Regresi Linear Berganda

Pendahuluan

- Pada sesi sebelumnya kita hanya menggunakan satu buah X, dengan model $Y = \alpha + \beta X$
- Dalam banyak hal, yang mempengaruhi Y bisa lebih dari satu. Model umum regresi linear berganda adalah

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p$$

Regresi Linear Berganda 2 Variabel Bebas

Bentuk Umum:

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \varepsilon$$

Dengan nilai koefisien regresi sbb:

$$\boldsymbol{a = \overline{Y} - b_1\overline{X_1} - b_2\overline{X_2}}$$

$$\boldsymbol{b_1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_2 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$\boldsymbol{b_2 = \frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_1 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

Korelasi & Koefisien Determinasi Regresi Linear Berganda

Koefisien Determinasi untuk Regresi Linear Berganda 2 Variabel Bebas yaitu

$$\boldsymbol{r^2 = \frac{b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}}$$

Korelasi dari Regresi Linear Berganda:

$$\boldsymbol{r = \sqrt{r^2}}$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

Uji Signifikansi Parsial untuk $\boldsymbol{b_i}$

- **Hipotesis**

  $H_0 : \beta = 0$ (tidak ada pengaruh yang signifikan)

  $H_1 : \beta \neq 0$ (ada pengaruh yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : α
- **Uji Statistik**:

$$t = \frac{b_i}{S_{b_i}}$$

Jika koefisien korelasi tidak diketahui

Dengan b_i adalah koefisien regresi dan S_{b_i} adalah standar eror dari koefisien regresi

Atau

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

Jika koefisien korelasi sudah diketahui

Dengan

$$S_{b_i} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x^2}}$$

Dan S_y adalah simpangan baku dari penduga nilai y yang dirumuskan dengan

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-2}}$$

- **Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$**

H_0 ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = n - 2$

- **Kesimpulan**

Uji Signifikansi Simultan Hasil Penaksiran

- **Hipotesis**

  H_0 : Tidak Ada perbedaan yang signifikan

  H_1: Ada Perbedaan Yang Signifikan

- **Tingkat Signifikansi** : α

- Uji Statistik

Sumber Variabilitas	Derajat Kebebasan (df)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rata-Rata Hitung	Nilai F_{hitung}
Regresi	k	$r^2\left(\sum y^2\right)$	$JKR = \frac{r^2(\sum y^2)}{k}$	$F_{Hitung} = \frac{JKR}{JKG}$
Residu/Eror	$n-k-1$	$(1-r^2)\left(\sum y^2\right)$	$JKG = \frac{(1-r^2)(\sum y^2)}{n-k-1}$	
Total	$n-1$	$\sum y^2$		

$$\boxed{\boldsymbol{r^2 = \frac{b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}}}$$

$$\boxed{\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}$$

k : banyaknya variable predictor/bebas
n : banyak data

- **Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$**

H_0 ditolak jika $\left|F_{hitung}\right| \geq F_{\alpha\,;df1;df_2}$ dengan $df_1 = k$ dan $df_2 = n - k - 1$

- **Kesimpulan**

Contoh

Misalnya dalam satu perusahaan ingin melihat hubungan antara pengeluaran untuk iklan (X_1) dan pengeluaran untuk quality control (X_2) dengan penerimaan melalui penjualan (sales revenue) (Y) sbb:

Waktu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1	10	9	11	12	11	12	13	13	14	15
X_2	3	4	3	3	4	5	6	7	7	8
Y	44	40	42	46	48	52	54	58	56	60

Tentukan:

a. Bentuklah Model Regresi Linear Berganda
b. Interpretasikan model yang diperoleh
c. Koefisien determinasi dan korelasi
d. Uji Parsial untuk mengukur seberapa signifikan pengaruh dari koefisien regresinya
e. Uji Simultan dari hasil penaksiran regresi
f. Prediksi penerimaan sales revenue apabila biaya iklan 20 juta dan biaya quality control 12 juta

Penyelesaian

Waktu	X_1	X_2	Y	X_1^2	X_2^2	Y^2	X_1Y	X_2Y	X_1X_2
1	10	3	44	100	9	1936	440	132	30
2	9	4	40	81	16	1600	360	160	36
3	11	3	42	121	9	1764	462	126	33
4	12	3	46	144	9	2116	552	138	36
5	11	4	48	121	16	2304	528	192	44
6	12	5	52	144	25	2704	624	260	60
7	13	6	54	169	36	2916	702	324	78
8	13	7	58	169	49	3364	654	406	78
9	14	7	56	196	49	3136	784	392	98
10	15	8	60	225	64	3600	900	480	120
Jumlah	120	50	500	1470	282	25440	6006	2610	613

