205 -1.62834006
 [50]  1.42989596 -2.01258418  0.63170160 -0.46126326 -1.25489074  1.00358832 -0.75979427
 [57]  0.23197342 -1.66841473 -0.67222941  0.49268999 -0.87470092  1.17741753 -0.69278720
 [64] -0.18028267  0.71922266  0.71402414 -0.16057188 -1.34893391  1.48664659 -1.59965374
 [71] -0.12133140  0.19204603 -0.21231127  0.12238738 -0.14354966  1.66403331 -0.28806958
 [78]  0.86016018 -0.93397546  2.17292899 -0.63949981 -0.50618895  0.27320804 -1.06592474
 [85]  0.32965116  0.84232020 -1.06220751 -0.11766319  0.23876004  0.84090299  0.81629601
 [92]  1.16770700  0.91993147  1.64385693  0.04864869  1.08108463  0.25226985  1.07504275
 [99] -0.67345121 -0.03112495 -0.70408250 -1.43689825 -1.79378190 -0.16160825  0.28437100
[106] -0.51255684 -0.18286160  1.00294558 -2.30224556  0.53599552 -0.86426493 -0.60070511
[113]  2.33691157  1.02351352 -0.72392775 -0.07121749 -0.11825243 -0.54583730 -1.31174591
[120] -1.70785067  0.59038768  1.65523612 -0.69729973  1.76582378 -0.83534276 -0.93527652
[127]  0.26555535 -0.99351795 -0.22316040  0.34397431 -0.04469920 -0.52711481  0.03003404
