

# Алгебра вариант 1

Никита Латушкин

20 декабря 2021 г.

## №1

Выясните, образует ли группу множество  $M=Z$ , операция – вычитание

- Замкнутость

$$(a - b) \in Z \quad \forall a, b \in Z$$

- Ассоциативность

$$(a - b) - c = a - (b - c) ?$$

$$a - b - c = a - b + c$$

Выполняется не всегда, значит не будет группой

## №2

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in Z \right\}$$

1) Докажите, что множество матриц  $M$  является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения матриц

- Замкнутость

$$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & -2(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \in M$$

- Ассоциативность

$$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e & -2(b+d+f) \\ b+d+f & a+c+e \end{pmatrix}$$

**Выполняется**

- Нейтральный элемент – нулевая матрица ( $x=y=0$ )

Для любой матрицы  $A \in M$   $A + O = O + A = A$

- Обратный элемент

Для любой матрицы  $A = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$

берём матрицу  $-A = \begin{pmatrix} -x & 2y \\ -y & -x \end{pmatrix}$

$$A + (-A) = 0$$

**M – абелева группа относительно сложения**

- Дистрибутивность

Действительно, для любых матриц  $A, B, C$  выполняется

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Значит для наших и подавно выполняется

**M – кольцо**

2) Укажите, является ли кольцо коммутативным и является ли полем

**Нет, так как  $A \cdot B \neq B \cdot A$**

Если наше кольцо не коммутативно, то оно не будет полем

3) M – кольцо с единицей, так как существует нейтральный элемент относительно умножения, а именно

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ (взяли } x=1, y=0)$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A, \forall A \in M$$

Обратимые элементы – те, для которых найдутся обратные, то есть для какой-то матрицы  $A$  найдется матрица  $B$  такая, что  $A \cdot B = B \cdot A = E$

Видно, что это будут все матрицы, для которых можно найти обратную, то есть все матрицы, у которых определитель равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{То есть } (x^2 + 2y^2) \neq 0$$

Равенство получается только при  $x=y=0$ , а значит

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{единственный необратимый элемент,}$$

значит обратимые элементы – все матрицы из  $M$ , кроме нулевой

4) Если кольцо с делителями нуля, укажите их

Делители нуля – такие ненулевые элементы  $A$  и  $B$ , что  $A \cdot B = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix}$$

То есть

$$\begin{cases} ac = 2bd \\ ad = -bc \end{cases}$$

все числа  $a, b, c, d$  не равны 0

$$\begin{cases} \frac{c}{d} = -2\frac{d}{c} \\ ad = -bc \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c^2}{d^2} = -2 \\ ad = -bc \end{cases}$$

Первое никогда не выполняется, значит решений системы нет, значит таких матриц нет, значит делителей нуля тоже нет

### №3

Найти все подгруппы циклической группы порядка 12

Подгрупп будет столько же, сколько и делителей у числа 12

Делители 12: 1,2,3,4,6,12 – их 6

Берём делитель  $d$  и возводим  $a$  в степень  $\frac{n}{d}$

Каждый полученный элемент порождает свою подгруппу

Подгруппы:  $\langle a \rangle, \langle a^2 \rangle, \langle a^3 \rangle, \langle a^4 \rangle, \langle a^6 \rangle, \langle a^{12} \rangle$

### №4

В группе  $G$  найти порядок элемента  $A$

1)  $G = S_4, a = (132)$

$$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Перемножили 2 раза, значит порядок элемента равен 2 ( $orda = 2$ )

2)  $G = C^*, a = \cos \frac{11\pi}{24} + i \sin \frac{11\pi}{24}$

Порядок – такое число  $n \in N$ , что  $a^n = 1$

$$a^n = \cos \frac{11\pi \cdot n}{24} + i \sin \frac{11\pi \cdot n}{24} = 1$$

$\frac{11\pi n}{24}$  делится на  $2\pi$

Минимальное натуральное  $n$ , при котором выполняется,  $n=48$

Значит  $orda = 48$

## №5

Найти смежные классы группы  $G$  по подгруппе  $H$ :

$$G = 3\mathbb{Z}, H = 18\mathbb{Z}$$

Чтобы построить смежный класс  $G$  по  $H$ , нужно взять какой-то элемент  $g \in G$  и построить множество  $gH = \{gh | h \in H\}$  и потом посмотреть, что будет

Возьмём элемент  $g=3$  из  $G$

$$3H = \{3h | h \in H\}$$

То есть все числа, кратные 18, умножаем на 3. Получаем множество всех чисел, кратных 54, то есть  $54\mathbb{Z}$

То же самое надо проделать с  $g=6, g=9, g=12, g=15$ .

Получим смежные классы  $108\mathbb{Z}, 162\mathbb{Z}, 216\mathbb{Z}, 270\mathbb{Z}$ .

## №6

Докажите, что факторгруппа группы  $G$  по подгруппе  $H$  изоморфна группе  $K$ .

$$G = R^+, H = Z^+, K = \{z \in C \mid |z| = 1\}$$

По основной теореме о гомоморфизме

$$G/\ker f \cong f(G)$$

Пусть  $f : R^+ \rightarrow C$

$$f : \phi \rightarrow \cos \phi + i \sin \phi$$

Найдём  $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = 1\}$ :

$$\cos \phi + i \sin \phi = 1$$

$$\phi = 2\pi k, k \in Z^+$$

$$\ker f = 2\pi k, k \in Z^+$$

Найдём  $\text{Im } G = f(G)$ :

Если мы возьмём и подействуем  $f$  на  $R^+$ , то мы и получим все комплексные числа, модуль которых равен 1, то есть  $\{z \in C \mid |z| = 1\}$ , то есть  $K$ .

Таким образом,  $G/\ker f \cong f(G)$