ДУ кр

Никита Латушкин

27 марта 2022 г.

№1

$$y''' - y = x^2 \cos x + (x+2) \sin x$$

Решим однородное ДУ

$$y''' - y = 0$$

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, y_3 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Найдём частное решение с помощью метода неопределённых коэффициентов. Правая часть представляет собой квазиполином вида

$$f(x) = e^{ax}[R_{m_1}(x) \cos bx + R_{m_2}(x) \sin bx]$$

В нашем случае

$$a = 0, b = 1, R_{m_1}(x) = x^2, m_1 = 2, R_{m_2}(x) = x + 2, m_2 = 1$$

Частное решение будем искать в виде

$$y* = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$$

Найдём $(y*)'''$ по формуле Лейбница

$$(y*)''' = (Ax^2+Bx+C)'''\cos x+3(Ax^2+Bx+C)''(\cos x)'+3(Ax^2+Bx+C)'(\cos x)''+$$
$$+(Ax^2+Bx+C)(\cos x)'''+(Dx^2+Ex+F)'''\sin x+3(Dx^2+Ex+F)''(\sin x)'+$$
$$+3(Dx^2 + Ex + F)'(\sin x)'' + (Dx^2 + Ex + F)(\sin x)''' =$$
$$= -6A\sin x-3(2Ax+B)\cos x+(Ax^2+Bx+C)\sin x+6D\cos x-3(2Dx+E)\sin x-$$
$$-(Dx^2 + Ex + F)\cos x =$$
$$= (-6Ax-3B+6D-Dx^2-Ex-F)\cos x+(Ax^2+Bx+C-6A-6Dx-3E)\sin x =$$
$$= (-Dx^2+(-6A-E)x+(6D-3B-F))\cos x+(Ax^2+(B-6D)x+C-6A-3E)\sin x$$

Подставим всё в исходное уравнение

$$(-Dx^2+(-6A-E)x+(6D-3B-F))\cos x+(Ax^2+(B-6D)x+C-6A-3E)\sin x-$$
$$-(Ax^2 + Bx + C)\cos x - (Dx^2 + Ex + F)\sin x = x^2\cos x + (x + 2)\sin x$$
$$[-(D + A)x^2 + (-6A - E - B)x + (6D - 3B - F - C)]\cos x + [(A - D)x^2+$$
$$+(B - 6D - E) + (C - 6A - 3E - F)]\sin x = x^2\cos x + (x + 2)\sin x$$

Приравняем коэффициенты. Имеем систему

$$\begin{cases} -D - A = 1 \\ -6A - E - B = 0 \\ 6D - 3B - F - C = 0 \\ A - D = 0 \\ B - 6D - E = 1 \\ C - 6A - 3E - F = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \\ -3 - 3B - F - C = 0 \\ 3 - E - B = 0 \\ B + 3 - E = 1 \\ C + 3 - 3E - F = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \\ -3 - 3B - F - C = 0 \\ E + B = 3 \\ B - E = -2 \\ C + 3 - 3E - F = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \\ -3 - 3B - F - C = 0 \\ E = \frac{5}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C + 3 - 3E - F = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ F + C = -\frac{9}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = \frac{5}{2} \\ C - F = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = 1 \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = \frac{5}{2} \\ F = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Имеем

$$y* = (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1)\cos x + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{11}{2})\sin x$$

Полное семейство решений запишется в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1)\cos x + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{11}{2})\sin x$$

№2

$$(x+1)^3y''' - 3(x+1)y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0$$

$$x+1 = e^t, x+1 > 0$$

$$x = e^t - 1, \frac{dx}{dt} = e^t, 1/\frac{dx}{dt} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(y'_t \cdot e^{-t})e^{-t} = (y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = (y''_t - y'_t)e^{-2t}$$

$$y''' = \frac{d}{dt}[(y''_t - y'_t)e^{-2t}]e^{-t} = [(y'''_t - y''_t)e^{-2t} - 2(y''_t - y'_t)e^{-2t}]e^{-t} = (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)e^{-3t}$$

Подставим всё в исходное уравнение, имеем

$$y''' - 3y'' + 2y' - 3(y'' - y') + 4y' - 4y = 0$$

$$y''' - 3y'' + 2y' - 3y'' + 3y' + 4y' - 4y = 0$$

$$y''' - 6y'' + 9y - 4y = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$$

$$y_1 = e^t, y_2 = te^t, y_3 = e^{4t}$$

$$y = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{4t} = C_1(x+1) + C_2(x+1)\ln(x+1) + C_3(x+1)^4$$

№3

Восстановить линейное ДУ, имеющее решение

$$y_1(x) = x^2e^x$$

Наше решение имеет вид

$$y = x^me^{ax}$$

Это означает, что $\lambda = a$ является корнем характеристического уравнения, причём корнем кратности $(m+1)$.

В нашем случае

$$m = 2, a = 1$$

Значит $\lambda = 1$ является 3-кратным корнем характеристического уравнения, значит мы можем его записать (вообще, уравнений, которые имеют данное решение, бесконечно много, но мы запишем самое простое):

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

Соответственно, можем записать и ДУ:

$$y''' - 3y'' + y' - y = 0$$