[134] -0.42649076  0.71141173  0.37009298 -1.06082241 -0.80561219 -1.45662610 -0.14644426
[141] -1.71099324 -0.67014946 -0.33475294 -0.18211320  1.17118541  0.63431740  0.34700906
[148] -0.79730833  0.32970195  0.84086544  0.34169920  0.05517539 -0.27438047  0.55656712
[155] -1.74960449  1.36211689 -1.50833739 -1.09523176 -0.12451750 -0.09048216  0.24360086
[162]  0.42278311 -0.10562349  0.45812127  0.17783001 -0.15638071 -0.12501482  0.19589875
[169]  0.40892683  0.15914553 -0.69251751 -0.59557101  0.87936744 -1.00209858 -3.30757727
[176] -0.35243747 -0.47255045  0.61400612 -0.03984024 -0.90917417 -0.05198067  1.13948688
[183]  0.88630209  1.19914134  0.06669461 -0.38418945 -0.54093870  1.17254282  1.25355092
[190]  0.53123179  0.42516023  0.04261107  0.16268389  1.23789581 -0.53441630 -0.01070987
[197]  0.27935357  0.31108621 -0.89061976  1.53211792
> plot.ts(iid)
```



2
1
0
-1
-2
-3
iid
0
50
100
150
200
Time

Contoh

