Алгебра вариант 1

Никита Латушкин

20 декабря 2021 г.

№1

Выясните, образует ли группу множество M=Z, операция – вычитание

- Замкнутость
  $(a-b) \in Z\ \forall a, b \in Z$

- Ассоциативность
  $(a-b)-c = a-(b-c)$?
  $a-b-c = a-b+c$
  Выполняется не всегда, значит не будет группой

№2

$$\text{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} | x, y \in Z \right\}$$

1) Докажите, что множество матриц M является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения матриц

- Замкнутость

$$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -2(c+d) \\ c+d & a+b \end{pmatrix} \in M$$

- Ассоциативность

$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix}] + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e & -2(b+d+f) \\ b+d+f & a+c+e \end{pmatrix}$

Выполняется

• Нейтральный элемент – нулевая матрица (x=y=0)
Для любой матрицы $A \in M$ $A + O = O + A = M$
• Обратный элемент
Для любой матрицы A = $\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$
берём матрицу -A= $\begin{pmatrix} -x & 2y \\ -y & -x \end{pmatrix}$
A+(-A)=0

M – абелева группа относительно сложения

• Дистрибутивность
Действительно, для любых матриц A,B,C выполняется
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
Значит для наших и подавно выполняется
M – кольцо

2) Укажите, является ли кольцо коммутативным и является ли полем
Нет, так как $A \cdot B \neq B \cdot A$
Если наше кольцо не коммутативно, то оно не будет полем

3) M – кольцо с единицей, так как существует нейтральный элемент относительно умножения, а именно
E= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (взяли x=1, y=0)

$A \cdot E = E \cdot A = A, \forall A \in M$

Обратимые элементы – те, для которых найдутся обратные, то есть для какой-то матрицы A найдется матрица B такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E$

Видно, что это будут все матрицы, для которых можно найти обратную, то есть все матрицы, у которых определитель равен нулю, то есть $\begin{vmatrix} x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} \neq 0$

То есть $(x^2 + 2y^2) \neq 0$

Равенство получается только при x=y=0, а значит
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – единственный необратимый элемент,

значит обратимые элементы – все матрицы из M, кроме нулевой

4) Если кольцо с делителями нуля, укажите их
Делители нуля – такие ненулевые элементы A и B, что $A \cdot B = 0$
A= $\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$
B = $\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix}$

То есть

$$\begin{cases} ac = 2bd \\ ad = -bc \end{cases}$$

все числа a,b,c,d не равны 0

$$\begin{cases} \frac{c}{d} = -2\frac{d}{c} \\ ad = -bc \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c^2}{d^2} = -2 \\ ad = -bc \end{cases}$$

Первое никогда не выполняется, значит решений системы нет, значит таких матриц нет, значит делителей нуля тоже нет

№3

Найти все подгруппы циклической группы порядка 12

Подгрупп будет столько же, сколько и делителей у числа 12
Делители 12: 1,2,3,4,6,12 – их 6
Берём делитель d и возводим a в степень $\frac{n}{d}$
Каждый полученный элемент порождает свою подгруппу
Подгруппы: $< a >, < a^2 >, < a^3 >, < a^4 >, < a^6 >, < a^{12} >$

№4

В группе G найти порядок элемента A
1) $G = S_4$, $a = (132)$

(123)$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Перемножили 2 раза, значит порядок элемента равен 2 ($orda = 2$)

2) $G = C^*$, $a = \cos\frac{11\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi}{24}$

Порядок – такое число $n \in N$, что $a^n = 1$
$a^n = \cos\frac{11\pi\cdot n}{24} + i\sin\frac{11\pi\cdot n}{24} = 1$
$\frac{11\pi n}{24}$ делится на 2π
Минимальное натуральное n, при котором выполняется, n=48
Значит $orda = 48$

№5

Найти смежные классы группы G по подгруппе H:

G = 3Z, H = 18Z

Чтобы построить смежный класс G по H, нужно взять какой-то элемент $g \in G$ и построить множество $gH = \{gh|h \in H\}$ и потом посмотреть, что будет

Возьмём элемент g=3 из G

$3H = \{3h|h \in H\}$

То есть все числа, кратные 18, умножаем на 3. Получаем множество всех чисел, кратных 54, то есть 54Z

То же самое надо проделать с g=6, g=9, g=12, g=15.

Получим смежные классы 108Z, 162Z, 216Z, 270Z.

№6

Докажите, что факторгруппа группы G по подгруппе H изоморфна группе K.

$G = R^{+}$, $H = Z^{+}$, $K = \{z \in C||z| = 1\}$

По основной теореме о гомоморфизме

$G/kerf \cong f(G)$

Пусть $f : R^{+} \to C$

$f : \phi \to \cos\phi + i\sin\phi$

Найдём $kerf = \{g \in G|f(g) = 1\}$:

$\cos\phi + i\sin\phi = 1$

$\phi = 2\pi k, k \in Z^{+}$

$kerf = 2\pi k, k \in Z^{+}$

Найдём Im G = f(G):

Если мы возьмём и подействуем f на R^{+}, то мы и получим все комплексные числа, модуль которых равен 1, то есть $\{z \in C||z| = 1\}$, то есть K.

Таким образом, $G/kerf \cong f(G)$