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n} = 1470 - \frac{120^2}{10} = 1470 - 1440 = 30$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n} = 282 - \frac{50^2}{10} = 282 - 250 = 32$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} = 25440 - \frac{500^2}{10} = 25440 - 25000 = 440$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n} = 613 - \frac{120 \cdot 50}{10} = 613 - 600 = 13$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n} = 6006 - \frac{120 \cdot 500}{10} = 6006 - 6000 = 6$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n} = 2610 - \frac{50 \cdot 500}{10} = 2610 - 2500 = 110$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{500}{10} = 50$$

$$\overline{X_1} = \frac{\sum X_1}{n} = \frac{120}{10} = 12$$

$$\overline{X_2} = \frac{\sum X_2}{n} = \frac{50}{10} = 5$$

Dengan demikian didapat nilai koefisien regresi sbb:

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{\left(\sum x_2^2\right)\left(\sum x_1 y\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)\left(\sum x_2 y\right)}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2} = \frac{\mathbf{32 \cdot 6 - 13 \cdot 110}}{\mathbf{30 \cdot 32 - (13)^2}} = \frac{\mathbf{192 - 1430}}{\mathbf{960 - 169}} = -\frac{\mathbf{1238}}{\mathbf{791}} = \mathbf{-1,5651}$$

$$\boldsymbol{b_2} = \frac{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2 y\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)\left(\sum x_1 y\right)}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2} = \frac{\mathbf{30 \cdot 110 - 13 \cdot 6}}{\mathbf{30 \cdot 32 - (13)^2}} = \frac{\mathbf{3300 - 78}}{\mathbf{791}} = \frac{\mathbf{3222}}{\mathbf{791}} = \mathbf{4,073}$$

$$\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{b_1}\overline{\boldsymbol{X_1}} - \boldsymbol{b_2}\overline{\boldsymbol{X_2}} = \mathbf{50 + 1,5651(12) - 4,073(5) = 48,4162}$$

Model Regresi Linear Berganda:

$$\hat{Y} = 48{,}4162 - 1{,}5651X_1 + 4{,}073X_2$$

Interpretasi:

Nilai awal sale revenue adalah sebesar 48,4162. Ketika biaya iklan meningkat maka nilai sale revenue akan menurun sebesar 1,5651 dan Ketika biaya quality control diperbesar maka nilai Sale revenue akan meningkat sebesar 4,073.

Koefisien Determinasi: $\boldsymbol{r^2 = \frac{b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y}{\sum y^2} = \frac{-1{,}5651\,(6) + 4{,}073(110)}{440} = \frac{438{,}64}{440} = 0{,}9969}$

Artinya variable X_1 dan X_2 memberikan pengaruh yang sangat kuat terhadap Y yaitu sebesar 99,69% sedangkan sisanya sebesar 0,31% dipengaruhi oleh variable yang lain.

Koefisien Korelasi $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0{,}9969} = 0{,}9984$ artinya hubungan antara variable X_1, X_2 dan Y sangat kuat.

Uji Signifikansi Parsial untuk $\boldsymbol{b_1}$

- **Hipotesis**

  $H_0 : \beta = 0$ (tidak ada hubungan yang signifikan)

  $H_1 : \beta \neq 0$ (ada hubungan yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0{,}05$
- **Uji Statistik**:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-2}} \Longrightarrow S_Y^2 = \frac{n\sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2}{n(n-2)} = \frac{10(440) - 500^2}{10 \cdot 8} = 23{,}75$$

Sehingga $S_Y = \sqrt{23{,}75} = 4{,}873$

$$S_{b_1} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{4,873}{\sqrt{30}} = 0,8897$$

Dengan demikian, didapat

$$t = \frac{b_1}{S_{b_1}} = -\frac{1,5651}{0,8897} = -1,7591$$

Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$

H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = n - 2 = 8$. Karena $|-1,7591| = 1,7591 < 2,306$ maka H_0 tidak ditolak.

Kesimpulan

Jadi, b_1 tidak memberikan pengaruh yang cukup signifikan.