Diberikan Langkah acak (random walk) $\{S_t, t = 0,1,2,\cdots\}$ dimulai dari 0, diperoleh dengan menjumlahkan secara kumulatif variable random IID. Dengan demikian, suatu Langkah acak dengan nilai mean 0 diperoleh dengan mendefinisikan $S_0 = 0$ dan $S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_t$ untuk $t = 1,2,3,\cdots$ dengan $\{X_t\}$ IID noise. Jika $\{S_t\}$ adalah Langkah acak dan $\{X_t\}$ IID noise maka

$E(S_t) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_t)$

$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_t)$

$= 0 + 0 + \cdots 0 = 0$

$$E(S_t^2) = E\left((X_1 + X_2 + \cdots + X_t)^2\right)$$

$$= E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_t^2 + X_1X_2 + \cdots + X_{t-1}X_t)$$

$$= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_t^2) + E(X_1X_2) + \cdots + E(X_{t-1}X_t)$$

Karena $\{X_t\}$ IID noise maka $E(X_{t-1}X_t) = 0$ sehingga

$$E(S_t^2) = E\left((X_1 + X_2 + \cdots + X_t)^2\right)$$

$$= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_t^2) + E(X_1X_2) + \cdots + E(X_{t-1}X_t)$$

$$= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_t^2) + 0 + \cdots + 0$$

$$= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_t^2)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 = t\sigma^2$$

