А. Б. Антоневич
Я. В. Радыно

Функциональный анализ и интегральные уравнения

Учебник

АНТОНЕВИЧ
Анатолий Борисович

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета. Родился в 1942 году. Окончил БГУ. Опубликовал более 200 научных работ по функциональному анализу и его приложениям: теории операторов, функционально-дифференциальным операторам, банаховым алгебрам динамическим системам теории обобщенных функций. Автор 11 книг – монографий, учебников и учебных пособий.
Лауреат премии им. А. Н. Севченко.

РАДЫНО
Яков Валентинович

Член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор. С 1975 года заведующий кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета. Родился в 1946 году. Окончил БГУ. Проходил научную стажировку в Лозаннском и Женевском университетах, опубликовал 130 научных работ по функциональному анализу и его приложениям к дифференциальным уравнениям, математической физике и теории обобщенных функций. Автор 8 книг – монографий, учебников и учебных пособий.
Лауреат премии Ленинского комсомола Белоруссии и Государственной премии Республики Беларусь в области науки и техники.

ISBN 985-445-835-0
9789854458359

А. Б. Антоневич
Я. В. Радыно

Функциональный анализ и интегральные уравнения

Издание второе, переработанное и дополненное

*Утверждено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов
математических специальностей
высших учебных заведений*

МИНСК
БГУ
2006

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.16я73
А72

Рецензенты:
академик НАН Беларуси, профессор *И. В. Гайшун*;
кафедра математического анализа Белорусского государственного педагогического университета им. М. Танка (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *В. Н. Русак*)

Антоневич, А. Б.
А72 Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2006. — 430 с.
ISBN 985-485-835-0.

Учебник по курсу «Функциональный анализ и интегральные уравнения» написан в соответствии с программой для математических специальностей университетов. Содержит основные понятия и теоремы теории меры и интеграла Лебега, метрических пространств, нормированных пространств и линейных операторов в них, топологических векторных пространств и теории обобщенных функций.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.16я73

ISBN 985-485-835-0 (2-й з-д)

Посвящается
тридцатилетию кафедры
функционального анализа БГУ

ОТ АВТОРОВ

Функциональный анализ изучает множества, снабженные согласованными между собой алгебраическими и топологическими структурами, и их отображения, а также методы, с помощью которых сведения об этих структурах применяются к конкретным задачам. Как самостоятельная математическая дисциплина функциональный анализ оформился в начале XX века в результате переосмысления и обобщения ряда понятий математического анализа, алгебры и геометрии. Основополагающая монография Стефана Банаха "Теория линейных операций" была опубликована в 1932 году. За последующие десятилетия функциональный анализ глубоко проник почти во все области математики.

Основой для широких приложений функционального анализа является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов типа функций, мер или уравнений, а, скорее, обширных классов таких объектов, причем на этих классах обычно существует естественная структура векторного пространства и естественная топология. Среди областей применения функционального анализа можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других научных направлений.

Естественно, что функциональный анализ стал одной из базовых дисциплин в университетском математическом образовании, опубликовано много учебных пособий и монографий разного уровня сложности. Особенностью данной книги, предназначенной для студентов математических специальностей университетов, является то, что при ее написании ставилась цель отобрать минимум материала, который отражает основные идеи и методы функционального анализа, и вместе с тем может быть достаточно подробно изложен за время, отведенное учебным планом на курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения".

В книге изложены основы теории меры и интеграла Лебега, метрических и нормированных пространств и операторов в них, основные принципы линейного функционального анализа, основы теории обобщенных функций и топологических векторных пространств. Интегральные уравнения рассматриваются в качестве одного из основных объектов приложений. Соответствующие результаты не выделены в отдельную главу, а распределены по книге и носят характер иллюстраций и следствий общих утверждений, что позволяет демонстрировать плодотворность методов функционального анализа.

Приложение содержит основные факты из общей топологии, которые нужны для более глубокого понимания ряда вопросов и используются в основном в главе IX.

В основу книги положен курс лекций, который в течение ряда лет читается авторами на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета. Содержание основного курса изложено в главах I — VII, материал глав VIII и IX обычно излагается в спецкурсах.

Первое издание книги вышло в 1984 году. В рецензировании первого издания участвовали член-корреспондент РАН Л. Д. Кудрявцев, профессора Б. И. Голубов и В. М. Говоров, чьи критические замечания и полезные советы способствовали существенному улучшению содержания книги.

При подготовке второго издания были переработаны и расширены некоторые разделы, устранены обнаруженные опечатки и неточности. Мы благодарны рецензентам второго издания – академику НАН Беларуси И. В. Гайшуну, член-корреспонденту НАН Беларуси В. И. Корзюку, профессорам П. П. Забрейко и В. Н. Русаку за ценные замечания.

Мы выражем благодарность доцентам кафедры функционального анализа БГУ М. Х. Мазель и Л. Г. Третьяковой, участвовавшим в подготовке и редактировании текста, а также Г. И. Радыно и Е. М. Радыно за техническую помощь при подготовке рукописи.

В книге принята сплошная нумерация параграфов, ссылки внутри параграфа даются без указания его номера. Знаком $\rhd$ обозначается начало доказательства, а знаком $\lhd$ — его окончание. Знак $:=$ читается “положим по определению” или “обозначим”.

ГЛАВА I
ТЕОРИЯ МЕРЫ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Новые математическое объекты и понятия вводятся всегда с помощью других, более общих объектов, и определяются как такие более общие объекты, удовлетворяющие некоторым условиям. Более общие объекты, в свою очередь, были введены с помощью еще более общих и т. д. Такая цепочка понятий должна где-то оканчиваться — какие-то объекты должны быть приняты за базовые, которые не вводятся с помощью более общих понятий. Таким базовым понятием в современной математике обычно считается понятие *множества.* Множество можно понимать как совокупность, набор, собрание некоторых объектов произвольной природы, которые называют элементами данного множества. Множество X считается заданным, если известны его элементы, т. е. для любого объекта a выполнено: либо a является элементом X (записывается $a \in X$) либо a не является элементом X (записывается $a \notin X$).

Напомним основные понятия теории множеств.

Если A и B — множества, то множество A называется *подмножеством множества* B (обозначается $A \subset B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Множество всех подмножеств множества X обозначается $\mathbf{P}(X)$. Множество, состоящее из одной точки x, обозначается $\{x\}$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Для любого множества X выполнено $\emptyset \subset X$.

Если для элементов множества X задано некоторое свойство $P(x)$, то подмножество множества X, состоящее из всех элементов $x \in X$, для которых свойство $P(x)$ выполнено, записывают следующим образом: $\{x|\ x \in X, P(x)\}$ или $\{x \in X : P(x)\}$.

Заметим, что свойство $P(x)$ задает подмножество в X только в том случае, когда это свойство сформулировано так, что для каждого элемента x существует определенный ответ: выполнено это свойство для данного x или не выполнено. Известны примеры таких формулировок свойств элементов, для которых только достаточно внимательный анализ показывает, что они не удовлетворяют этому требованию.

П р и м е р (п а р а д о к с Р и ш а р а). Пусть $X = \mathbf{N}$ есть множество натуральных чисел. Некоторые натуральные числа могут быть заданы с помощью фраз на русском языке. Пусть M есть совокупность всех натуральных чисел, которые могут быть заданы с помощью фраз, содержащих не более 20 слов, каждое из которых записывается с помощью не более чем 20 букв. Так как всех возможных фраз указанных размеров конечное число, то совокупность M не может совпадать со всем множеством $\mathbf{N}$.

Пусть a есть наименьшее из натуральных чисел, которые не могут быть заданы фразой, содержащей менее 20 слов. Последняя фраза содержит менее 20 слов, каждое из которых записывается с помощью не более чем 20 букв, и эта фраза задает число a. Тем самым a является элементом M. Но, по смыслу этой фразы, число a не является элементом совокупности M. Таким образом, указанное свойство натурального числа не задает подмножество, т. е. это свойство нечетко задано.

Пусть A и B — множества; *пересечением* этих множеств называется множество $A \cap B = \{x |\ x \in A, x \in B\}$. Если $(A_n)_{n \geqslant 1}$ — последовательность множеств, то их пересечением называется множество

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x |\ x \in A_n, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Аналогично, если $(A_i)_{i \in I}$ — семейство множеств, занумерованных элементами некоторого множества I, то

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x |\ x \in A_i\ \forall i \in I\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x |\ x \in A \text{ или } x \in B\}$. Если $(A_i)_{i \in I}$ — семейство множеств, то объединением называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x |\ \exists i \in I, \text{ что } x \in A_i\}.$$

Если $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, то говорят, что семейство множеств A_i является *покрытием* множества X.

Знаком $\coprod$ будем обозначать в дальнейшем объединение непересекающихся множеств (*дизъюнктное объединение*). Таким образом,

$A = A_1 \coprod A_2$ означает, что $A = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $\coprod\limits_i A_i = A$ означает, что $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Если $\coprod\limits_i A_i = A$, то говорят, что семейство множеств A_i задает *разбиение* множества A.

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B := = \{x | \ x \in A, x \notin B\}$. Если $A \subset B$, то $A \setminus B = \emptyset$, т.е. разность несет мало информации о взаимном расположении множеств. Более точно его учитывает *симметрическая разность*:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B).$$

Для наиболее часто встречающихся множеств будем использовать стандартные обозначения: $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел; $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел; $\mathbf{R}_+$ — множество положительных действительных чисел; $\mathbf{R}^n$ — действительное n-мерное пространство; $\mathbf{C}^n$ — комплексное n-мерное пространство; $\mathbf{P}(X)$ — множество всех подмножеств X.

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество упорядоченых пар элементов

$$X \times Y = \{(x, y) | \ x \in X, y \in Y\}.$$

Если (X_i), $i \in I$, — семейство множеств, занумерованных элементами некоторого множества I, то их *произведением* называется множество $\prod\limits_{i \in I} X_i$, состоящее из семейств элементов, занумерованных элементами множества I (функций на I), таких, что $f(i) \in X_i$.

Утверждение о том, что произведение $\prod\limits_{i \in I} X_i$ непустых множеств всегда не является пустым, принимается в теории множеств как следующая аксиома.

Аксиома выбора. *Для всякого семейства непустых множеств X_i, $i \in I$, существует функция f на множестве I такая, что значение $f(i)$ принадлежит X_i для любого $i \in I$.*

Другими словами можно сказать, что аксиома выбора утверждает существование множества, содержащего ровно по одному элементу из каждого множества X_i. В теории множеств доказывается, что это утверждение не может быть получено из других, более очевидных свойств. Поэтому утверждения о существовании некоторых объектов, доказательства которых основаны на аксиоме выбора, не являются конструктивными – они не указывают способа явного построения искомого объекта.

Определение 1. *Отношением между множествами* X и Y называется любое подмножество R из декартова произведения $X \times Y$. Если $X = Y$, то отношение R называется (*бинарным*) *отношением на множестве* X.

Примеры отношений на множестве $\mathbf{R}$:

1. $x \leqslant y$, т. е. $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \leqslant y\}$;
2. $y = \sin x$, т. е. $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = \sin x\}$;
3. $x - y \in \mathbf{Z}$, т. е. $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x - y \in \mathbf{Z}\}$.

Определение 2. Отношение R на множестве X называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in R$ для $\forall x \in X$; *симметричным*, если из $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$; *транзитивным*, если из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$. Отношение R называется *антисимметричным*, если из $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x = y$.

Наиболее часто используются следующие виды отношений.

1. *Отношение эквивалентности*

Отношение $R \subset X \times X$ называется *отношением эквивалентности* на множестве X, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обычно условие $(x, y) \in R$ в случае отношения эквивалентности записывается в виде $x \sim y$ или $x \overset{R}{\sim} y$.

Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то множество X разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов. Класс эквивалентности, содержащий элемент x, обозначаем $[x]$.

Пример. В качестве X возьмем множество целых чисел $\mathbf{Z}$. Введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$. Множество $\mathbf{Z}$ распадается на три класса

$$\begin{aligned} [0] &= \{\ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\ \}\ ; \\ [1] &= \{\ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\ \}\ ; \\ [2] &= \{\ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, \dots\ \}. \end{aligned}$$

2. *Отношение порядка*

Отношение R на множестве X называется *отношением порядка*, если оно транзитивно, рефлексивно и антисимметрично. Обычно условие $(x, y) \in R$ в случае отношения порядка записывают в виде $x \prec y$ и читают “x предшествует y” или “y следует за x”.

Непустое множество X с заданным на нем отношением порядка, т. е. пара $(X, \prec)$, называется *упорядоченным множеством.*

Пример 1. В качестве X возьмем множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Отношение R: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \leqslant y$ обладает следующими свойствами:

$$x \leqslant y, \quad y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z \quad \text{(транзитивность);}$$
$$x \leqslant x \quad \text{(рефлексивность);}$$
$$x \leqslant y, \quad y \leqslant x \Rightarrow x = y \quad \text{(антисимметричность).}$$

Таким образом, транзитивность, рефлексивность и антисимметричность — стандартные свойства числовых неравенств и отношение $x \leqslant y$ есть отношение порядка.

Пример 2. Пусть X — произвольное множество. На множестве $\mathbf{P}(X)$ зададим отношение R: $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subset B$. Очевидным образом проверяются следующие соотношения:

$$A \subset B, \ B \subset C \Rightarrow A \subset C;$$
$$A \subset A;$$
$$A \subset B, \ B \subset A \Rightarrow A = B.$$

Значит, отношение $A \subset B$ задает на множестве $\mathbf{P}(X)$ отношение порядка и говорят, что множество $\mathbf{P}(X)$ упорядочено по включению.

Пусть $(X, \prec)$ — упорядоченное множество. Подмножество $A \subset X$ называется *линейно упорядоченным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из A выполнено либо $x_1 \prec x_2$, либо $x_2 \prec x_1$.

Элемент $M \in X$ $(m \in X)$ называется *наибольшим (наименьшим)*, если $x \prec M$ $(m \prec x)$ для любого $x \in X$.

Элемент $a \in X$ называется *максимальным* (*минимальным*), если из того, что $a \prec x$ $(x \prec a)$, следует, что $x = a$.