Uji Signifikansi Parsial untuk $\boldsymbol{b_2}$

- **Hipotesis**

$H_0 : \beta = 0$ (tidak ada hubungan yang signifikan)

$H_1 : \beta \neq 0$ (ada hubungan yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0{,}05$

- **Uji Statistik**:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-2}} \Longrightarrow S_Y^2 = \frac{n\sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2}{n(n-2)} = \frac{10(440) - 500^2}{10 \cdot 8} = 23{,}75$$

Sehingga $S_Y = \sqrt{23{,}75} = 4{,}873$

$$S_{b_2} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_2^2}} = \frac{4,873}{\sqrt{32}} = 0,861$$

Dengan demikian, didapat

$$t = \frac{b_2}{S_{b_2}} = \frac{4,073}{0,861} = 4,7305$$

Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$

H_0 ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = n - 2 = 8$. Karena $|4,7305| = 4,7305 > 2,306$ maka H_0 ditolak.

Kesimpulan

Jadi, b_2 memberikan pengaruh yang cukup signifikan.

Uji Signifikansi Simultan Hasil Penaksiran

- **Hipotesis**

  H_0 : Tidak Ada perbedaan yang signifikan

  H_1: Ada Perbedaan Yang Signifikan

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0{,}05$

- Uji Statistik

Sumber Variabilitas	Derajat Kebebasan (df)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rata-Rata Hitung	Nilai F_{hitung}
Regresi	$k=2$	$r^2\left(\sum y^2\right)$ $= \mathbf{0,9969(440)}$ $= \mathbf{438,636}$	$JKR = \frac{r^2(\sum y^2)}{k}$ $= \frac{438,636}{2} = 219,318$	$F_{Hitung} = \frac{JKR}{JKG}$ $= \frac{219,318}{0,195}$ $= 1124,7077$
Residu/Eror	$n-k-1$ $= 10-2-1$ $= 7$	$(1-r^2)\left(\sum y^2\right)$ $= (1-0,9969)(440)$ $= 1,364$	$JKG = \frac{(1-r^2)(\sum y^2)}{n-k-1}$ $= \frac{1,364}{7} = 0,195$	
Total	$n-1=9$	$\sum y^2 = 440$		

- **Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$**

H_0 ditolak jika $\left|F_{hitung}\right| \geq F_{\alpha\,;df1;df_2}$ dengan $df_1 = k = 2$ dan $df_2 = n - k - 1 = 7$. Karena $F_{hitung} = 1124{,}7077 > 4{,}74$ maka H_0 ditolak.

- **Kesimpulan**

Jadi, Hasil penaksiran sales revenue ada perbedaan yang cukup signifikan dengn hasil sesungguhnya.

Hasil Prediksi dengan $\mathrm{X}_1 = 20$ dan $X_2 = 12$ adalah

$$\hat{Y} = 48{,}4162 - 1{,}5651(20) + 4{,}073(12) = 65{,}9902$$

Jadi, diprediksikan hasil sales revenue saat biaya iklan 20 juta dan biaya quality control 12 juta adalah sebesar 65,9902.

Regresi Linear Berganda Untuk 3 Prediktor

Model:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 \qquad \cdots *$$

Dengan menggunakan metode skor deviasi yaitu

$y = \hat{Y} - \bar{Y}, x_1 = X_1 - \overline{X_1}, x_2 = X_2 - \overline{X_2}$ dan $x_3 = X_3 - \overline{X_3}$

maka persamaan * dapat disederhanakan menjadi

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \qquad \cdots **$$

Untuk memperoleh nilai koefisien regresi dapat dilakukan dengan menyelesaikan SPL berikut:

$$\begin{cases} \sum x_1 y = b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + b_3 \sum x_1 x_3 \\ \sum x_2 y = b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 + b_3 \sum x_2 x_3 \\ \sum x_3 y = b_1 \sum x_1 x_3 + b_2 \sum x_2 x_3 + b_3 \sum x_3^2 \end{cases}$$

Dengan

$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{N}$	$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{\sum X_1 \sum X_2}{N}$	$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{\sum X_2 \sum Y}{N}$
$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{N}$	$\sum x_1 x_3 = \sum X_1 X_3 - \frac{\sum X_1 \sum X_3}{N}$	$\sum x_3 y = \sum X_3 Y - \frac{\sum X_3 \sum Y}{N}$
$\sum x_3^2 = \sum X_3^2 - \frac{(\sum X_3)^2}{N}$	$\sum x_2 x_3 = \sum X_2 X_3 - \frac{\sum X_2 \sum X_3}{N}$	
$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}$	$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{\sum X_1 \sum Y}{N}$	