Dengan demikian, $E(S_t^2) = t\sigma^2 < \infty$ untuk setiap t. Selanjutnya akan ditentukan fungsi autokovariansi sampelnya

$$\gamma_X(t+h,t) = cov(S_{t+h}, S_t)$$

$$= cov(X_1 + X_2 + \cdots + X_{t+h}, S_t)$$

$$= cov(X_1 + X_2 + \cdots + X_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}, S_t)$$

$$= cov(S_t + X_{t+1} + X_{t+2} + \cdots X_{t+h}, S_t)$$

$$= E[\big(S_t + X_{t+1} + X_{t+2} + \cdots X_{t+h} - \mu(S_t + X_{t+1} + X_{t+2} + \cdots X_{t+h})\big)\big(S_t - \mu(S_t)\big)]$$

$$= E[(S_t + X_{t+1} + X_{t+2} + \cdots X_{t+h} - 0)(\mathrm{S_t} - 0)]$$

$$= E[S_t^2 + S_t X_{t+1} + S_t X_{t+2} + \cdots + S_t X_{t+h}]$$

$$= E(S_t^2) + E(S_t X_{t+1}) + E(S_t X_{t+2}) + \cdots + E(S_t X_{t+h})$$

$$= E(S_t^2) + E(S_t)E(X_{t+1}) + E(S_t)E(X_{t+2}) + \cdots + E(S_t)E(X_{t+h})$$

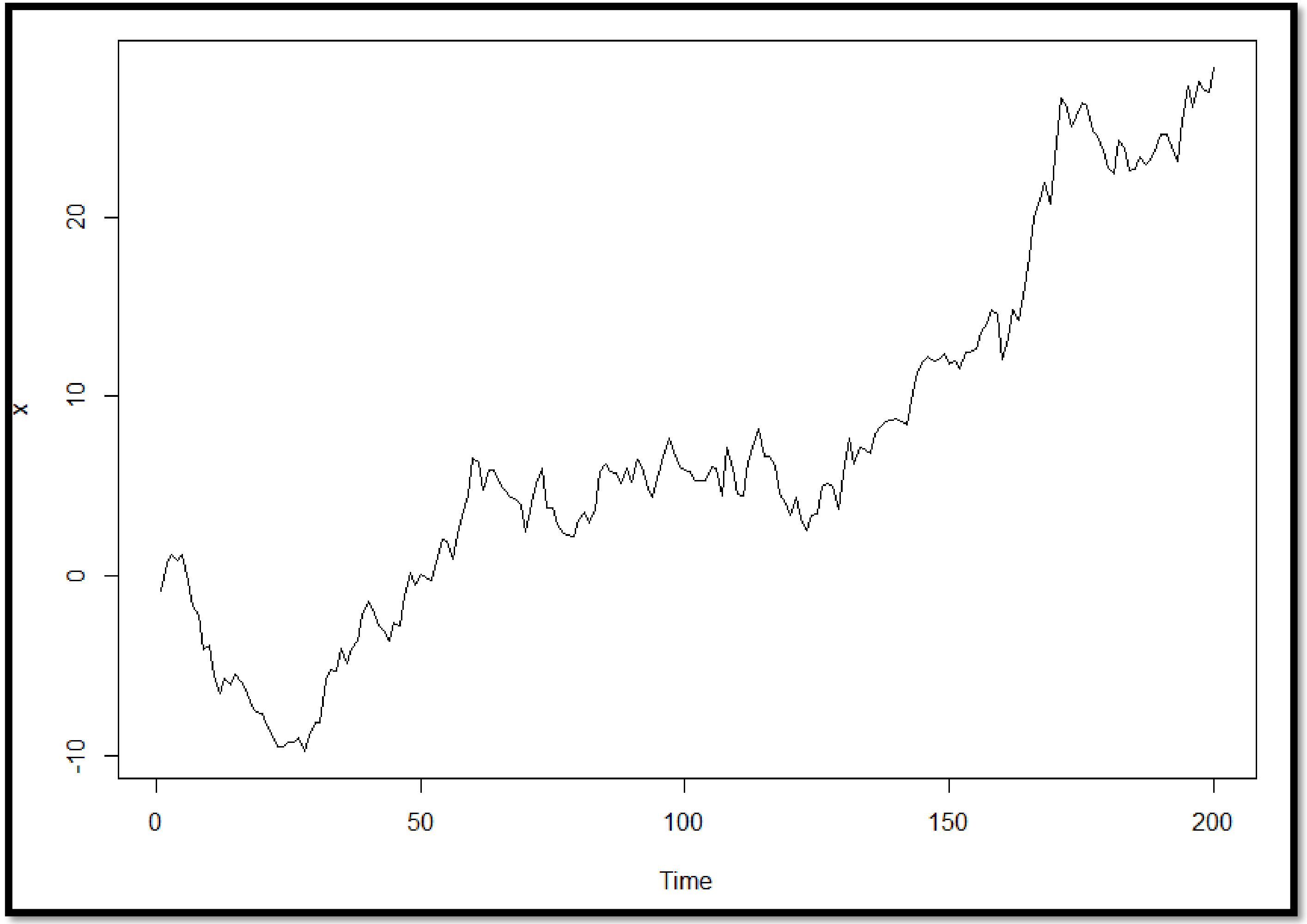
$$= E(S_t^2) + 0 + 0 + \cdots + 0$$

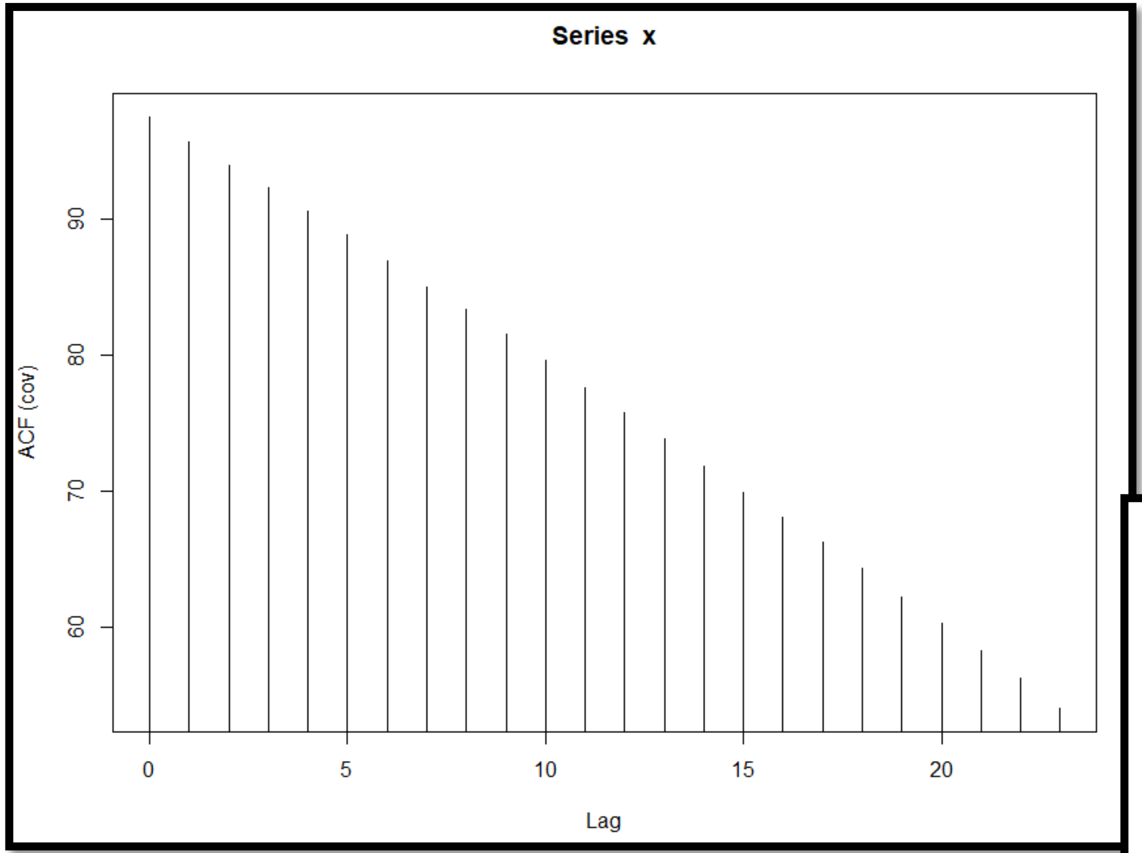
$$= t\sigma^2$$

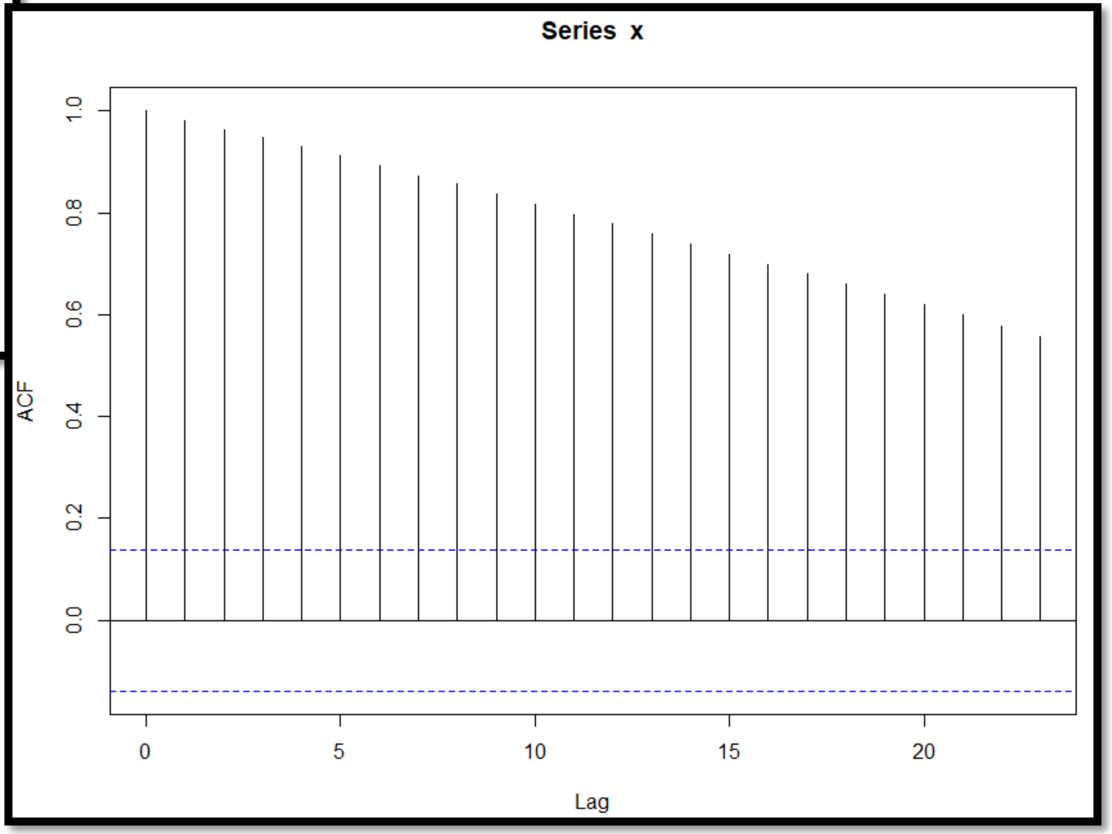
Karena $\gamma_X(t+h,t)$ masih bergantung pada variable t maka $\{S_t\}$ tidak stasioner.