Очевидно, что наибольший элемент, если он существует, единственный и является максимальным. Однако часто бывает, что наибольший элемент в упорядоченном множестве не существует, а максимальные элементы существуют и их может быть много.

Упражнение 1. Пусть элементами упорядоченного множества X являются замкнутые круги на плоскости, принадлежащие фиксированному замкнутому квадрату, а отношение порядка задается отношением включения. Показать, что в этом упорядоченном множестве нет наибольшего элемента, но существует бесконечно много максимальных элементов. Найти все максимальные элементы.

Многие математические объекты вводятся как максимальные или минимальные элементы некоторых упорядоченных множеств и ряд задач сводится к доказательству существования максимальных элементов. Например, базисом векторного пространства называется максимальная линейно независимая система элементов, причем максимальность понимается в смысле отношения включения на множестве линейно независимых систем элементов.

Одно из достаточных условий существования максимального элемента содержится в приведенной ниже лемме Цорна.

Подмножество A упорядоченного множества X называется *ограниченным сверху*, если существует элемент $x_0 \in X$ такой, что для любого $x \in A$ выполнено $x \prec x_0$. Такой элемент x_0 называется *мажорантой* множества A.

Лемма Цорна. *Если в упорядоченном множестве $(X, \prec)$ всякое линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то в X существует хотя бы один максимальный элемент.*

Эта лемма доказывается на основании аксиомы выбора.

3. *Функции или отображения*

Пусть X и Y — множества. Будем говорить, что на множестве X задана *функция* (*отображение*) f со значениями в множестве Y, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $f(x) \in Y$.

Графиком Gr_f отображения $f\colon X \to Y$ называется подмножество в $X \times Y$ вида $Gr_f = \{(x, f(x)) | \ x \in X\}$.

График функции Gr_f есть отношение между множествами X и Y, и, следовательно, функцию можно рассматривать как частный случай отношения. Из этого следует, в частности, что входящее в определение функции выражение "поставлен в соответствие" не содержит нового неопределяемого понятия, а сводится к заданию подмножества в $X \times Y$, удовлетворяющего некоторым условиям.

Упражнение 2. Сформулировать необходимые и достаточные условия на отношение $R \subset X \times Y$, при выполнении которых оно является графиком некоторой функции.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным*, если из того, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует $x_1 = x_2$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *биективным*, если оно инъективно и сюръективно.

Если заданы два отображения $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, то их *композицией* называется отображение $g \circ f\colon X \to Z$ такое, что $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Отображение $f\colon X \to Y$ инъективно (сюръективно) тогда и только тогда, когда существует отображение $g\colon Y \to X$ ($h\colon Y \to X$) такое, что $g \circ f = I_X$ ($f \circ h = I_Y$). Здесь I_X, I_Y — тождественные отображения в X и Y соответственно. Отображение g (h) называют *левым* (*правым*) *обратным* для f. Если f биективно, то $g = h$ и его называют *обратным* отображением для f и обозначают f^{-1}.

Упражнение 3. Доказать, что: 1) композиция биективных отображений является биективным отображением; 2) отображение, обратное для биективного отображения, также биективно.

Упражнение 4. Пусть отображение $f : X \to X$ инъективно, а отображение $g : X \to X$ сюръективно. Может ли быть биективным отображение $f \circ g$? Отображение $g \circ f$?

Определение 3. Два множества X и Y называются *равномощными*, если существует биективное отображение $f\colon X \to Y$. Говорят, что *мощность* множества X *строго меньше* мощности множества Y, если они не равномощны, но X равномощно некоторому подмножеству множества Y.

Упражнение 5. Доказать, что отношение равномощности на множестве $\mathbf{P}(X)$ является отношением эквивалентности.

Определение 4. Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Определение 5. Множество X называется *множеством мощности континуума*, если оно равномощно отрезку [0,1].

Информацию о мощности конкретных множеств часто удается получить с помощью следующих утверждений.

1. Объединение счетного множества счетных множеств является счетным множеством.

2. Произведение конечного числа счетных множеств счетно.

3. Произведение счетного множества счетных множеств несчетно и является множеством мощности континуума.

4. Произведение счетного множества конечных множеств, каждое из которых содержит хотя бы две различные точки, является множеством мощности континуума.

5. Если X есть непустое множество, то множество $\mathbf{P}(X)$ имеет мощность, большую мощности множества X (теорема Кантора — Бернштейна).

З а м е ч а н и е. С помощью последнего утверждения легко заметить, что понимание множества как произвольной совокупности приводит к противоречиям. Одно из таких противоречий (парадокс Кантора) возникает следующим образом. Пусть M есть совокупность всех множеств. Тогда, согласно теореме Кантора – Бернштейна, совокупность $\mathbf{P}(M)$ должна иметь мощность, большую мощности M. Однако, поскольку M есть совокупность всех множеств, $\mathbf{P}(M)$ является частью M и не может иметь мощность, большую мощности M. Чтобы избежать таких противоречий, множествами в более строгом варианте теории множеств называют не произвольные совокупности, а совокупности, удовлетворяющие дополнительным условиям. В частности, в качестве элементов множества разрешается рассматривать не произвольные объекты, а лишь объекты из некоторой заранее зафиксированной совокупности. Такие более общие совокупности называют *классами*. Заметим, что совокупность всех групп, совокупность всех векторных пространств, совокупность всех топологических пространств не являются множествами, но являются классами в указанном смысле.

П р и м е р ы.

1. Множества $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ счетны.

2. Множество многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

3. Каждое из множеств $[a, b]$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ несчетно, имеет мощность континуума и, следовательно, эти множества равномощны.

4. Множество $\mathbf{P}([a, b])$ всех подмножеств отрезка имеет мощность, большую мощности континуума.

Пусть X — непустое множество. *Топологией* на множестве X называется множество τ подмножеств множества X ($\tau \subset \mathbf{P}(X)$), удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам топологии):

1) любое объединение элементов из τ принадлежит τ:

$$U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau;$$

2) пересечение любых двух множеств из τ принадлежит τ;

3) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$.

Элементы из τ называют *открытыми* множествами в топологии τ, а их дополнения —*замкнутыми* множествами. *Топологическим пространством* называется множество X с заданной на нем топологией, т. е. пара (X, τ).

Открытой окрестностью точки x в топологическом пространстве

(X,τ) называется любое открытое множество, содержащее точку x. *Окрестностью* точки x называется любое множество, содержащее открытую окрестность этой точки.

Множество $B(x)$ окрестностей точки x называется *базой окрестностей* точки x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность из $B(x)$.

В естественной топологии на вещественной прямой $\mathbf{R}$ множество U является открытым, если каждая точка входит в U вместе с некоторым содержащим ее интервалом. Каждое открытое множество на прямой может быть представлено в виде $U = \coprod\limits_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$, т. е. является конечным или счетным объединением непересекающихся интервалов, включая бесконечные интервалы (полупрямые) $]-\infty, a[$ и $]a, +\infty[$.

§ 2. КОЛЬЦА И ПОЛУКОЛЬЦА МНОЖЕСТВ

Пусть X — произвольное непустое множество. Мы будем рассматривать системы подмножеств множества X, т. е. подмножества из $\mathbf{P}(X)$, замкнутые относительно некоторых теоретико-множественных операций. Например, топология на X есть система подмножеств, замкнутая относительно операции объединения любого подсемейства и операции конечного пересечения. В теории меры представляют интерес системы подмножеств, замкнутые относительно другого набора операций.

Определение 1. Пусть X — непустое множество. Непустое семейство $K \subset \mathbf{P}(X)$ подмножеств множества X называется *кольцом*, если оно замкнуто относительно операций пересечения и симметрической разности, т. е. из выполнения условий $A \in K$, $B \in K$ следует, что $A \cap B \in K$, $A \triangle B \in K$.

Поскольку множество X обычно зафиксировано, его удобно называть пространством, а его подмножества — множествами из данного пространства.

Упражнения. Проверить справедливость следующих формул:
1) $A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$;
2) $A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B)$;
3) $(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$;
4) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Из формул 1), 2) получаем следующее

Предложение 1. *Если K — кольцо множеств, то для любых $A, B \in K$ выполнено $A \setminus B \in K$, $A \cup B \in K$.*

Если операцию $\triangle$ называть сложением, а операцию $\cap$ — умножением, то кольцо в смысле определения 1 является коммутативным кольцом в том смысле, каком понятие кольца определяется в алгебре. В частности, в кольце множеств выполнены аксиомы ассоциативности и дистрибутивности:

$$\begin{aligned}
&A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C;\\
&(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C);\\
&(A\triangle B)\bigcap C = (A\bigcap C)\triangle(B\bigcap C).
\end{aligned}$$

Если само множество X является одним из элементов кольца K, X является единицей в кольце K: $X \cap A = A$ для любого A. Этот случай выделяется особо.

Определение 2. Кольцо K подмножеств множества X называется *алгеброй*, если X является элементом K.

Таким образом, если K — алгебра, то для любого $A \in K$ следует, что $X \setminus A \in K$, т. е. алгебра замкнута также относительно операции перехода к дополнениям.

Аналогичная структура возникает, если в кольце K есть наибольшее множество Y, т. е. такое, что $A \subset Y$ для любого $A \in K$. Тогда элемент Y является единицей в данном кольце. Мы не выделяем этот случай особо, так как такое кольцо является алгеброй подмножеств множества Y в смысле предыдущего определения.

Определение 3. Кольцо K называется *σ-кольцом*, если объединение счетного числа множеств из K принадлежит K, т. е. если $A_k \in K$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.

Кольцо K называется *δ-кольцом*, если пересечение счетного числа множеств из K принадлежит K, т. е. если $A_k \in K$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.

Кольцо, являющееся одновременно алгеброй и σ-кольцом, называется *σ-алгеброй*.

У п р а ж н е н и е 5. Показать, что σ-кольцо является также δ-кольцом, а обратное неверно.

П р и м е р ы.

1. $K = \mathbf{P}(X)$ есть кольцо, алгебра и *σ-алгебра.*

2. $K = \{\emptyset, X\}$ — кольцо и алгебра.

3. $X = \mathbf{R}$, K состоит из всех конечных множеств и пустого множества; K — кольцо, но не алгебра.

4. $X = \mathbf{R}$, K состоит из всех ограниченных множеств и пустого множества; K — кольцо, но не алгебра.

5. $X = \mathbf{R}$, K состоит из всех конечных и счетных подмножеств в $\mathbf{R}$; K — кольцо, но не алгебра.

6. Топология на $\mathbf{R}$, т. е. совокупность открытых множеств на $\mathbf{R}$, не является кольцом (разность двух открытых множеств может не быть открытым множеством).

7. $\mathbf{P}(X)$ является σ-кольцом и δ-кольцом.

8. Кольцо из примера 3 не является σ-кольцом, но является δ-кольцом.

9. Кольцо из примера 4 не является σ-кольцом, но является δ-кольцом.

10. Кольцо из примера 5 является и σ-кольцом, и δ-кольцом.

Теорема 1. *Для любого набора подмножеств $S \subset \mathbf{P}(X)$ существует наименьшее из всех колец, содержащих S, которое будем обозначать $K(S)$. Кольцо $K(S)$ называется кольцом, порожденным S.*

З а м е ч а н и е. Наименьшее здесь понимается в том смысле, что всякое другое кольцо, содержащее S, содержит также и $K(S)$.

$\triangleright$ Пусть $\Sigma = \{K | \ S \subset K\}$ — множество всех колец, содержащих S. Так как всегда $\mathbf{P}(X) \in \Sigma$, то $\Sigma \neq \emptyset$. Положим $K(S) = \bigcap\limits_{K \in \Sigma} K$. Проверим, что $K(S)$ — кольцо. Если $A \in K(S)$ и $B \in K(S)$, то $A \in K$, $B \in K$ для любого $K \in \Sigma$. Так как K — кольцо, то $A \cap B \in K$ и $A \triangle B \in K$ для всех $K \in \Sigma$, и, значит, $A \cap B \in K(S)$ и $A \triangle B \in K(S)$. По построению $K(S) \subset K$ для любых $K \in \Sigma$, т. е. $K(S)$ — действительно наименьшее кольцо, содержащее S. $\lhd$

Упражнение 6. Показать, что для любого семейства $S \subset \mathbf{P}(X)$ существует наименьшее σ-кольцо (δ-кольцо, алгебра, σ-алгебра), содержащее S.

Явное построение кольца $K(S)$ по семейству S может оказаться довольно сложной задачей. Поэтому выделяют наборы подмножеств S, для которых кольца $K(S)$ описываются наиболее просто.

Определение 4. Непустая система подмножеств $S \subset \mathbf{P}(X)$ называется *полукольцом*, если для любых $A, B \in S$ выполнено:

1) $A \cap B \in S$;

2) существует конечный набор $A_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, такой, что $A \setminus B = \coprod_{i=1}^{n} A_i$.

Примеры.

1. Совокупность промежутков вида $[a, b[$ на прямой $\mathbf{R}$ образует полукольцо, но не кольцо.

2. $X = \mathbf{R}^2$. Совокупность прямоугольников вида $[a_1, b_1[\times$ $\times[a_2, b_2[$ образует полукольцо множеств. Действительно, разность двух таких прямоугольников разбивается на конечное число (не более четырех) прямоугольников такого же вида.

3. Совокупность параллелепипедов вида $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \ldots \times[a_n, b_n[$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ образует полукольцо.