Korelasi & Koefisien Determinasi Regresi Linear Berganda

Koefisien Determinasi untuk Regresi Linear Berganda 3 Variabel Bebas yaitu

$$\boldsymbol{r^2 = \frac{b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y + b_3 \sum x_3 y}{\sum y^2}}$$

Korelasi dari Regresi Linear Berganda:

$$\boldsymbol{r = \sqrt{r^2}}$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_3 y = \sum X_3 Y - \frac{(\sum 3)(\sum Y)}{n}$$

Uji Signifikansi Parsial untuk $\boldsymbol{b_i}$

- **Hipotesis**

  $H_0 : \beta = 0$ (tidak ada pengaruh yang signifikan)

  $H_1 : \beta \neq 0$ (ada pengaruh yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : α
- **Uji Statistik**:

$$t = \frac{b_i}{S_{b_i}}$$

Jika koefisien korelasi tidak diketahui

Dengan b_i adalah koefisien regresi dan S_{b_i} adalah standar eror dari koefisien regresi

Atau

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

Jika koefisien korelasi sudah diketahui

Dengan

$$S_{b_i} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x^2}}$$

Dan S_y adalah simpangan baku dari penduga nilai y yang dirumuskan dengan

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n-2}}$$

- **Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$**

H_0 ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = n - 2$

- **Kesimpulan**

Uji Signifikansi Simultan Hasil Penaksiran

- **Hipotesis**

  H_0 : Tidak Ada perbedaan yang signifikan

  H_1: Ada Perbedaan Yang Signifikan

- **Tingkat Signifikansi** : α

- Uji Statistik

Sumber Variabilitas	Derajat Kebebasan (df)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rata-Rata Hitung	Nilai F_{hitung}
Regresi	k	$r^2\left(\sum y^2\right)$	$JKR = \dfrac{r^2(\sum y^2)}{k}$	$F_{Hitung} = \dfrac{JKR}{JKG}$
Residu/Eror	$n-k-1$	$(1-r^2)\left(\sum y^2\right)$	$JKG = \dfrac{(1-r^2)(\sum y^2)}{n-k-1}$	
Total	$n-1$	$\sum y^2$		

$$\boxed{\boldsymbol{r^2 = \frac{b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}}}$$

$$\boxed{\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}$$

k : banyaknya variable predictor/bebas
n : banyak data

- **Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$**

H_0 ditolak jika $\left|F_{hitung}\right| \geq F_{\alpha\,;df1;df_2}$ dengan $df_1 = k$ dan $df_2 = n - k - 1$

- **Kesimpulan**

Contoh

Seorang peneliti ingin mengkaji hubungan antara skor tes masuk perguruan tinggi dengan IPK mahasiswa setelah kuliah selama 1 tahun. Tes masuk tersebut meliputi tes TPA, Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris. Hasil yang diperoleh peneliti disajikan dalam Tabel.

Mahasiswa	TPA (X1)	B. Indo (X2)	B. Inggris (X3)	IPK (Y)
1	98	44	40	3.25
2	95	46	35	3.4
3	95	44	33	3.35
4	91	40	35	3.05
5	90	40	35	3
6	85	42	33	3.15
7	85	40	33	3.1
8	80	36	30	2.85
9	76	38	30	2.95
10	76	35	30	2.85
11	75	35	28	2.75
12	70	32	28	2.65

Tentukan:

a. Bentuklah Model Regresi Linear Berganda
b. Interpretasikan model yang diperoleh
c. Koefisien determinasi dan korelasi berganda
d. Uji Parsial untuk mengukur seberapa signifikan pengaruh dari koefisien regresinya
e. Uji Simultan dari hasil penaksiran regresi
f. Prediksi IPK mahasiswa selama 1 tahun apabila skor TPAnya 100, Bahasa Indonesia 40 dan Bahasa Inggris 37