Misal akan dibangkitkan 200 amatan dari realisasi dari $\{S_t\}$ dengan Rstudio

```
> x<- rnorm(200,0,1)
> x<- cumsum(x)
> plot.ts(x)
>
> acf(x, type="covariance")
> acf(x)
```




Series x
ACF (cov)
90
80
70
60
0
5
10
15
20
Lag


Series x
ACF
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20
Lag

Contoh 3.2.4. Misalkan suatu deret waktu didefinisikan oleh

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \quad t = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{3.21}$$

dengan $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ dan θ adalah konstanta bilangan real. Berdasarkan Persamaan (3.21) dapat dihitung

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_t) &= \mathrm{E}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X_t) &= \mathrm{var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \mathrm{var}(\varepsilon_t) + \theta^2\mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}) + 2\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 \\ &= \sigma^2(1 + \theta^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Berdasarkan Persamaan (3.23) diperoleh $\mathrm{E}(X_t^2) = \sigma^2(1 + \theta^2) < \infty$. Kemudian kita dapat menghitung fungsi autokovarians X_t, yakni

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu(X_{t+h}))(X_t - \mu(X_t))] \\
&= \mathrm{E}[(X_{t+h} - 0)(X_t - 0)] \\
&= \mathrm{E}[(X_{t+h} X_t)] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Untuk $h = 0$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{E}[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2)] \\
&= \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + 2\theta\,\mathrm{E}(\varepsilon_t)\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \theta^2\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) \\
&= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 \\
&= \sigma^2(1 + \theta^2).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Selanjutnya untuk $h = 1$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t+1,t) &= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t+1} + \theta\varepsilon_t)(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_t + \theta^2\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}(\varepsilon_{t+1})\,\mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t+1})\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \theta\,\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \theta^2\,\mathrm{E}(\varepsilon_t)\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) \\
&= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 \\
&= \theta\sigma^2. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $h = -1$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t-1,t) &= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \theta^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1})\,\mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2})\,\mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta^2\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2})\,\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) \\