Лемма 1. *Пусть S — полукольцо. Если $B = \coprod_{k=1}^{n} B_k$ и $B_k \in S$, $A \in S$, то $A \setminus B = \coprod_{i=1}^{r} A_i$, где $A_i \in S$.*

$\rhd$ Доказательство проводим индукцией по n. При $n = 1$ утверждение справедливо, так как совпадает с аксиомой 2) полукольца. Пусть утверждение верно при $n = l - 1$, тогда $A \setminus \coprod_{i=1}^{l-1} B_i = \coprod_{j=1}^{m} A_j$. Отсюда $\left(A \setminus \coprod_{i=1}^{l-1} B_i\right) \setminus B_l = \coprod_{j=1}^{m} (A_j \setminus B_l) = \coprod_{j=1}^{m} \coprod_{k} A_{jk}$, где $A_{jk} \in S$. $\lhd$

Теорема 2. *Пусть S — полукольцо, тогда $K(S)$ — минимальное кольцо, содержащее S, состоит из множеств, являющихся конечными объединениями непересекающихся множеств из S, т. е. $K(S) = K_0(S)$, где $K_0(S) = \{A | \ A = \coprod_{k=1}^{n} A_k, \ A_k \in S\}$.*

$\triangleright$ По определению $K_0(S)$ имеем $K_0(S) \subset K(S)$. Для доказательства равенства $K(S) = K_0(S)$ достаточно показать, что $K_0(S)$ само является кольцом. Пусть $A = \coprod_{i=1}^{n} A_i \in K_0(S)$, $B = \coprod_{j=1}^{m} B_j \in K_0(S)$. Тогда, согласно лемме, получаем $A_i \setminus B = \coprod_{k=1}^{n_i} A_{ik}$, где множества A_{ik} принадлежат S. Отсюда $A \setminus B = \coprod_{i=1}^{n} \coprod_{k=1}^{n_i} A_{ik} \in K_0(S)$. Далее получаем $A \cup B = (A \setminus B) \coprod B = \coprod \coprod A_{ij} \coprod B_j \in K_0(S)$. Поскольку $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то $A \triangle B \in K_0(S)$. Так как $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$, то $A \cap B \in K_0(S)$. $\triangleleft$

Примеры.

1. Пусть S — полукольцо, порожденное полуинтервалами $[a, b[$ на $\mathbf{R}$. Тогда кольцо $K(S)$ состоит из множеств, являющихся конечными объединениями попарно непересекающихся полуинтервалов.

2. Пусть S — полукольцо, порожденное полуинтервалами $[\alpha, \beta[$, принадлежащими полуинтервалу $[a, b[$. Кольцо $K(S)$ состоит из множеств, являющихся конечными объединениями непересекающихся интервалов из S, причем $K(S)$ — алгебра.

Минимальная σ-алгебра, содержащая данный набор S подмножеств, не допускает такого простого описания. Например, возьмем в качестве S топологию на $\mathbf{R}$, т. е. совокупность открытых множеств. Порожденная топологией σ-алгебра называется *борелевской алгеброй на прямой*, а ее элементы — *борелевскими множествами.*

Другими словами, борелевское множество можно определить как множество, которое может быть получено из открытых с помощью счетного числа операций пересечения и объединения. Однако способ, которым может быть построено борелевское множество из открытых множеств, может быть весьма сложным и, в зависимости от способа построения, существуют борелевские множества качественно разных типов.

В борелевскую алгебру по определению входят множества, которые могут быть представлены в виде счетного пересечения открытых множеств. Такие множества называются *множествами типа* G_δ. Обозначим их совокупность через G_1. Множества, которые могут быть представлены как счетные объединения множеств типа G_δ, называются *множествами типа* $G_{\delta\sigma}$, их совокупность обозначим через G_2. Аналогично определяются множества типа $G_{\delta\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ и т. д. и, соответственно, классы множеств $G_3, G_4, \ldots$. Оказывается, что каждый следующий класс шире предыдущего и что класс множеств $G_\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ не исчерпывает всех борелевских множеств.

Аналогичная σ-алгебра подмножеств определяется в произвольном топологическом пространстве.

Определение 5. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. *Борелевской алгеброй* на X называется σ-алгебра, порожденная топологией τ. Элементы борелевской алгебры называются *борелевскими множествами.*

§ 3. НЕОБХОДИМОСТЬ ПЕРЕСМОТРА ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛА. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ МЕРЫ

Основной целью в главах I и II является изложение теории меры и теории интеграла в смысле Лебега. Эти построения не связаны формально с общими теоремами функционального анализа, но они естественно примыкают к функциональному анализу, так как наиболее важные примеры банаховых пространств, встречающиеся в приложениях к дифференциальным и к интегральным уравнениям, строятся на основе интеграла Лебега. Введение нового определения интеграла было вызвано рядом конкретных задач, в которых класс функций, интегрируемых по Риману, оказался слишком узким, либо определение интеграла Римана не имеет смысла. Приведем примеры таких задач.

1. Формула Ньютона — Лейбница, называемая обычно основной формулой дифференциального и интегрального исчисления,

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

доказывается в курсе математического анализа для функций, у которых производные непрерывны. Однако существуют непрерывные функции, у которых производные разрывны и даже неинтегрируемы по Риману. Тогда правая часть формулы Ньютона — Лейбница не определена и эта формула не имеет смысла. Поэтому задача описания более широкого класса функций, для которых справедлива формула Ньютона — Лейбница, приводит к необходимости определить интеграл для более широкого класса функций.

2. Одной из классических задач математического анализа является представление функции в виде суммы тригонометрического ряда, например в виде $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$. Если ряд сходится равномерно, то f — непрерывная функция и легко проверить, что

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx.$$

Однако, если сходимость ряда не является равномерной, функция f может оказаться неинтегрируемой по Риману, и для того, чтобы формула для коэффициентов имела смысл, нужно определить интеграл для более широкого класса функций.

3. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла утверждают справедливость равенств вида

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x) dx = \int\limits_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) dx. \tag{1}$$

Если последовательность интегрируемых по Риману функций f_n сходится точечно к функции f, то, даже в случае, когда функция f ограничена, она может оказаться неинтегрируемой по Риману, и в такой ситуации равенство (1) не может выполняться, так как правая часть не определена. Поэтому для получения наиболее общих теорем о предельном переходе желательно иметь такое определение интеграла, при котором такая функция интегрируема.

4. Пусть $f\colon X \to \mathbf{R}$ — функция, определенная на множестве X. Интеграл Римана от функции f определен только для множеств X, являющихся подмножествами в $\mathbf{R}^n$. В теории вероятностей, математической физике и некоторых других разделах математики возникает необходимость интегрировать функции, заданные на множествах более сложной природы, и даже на множествах в бесконечномерных пространствах. Возникает вопрос: какая дополнительная структура должна быть задана на произвольном множестве X, чтобы можно было определить интеграл по X? Решение этой задачи также приводит к переосмыслению понятия интеграла.

Если $f(x) \geqslant 0$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ равен, как известно, площади фигуры, заключенной между графиком функции и осью x. Но для ряда функций, например для *функции Дирихле*:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально,} \\ 0, & x \text{ — иррационально;} \end{cases}$$

фигура, лежащая под графиком функции, не имеет площади, т. е. ее площадь не определена. Поэтому задача определения понятия интеграла для более широкого класса функций тесно связана с задачей определения для более широкого класса множеств числовой характеристики их массивности, обобщающей понятие площади. Аналогично возникает задача расширения класса множеств, для которых определены числовые характеристики, обобщающие понятие длины и объема. Такую числовую характеристику множества называют его мерой.

Дадим общее определение понятия меры. Пусть X — множество, $S \subset \mathbf{P}(X)$ — некоторое полукольцо его подмножеств. Напомним, что элементами S являются подмножества из X. Запись $A \in S$ означает, что A есть подмножество множества X, входящее в семейство S. Запись $B \subset S$ означает, что B — некоторый набор подмножеств из X, входящих в семейство S.

Определение 1. Будем говорить, что на полукольце S задана *мера* μ, если любому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $\mu(A)$ таким образом, что выполнены следующие аксиомы:

1) если $A = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k, \;\; A, A_k \in S$, то

$\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (аддитивность);

2) $\mu(A) \geqslant 0$ (положительность).

Таким образом, мера есть числовая функция множества, т. е. μ есть отображение из S в $\mathbf{R}$.

Замечание 1. Мера не является отображением из X в $\mathbf{R}$.

Замечание 2. Требование, чтобы S было полукольцом, связано с тем, что в произвольном наборе S множеств может оказаться, что ни одно множество из S нельзя представить в виде объединения непересекающихся множеств из S (например, если S есть множество отрезков на $\mathbf{R}$). Тогда аксиома 1) определения меры выполнена для любой функции множества и это определение не выделяет функций множества, обладающих какими-либо дополнительными свойствами.

Среди свойств меры отметим в первую очередь свойство монотонности.

Предложение 1. *Пусть S — полукольцо множеств и μ — мера на S. Тогда если $A \in S$, $B \in S$ и $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (монотонность меры).*

$\triangleright$ Согласно определению полукольца (определение 4 § 2), существуют элементы $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ такие, что $B \setminus A = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $B = A \coprod \Big(\coprod\limits_{k=1}^{n} A_k \Big)$ и $\mu(B) = \mu(A) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \geqslant \mu(A)$. $\triangleleft$

Примеры.

1. Рассмотрим полукольцо множеств S, состоящее из полуинтервалов на прямой $\mathbf{R}$ (см. пример 1 § 2). Естественной характеристикой величины полуинтервала является его длина $\mu([a,b[) = b - a$. Аксиомы 1), 2) из определения меры выражают известные свойства длины.

2. Пусть полукольцо S состоит из конечных подмножеств некоторого множества X. Положим $\mu(A) = \sum\limits_{x \in A} 1$, т. е. $\mu(A)$ — количество точек в множестве $A \in S$. Аксиомы 1) и 2) выполняются очевидным образом.

3. Пусть S — полукольцо, состоящее из полуоткрытых прямоугольников на плоскости $\mathbf{R}^2$ со сторонами, параллельными осям координат (см. пример 2 § 2). Тогда площадь $\mu(A)$ прямоугольника A удовлетворяет аксиомам определения 1, т. е. является мерой.

4. Пусть S — полукольцо, состоящее из прямоугольных полуоткрытых параллелепипедов в пространстве $\mathbf{R}^3$ со сторонами, параллельными осям координат (см. пример 3 § 2). Тогда объем параллелепипеда также удовлетворяет аксиомам 1) и 2), т. е. является мерой.

5. Пусть S — полукольцо из примера 4 и пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ распределено некоторое вещество. Тогда для каждого параллелепипеда $A \in S$ положим число $\mu(A)$ равным массе вещества, находящегося в параллелепипеде A. Свойство аддитивности 1) выполняется и выражает закон сохранения количества вещества. Аксиома 2) выполняется.

6. Пусть S — полукольцо из примера 4 и пусть в пространстве распределены электрические заряды. Тогда для каждого $A \in S$ положим $\mu(A)$ равным количеству электричества в параллелепипеде A. Аксиома 1) определения 1 выполняется и выражает закон сохранения количества электричества. Однако заряд может быть отрицательным, и тогда аксиома 2) не выполняется.

7. Пусть S — полукольцо из примера 1. Возьмем произвольную функцию $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и положим $\mu([a,b[) = F(b) - F(a)$. Заметим, что если взять $F(t) = t$, то получим пример 1, т. е. длину промежутка. Аксиома 1) определения 1 выполняется. Действительно, если $[a,b[= \coprod\limits_{k=1}^{n} [a_{k-1}, a_k[$, где $a_0 = a$, $a_n = b$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \mu([a_{k-1}, a_k[) = \sum_{k=1}^{n} (F(a_k) - F(a_{k-1})) = F(a_n) - F(a_0) = \mu([a,b[).$$

Для выполнения аксиомы 2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $F(b) - F(a) \geqslant 0$, если $b \geqslant a$, т. е. чтобы функция F была *монотонно возрастающей.* Функции с указанным свойством иногда называют неубывающими, а возрастающими называют функции, для которых из того, что $a < b$, следует, что $F(a) < F(b)$. Функции с последним свойством будем называть *строго монотонно возрастающими.* Таким образом, любая монотонно возрастающая функция F порождает некоторую меру μ_F на полукольце S. Такую функцию F называют *производящей функцией* или *функцией распределения* меры μ_F.

З а м е ч а н и е 3. Верно и обратное утверждение. По заданной мере m на полукольце S из полуинтервалов построим возрастающую функцию

$$F(t) = \begin{cases} m([0,t[), & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -m([t,0[), & t < 0. \end{cases}$$

Тогда функция F порождает исходную меру m. Соответствие между мерами и функциями, их порождающими, не взаимно однозначное. Если рассмотреть только такие монотонно возрастающие функции, для которых $F(0) = 0$, то соответствие между мерами и функциями становится взаимно однозначным.

В дальнейшем нас будут интересовать в основном меры, удовлетворяющие более сильному, чем аддитивность, условию. Именно из него вытекают новые свойства интеграла Лебега, которыми не обладает интеграл Римана.

Определение 2. Мера $\mu\colon S \to \mathbf{R}$ называется *счетно-аддитивной* (*σ-аддитивной*), если из того, что $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_k \in S$, следует, что $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Теорема 1. *Длина является σ-аддитивной мерой на полукольце S, состоящем из полуинтервалов вида $[a,b[$.*

$\triangleright$ Нужно доказать, что если полуинтервал $A = [a, b[$ представлен в виде $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = [a_k, b_k[$, то $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, т. е.

$$b - a = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k). \tag{2}$$

Так как $\coprod\limits_{k=1}^{n} A_k \subset [a, b[$ для любого n, то в силу предложения 1 имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant b - a$. Следовательно, ряд, стоящий в правой части (2), сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant b - a$.

Докажем обратное неравенство: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geqslant b - a$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и по каждому из полуинтервалов $[a_k, b_k[$ построим содержащий его открытый интервал $B_k =]a_k - \varepsilon/2^{k+1}, b_k[$. Вместо полуинтервала $[a, b[$ возьмем содержащийся в нем отрезок $B = [a, b - \varepsilon/2]$. Тогда $B \subset A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, т. е. отрезок B покрыт системой открытых интервалов B_k. Согласно лемме Бореля о покрытии, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т. е. существует такое n, что $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$. Тогда длина отрезка не превосходит суммы длин покрывающих интервалов, т. е.

$$b - \frac{\varepsilon}{2} - a \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее получаем

$$b - a \leqslant \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε имеем $b - a \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$. Тем самым теорема доказана. $\triangleleft$

Примеры не σ-аддитивных мер.

1. На полукольце S, состоящем из полуинтервалов на $\mathbf{R}$, зададим меру m с помощью функции $F(t) = \operatorname{sign} t$ (см. пример 7). Тогда

$$[-1, 0[= \coprod_{n=1}^{\infty} \Big[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \Big[,$$

но

$$1 = m([-1, 0[) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m\Big(\Big[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \Big[\Big) = 0.$$

Свойство σ-аддитивности не выполняется.