Penyelesaian

Mahasiswa	TPA (X1)	B. Indo (X2)	B. Inggris (X3)	IPK (Y)	X1^2	X2^2	X3^2	Y^2	X1X2	X1X3	X2X3	X1Y	X2Y	X3Y
1	98	44	40	3.25	9604	1936	1600	10.5625	4312	3920	1760	318.5	143	130
2	95	46	35	3.4	9025	2116	1225	11.56	4370	3325	1610	323	156.4	119
3	95	44	33	3.35	9025	1936	1089	11.2225	4180	3135	1452	318.25	147.4	110.55
4	91	40	35	3.05	8281	1600	1225	9.3025	3640	3185	1400	277.55	122	106.75
5	90	40	35	3	8100	1600	1225	9	3600	3150	1400	270	120	105
6	85	42	33	3.15	7225	1764	1089	9.9225	3570	2805	1386	267.75	132.3	103.95
7	85	40	33	3.1	7225	1600	1089	9.61	3400	2805	1320	263.5	124	102.3
8	80	36	30	2.85	6400	1296	900	8.1225	2880	2400	1080	228	102.6	85.5
9	76	38	30	2.95	5776	1444	900	8.7025	2888	2280	1140	224.2	112.1	88.5
10	76	35	30	2.85	5776	1225	900	8.1225	2660	2280	1050	216.6	99.75	85.5
11	75	35	28	2.75	5625	1225	784	7.5625	2625	2100	980	206.25	96.25	77
12	70	32	28	2.65	4900	1024	784	7.0225	2240	1960	896	185.5	84.8	74.2
Jumlah	**1016**	**472**	**390**	**36.35**	**86962**	**18766**	**12810**	**110.7125**	**40365**	**33345**	**15474**	**3099.1**	**1440.6**	**1188.25**
Mean	**84.66667**	**39.33333**	**32.5**	**3.029167**										

Model Regresi

Sigm x1^2	940.6667		Sigm x1x2	402.3333		Sigm x1y	21.46667
Sigm x2^2	200.6667		Sigm x1x3	325		Sigm x2y	10.83333
Sigm x3^2	135		Sigm x2x3	134		Sigm x3y	6.875
Sigm y^2	0.602292						

$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{N} = 940{,}67$	$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{\sum X_1 \sum X_2}{N} = 402{,}33$	$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{\sum X_2 \sum Y}{N} = 10{,}83$
$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{N} = 200{,}67$	$\sum x_1 x_3 = \sum X_1 X_3 - \frac{\sum X_1 \sum X_3}{N} = 325$	$\sum x_3 y = \sum X_3 Y - \frac{\sum X_3 \sum Y}{N} 6{,}875$
$\sum x_3^2 = \sum X_3^2 - \frac{(\sum X_3)^2}{N} = 135$	$\sum x_2 x_3 = \sum X_2 X_3 - \frac{\sum X_2 \sum X_3}{N} = 134$	
$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N} = 0{,}602$	$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{\sum X_1 \sum Y}{N} = 21{,}47$	

- Untuk memperoleh nilai b_1, b_2, b_3 maka perlu menyelesaikan SPL berikut

$$\begin{cases} \sum x_1 y = b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + b_3 \sum x_1 x_3 \\ \sum x_2 y = b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 + b_3 \sum x_2 x_3 \\ \sum x_3 y = b_1 \sum x_1 x_3 + b_2 \sum x_2 x_3 + b_3 \sum x_3^2 \end{cases}$$

Ekuivalen dengan

$$940{,}67 b_1 + 402{,}33 b_2 + 325 b_3 = 21{,}47$$

$$402{,}33 b_1 + 200{,}67 b_2 + 134 b_3 = 10{,}83$$

$$325 b_1 + 134 b_2 + 135 b_3 = 6{,}875$$

- Menggunakan Aturan Cramer diperoleh

$$\det A = \begin{vmatrix} 940{,}67 & 402{,}33 & 325 \\ 402{,}33 & 200{,}67 & 134 \\ 325 & 134 & 135 \end{vmatrix} = 587304{,}4$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 21{,}47 & 402{,}33 & 325 \\ 10{,}83 & 200{,}67 & 134 \\ 6{,}875 & 134 & 135 \end{vmatrix} = 1811{,}046$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 940{,}67 & 21{,}47 & 325 \\ 402{,}33 & 10{,}83 & 134 \\ 325 & 6{,}875 & 135 \end{vmatrix} = 32636{,}79$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 940{,}67 & 402{,}3 & 21{,}47 \\ 402{,}33 & 200{,}67 & 10{,}83 \\ 325 & 134 & 6{,}875 \end{vmatrix} = -6845{,}94$$