&= 0 + \theta\sigma^2 + 0 + 0 \\
&= \theta\sigma^2. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dihitung untuk $|h| > 1$ nilai $\gamma_X(t+h,t) = 0$. (Coba Anda periksa untuk $h = \pm 2$ dan $h = \pm 3$). Dengan demikian fungsi autokovariansnya adalah

$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & \text{jika } h = 0; \\ \sigma^2\theta, & \text{jika } h = \pm 1; \\ 0, & \text{jika } |h| > 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

Dengan demikian deret waktu X_t adalah stasioner. Kemudian, fungsi autokorelasi $\{X_t\}$ dapat dihitung untuk masing-masing h. Mengingat $\gamma_X(0) = \gamma_X(0,0) = \gamma_X(t+0,t) = \sigma^2(1+\theta^2)$, maka untuk $h = 0$

$$\rho_X(0) = \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1. \tag{3.29}$$

Untuk $h = 1$, $\gamma_X(1) = \gamma_X(t+1, t) = \theta\sigma^2$ sehingga

$$\begin{aligned}\rho_X(1) &= \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta^2)}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Untuk $h = -1$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(t-1, t) = \theta\sigma^2$ sehingga

$$\begin{aligned}\rho_X(-1) &= \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta^2)}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

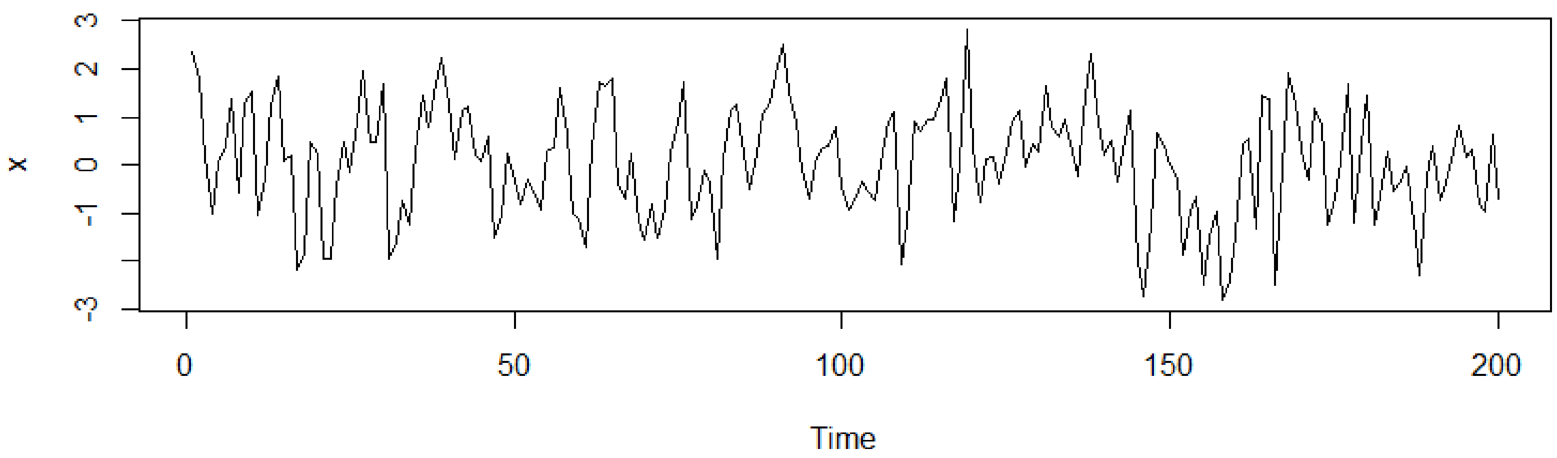
Untuk $|h| > 1$, nilai $\gamma_X(h) = 0$. Jadi

$$\rho_X(h) = \begin{cases} 1, & \text{jika } h = 0; \\ \dfrac{\theta}{(1+\theta^2)}, & \text{jika } h = \pm 1; \\ 0, & \text{jika } |h| > 1. \end{cases} \tag{3.32}$$

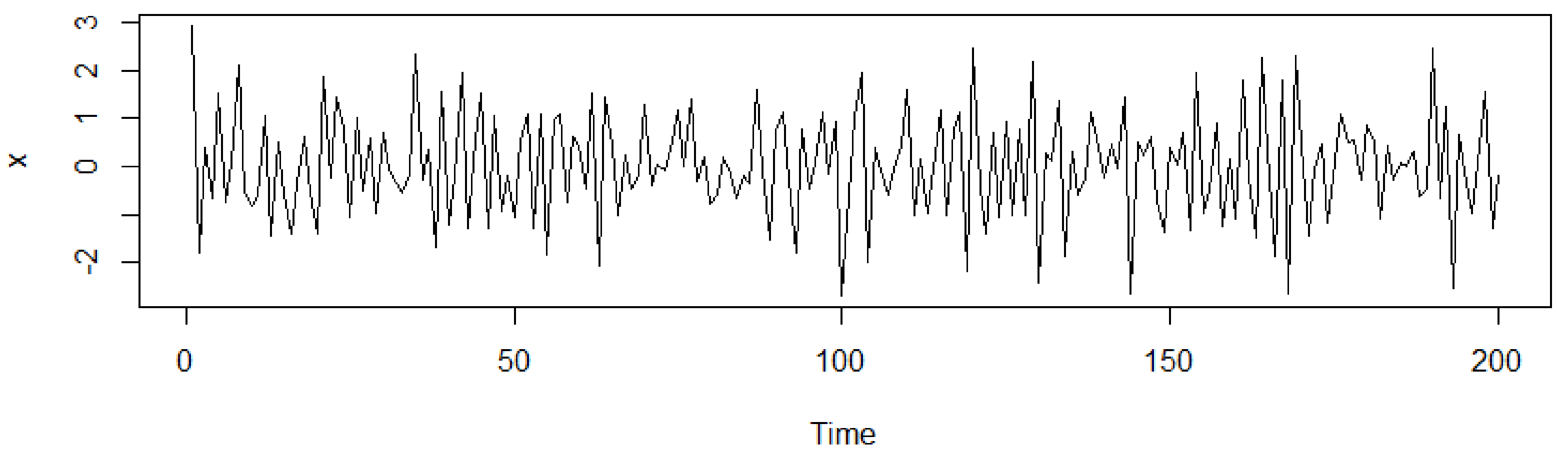
Proses pada Persamaan (3.21) disebut proses rerata bergerak (*moving average*) tingkat satu, dinotasikan $\mathrm{MA}(1)$. Berikut akan disimulasikan 200 realisasi $\mathrm{MA}(1)$ dengan $\theta = 0{,}6$ dan $\theta = -0{,}6$.

```
> par(mfrow=c(2,1))
> plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1),ma=0.6), n=200), ylab="x", main="theta=0.6")
> plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1),ma=-0.6), n=200), ylab="x", main="theta=-0.6")
```

theta=0.6



theta=-0.6



Fungsi Autokovariansi & Autokorelasi Sampel

- **Definisi :**

Misal $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *adalah amatan-amatan dari suatu deret waktu. Rata-rata sampel dari* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *adalah*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$$

- **Definisi :**

Misal $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *adalah amatan-amatan dari suatu deret waktu.*

1. ***Fungsi Autokovariansi sampel***

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$

Dengan $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(h)$ *dan* $|h| < n$.

2. ***Fungsi Autokorelasi sampel***

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Dengan $|h| < n$.