2. Пусть $X = \mathbf{Q} \cap [0, 1[$ — рациональный полуинтервал, S — полукольцо, состоящее из множеств вида $A = \mathbf{Q} \cap [a, b[,\ A \subset X$. Определим $\mu(A) = b - a$. Нетрудно видеть, что μ — мера. Если бы μ была σ-аддитивной, то мы имели бы $\mu(\{r_k\}) = 0$ для любой точки $r_k \in X$ (см. § 5). Но, с другой стороны, $X = \coprod\limits_{r_k \in X} \{r_k\}$ и $\mu(X) = 1$. В силу σ-аддитивности мы имели бы $1 = \mu(X) = \sum\limits_{r_k \in X} \mu(\{r_k\}) = 0$. Таким образом, μ не является σ-аддитивной мерой.

Можно привести прямое доказательство, не использующее результатов § 5. Занумеруем точки из X в последовательность (r_k) и положим $B_k = [r_k, r_k + \varepsilon/2^k) \cap X$, $A_k = \Big(B_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} B_j \Big)$. Множества A_k представляются в виде $A_k = \coprod_j A_{kj}$, где A_{kj} — некоторые полуинтервалы. При этом $\sum\limits_j \mu(A_{kj}) \leq \varepsilon/2^k$. Имеем

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k = \coprod_{k=1}^{\infty} \coprod_j A_{kj}.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_j \mu(A_{kj}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$, а $\mu(X) = 1$, свойство σ-аддитивности не выполнено.

Определение 3. Мера μ на кольце K называется *непрерывной*, если для любой монотонно возрастающей ($A_k \subset A_{k+1}$) последовательности множеств $A_k \in K$ такой, что $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in K$, справедливо равенство $\mu(A) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu(A_k)$.

Теорема 2. *Мера μ на кольце K является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда она непрерывна.*

$\triangleright$ Пусть мера μ σ-аддитивна и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in K$, где $A_k \in K$ такие, что $A_k \subset A_{k+1}$. Тогда $A = A_1 \coprod (A_2 \setminus A_1) \coprod (A_3 \setminus A_2) \coprod \ldots$ и

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Обратно, пусть мера μ непрерывна и пусть $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k \in K$. Положим $A_n = \coprod\limits_{k=1}^{n} B_k$. Тогда $A_n \in K$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ и в силу свойства непрерывности

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k). \triangleleft$$

Замечание 4. С помощью перехода к дополнению легко проверить, что свойство непрерывности меры μ эквивалентно следующему: для любых множеств $A, A_k \in K$ таких, что $A_k \supset A_{k+1}$ и $A = \bigcap\limits_{k+1}^{\infty} A_k$, выполнено $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Определение 4. Мера μ, заданная на полукольце K, называется *продолжением меры* m, заданной на полукольце S, если

1) $S \subset K$,

2) $\mu(A) = m(A)$ для любых $A \in S$.

Продолжение меры с полукольца S на кольцо $K(S)$ строится очень просто, такое продолжение описано в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть m — мера на полукольце $S \subset \mathbf{P}(X)$ и $K(S)$ — минимальное кольцо, порожденное S. Тогда на $K(S)$ существует и притом единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m, и эта мера задается формулой $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$. Если σ-аддитивна исходная мера m, то построенная мера μ также σ-аддитивна.*

$\triangleright$ *Единственность.* По теореме 2 § 2 любое множество $A \in K(S)$ представляется в виде $A = \coprod\limits_{k=1}^{n(A)} A_k$, где $A_k \in S$. Если на $K(S)$ есть продолжение μ меры m, то $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$, т. е. мера m однозначно определяет меру μ.

Для доказательства *существования* проверим, что формула $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{n(A)} m(A_k)$, где $A_k \in S$, $A = \coprod\limits_{k=1}^{n(A)} A_k$, действительно задает продолжение меры m.

Покажем сначала, что если $A = \coprod\limits_{j=1}^{p} B_j$, $B_j \in S$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{p} m(B_j)$, т.е. $\mu(A)$ не зависит от способа разбиения. Пусть $C_{kj} = A_k \cap B_j$. Так как S — полукольцо, то $C_{kj} \in S$. Тогда

$$A_k = \coprod_{j=1}^{p} C_{kj}, \quad B_j = \coprod_{k=1}^{n} C_{kj}, \quad m(A_k) = \sum_{j=1}^{p} m(C_{kj}),$$

$$m(B_j) = \sum_{k=1}^{n} m(C_{kj}), \quad \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m(C_{kj}) = \sum_{j=1}^{p} m(B_j).$$

Положительность меры μ очевидна. Проверим ее аддитивность. Пусть $A = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in K(S)$. Тогда $A_k = \coprod\limits_{i=1}^{n(A_k)} B_{ki}$, где $B_{ki} \in S$ и $\mu(A_k) = \sum\limits_{i=1}^{n(A_k)} m(B_{ki})$. Отсюда будем иметь

$$A = \coprod_{k=1}^{n} \coprod_{i=1}^{n(A_k)} B_{ki}, \quad \mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n(A_k)} \mu(B_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Докажем σ-аддитивность меры μ. Пусть $A \in K(S)$ и $B_n \in K(S)$, и $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $A = \coprod\limits_{j=1}^{n(A)} A_j$, $A_j \in S$, и $B_n = \coprod\limits_{i=1}^{n(B_n)} B_{ni}$, $B_{ni} \in S$. Положим $C_{nij} = A_j \cap B_{ni} \in S$. Отсюда $A_j = A_j \cap A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} \coprod\limits_{i} C_{nij}$ и $B_{ni} = A \cap B_{ni} = \coprod\limits_{j} C_{nij}$. В силу σ-аддитивности меры m имеем $m(A_j) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{i} m(C_{nij})$, $m(B_{ni}) = \sum\limits_{j} m(C_{nij})$. Отсюда получаем

$$\mu(A) = \sum_{j} m(A_j) = \sum_{j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i} m(C_{nij}),$$

$$\mu(B_n) = \sum_i \sum_j m(C_{nij}).$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum\limits_n \sum\limits_i \sum\limits_j m(C_{nij}) = \mu(A)$. $\lhd$

Задавать меры проще на полукольцах, а для дальнейших построений удобнее иметь меру, заданную на кольце. В силу теоремы 3 каждую меру, заданную на полукольце S, можно считать автоматически продолженной на кольцо $K(S)$.

Основная задача, решение которой будет приведено в следующем параграфе, заключается в том, чтобы указать способ построения продолжения меры с кольца на существенно более широкое кольцо. Такое продолжение строится для σ-аддитивных мер. Поэтому рассмотрим сначала свойства таких мер.

Теорема 4. *Пусть $K \in \mathbf{P}(X)$ — кольцо множеств и μ – мера на K и $A, A_k \in K$, $k = 1, 2 \ldots$. Тогда*

1) если $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A)$;

2) если мера μ является σ-аддитивной и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (свойство субаддитивности меры).

$\rhd$ 1. Если $B \subset A$, $B, A \in K$, то $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \geqslant \mu(B)$. Поэтому из включения $\coprod\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$ следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu(A)$. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A)$. Отметим, что при доказательстве 1) использована только аддитивность меры μ.

2. Введем множества $B_n = (A \cap A_n) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \in K$. Тогда $B_n \subset A_n$ и $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Отсюда $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. $\lhd$

Если из того, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, следует, что $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, т. е. выполнено свойство 2) теоремы 4, то мера μ называется *субаддитивной.*

Следствие. *Мера является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда она субаддитивна.*

$\triangleright$ Субаддитивность меры следует из σ-аддитивности согласно утверждению 2) теоремы 4. Пусть теперь $A = \coprod\limits_k A_k$. Неравенство $\sum\limits_k \mu(A_k) \leqslant \mu(A)$ согласно 1) справедливо для любой меры, а свойство субаддитивности утверждает справедливость обратного неравенства $\mu(A) \leqslant \sum\limits_k \mu(A_k)$. $\triangleleft$

Доказанная теорема подсказывает, как можно выделить класс множеств, не принадлежащих исходному кольцу, меру которых естественно считать равной нулю, т. е. построить некоторое продолжение исходной меры. Но такое продолжение еще не обладает достаточно хорошими свойствами.

Определение 5. Пусть $K \in \mathbf{P}(X)$ — кольцо подмножеств множества X и пусть μ – мера на этом кольце. Множество $A \subset X$ (не требуется, чтобы A принадлежало кольцу K) называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный или счетный набор $A_k \in K$ такой, что $A \subset \bigcup\limits_k A_k$ и $\sum\limits_k \mu(A_k) < \varepsilon$.

Отметим, что свойство множества A быть множеством меры нуль не совпадает со свойством $\mu(A) = 0$. Если $A \in K$, то из того, что $\mu(A) = 0$, следует, что A является множеством меры нуль, но для произвольных мер обратное неверно. В случае σ-аддитивной меры множество $A \in K$ является в силу теоремы 4 множеством меры нуль тогда и только тогда, когда $\mu(A) = 0$.

Примеры.

3. Пусть мера μ задана как длина на полукольце, состоящем из полуинтервалов на прямой $\mathbf{R}$. Тогда любое одноточечное множество на $\mathbf{R}$ имеет меру нуль.

Любое счетное множество также является множеством меры нуль. Действительно, пусть $A = \{x_k\}$ — произвольное счетное множество. Система полуинтервалов $\{A_k := [x_k, x_k + 2^{-k}\varepsilon)\}$ образует счетное покрытие множества A и при этом $\sum \mu(A_k) \leqslant \varepsilon$.

4. Пусть μ — мера из примера 2. Тогда любой рациональный интервал является множеством меры нуль, хотя его исходная мера ненулевая. Этот пример показывает, что для мер, не являющихся σ -аддитивными, определение множества меры нуль неестественно.

§ 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ ПО ЛЕБЕГУ

Пусть $K \subset \mathbf{P}(X)$ — алгебра множеств и на K задана σ-аддитивная мера m. Элементы из K будем называть *элементарными множествами.* Наша задача — определить меру для множеств, не входящих в K, т. е. построить продолжение μ меры m на более широкое кольцо K_μ.

Существует много продолжений для исходной меры, среди этих продолжений интересно обнаружить продолжение с наиболее хорошими свойствами. В качестве таких свойств меры μ, определенной на кольце K_μ, можно указать следующие:

1) K_μ является σ-алгеброй;

2) мера μ является σ-аддитивной;

3) мера μ является *полной*; это означает, что из того, что $\mu(A) = 0$, следует, что любое подмножество $B \subset A$ принадлежит K_μ (и тогда в силу свойства монотонности меры выполнено $\mu(B) = 0$);

4) мера μ однозначно определяется исходной мерой m.

Как будет показано ниже, существует, и притом только одно, продолжение исходной меры, обладающее свойствами 1) — 4). Конструкция такого продолжения была предложена Анри Лебегом в 1902 году. Были известны другие способы построения продолжений, но построенные продолжения не обладали всеми перечисленными выше хорошими свойствами. Для сравнения в дальнейшем с конструкцией Лебега рассмотрим сначала другие способы продолжения.

Продолжение меры по Жордану

Определение 1. Пусть m — мера на кольце $K \subset \mathbf{P}(X)$. *Внешней мерой Жордана* множества $A \subset X$ называется число

$$s^*(A) = \inf \left\{ m(B) |\ A \subset B,\ B \in K \right\}.$$

Внутренней мерой Жордана множества $A \subset X$ называется число

$$s_*(A) = \sup \left\{ m(B) |\ B \subset A, B \in K \right\}.$$

Если $s^*(A) = s_*(A)$, то множество A называется *измеримым по Жордану* и его *мерой Жордана* называется число $s(A) := s^*(A)$.

П р и м е р. Если в качестве K рассмотреть кольцо, порожденное многоугольниками на плоскости, и в качестве исходной меры рассмотреть площадь многоугольника, то определение меры Жордана превращается в известное определение площади фигуры на плоскости.

Таким образом, определение меры Жордана является непосредственным обобщением определения площади.

Множество K_s измеримых по Жордану множеств является кольцом, s является полной σ-аддитивной мерой на этом кольце. Однако K_s не является δ-кольцом и поэтому продолжение по Жордану не решает поставленной задачи.

У п р а ж н е н и е. Построить последовательность A_n квадрируемых множеств на плоскости (т. е. множеств, для которых определена площадь), такую, что множество $A = \cap A_n$ не является квадрируемым множеством.

Известна также конструкция, позволяющая определить продолжение меры на наименьшую σ-алгебру, порожденную исходной алгеброй. Например, в случае отрезка такая наименьшая алгебра состоит из всех борелевских множеств и мера определена на всех борелевских множествах. Такое продолжение меры называется продолжением по Борелю. Но при этой конструкции построенная мера не является полной.

Перейдем теперь к рассмотрению конструкции *продолжения меры по Лебегу.* Рассмотрим сначала случай, когда исходная мера задана на алгебре.

Определение 2. Пусть m — σ-аддитивная мера, определенная на алгебре $K \subset \mathbf{P}(X)$. *Внешней мерой множества* $A \subset X$ (порожденной мерой m) называется число

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_j m(A_j) |\ A \subset \bigcup A_j, A_j \in K\right\} \qquad (1)$$

(поясним, что нижняя грань в (1) вычисляется по множеству всех счетных или конечных покрытий множества A элементарными множествами).

Внешней мерой, порожденной мерой m, называется функция множества, определенная формулой (1) для всех $A \subset X$.

Покажем, что внешняя мера, как функция множества, является продолжением меры m, т. е. для элементарных множеств выполнено $\mu^*(A) = m(A)$. Действительно, если $A \in K$, $A \subset \bigcup\limits_j A_j$, где $A_j \in K$, то по теореме 4 § 3 в силу σ-аддитивности μ получаем, что $m(A) \leqslant \sum\limits_j m(A_j)$ и, значит, $m(A) \leqslant \mu^*(A)$, причем точная нижняя грань достигается на покрытии, состоящем из одного множества A.

Более того, если мера не является σ-аддитивной, то найдется множество $A \in K$ такое, что

$$A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in K, \text{и при этом } \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < m(A),$$

откуда следует, что для данного множества $\mu^*(A) < m(A)$.