Dengan demikian diperoleh

$$b_1 = \frac{\det B}{\det A} = \frac{1811{,}046}{587304{,}4} = 0{,}0031$$

$$b_2 = \frac{\det C}{\det A} = \frac{32636{,}79}{587304{,}4} = 0{,}0556$$

$$b_3 = \frac{\det D}{\det A} = -\frac{6845{,}94}{587304{,}4} = -0{,}0117$$

Dengan demikian, sesuai dengan persamaan ** diperoleh

$$y = 0{,}0031x_1 + 0{,}0556x_2 - 0{,}0117x_3$$

Karena $y = \hat{Y} - \bar{Y}$, $x_1 = X_1 - \overline{X_1}$, $x_2 = X_2 - \overline{X_2}$ dan $x_3 = X_3 - \overline{X_3}$ sehingga diperoleh

$y = 0{,}0031x_1 + 0{,}0556x_2 - 0{,}0117x_3$

$\hat{Y} - \bar{Y} = 0{,}0031(X_1 - \overline{X_1}) + 0{,}0556(X_2 - \overline{X_2}) - 0{,}0117(X_3 - \overline{X_3})$

$\hat{Y} - 3{,}029 = 0{,}0031(X_1 - 84{,}67) + 0{,}0556(X_2 - 39{,}33) - 0{,}0117(X_3 - 32{,}5)$

$\hat{Y} = 0{,}0031X_1 + 0{,}0556X_2 - 0{,}0117X_3 + (3{,}029 - (0{,}0031)(84{,}67) - (0{,}0556)(39{,}33) + (0{,}0117)(32{,}5))$

$\hat{Y} = 0{,}0031X_1 + 0{,}0556X_2 - 0{,}0117X_3 + 0{,}96$

Model Regresi: $\hat{Y} = 0{,}0031X_1 + 0{,}0556X_2 - 0{,}0117X_3 + 0{,}96$ (Coba Interpretasikan!!)

Koefisien Determinasi & Korelasi Berganda

- Korelasi Berganda

$$R_{y123} = \sqrt{\frac{b1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y + b_3 \sum x_3 y}{\sum y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}0031(21{,}47) + 0{,}0556(10{,}83) - 0{,}0117(6{,}875)}{0{,}6023}} = 0{,}9883$$

- Koefisien Determinasi

$$R^2_{y123} = (0{,}9883)^2 = 0{,}9767$$

Uji Signifikansi Parsial untuk b_1

- **Hipotesis**

  $H_0 : \beta = 0$ (tidak ada hubungan yang signifikan)

  $H_1 : \beta \neq 0$ (ada hubungan yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0{,}05$

- **Uji Statistik**:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-2}} \Longrightarrow S_Y^2 = \frac{n\sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2}{n(n-2)} = \frac{12(110{,}7125) - (3{,}029)^2}{12 \cdot 10} = 10{,}99$$

Sehingga $S_Y = \sqrt{10{,}99} = 3{,}315$

$$S_{b_1} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{3,315}{\sqrt{940,67}} = 0,1081$$

Dengan demikian, didapat

$$t = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{0,0031}{0,1081} = 0,0287$$

Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$

H_0 ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = 12 - 2 = 10$. Karena $|0,0287| = 0,0287 < 2,228$ maka H_0 tidak ditolak.

Kesimpulan

Jadi, b_1 tidak memberikan pengaruh yang cukup signifikan.

Uji Signifikansi Parsial untuk $\boldsymbol{b_2}$

- **Hipotesis**

$H_0 : \beta = 0$ (tidak ada hubungan yang signifikan)

$H_1 : \beta \neq 0$ (ada hubungan yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0{,}05$
- **Uji Statistik**:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-2}} \Longrightarrow S_Y^2 = \frac{n\sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2}{n(n-2)} = \frac{12(110{,}7125) - (3{,}029)^2}{12 \cdot 10} = 10{,}99$$

Sehingga $S_Y = \sqrt{10{,}99} = 3{,}315$

$$S_{b_2} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_2^2}} = \frac{3,315}{\sqrt{200,67}} = 0,234$$

Dengan demikian, didapat

$$t = \frac{b_2}{S_{b_2}} = \frac{0,0556}{0,234} = 0,2376$$

Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$

H_0 ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = 12 - 2 = 10$. Karena $|0,2376| = 0,2376 < 2,228$ maka H_0 tidak ditolak.

Kesimpulan

Jadi, b_2 tidak memberikan pengaruh yang cukup signifikan.