Catatan

1. Untuk $h \geq 0$, fungsi autokorelasi sampel $\hat{\gamma}(h)$ hampir sama atau mendekati kovarians sampel $n - h$ pasangan amatan $(x_1, x_{1+h}), (x_2, x_{2+h}), \ldots, (x_{n-h}, x_n)$. Perbedaan muncul pada saat penggunaan pembagi n dibandingkan $n-h$ dan pengurangan rata-rata keseluruhan (*overall mean*) $\bar{x}$ dari masing-masing faktor pada penjumlahan. Penggunaan pembagi n menjamin bahwa matriks kovarians sampel $\hat{\Gamma}_n = [\hat{\gamma}(i-j)]_{i,j=1}^{n}$ adalah definit positif. Jumlah pada Persamaan (3.34) berjalan pada jangka terbatas karena x_{t+h} tidak tersedia untuk $t + h > n$ (Shumway dan Stoffer, 2006).

2. Matriks korelasi sampel $\hat{R}_n = [\hat{\rho}(i-j)]_{i,j=1}^{n}$ adalah definit positif. Masing- masing elemen diagonalnya sama dengan 1, karena $\hat{\rho}(0) = 1$.

3. Fungsi autokovarians dan autokorelasi sampel dapat dihitung untuk sebarang kumpulan data $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dan tidak terbatas hanya untuk amatan deret waktu stasioner. Untuk data yang mengandung tren $|\hat{\rho}(h)|$ akan menurun secara lambat seiring naiknya h, dan untuk data dengan komponen periodik deterministik $\hat{\rho}(h)$ akan menunjukkan tingkah laku serupa dengan periode yang sama.

Proses White Noise

Definisi 3.4.1. Suatu proses linear X_t didefinisikan sebagai suatu kombinasi linear dari variat derau putih (*white noise*) W_t, yakni

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j} \tag{3.36}$$

dengan $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Fungsi autokovarians proses linear pada Persamaan (3.36) adalah

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{j+h}\psi_j . \tag{3.37}$$

Sifat-sifat

3.5.1 Sifat-sifat Varians

Berikut ini sifat-sifat penting varians:

1. $\text{var}(X) \geq 0$,
2. $\text{var}(a + bX) = b^2\text{var}(X)$,
3. Jika X dan Y saling bebas, maka $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

3.5.2 Sifat-sifat Kovarians

Sifat-sifat penting kovarians adalah sebagai berikut:

1. $\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd\,\text{cov}(X, Y)$,
2. $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$,
3. $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$,
4. $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$,
5. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$,
6. Jika X dan Y saling bebas, $\text{cov}(X, Y) = 0$.

3.5.3 Sifat-sifat Korelasi

Sifat-sifat penting korelasi adalah sebagai berikut: $-1 \leq \mathrm{cor}(X, Y) \leq 1$ dan

$$\mathrm{cor}(a + bX, c + dY) = \mathrm{sign}(bd)\mathrm{cor}(X, Y) \tag{3.38}$$

dengan

$$\mathrm{sign}(bd) = \begin{cases} 1, & \text{jika } bd > 0, \\ 0, & \text{jika } bd = 0, \\ -1, & \text{jika } bd < 0. \end{cases}$$

3.5.4 Sifat-sifat Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi

Berikut ini adalah sifat-sifat penting fungsi autokovarians:

1. $\gamma(t,t) = \mathrm{var}(X_t)$,
2. $\gamma(t,s) = \gamma(s,t)$,
3. $|\gamma(t,s)| \le \sqrt{\gamma(t,t)\gamma(s,s)}$.

Untuk fungsi autokorelasi:

1. $\rho(t,t) = 1$,
2. $\rho(t,s) = \rho(s,t)$,
3. $|\rho(t,s)| \le 1$.

Jika $\rho(t,s) = 0$, maka X_t dan X_s tidak berkorelasi.

Latihan

1. Misalkan $\mathrm{E}(X) = 4$, $\mathrm{var}(X) = 3$, $\mathrm{E}(Y) = 0$, $\mathrm{var}(Y) = 4$, dan $\mathrm{cor}(X, Y) = 0{,}35$. Hitung:

   a) $\mathrm{var}(X + Y)$

   b) $\mathrm{cov}(X, X + Y)$

   c) $\mathrm{cov}(X + Y, Y)$

   d) $\mathrm{cor}(X + Y, X - Y)$

2. Jika X dan Y tidak saling bebas, tetapi $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y)$. Hitunglah $\mathrm{cov}(X + Y, X - Y)$.