Таким образом, конструкция внешней меры естественна только для σ-аддитивных мер, так как только для них правая часть формулы (1) совпадает с исходной мерой на K.

Внешняя мера, вообще говоря, не является мерой, так как она может не обладать свойством аддитивности. Следующим шагом построения лебеговского продолжения меры является сужение класса множеств, на которых рассматривается внешняя мера.

Определение 3. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу* относительно меры m, если для него выполняется равенство

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X).$$

Совокупность измеримых по Лебегу множеств обозначим $L(K, m)$.

Мера Лебега μ определяется как сужение внешней меры на совокупность $L(K, m)$: $\mu(A) = \mu^*(A)$ для $A \in L(K, m)$.

Таким образом, мы определили некоторое семейство множеств $L(K, m)$, и на этом семействе определили числовую функцию μ — меру Лебега.

Чтобы придать определению меры Лебега вид, аналогичный определению меры Жордана, для множества $A \subset X$ определим *внутреннюю меру*:

$$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Заметим, что в случае меры Жордана имеется аналогичная связь между внутренней и внешней мерой.

С помощью этого понятия определение 3 можно переписать в несколько ином виде.

Определение 3′. Множество A называется *измеримым по Лебегу*, если $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, т. е. его внешняя мера совпадает с внутренней.

Заметим, что понятие измеримого по Лебегу множества зависит от исходной меры m.

Поэтапно изучая свойства внешней меры, измеримых множеств и меры Лебега, покажем, что таким образом действительно построена мера, обладающая перечисленными выше четырьмя хорошими свойствами.

Теорема 1 (*о субаддитивности внешней меры*). *Если* $A \subset \bigcup\limits_k A_k$ (*объединение – счетное или конечное*), *то* $\mu^*(A) \leqslant \sum\limits_k \mu^*(A_k)$.

$\triangleright$ Если A — элементарные множества ($A_k \in K$), то неравенство справедливо по определению внешней меры. Пусть теперь A_k — произвольные множества. Тогда $\mu^*(A_k) = \inf\limits_{A_k \subset \bigcup\limits_i B_{ki}} \sum m(B_{ki})$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем такое покрытие множества A_k элементарными множествами B_{ki}, что

$$\mu^*(A_k) \leqslant \sum_i m(B_{ki}) \leqslant \mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon.$$

Так как $\bigcup\limits_k A_k \subset \bigcup\limits_{k,i} B_{ki}$, получаем $A \subset \bigcup\limits_{k,i} B_{ki}$, где B_{ki} — элементарные множества. Тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k,i} m(B_{ki}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. $\triangleleft$

Следствие 1. *Для любого множества* $A \subset X$ *справедливо неравенство* $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.

$\triangleright$ Из включения $X \subset A \coprod (X \setminus A)$ имеем $\mu^*(X) = m(X) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A)$. Отсюда $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leqslant \mu^*(A)$. $\triangleleft$

Следствие 2. *Для любых* A *и* B *из* X *справедливо неравенство* $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$.

$\triangleright$ Очевидно включение $A \subset B \cup (A \triangle B)$. Согласно теореме 1 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$, т. е. $\mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$. Поменяв A и B местами, получаем $\mu^*(B) - \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$. $\triangleleft$

Следствие 3. *Для любых множеств* A, B *и* C *из* X *справедливо неравенство*

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B). \tag{2}$$

$\triangleright$ Из включения $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$, применяя теорему 1, получаем требуемое неравенство. $\triangleleft$

Замечание. Если число $\rho(A,B) = \mu^*(A\triangle B)$ считать расстоянием между множеством A и множеством B, то неравенство (2) имеет вид неравенства треугольника для расстояния в метрических пространствах и мы его будем называть *неравенством треугольника.*

Примером измеримого множества является множество меры нуль. Действительно, согласно определению 4 § 3, множество A называется множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое его покрытие элементарными множествами $A \subset \bigcup\limits_k A_k$, что $\sum\limits_k m(A_k) < \varepsilon$. Если сопоставить это определение с определением внешней меры, то получаем, что оно эквивалентно утверждению $\mu^*(A) = 0$. Согласно следствию 1, $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A) = 0$, откуда $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$, т. е. множество A меры нуль измеримо и $\mu(A) = 0$.

Теорема 2 (*критерий измеримости множества*)**.** *Следующие свойства эквивалентны:*

1) множество A измеримо по Лебегу;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество B такое, что $\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$.

$\triangleright$ *Достаточность.* Пусть $A \subset X$ и выполнено свойство 2). Покажем, что $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$. Так как множество B элементарное, то $\mu^*(B) + \mu^*(X \setminus B) = m(X)$. По следствию 2 теоремы 1 имеем два неравенства:

$$\mu^*(B) - \varepsilon \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon,$$

$$\mu^*(X \setminus B) - \varepsilon \leqslant \mu^*(X \setminus A) \leqslant \mu^*(X \setminus B) + \varepsilon.$$

Складывая их почленно, получаем

$$m(X) - 2\varepsilon \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) \leqslant m(X) + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε получаем $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$.

Необходимость. Пусть A — измеримое множество, т. е.

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X). \tag{3}$$

По определению внешней меры для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A элементарными множествами B_k такое, что

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_k m(B_k) \leqslant \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(B_k)$. Выберем такой номер N, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) < \varepsilon/3$. Покажем, что для множества $B = \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_k$ выполнено свойство 2), т. е. $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Поскольку $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то оценим внешние меры множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Так как $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то $A \setminus B \subset \bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty} B_k$, следовательно,

$$\mu^*(A \setminus B) \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Заметим, что при построении множества B и получении оценки (5) измеримость множества A не использовалась.

Оценка для $\mu^*(B \setminus A)$ получается несколько сложнее, при ее выводе используется измеримость множества A. По определению внешней меры для множества $X \setminus A$ существует такое семейство элементарных множеств (C_i), что $(X \setminus A) \subset \bigcup\limits_i C_i$ и

$$\sum_i m(C_i) \leqslant \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Имеем

$$B \setminus A = B \bigcap (X \setminus A) \subset B \bigcap \Big(\bigcup_i C_i\Big) = \bigcup_i \Big(B \bigcap C_i\Big)$$

и по определению внешней меры

$$\mu^*(B \setminus A) \leqslant \sum_i m\Big(B \bigcap C_i\Big) = \sum_i m(C_i) - \sum_i m(C_i \setminus B). \tag{7}$$

Заметим, что $X = (\bigcup\limits_k B_k) \cup (\bigcup\limits_i (C_i \setminus B))$ и, следовательно,

$$m(X) \leqslant \sum_k m(B_k) + \sum_i m(C_i \setminus B). \tag{8}$$

Получаем далее цепочку соотношений, используя (4), (6) и очевидное неравенство $m(C_i \setminus B) \leqslant m(C_i)$:

$$m(X) \leqslant \sum_k m(B_k) + \sum_i m(C_i \setminus B) \leqslant \sum_k m(B_k) + \sum_i m(C_i) \leqslant$$

$$\leqslant m^*(A) + \mu^*(X \setminus A) + \frac{2\varepsilon}{3} = m(X) + \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Заметим, что именно последнее равенство следует из измеримости множества A. Из (9) получаем неравенство

$$\sum_i m(C_i) - \sum_i m(C_i \setminus B) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3},$$

которое, в силу (7), дает искомую оценку $\mu^*(B \setminus A) \leqslant 2\varepsilon/3$ для внешней меры. Таким образом, $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. $\triangleleft$

Следствие 4. *Множество A измеримо, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество B такое, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.*

$\triangleright$ Для множества B найдем элементарное множество B_1 такое, что $\mu^*(B_1 \triangle B) < \varepsilon$. Тогда в силу неравенства треугольника (2) имеем $\mu^*(A \triangle B_1) \leqslant \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B \triangle B_1) \leqslant 2\varepsilon$ и, согласно теореме 2, A — измеримое множество. $\triangleleft$

Теорема 3. *Измеримые множества образуют алгебру множеств.*

$\triangleright$ Пусть A_1, A_2 — измеримые множества. Нужно доказать, что множества $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $X \setminus A_1$, $A_1 \triangle A_2$ измеримы. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем элементарные множества B_1 и B_2 так, что $\mu(A_i \triangle B_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Пусть $A = A_1 \cup A_2$ и $B = B_1 \cup B_2$. Так как

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

то $\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) \leqslant 2\varepsilon$, т. е., согласно теореме 2, множество A измеримо.

Заметим, что определение измеримости симметрично относительно A и $X \setminus A$, т. е. по определению, если A измеримо, то и $X \setminus A$ измеримо. Поэтому множества $A_1 \cap A_2 = X \setminus [(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)]$, $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$ и $A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$ измеримы. $\triangleleft$

Покажем теперь, что мера Лебега обладает свойством аддитивности, т. е. действительно является мерой.

Теорема 4. *Если $A = \coprod_{i=1}^{n} A_i$, где множества A_i измеримы, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.*

$\triangleright$ Доказательство достаточно провести для $n = 2$. Согласно теореме 1, выполняется неравенство $\mu(A) = \mu^*(A) \leqslant \sum_i^n \mu^*(A_i) = \sum_i^n \mu(A_i)$.

Покажем, что для измеримых множеств справедливо обратное неравенство. Выберем для $\varepsilon > 0$ элементарные множества B_1 и B_2 так, что $\mu^*(A_1 \triangle B_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Если $A = A_1 \coprod A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, то, как уже отмечалось в теореме 3, $A \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ и, значит, $\mu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon$. Но $\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)$. Так как $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, то $\mu(B_1 \cap B_2) \leqslant 2\varepsilon$ и поэтому $\mu(B) \geqslant \mu(B_1) + \mu(B_2) - 4\varepsilon \geqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) - 6\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu(A) \geqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$, откуда следует утверждение теоремы. $\lhd$

Следствие 5. *Мера Лебега является σ-аддитивной.*

$\rhd$ Пусть $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A и A_k — измеримые множества. Согласно теореме 1, имеем $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Поскольку уже доказано, что мера Лебега аддитивна, применима теорема 4 § 3 и получаем обратное неравенство $\mu(A) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Следовательно,

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad \lhd$$

Теорема 5. *Объединение счетного числа измеримых множеств измеримо.*

$\rhd$ Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i измеримы. Представим A в виде объединения непересекающихся множеств $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A'_k$, где $A'_1 = A_1$, $A'_j = A_j \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} A_i$, $j = 2, 3, \ldots$. Так как $\coprod\limits_{i=1}^{n} A'_i \subset A$, то, согласно теореме 4, имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A'_i) \leqslant \mu^*(A)$. Значит, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A'_i)$ сходится (ряд из положительных членов, частичные суммы ограничены сверху). Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем номер N такой, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \mu(A'_k) < \varepsilon$. Тогда множество $C = \coprod\limits_{i=1}^{N} A'_i$ измеримо. Так как $A \triangle C = \bigcup\limits_{k=N+1}^{\infty} A'_k$ и $\mu^*(A \triangle C) < \varepsilon$, то в силу следствия 4 теоремы 2 множество A измеримо. $\lhd$

Следствие 6. *Измеримые множества образуют σ-алгебру.*

Так как для множества меры нуль любое подмножество является также множеством меры нуль, то получаем, что лебеговское продолжение является полной мерой.

Объединяя доказанные утверждения, получаем *основную теорему о продолжении меры по Лебегу.*

Теорема 6. *Если исходная мера m σ-аддитивна, то множество $L(K, m)$ измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру множеств, а мера Лебега является продолжением меры m на σ-алгебру $L(K, m)$ и является σ-аддитивной полной мерой.*

Мы построили лебеговское продолжение меры μ в случае алгебры, т. е. при условии, что все пространство X принадлежит исходному кольцу K, т. е. когда $\mu(X) < +\infty$. Уже в случае кольца, порожденного полуинтервалами на $\mathbf{R}$, и длины в качестве меры это условие не выполнено. Но конструкцию продолжения меры можно достаточно просто усовершенствовать так, что продолжение можно строить и без требования, что исходное кольцо является алгеброй. Наиболее просто выглядит такая конструкция в случае, когда исходная мера обладает свойством, сформулированным в следующем определении.

Определение 4. Мера μ, заданная на кольце $K \subset \mathbf{P}(X)$, называется *σ-конечной*, если существует счетное разбиение $X = \coprod_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k \in K$ и $\mu(X_k) < +\infty$.

Примеры.

1. Длина как мера на кольце, порожденном полуинтервалами в $\mathbf{R}$, является σ-конечной мерой, так как $\mathbf{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [k, k+1[$.

2. Мера, определенная на конечных подмножествах из $\mathbf{R}$, как число элементов этого подмножества, не является σ-конечной, так как $\mathbf{R}$ несчетно и его нельзя представить как счетное объединение конечных множеств.

Если мера m является σ-конечной, то для каждого из множеств X_k строится лебеговское продолжение меры m.

Определение 5. Множество $A \subset X$ называется *измеримым*, если для любого k множество $A \cap X_k$ измеримо в X_k.

Обозначив $A_k = A \cap X_k$, получаем, что множество A измеримо тогда и только тогда, когда оно представляется в виде $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — измеримое множество в X_k.

Для измеримого множества $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in X_k$, мера Лебега естественно определяется как сумма ряда:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Если ряд сходится, то A называется *измеримым множеством конечной меры*; если ряд расходится, то множество A называется *измеримым множеством бесконечной меры* (записывается $\mu(A) = +\infty$).

Нетрудно показать, что продолженная мера μ и класс измеримых множеств не зависят от способа разбиения множества X.

Основная теорема (теорема 6) справедлива для построенного таким образом продолжения в случае σ-конечных мер.

Заметим, что в случае σ-конечной меры m построенное выше продолжение не полностью соответствует определению 1 § 3, так как такая мера принимает, кроме вещественных значений, значение $+\infty$. Такую функцию множеств будем в дальнейшем также называть мерой. При этом выполнено свойство аддитивности меры, если использовать обычные "арифметические" операции над символом $+\infty$.

§ 5. МЕРА ЛЕБЕГА НА ПРЯМОЙ

Описанный в § 4 способ продолжения меры был впервые предложен Лебегом для продолжения длины как функции множества с промежутков на более широкий класс множеств. Рассмотрим этот наиболее важный пример подробнее.