Uji Signifikansi Parsial untuk $\boldsymbol{b}_3$

- **Hipotesis**

  $H_0 : \beta = 0$ (tidak ada hubungan yang signifikan)

  $H_1 : \beta \neq 0$ (ada hubungan yang signifikan)

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0{,}05$

- **Uji Statistik**:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-2}} \Longrightarrow S_Y^2 = \frac{n\sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2}{n(n-2)} = \frac{12(110{,}7125) - (3{,}029)^2}{12 \cdot 10} = 10{,}99$$

Sehingga $S_Y = \sqrt{10{,}99} = 3{,}315$

$$S_{b_3} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_3^2}} = \frac{3,315}{\sqrt{135}} = 0,258$$

Dengan demikian, didapat

$$t = \frac{b_3}{S_{b_3}} = \frac{-0,0117}{0,258} = -0,0435$$

Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$

H_0 ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2};df}$ dengan $df = 12 - 2 = 10$. Karena $|-0,0435| = 0,0435 < 2,228$ maka H_0 tidak ditolak.

Kesimpulan

Jadi, b_3 tidak memberikan pengaruh yang cukup signifikan.

Uji Signifikansi Simultan Hasil Penaksiran

- **Hipotesis**

  H_0 : Tidak Ada perbedaan yang signifikan

  H_1: Ada Perbedaan Yang Signifikan

- **Tingkat Signifikansi** : $\alpha = 0,05$

- Uji Statistik

Sumber Variabilitas	Derajat Kebebasan (df)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rata-Rata Hitung	Nilai F_{hitung}
Regresi	$k = 3$	$r^2\left(\sum y^2\right)$ $= 0{,}9767(0{,}602)$ $= 0{,}588$	$JKR = \frac{r^2(\sum y^2)}{k}$ $= \frac{0{,}588}{3} = 0{,}196$	$F_{Hitung} = \frac{JKR}{JKG}$ $= \frac{0{,}196}{0{,}00175}$ $= 112$
Residu/Eror	$n - k - 1 = 8$	$(1 - r^2)\left(\sum y^2\right)$ $= (1 - 0{,}9767)(0{,}602)$ $= 0{,}014$	$JKG = \frac{(1 - r^2)(\sum y^2)}{n - k - 1}$ $= \frac{0{,}014}{8} = 0{,}00175$	
Total	$n - 1 = 11$	$\sum y^2 = 0{,}602$		

- **Kriteria penolakan $\boldsymbol{H_0}$**

H_0 ditolak jika $\left|F_{hitung}\right| \geq F_{\alpha\,;df1;df_2}$ dengan $df_1 = k = 3$ dan $df_2 = n - k - 1 = 8$ diperoleh bahwa $F_{hit} = 112 > 8{,}85 = F_{tabel}$. Akibatnya, H_0 ditolak.

- **Kesimpulan**

Jadi, ada perbedaan yang cukup signifikan dari setiap variable predictor

Prediksi

Prediksi IPK mahasiswa selama 1 tahun apabila skor TPAnya 100, Bahasa Indonesia 40 dan Bahasa Inggris 37

Model Regresi: $\hat{Y} = 0{,}0031(100) + 0{,}0556(40) - 0{,}0117(37) + 0{,}96 = 3{,}0611$

Jadi, IPK mahasiswa tersebut adalah 3,0611

Latihan

Data rata-rata lama belajar (jam/hari), sikap terhadap perkuliahan, sifat kemandirian dan IPK untuk 10 mahasiswa diberikan sbb:

No	Lama Belajar	Sikap	Kemandirian	IPK
1	2,45	85	75	3,22
2	2	82	80	3,08
3	2,3	76	92	2,96
4	3	96	95	3,12
5	2	78	90	3,16
6	2,3	94	90	3,46
7	1,5	84	80	3,02
8	1,45	75	80	2,88
9	2,45	90	84	3,33
10	2,15	80	86	3,42

Tentukan:

a. Bentuklah Model Regresi Linear Berganda
b. Interpretasikan model yang diperoleh
c. Koefisien determinasi dan korelasi berganda
d. Uji Parsial untuk mengukur seberapa signifikan pengaruh dari koefisien regresinya
e. Uji Simultan dari hasil penaksiran regresi
f. Prediksi IPK mahasiswa selama 1 tahun apabila lama belajar mahasiswa 1,25 jam sikapnya 90 dan kemandiriannya 77