3. Misalkan $X_t = 5 + 2t + W_t$ dengan W_t adalah deret stasioner dengan fungsi autokovarians $\gamma(k)$.

   a) Hitunglah fungsi nilai tengah untuk $\{X_t\}$.
   b) Fungsi autokovarians untuk $\{X_t\}$.
   c) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?

4. Misalkan peubah acak A memiliki nilai tengah 0 dan varians 1 dan θ adalah peubah acak yang berdistribusi seragam pada selang $[-\pi, \pi]$ dan bebas dari A. Apakah model-model deret waktu berikut stasioner?

   a) $X_t = (-1)^t A$;
   b) $X_t = A\sin(\omega t + \theta)$;
   c) $X_t = A\sin(2\pi t + \theta)$.

5. Misalkan $\{W_t\}$ adalah suatu barisan peubah acak normal bebas, masing-masing dengan rerata 0 dan varians σ^2, dan misalkan a, b, dan c adalah konstanta. Berikut ini adalah beberapa model deret waktu:

   a) $X_t = a + bW_t + cW_{t-2}$;
   b) $X_t = W_1 \cos(ct) + W_2 \sin(ct)$;
   c) $X_t = W_t \cos(ct) + W_{t-1} \cos(ct)$;
   d) $X_t = a + bW_0$;
   e) $X_t = W_0 \cos(ct)$;
   f) $X_t = W_t W_{t-1}$.

   Tentukan mana di antara proses-proses tersebut yang stasioner! Kemudian untuk masing-masing proses stasioner hitunglah fungsi nilai fungsi autokovarians, dan fungsi autokorelasinya.

6. Misalkan $\{X_t\}$ adalah proses rerata bergerak tingkat dua yang diberikan oleh

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-2}$$

dengan $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, 1)$.

   a) Hitunglah fungsi autokovarians dan autokorelasi untuk proses ini saat $\theta = 0{,}8$.
   b) Lakukan seperti langkah (a) untuk $\theta = -0{,}8$.
   c) Hitunglah varians dari rerata sampel $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ pada saat $\theta = 0{,}8$.
   d) Lakukan simulasi model sebanyak 200 untuk kedua θ.

7. Misalkan suatu model deret waktu

$$X_t = \beta_1 + \beta_2 t + W_t$$

dengan β_1 dan β_2 adalah konstanta yang diketahui dan $W_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

   a) Apakah X_t stasioner?
   b) Tunjukkan bahwa proses $U_t = X_t - X_{t-1}$ adalah stasioner!

8. Misalkan model langkah acak dengan dorongan δ (*random walk with drift*) diberikan oleh

$$X_t = \delta + X_{t-1} + W_t, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

dengan $X_0 = 0$ dan $W_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

   a) Tunjukkan bahwa model ini dapat ditulis sebagai $X_t = \delta t + \sum_{k=1}^{t} W_k$.
   b) Hitunglah fungsi nilai tengah dan fungsi autokovariansnya.
   c) Tunjukkan bahwa deret ini tidak stasioner.

9. Misalkan $\mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h)$ adalah bebas dari t, namun $\mathrm{E}(X_t) = 3t$.

   a) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?
   b) Misalkan $Y_t = 7 - 3t + X_t$. Apakah $\{Y_t\}$ stasioner?

10. Misalkan $X_t = \varepsilon_t - \theta(\varepsilon_{t-1})^2$. Diasumsikan derau putih berdistribusi normal.

   a) Hitunglha fungsi autokorelasi $\{X_t\}$

   b) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?

11. Misalkan $X_1 = \theta_0 + \varepsilon_1$ dan untuk $t > 1$ definisikan X_t secara rekursif dengan $X_t = \theta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan θ_0 adalah konstanta. Proses $\{X_t\}$ dikatakan langkah acak dengan hanyutan (*random walk with drift*).

   a) Tunjukkan bahwa X_t dapat ditulis sebagai $X_t = t\theta_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1$.

   b) Hitunglah fungsi nilai tengah X_t.

   c) Hitunglah fungsi autokovarians untuk X_t.