Пусть S — полукольцо, состоящее из полуинтервалов $[\alpha, \beta[$, лежащих на полуинтервале $I = [0, 1[$ (пример 2 § 2), и пусть мера m' есть $m'([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$ — длина полуинтервала. Алгебра подмножеств K, порожденная полукольцом S (пример 2 § 2), состоит, согласно теореме 2 § 2, из множеств, являющихся конечными объединениями непересекающихся полуинтервалов:

$$K = \left\{ A \,\middle|\, A = \coprod_{i=1}^{n(A)} [\alpha_i, \beta_i[, \ [\alpha_i, \beta_i[\subset [0, 1[\right\}.$$

Продолжение меры m' на K задается формулой $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{n(A)} (\beta_i - \alpha_i)$.

Повторим для данного случая конструкцию продолжения меры по Лебегу.

Для произвольного множества $A \subset I$ определим внешнюю меру

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_i (\beta_i - \alpha_i) | A \subset \bigcup_i [\alpha_i, \beta_i[\ \}.$$

Таким образом, чтобы вычислить внешнюю меру множества A по определению, нужно рассмотреть все покрытия множества полуинтервалами, для каждого покрытия вычислить сумму длин полуинтервалов из покрытия и затем найти точную нижнюю грань таких сумм.

Множество $A \subset I = [0, 1[$ называется измеримым по Лебегу, если $\mu^*(A) + \mu^*(I \setminus A) = 1$.

В силу теорем 1 и 3 § 3 мера m является σ-аддитивной и, применяя теорему 6 § 4, получаем, что измеримые по Лебегу множества образуют σ-алгебру.

Мерой Лебега измеримого множества называется его внешняя мера. Таким образом, *мерой Лебега μ на отрезке* называется лебеговское продолжение длины.

Примеры измеримых по Лебегу множеств.

1. Полуинтервалы $[\alpha, \beta[$.

2. Множество, состоящее из одной точки, представляется в виде $\{\alpha\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha, \alpha + 1/k[$, поэтому $\mu(\{\alpha\}) = 0$.

3. Счетные множества: если $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$, то $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{\alpha_n\}) = 0$. В частности, множество рациональных чисел измеримо и имеет меру нуль.

4. Отрезки: $[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta[\cup \{\beta\}$, $\mu([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$.

5. Интервалы: $]\alpha, \beta[= [\alpha, \beta[\setminus \{\alpha\}$, $\mu(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$.

6. Открытые множества (являются конечными или счетными объединениями открытых интервалов).

7. Замкнутые множества A (дополнения открытых); для замкнутого множества имеем $\mu(A) = 1 - \mu(I \setminus A)$.

8. Счетные пересечения открытых множеств (множества типа G_δ).

9. Борелевские множества — множества, полученные из открытых и замкнутых множеств с помощью счетного числа операций объединения и пересечения.

10. *Канторово множество.* На первый взгляд может показаться, что класс множеств меры нуль сводится только к счетным множествам. Приведем пример несчетного множества меры нуль.

Построим подмножество $K \subset [0,1]$ следующим образом.

Разделим отрезок $[0,1]$ на три равные части и выбросим средний интервал $G_1 =]1/3, 2/3[$. Получим множество F_1, состоящее из двух отрезков, мера которого равна $2/3$.

Каждый из оставшихся отрезков $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$ множества F_1 делим на три равные части и из каждого выбрасываем средний интервал, т. е. выбрасываем множество $G_2 =]1/9, 2/9[\cup]2/3+1/9, 2/3+2/9[$. Получаем множество $F_2 = F_1 \setminus G_2$, мера которого есть $(2/3)^2$.

Далее для построения множества F_n, каждый из 2^{n-1} отрезков, составляющих множество F_{n-1}, делим на три равные части и средний интервал, имеющий длину 3^{-n}, выбрасываем. Выброшенное множество обозначим через G_n. Полагаем $F_n = F_{n-1} \setminus G_n$, при этом имеем $\mu(F_n) = (2/3)^n$.

Множество $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ называется *множеством Кантора.* Это замкнутое множество, так как множества F_k замкнуты, а пересечение замкнутых множеств замкнуто. В силу непрерывности меры имеем $\mu(K) = \lim \mu(F_n) = 0$.

Отметим сразу, что $K \neq \emptyset$. Например, концы выброшенных интервалов, т. е. точки вида $1/3$, $2/3$, $1/9, \ldots$, не могут оказаться внутри оставшихся отрезков и не будут выброшены ни на каком шаге.

Наиболее важным с точки зрения теории меры является то, что множество K несчетно и имеет мощность континуума. Это можно показать следующим образом. Каждое число $x \in [0,1]$ можно представить в виде троичной дроби

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_k}{3^k} + \ldots,$$

где числа a_k могут принимать значения 0, 1 и 2. С помощью такого представления легко описать те числа, которые попадают в канторово множество. Числа x, удовлетворяющие неравенству $1/3 < x < 2/3$, выброшенные на первом шаге построения канторова множества, характеризуются тем, что в их троичном разложении $a_1 = 1$. Заметим, что число $1/3$, принадлежащее K, в разложении которого $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = 0$, можно записать в виде троичной дроби другим способом: $1/3 = 0/3 + 2/3^2 + 2/3^3 + \ldots$ без использования цифры 1. Аналогично на втором шаге были выброшены те числа, у которых $a_2 = 1$.

Левые концы выброшенных интервалов $1/9$ и $2/3+1/9$ в разложении содержат единицу, но могут быть записаны без ее использования: $1/9=0/3+0/3^2+2/3^3+2/3^4+\ldots$; $2/3+1/9=2/3+0/3^2+2/3^3+2/3^4+\ldots$.

Таким образом, числа, принадлежащие K, характеризуются тем, что они могут быть записаны в виде троичной дроби так, чтобы в последовательности $a_1, a_2, \ldots$ знаков троичного разложения число 1 не встречалось.

В результате предыдущих рассуждений установлено взаимно однозначное соответствие между точками из канторова множества K и всеми последовательностями из цифр 0 и 2. Но множество таких последовательностей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей из нулей и единиц. А всякую последовательность из нулей и единиц можно рассматривать как запись некоторого действительного числа $x \in [0,1]$ в виде двоичной дроби. Таким образом, получаем отображение множества K на $[0,1]$. Отсюда вытекает, что K имеет мощность континуума.

Канторово множество интересно и с точки зрения топологии, так как обладает рядом особых свойств. Например, это замкнутое множество не имеет изолированных точек и не имеет внутренних точек.

11. Если множество является открытым и всюду плотным на отрезке, то с некоторой точки зрения оно мало отличается от всего отрезка. Однако его мера может сильно отличаться от меры отрезка. Приведем соответствующий пример. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — занумерованная последовательность рациональных чисел на отрезке $[0,1]$. Зададим число $\varepsilon > 0$ и положим $A = \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}]a_i - \varepsilon/2^{i+1}, a_i + \varepsilon/2^{i+1}[\Big) \cap [0,1]$. Тогда A — открытое, всюду плотное множество и $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$. Интересно отметить, что множество $B = [0,1] \setminus A$ нигде не плотно на $[0,1]$, но $\mu(B) > 1-\varepsilon$. Это множество устроено подобно канторову множеству, но имеет положительную меру.

Покажем, что любое измеримое множество получается из борелевского и некоторых множеств меры нуль, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого измеримого множества A существует борелевское множество B типа G_δ такое, что $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$.*

$\triangleright$ Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Для каждого n по определению внешней меры существует множество A_n, являющееся счетным или конечным объединением полуинтервалов, такое, что $A \subset A_n$

и $\mu(A) \leqslant \mu(A_n) \leqslant \mu(A) + \varepsilon_n$. Заменив каждый полуинтервал более широким интервалом, длина которого мало отличается от длины соответствующего полуинтервала, получим последовательность открытых множеств B_n с аналогичным свойством. Тогда $B = \bigcap\limits_1^\infty B_n$ является борелевским множеством типа G_δ. По построению $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) \leqslant \mu(B_n \setminus A) \leqslant \varepsilon_n \to 0$ и, значит, $\mu(B \setminus A) = 0$. $\lhd$

Доказанная теорема показывает, что измеримые множества в указанном в теореме смысле близки к борелевским. Однако совпадения нет и *существуют измеримые множества, не являющиеся борелевскими.* Действительно, пусть K — канторово множество. Так как это множество меры нуль, то любое подмножество канторова множества измеримо. Так как канторово множество имеет мощность континуума, то множество всех его подмножеств имеет мощность, большую мощности континуума. Значит, множество всех измеримых множеств также имеет мощность, большую мощности континуума, а именно, мощность множества всех подмножеств отрезка. Но из того, что каждое борелевское множество строится исходя из счетного числа открытых множеств, можно получить, что множество борелевских множеств имеет мощность континуума. Таким образом, измеримых множеств существенно больше, чем борелевских.

Пример неизмеримого множества. Покажем, что, несмотря на то, что совокупность измеримых множеств имеет ту же мощность, что и множество всех подмножеств отрезка, существуют множества, не являющиеся измеримыми.

На полуинтервале $[0,1[$ зададим отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y$ — рациональное число. Полуинтервал $[0,1[$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой точек. Выберем из каждого класса по одной точке и составим из них множество $M \subset [0,1[$. Покажем, что множество M неизмеримо. Предположим противное, т. е. что множество M измеримо. Пусть r_k — занумерованное в последовательность множество рациональных точек полуинтервала $[-1,1[$. Пусть $M + r_k = \{x + r_k |\ x \in M\}$. Эти множества попарно не пересекаются. Имеем включения

$$[0,1[\subset \coprod_{k=1}^{\infty} (M + r_k) \subset [-1,2[.$$

В силу σ-аддитивности меры Лебега получаем

$$1 \leqslant \sum_{1}^{\infty} \mu(M + r_k) \leqslant 3.$$

Заметим, что $\mu(M + r_k) = \mu(M)$. Поэтому если $\mu(M) = 0$, то получаем противоречие в левой части неравенства $1 \leqslant \sum\limits_{1}^{\infty} \mu(M + r_k) = 0$. Если $\mu(M) > 0$, то получаем противоречие в правой части неравенства $+\infty = \sum\limits_{1}^{\infty} \mu(M + r_k) \leqslant 3$.

Значит, множество M не является измеримым по Лебегу.

З а м е ч а н и е 1. При построении неизмеримого множества из каждого класса эквивалентности мы выбрали по одной точке и из них составили множество M. Утверждение о том, что такой выбор можно произвести, вытекает из аксиомы выбора. Фактически мы получили только утверждение о существовании неизмеримого множества. В явном виде такое множество не строится.

З а м е ч а н и е 2. При определении меры сначала было введено свойство аддитивности, затем более сильное свойство σ-аддитивности. Можно выделить класс мер, обладающих еще более сильным свойством: для любого (необязательно счетного) объединения $A = \coprod\limits_{\alpha} A_\alpha$ справедливо равенство $\mu(A) = \sum\limits_{\alpha} \mu(A_\alpha)$. Покажем, что мера Лебега на прямой таким свойством не обладает. Например, для множества $A = [0, 1[$ имеем $A = \coprod\limits_{x \in A} \{x\}$ и $\sum\limits_{x \in A} \mu(A) = 0$, в то время как $\mu(A) = 1$.

В общем случае в теории меры наиболее важное значение имеет именно свойство σ-аддитивности, а указанное выше более сильное свойство (несчетной аддитивности) является неестественным требованием и выполняется только для очень специальных классов мер.

Перейдем к рассмотрению измеримых множеств на всей прямой. Множество $A \subset \mathbf{R}$ измеримо, если для любого полуинтервала $[k, k+1[$ множество $A \cap [k, k+1[$ измеримо по Лебегу на $[k, k+1[$.

П р и м е р ы.

1. Множество $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} [k, k+1/2^k[$ — измеримое множество конечной меры и $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Заметим, что это множество неограниченное, т. е. множество конечной меры может быть неограниченным на прямой.

2. Множество $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [k, k+1/k[$ — измеримое множество бесконечной меры.

Пусть S — полукольцо, образованное прямоугольниками в $\mathbf{R}^2$, и мера в S задана как площадь прямоугольника. Лебеговское продолжение μ_2 этой меры называется мерой Лебега на плоскости.

Аналогично определяется мера Лебега в пространстве $\mathbf{R}^n$.

В качестве исходной меры на полукольце, образованном параллелепипедами вида $\Pi = \{x \in \mathbf{R}^n\colon\ a_k \leqslant x_k < b_k,\ k = 1, \ldots, n\}$, рассматривается n-мерный объем: $m(\Pi) = (b_1 - a_1)\ldots(b_n - a_n)$. Лебеговское продолжение этой меры называется мерой Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Мера Лебега μ_n в $\mathbf{R}^n$ (в частности, в $\mathbf{R}$) обладает следующим свойством инвариантности: если A_1 — множество, полученное из A сдвигом пространства $\mathbf{R}^n$, то $\mu_n(A_1) = \mu_n(A)$. Особая роль этой меры заключается в том, что любая другая мера в $\mathbf{R}^n$, инвариантная относительно сдвигов, отличается от меры Лебега постоянным множителем.

§ 6. МЕРЫ ЛЕБЕГА — СТИЛТЬЕСА

На полукольце S из полуинтервалов существует, кроме длины, целый ряд других мер (см. пример 7 § 3). Так как лебеговское продолжение содержательно только для σ-аддитивных мер, выясним, какие из этих мер σ-аддитивны. Напомним, что любая мера m на полукольце S порождена некоторой монотонно возрастающей функцией $F(t)$ по формуле $m([a, b[) = F(b) - F(a)$.

Определение 1. Числовая функция $F(t)$ называется *непрерывной слева в точке* t_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $t_0 - \delta \leqslant t \leqslant t_0$ следует неравенство $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$, или, что эквивалентно, для любой последовательности $t_n \to t_0$, такой, что $t_n \leqslant t_0$, выполнено $F(t_n) \to F(t_0)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы мера m была σ-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы производящая функция $F(t)$ была непрерывна слева в каждой точке.*

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть m — σ-аддитивная мера. Возьмем последовательность $b_n \to b$, $b_n < b_{n+1} < b$. Пусть $A_n = [a, b_n[$. Тогда $A_n \subset A_{n+1}$ и $[a, b[= \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. По теореме 2 § 3 имеем $F(b) - F(a) = m([a, b[) = \lim\limits_{n\to\infty} m([a, b_n[) = \lim\limits_{n\to\infty} F(b_n) - F(a)$. Таким образом, $F(b) = \lim\limits_{n\to\infty} F(b_n)$ для любой монотонно возрастающей последовательности $b_n \to b$. Отсюда следует непрерывность функции F слева.

