Алгебра вариант 2

Никита Латушкин

20 декабря 2021 г.

№1

Выясните, образует ли группу множество $M = Q^*$, операция – деление

- Замкнутость

$\frac{a}{b}, \in Q^* \; \forall a, b \in Q^*$

- Ассоциативность

$(a/b)/c = a(b/c)$?
$\frac{a}{bc} = \frac{ac}{b}$

Выполняется не всегда, значит не будет группой

№2

M $= \left\{ \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} | x, y \in Z \right\}$

1) Докажите, что множество матриц M является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения матриц

- Замкнутость

$$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -2(c+d) \\ c+d & a+b \end{pmatrix} \in M$$

- Ассоциативность

$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix}] + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -2c \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -2f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e & -2(b+d+f) \\ b+d+f & a+c+e \end{pmatrix}$

Выполняется

• Нейтральный элемент – нулевая матрица (x=y=0)
Для любой матрицы $A \in M$ $A + O = O + A = M$
• Обратный элемент
Для любой матрицы A = $\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$
берём матрицу -A= $\begin{pmatrix} -x & 2y \\ -y & -x \end{pmatrix}$
A+(-A)=0

M – абелева группа относительно сложения

• Дистрибутивность
Действительно, для любых матриц A,B,C выполняется
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
Значит для наших и подавно выполняется
M – кольцо

2) Укажите, является ли кольцо коммутативным и является ли полем
Нет, так как $A \cdot B \neq B \cdot A$
Если наше кольцо не коммутативно, то оно не будет полем

3) M – кольцо с единицей, так как существует нейтральный элемент относительно умножения, а именно
E= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (взяли x=1, y=0)

$A \cdot E = E \cdot A = A, \forall A \in M$

Обратимые элементы – те, для которых найдутся обратные, то есть для какой-то матрицы А найдется матрица В такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E$

Видно, что это будут все матрицы, для которых можно найти обратную, то есть все матрицы, у которых определитель равен нулю, то есть

$\begin{vmatrix} x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} \neq 0$

То есть $(x^2 + 2y^2) \neq 0$

Равенство получается только при x=y=0, а значит

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – единственный необратимый элемент,

значит обратимые элементы – все матрицы из М, кроме нулевой

4) Если кольцо с делителями нуля, укажите их

Делители нуля – такие ненулевые элементы А и В, что $A \cdot B = 0$

A= $\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$

B = $\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix}$

То есть

$$\begin{cases} ac = 2bd \\ ad = -bc \end{cases}$$

все числа a,b,c,d не равны 0

$$\begin{cases} \frac{c}{d} = -2\frac{d}{c} \\ ad = -bc \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c^2}{d^2} = -2 \\ ad = -bc \end{cases}$$

Первое никогда не выполняется, значит решений системы нет, значит таких матриц нет, значит делителей нуля тоже нет

№3

Найти все подгруппы циклической группы порядка 15

Подгрупп будет столько же, сколько и делителей у числа 15
Делители 15: 1,3,5,15 – их 4
Берём делитель d и возводим a в степень $\frac{n}{d}$
Каждый полученный элемент порождает свою подгруппу
Подгруппы: $< a >, < a^3 >, < a^5 >, < a^{15} >$

№4

В группе G найти порядок элемента A
1) $G = S_4$, $a = (123)$

(123)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Перемножили 3 раза, значит порядок элемента равен 3 ($orda = 3$)

2) $G = C^*$, $a = \cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}$

Порядок – такое число $n \in N$, что $a^n = 1$
$a^n = \cos\frac{13\pi \cdot n}{24} + i\sin\frac{13\pi \cdot n}{24} = 1$
$\frac{13\pi n}{24}$ делится на 2π

Минимальное натуральное n, при котором выполняется, n=48

Значит $orda = 48$

№5

Найти смежные классы группы G по подгруппе H:

G = 4Z, H = 24Z

Чтобы построить смежный класс G по H, нужно взять какой-то элемент $g \in G$ и построить множество $gH = \{gh|h \in H\}$ и потом посмотреть, что будет

Возьмём элемент g=4 из G

$3H = \{4h|h \in H\}$

То есть все числа, кратные 24, умножаем на 4. Получаем множество всех чисел, кратных 96, то есть 96Z

То же самое надо проделать с g=8, g=12, g=16, g=20.

Получим смежные классы 192Z, 288Z, 384Z, 480Z.

№6

Докажите, что факторгруппа группы G по подгруппе H изоморфна группе K.

$G = (C^*, +)$, $H =< i >$, $K = R^*$

$H =< i >= \{ti | t \in Z\}$

По основной теореме о гомоморфизме

$G/ker f \cong f(G)$

Пусть $f : C^* \to R^*$

$f : z \to Imz$

Найдём $ker f = \{g \in G | f(g) = 1\}$**:**

$ker f = \{z = a + i | a \in R^*\}$

Найдём Im G = f(G):

Если мы возьмём и подействуем f на C^*, то мы и получим R^*.

Таким образом, $G/ker f \cong f(G)$