Достаточность. Пусть $A = [a, b[$, $A_k = [a_k, b_k[$, $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Требуется доказать, что $F(b) - F(a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (F(b_k) - F(a_k))$.

Так как, согласно теореме 4 § 3, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant F(b) - F(a)$, то достаточно доказать обратное неравенство.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по каждому из полуинтервалов $[a_k, b_k[$ построим содержащий его открытый интервал $B_k =]a'_k, b_k[$, где a'_k выбрано так, чтобы $F(a_k) - F(a'_k) < \varepsilon/2^{k+1}$. Это можно сделать в силу непрерывности слева функции F в точке a_k. Вместо полуинтервала $[a, b[$ возьмем содержащийся в нем отрезок $B = [a, b']$ такой, что $F(b) - F(b') < \varepsilon/2$. Тогда $B \subset A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, т. е. отрезок B покрыт системой интервалов B_k. Согласно лемме Бореля, у такого покрытия существует конечное подпокрытие, т. е. для некоторого n выполнено $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$. Так как приращение функции F на отрезке не превосходит суммы приращений на соответствующих интервалах, имеем

$$F(b') - F(a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a'_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[F(b_k) - F(a_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} [F(b_k) - F(a_k)] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее получаем

$$F(b) - F(a) \leqslant F(b') - F(a) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)] + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем $F(b) - F(a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (F(b_k) - F(a_k))$. $\lhd$

Лебеговское продолжение меры, порожденной непрерывной слева функцией F, называется *мерой Лебега — Стилтьеса* и обычно обозначается μ_F. Для каждой такой меры класс измеримых множеств будет, вообще говоря, свой. Заметим, что все борелевские множества являются измеримыми по любой из рассматриваемых мер. В частности, измеримыми являются все множества, приведенные в § 5 (случай $F(t) = t$).

В общем случае класс множеств меры нуль тоже зависит от рассматриваемой меры. Пусть, например, функция F имеет разрыв в точке t_0 и непрерывна слева. Так как $\{t_0\} = \bigcap_k [t_0, t_0 + 1/k[$, получаем, что

$$\mu(t_0) = \lim_{k\to\infty} F(t_0 + k/1) - F(t_0) = F(t_0 + 0) - F(t_0) \neq 0,$$

т. е. точка может иметь ненулевую меру. В случае непрерывной функции F одноточечные множества имеют нулевую меру, но класс множеств меры нуль может не совпадать с классом множеств меры нуль по мере Лебега. Это будет показано ниже с помощью примера.

Определение 2. Пусть μ — мера, заданная на σ-алгебре Σ_μ подмножеств множества X, а ν — мера, заданная на σ-алгебре Σ_ν, содержащей Σ_μ. Будем говорить, что *мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ*, если из того, что A — множество μ-меры нуль, следует, что A есть множество ν-меры нуль, т. е. если $\mu(A) = 0$, то $\nu(A) = 0$.

Как видно из определения, множества из Σ_ν, не входящие в Σ_μ, не играют роли в рассматриваемом свойстве и существенно только, что обе меры определены для элементов алгебры Σ_μ.

Выясним, когда мера Лебега — Стилтьеса, порожденная функцией F, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Определение 3. Функцию $F\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ будем называть *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся полуинтервалов $[\alpha_i, \beta_i[\subset [0,1[$, $i = 1, \ldots, n$, такого, что $\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n} |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть μ и ν — две σ-аддитивные меры, заданные на одной и той же σ-алгебре множеств. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(A) < \delta$, то $\nu(A) < \varepsilon$.*

$\triangleright$ *Достаточность.* Пусть $\mu(A) = 0$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем соответствующее ему $\delta > 0$. Поскольку $\mu(A) < \delta$, по предположению леммы $\nu(A) < \varepsilon$. Отсюда $\nu(A) = 0$ ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

Необходимость. Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для $\delta_k = 2^{-k}$ существует измеримое множество A_k, для которого выполнено $\mu(A_k) < 2^{-k}$ и $\nu(A_k) \geqslant \varepsilon$. Для множеств $U_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k$ имеем

$$\mu(U_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n},$$

$$\nu(U_n) \geqslant \nu(A_{n+1}) \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $U = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Из включений $U_n \supset U_{n+1}$ в силу непрерывности мер μ и ν получаем $\mu(U) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(U_n) = 0$, $\nu(U) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(U_n) \geqslant \varepsilon$, т. е. мера ν не является абсолютно непрерывной относительно меры μ, что противоречит условию. $\lhd$

Теорема 2. *Пусть на σ-алгебре борелевских множеств на* $[0,1[$ *задана мера ν, порожденная функцией F. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ тогда и только тогда, когда функция F абсолютно непрерывна.*

$\rhd$ *Необходимость.* Пусть мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ Для любого $\varepsilon > 0$, согласно лемме, существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(A) < \delta$, то $\nu(A) < \varepsilon$. Возьмем множество $A = \coprod\limits_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j[$. Если $\sum\limits_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) = \mu(A) < \delta$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} (F(\beta_j) - F(\alpha_j)) = \nu(A) < \varepsilon$, т. е. функция F абсолютно непрерывна.

Достаточность. Пусть функция F абсолютно непрерывна и пусть $\mu(A) = 0$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и по нему выберем $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности функции F. По определению множества меры нуль существует счетная система полуинтервалов $[\alpha_j, \beta_j[$ такая, что $A \subset \cup[\alpha_j, \beta_j[$ и $\sum(\beta_j - \alpha_j) < \delta/2$. Тогда $A \subset B = \cup]\alpha_j - 2^{-(j+2)}\delta, \beta_j[$. Множество B открытое и, следовательно, может быть представлено как объединение непересекающихся интервалов $B = \coprod\limits_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leqslant \mu(B) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+2)}\delta < \delta.$$

Из выбора δ получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon$, откуда следует, что $\nu(A)\leqslant\nu(B)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(F(b_k)-F(a_k))\leqslant\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем $\nu(A)=0$. $\lhd$

Очевидно, что абсолютно непрерывная функция непрерывна и даже равномерно непрерывна (достаточно взять один интервал в определении абсолютно непрерывной функции). Приведем пример непрерывной на отрезке и, следовательно, равномерно непрерывной функции, не являющейся абсолютно непрерывной.

Функция Кантора.

Функцию $\varphi(t)$ на отрезке $I=[0,1]$ определим следующим образом. Положим, что на каждом интервале, дополнительном к канторову множеству, она постоянна и принимает значения $\varphi(t)=(2k-1)/2^n$, если $t\in I_n^k$, где I_n^k — k-й слева интервал, выброшенный при построении канторова множества на n-шаге.

Таким способом функция $\varphi(t)$ определяется на $I\setminus K$ и на этом множестве непрерывна и монотонна. Множество $I\setminus K$ открыто и плотно в I. Пусть $t_0\in K$. Тогда

$$\sup\{\varphi(t):t<t_0,t\in I\setminus K\}=\inf\{\varphi(t):t>t_0,t\in I\setminus K\}.$$

Поэтому, полагая $\varphi(t_0)$ равным этому общему значению, получаем непрерывную функцию $\varphi(t)$ на всем отрезке.

Упражнение. В примере 10 § 5 было построено отображение множества Кантора на отрезок. Показать, что функция Кантора $\varphi(t)$ для точек канторова множества совпадает с этим отображением и может быть задана следующим образом. Пусть

$$t=\sum_{k}^{\infty}\frac{2a_k}{3^k},\quad \text{где } a_k=0 \text{ или } 1,$$

есть разложение числа $t\in K$ в троичную дробь. Тогда

$$\varphi(t)=\sum_{k}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}.$$

Покажем, что построенная функция не является абсолютно непрерывной.

Множество F_n, полученное на n-м шаге построения канторова множества, состоит из 2^n отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$, $\beta_k - \alpha_k = 3^{-n}$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n выполняется $\sum\limits_{k=1}^{2^n} (\beta_k - \alpha_k) = 2^n/3^n < \varepsilon$, но при этом $\sum\limits_{k=1}^{2^n} |\varphi(\beta_k) - \varphi(\alpha_k)| = 1$, что противоречит определению абсолютной непрерывности функции φ.

Из теоремы 2 следует, что мера ν, порожденная функцией Кантора φ, не является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега μ. Это можно показать и с помощью примера. Действительно, для канторова множества K выполнено $\nu(K) = 1$, $\nu([0,1] \setminus K) = 0$, в то время, как $\mu(K) = 0$, $\mu([0,1] \setminus K) = 1$. Отмеченное свойство означает, что здесь абсолютная непрерывность меры ν относительно меры μ нарушена в максимальной степени. Такой случай выделяется и для произвольных пар мер с помощью следующего понятия.

Определение 4. Меры μ_1 и μ_2 на множестве X называются *взаимно сингулярными*, если существует такое разбиение $X = X_1 \bigcup X_2$ на измеримые подмножества, что $\mu_1(X_2) = 0$ и $\mu_2(X_1) = 0$.

Как показано выше, мера ν, заданная с помощью функции Кантора $\varphi(t)$, является взаимно сингулярной с мерой Лебега.

ГЛАВА II
ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 7. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть X — множество, Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества X и на Σ задана σ-аддитивная полная мера μ. Пара (X, Σ) называется *измеримым пространством*, множества из Σ называются измеримыми множествами, а тройка (X, Σ, μ) называется *пространством с мерой.* В дальнейшем будем предполагать, что задано некоторое пространство с мерой и все рассмотрения ведутся в этом пространстве (если не оговорено противное). Результаты главы I формально в общих теоремах далее не используются, они показывают только, что такие пространства с мерой существуют.

Определение 1. Функция $f\colon X \to \mathbf{R}$ называется *измеримой*, если для любого числа $c \in \mathbf{R}$ множество $X_c = \{x|\ f(x) < c\}$ измеримо.

Другими словами, свойство измеримости функции f означает, что прообраз любой полупрямой вида $(-\infty, c)$ является измеримым множеством.

Заметим, что если функция f измерима, то является измеримым множество $\{x|\ f(x) \leqslant c\}$, так как

$$\{x|\ f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x|\ f(x) < c + 1/k\}.$$

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что функция f измерима тогда и только тогда, когда прообраз любого борелевского множества измерим.

Класс измеримых функций определяется только структурой измеримого пространства (на одной и той же алгебре множеств могут быть заданы разные меры, но свойство измеримости функции зависит только от рассматриваемой алгебры). Свойство измеримости означает согласованность функции со структурой измеримого пространства. Как будет показано ниже, функции, для которых существует интеграл Лебега, должны быть измеримыми. Поэтому рассмотрим сначала свойства измеримых функций.

П р и м е р ы.

1. На $\mathbf{R}$ с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима. Действительно, множество $A_c = \{x|\ f(x) < c\}$ для непрерывной функции открыто (как прообраз открытого) и, значит, измеримо.

2. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ – рационально}, \\ 0, & x \text{ – иррационально}, \end{cases}$$

измерима. Действительно, $A_c = \mathbf{R}$ при $c > 1$, $A_c = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ при $0 < c \leqslant 1$ и $A_c = \emptyset$ при $c \leqslant 0$. Этот пример показывает, что разрывные функции могут быть измеримыми.

3. Пусть χ_A — характеристическая функция некоторого множества A из измеримого пространства, т. е. $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Функция χ_A измерима, если измеримо множество A, и неизмерима, если неизмеримо множество A.

Среди свойств измеримых функций отметим в первую очередь замкнутость множества измеримых функций относительно операции предельного перехода.

Единого универсального понятия предела для последовательности функций не существует. В разных задачах приходится использовать различные понятия предела, т. е. различные типы сходимости. В вопросах, связанных с интегрированием, в первую очередь рассматриваются следующие четыре типа сходимости.

1. *Точечная сходимость.* Последовательность функций f_n, заданных на множестве X, сходится к функции f точечно, если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$, т. е. для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_{\varepsilon,x}$ такой, что при $n > n_{\varepsilon,x}$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

2. *Равномерная сходимость.* Последовательность функций f_n, заданных на множестве X, сходится к f равномерно на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что при $n > n_\varepsilon$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in X$.

3. *Сходимость почти всюду.* Последовательность функций f_n, заданных на пространстве с мерой, сходится к функции f почти всюду, если $f_n(x) \to f(x)$ почти для всех $x \in X$, т. е. существует такое множество X_0 меры нуль, что $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in X \setminus X_0$. Сходимость почти всюду обозначается $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f$.

4. *Сходимость по мере.* Последовательность измеримых функций f_n, заданных на пространстве с мерой, сходится к функции f по мере μ, если для любого $c > 0$ выполнено $\mu(\{x\colon |f_n(x) - f(x)| > c\}) \to 0$ при $n \to \infty$. Такая сходимость обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Очевидно, что из равномерной сходимости следует точечная сходимость, а из точечной — сходимость почти всюду, но обратное утверждение неверно, т. е. это различные типы сходимости. Напомним простейший пример, показывающий это отличие.

Последовательность $f_n(t) = t^n$ на отрезке $[0, 1]$ сходится к функции $f(t) \equiv 0$ почти всюду (за исключением точки $t = 1$), но не сходится точечно. Эта же последовательность точечно сходится к функции

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{t<1,} \\ 1, & \text{t=1,} \end{cases}$$

но не сходится равномерно.

Теорема 1. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится точечно к функции f, то f измерима.*

$\rhd$ Нужно доказать, что множество $A_c = \{x\colon f(x) < c\}$ измеримо. Докажем равенство

$$A_c = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \Big\{x|\ f_m(x) < c - \frac{1}{k}\Big\}. \tag{1}$$

Равенство (1) показывает, что A_c можно получить из множеств $A_{mk} = \{x|\ f_m(x) < c - 1/k\}$ с помощью счетных пересечений и объединений. Множества A_{mk} измеримы в силу измеримости функций f_n и, значит, множество A_c измеримо.

Пусть $x \in A_c$, т. е. $f(x) < c$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) < c$ и, значит, для номеров k таких, что $1/k < c - f(x)$, т. е. $f(x) < c - 1/k$, существует номер n такой, что для любых $m > n$ выполняется $f_m(x) < c - 1/k$. Это значит, что существуют числа k и n такие, что $x \in A_{mk}$ для любого $m > n$, т. е. $x \in \bigcup\limits_k \bigcup\limits_n \bigcap\limits_{m>n} A_{mk}$.

Обратное рассуждение также верно: последнее включение означает, что существует число k такое, что для достаточно больших m выполняется $f_m(x) < c - 1/k$. Тогда $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) < c$. $\lhd$

Следствие 1. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду к функции f, то f измерима.*

$\triangleright$ Пусть $f_n \to f$ точечно на множестве $X_0 \in X$ и $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Тогда

$$\{x|\ f(x) < c\} = [\{x|\ f(x) < c\} \cap X_0] \cup [\{x|\ f(x) < c\} \cap (X \setminus X_0)].$$

Первое из этих множеств измеримо по теореме 1, а второе есть подмножество меры нуль и, значит, тоже измеримо. $\triangleleft$

Следствие 2. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится равномерно к f, то f измерима.*

Следствие 3. *Существуют разрывные на $[0, 1]$ функции, которые не могут быть пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.*

В качестве такой функции можно взять любую неизмеримую функцию.

Определение 2. Функции f и g будем называть *эквивалентными* (обозначаем $f \sim g$), если $\mu(\{x|\ f(x) \neq g(x)\}) = 0$, т.е. если эти функции совпадают почти всюду.

Если функция f измерима, то и любая эквивалентная ей функция g тоже измерима, так как симметрическая разность множеств $\{x|f(x) < c\}$ и $\{x|g(x) < c\}$ есть множество меры нуль и, следовательно, они одновременно измеримы. Свойство сходимости почти всюду и сходимости по мере также сохраняется, если функции f_n и f заменить на эквивалентные. Это означает, что указанные свойства определяются классом эквивалентности, а не конкретными представителями этого класса.

Заметим, что свойства, связанные с интегрируемостью, которые будут рассмотрены ниже, также определяются классом эквивалентности, которому принадлежит рассматриваемая функция. Более того, определения измеримости функции, эквивалентности функций, сходимости почти всюду и сходимости по мере имеют смысл, если рассматриваемые функции определены почти всюду. Поэтому все эти определения можно понимать для более широкого класса функций – функций, определенных почти всюду. Однако это различие не принципиально — если функция не определена на некотором множестве меры нуль, то ее можно доопределить на этом множестве произвольным образом и возникает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности в одном и в другом смысле.

П р и м е р 4. Пусть функция f непрерывна и почти всюду на $[0, 1]$ имеет производную g. Как известно, функция g может быть разрывной. Но, так как почти всюду $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n[f(x) - f(x-1/n)]$, то, согласно следствию 1, g — измеримая функция.

З а м е ч а н и е. Если функции f и g эквивалентны и последовательность f_n почти всюду сходится к f, то эта последовательность почти всюду сходится также и к функции g. Отсюда следует, в частности, что у сходящейся почти всюду последовательности имеется много различных пределов.

Построение интеграла Римана основывается на приближении исходной функции кусочно постоянными функциями. В теории интеграла Лебега аналогичную роль играют простые функции.

Определение 3. Функция $f\colon X \to \mathbf{R}$ называется *простой*, если она измерима и принимает конечное или счетное множество значений.

Теорема 2. *Функция f является простой тогда и только тогда, когда $X = \coprod\limits_k A_k$, где множества A_k измеримы и $f(x)$ принимает некоторое постоянное значение y_k на множестве A_k.*

$\triangleright$ Пусть f — простая функция, $\{y_k\}$ — множество ее значений и пусть $A_k = \{x|\ f(x) = y_k\}$. Тогда

$$A_k = \{x|\ f(x) \leqslant y_k\} \setminus \{x|\ f(x) < y_k\},$$

значит, A_k измеримо и получаем представление $X = \coprod\limits_k A_k$.

Обратно, пусть имеем представление $X = \coprod\limits_k A_k$. Тогда $A_c = \{x|\ f(x) < c\} = \bigcup\limits_{y_k<c} A_k$.$\triangleleft$

П р и м е р 5. Функция Дирихле — простая функция.

Теорема 3. *Для любой измеримой функции f существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций.*

$\triangleright$ Укажем явно одну из таких последовательностей. Положим $f_n(x) = m/n$, если $m/n \leqslant f(x) < (m+1)/n$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Множество A_{mn}, на котором функция принимает постоянное значение m/n, измеримо. По построению $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1/n \to 0$, т. е. последовательность f_n сходится к f равномерно. $\triangleleft$

У п р а ж н е н и е 2. Показать, что для любой измеримой функции f существует монотонно возрастающая последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к f.

У п р а ж н е н и е 3. Показать, что для любой неотрицательной измеримой функции f существует монотонно возрастающая последовательность простых функций, каждая из которых принимает конечное число значений, точечно сходящаяся к f.

Теорема 4. *Множество простых функций замкнуто относительно алгебраических операций, т. е. если f и g — простые функции, то функции $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g, где $g \neq 0$ почти всюду, также являются простыми функциями.*

▷ Пусть $X = \coprod\limits_k A_k$ и $f(x) = y_k$ для $x \in A_k$, а также $X = \coprod\limits_i B_i$ и $g(x) = z_i$ для $x \in B_i$. Тогда $X = \coprod\limits_{k,i}(A_k \cap B_i)$, и для $x \in A_k \cap B_i$ имеем $(f+g)(x) = y_k+z_i$, $(f-g)(x) = y_k-z_i$, $(f\cdot g)(x) = y_k z_i$, $(f/g)(x) = y_k/z_i$. В силу теоремы 2 все построенные функции являются простыми. ◁

Следствие 4. *Множество всех измеримых функций замкнуто относительно алгебраических операций.*

▷ Пусть f и g — измеримые функции. В силу теоремы 3 выберем последовательности f_n и g_n простых функций, которые сходятся равномерно к f и g соответственно. Тогда $f_n \to f$, $g_n \to g$ точечно. Отсюда следует, что $f_n \pm g_n \to f \pm g$, $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$, $f_n/g_n \to f/g$, $\lambda \cdot f_n \to \lambda \cdot f$ (λ — число) точечно и поэтому в силу теоремы 1 функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g, $\lambda \cdot f$ измеримы. ◁

Как мы уже отмечали выше, из точечной сходимости (сходимости почти всюду) не следует равномерная сходимость. Следующая теорема показывает, что для измеримых функций сходимость почти всюду все же в некотором смысле близка к равномерной.

Теорема 5 (Д. Ф. Егоров). *Пусть X — множество конечной меры и последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду на X к функции f. Тогда для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $X_\delta \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$ и на X_δ последовательность f_n сходится к f равномерно.*

▷ Пусть $f_n(x) \to f(x)$ точечно на подмножестве $X_0 \subset X$. Для любой точки $x \in X_0$ и любого натурального m существует номер n такой, что неравенство $|f_k(x) - f(x)| < 1/m$ выполняется для всех $k > n$. Пусть $X_n^m = \{x \in X_0 | \ |f_i(x) - f(x)| < 1/m$ для $i > n\}$. Тогда предыдущее утверждение означает, что $X_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^m$. Так как $X_1^m \subset \subset X_2^m \subset \ldots$ и множества X_n^m измеримы в силу измеримости f_i и f, то, по теореме 2 § 3, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n^m) = \mu(X_0)$ и, значит, $\mu(X_0 \setminus X_n^m) \to 0$. Для каждого m выберем номер $n(m)$ такой, что $\mu(X_0 \setminus X_{n(m)}^m) < \delta/2^m$.

Тогда для множества $X_\delta = \bigcap\limits_m X^m_{n(m)}$ имеем $X_0 \setminus X_\delta = \bigcup\limits_m (X_0 \setminus X^m_{n(m)})$,

$$\mu(X_0 \setminus X_\delta) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X_0 \setminus X^m_{n(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \delta/2^m = \delta.$$

По условию $\mu(X \setminus X_0) = 0$ и, значит,

$$\mu(X \setminus X_\delta) \leqslant \mu(X \setminus X_0) + \mu(X_0 \setminus X_\delta) < \delta.$$

Покажем, что на построенном множестве X_δ последовательность f_n сходится равномерно к f. По $\varepsilon > 0$ выберем номер $m > 1/\varepsilon$. Тогда для $k > n(m)$ получаем $X_\delta \subset X^m_{n(m)}$, т.е. для $x \in X_\delta$ выполняется неравенство $|f_k(x) - f(x)| < 1/m < \varepsilon$. $\lhd$

З а м е ч а н и е. Если множество X есть множество бесконечной меры, то утверждение теоремы Егорова не выполняется.

Следствие 5. *Если последовательность измеримых функций f_n сходится к f почти всюду на множестве конечной меры, то f_n сходится к f по мере.*

$\rhd$ Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Егорова существует такое множество X_ε, что $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ и на X_ε последовательность сходится равномерно. В силу равномерной сходимости для любого $c > 0$ существует номер n_ε, такой, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ для $x \in X_\varepsilon$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leqslant c$. Поэтому для таких n выполнено $\{x\colon |f_n(x) - f(x)| > c\} \subset X \setminus X_\varepsilon$ и, значит,

$$\mu\{x\colon |f_n(x) - f(x)| > c\} < \varepsilon. \lhd$$

§ 8. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть X — пространство с конечной σ-аддитивной полной мерой μ. Рассмотрим сначала конструкцию интеграла Лебега для частного случая ограниченных измеримых функций. Такое рассмотрение позволяет наглядно сравнить конструкцию интеграла Лебега с конструкцией интеграла Римана. Общее определение интеграла Лебега будет дано ниже независимо.

Если A — измеримое множество и

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

— его характеристическая функция, то интеграл Лебега от характеристической функции определяется равенством

$$\int\limits_X \chi_A(x)\, d\mu = \mu(A).$$

Это определение согласуется, например, с тем, что интеграл Римана характеристической функции интервала совпадает с длиной этого интервала, т. е. с его мерой.

Дальше интеграл будем определять таким образом, чтобы выполнялись свойства линейности и непрерывности:

1) линейность:

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int\limits_X f\, dx + \beta \int\limits_X g\, dx;$$

2) непрерывность: если f_n сходится к f равномерно, то

$$\int\limits_X f_n\, dx \to \int\limits_X f\, dx.$$

Для выполнения свойства линейности полагаем, что если $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}$, т. е. f — простая функция, принимающая конечное число значений, то

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k). \tag{1}$$

Отметим, что из (1) немедленно вытекает неравенство

$$\Bigl| \int\limits_X f(x)\, d\mu \Bigr| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)|\, \mu(X). \tag{2}$$

Действительно,

$$\Bigl| \int\limits_X f(x)\, d\mu \Bigr| = \Bigl| \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k) \Bigr| \leqslant \sup |y_k| \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sup_{1 \le k \le n} |y_k|\, \mu(X).$$

Лемма 1. *Пусть последовательность f_n простых функций, каждая из которых принимает конечное число значений, равномерно сходится к f. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu$ и этот предел не зависит от выбора последовательности f_n.*

$\triangleright$ Проверим, что числовая последовательность $I_n = \int\limits_X f_n\, d\mu$ является последовательностью Коши. Действительно, в силу (2) имеем

$$|I_n - I_m| \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)|\, \mu(X) \to 0 \text{ при } \ n \to \infty.$$

Значит, последовательность I_n сходится. Если g_n — другая аналогичная последовательность, равномерно сходящаяся к f, то

$$\left| \int\limits_X (f_n - g_n)\, d\mu \right| \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - g_n(x)|\, \mu(X) \to 0 \text{ при } \ n \to \infty,$$

т. е. предел не зависит от выбора последовательности f_n. $\triangleleft$

Если измеримая функция f ограничена, то построенная в теореме 3 § 7 последовательность f_n простых функций, равномерно сходящаяся к f, состоит из функций, принимающих конечное число значений. В лемме 1 доказано, что существует предел интегралов от функций f_n и этот предел не зависит от выбора последовательности f_n. Поэтому корректно следующее определение.

Определение 1. *Интегралом Лебега* ограниченной измеримой функции f на множестве X с конечной мерой μ называется число

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu,$$

где f_n — произвольная последовательность простых функций, принимающих конечное число значений, равномерно сходящаяся к f.

Существование интеграла Лебега для любой ограниченной измеримой функции следует из предыдущих рассуждений. Заметим, что в этих рассуждениях использовалось только свойство аддитивности меры и не использовалась σ-аддитивность. Поэтому определение 1 корректно для конечно аддитивных мер. Последующие определения и свойства существенно используют σ-аддитивность.

Так как предел не зависит от выбора последовательности, зафиксируем последовательность простых функций f_n, равномерно сходящуюся к f, а именно, рассмотрим последовательность функций f_n, построенную в теореме 3 § 7, определенную следующим образом: $f_n(x) = k/n$ при $k/n \leqslant f(x) < (k+1)/n$.

На множестве $A_{kn} = \{x| \; k/n \leqslant f(x) < (k+1)/n\}$ функция f_n принимает значение $y_k = k/n$, число таких значений конечно. Используя определение интеграла от функции f_n, получаем новое эквивалентное определение интеграла от ограниченной измеримой функции.

Определение 2. *Интегральной суммой Лебега* S_n для функции f будем называть сумму вида

$$S_n = \sum_k \frac{k}{n}\,\mu\Bigl(\Bigl\{x\Bigm|\, \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}\Bigr\}\Bigr).$$

Интегралом Лебега называется предел интегральных сумм

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Так как $S_n = \int\limits_X f_n(x)\,d\mu$, это определение эквивалентно определению 1, причем существование предела уже доказано.

Формула для интегральных сумм Лебега позволяет описать отличие в определении интеграла Римана и интеграла Лебега. В обоих определениях (в случае $f(x) > 0$) в основе лежит интуитивное представление об интеграле как площади (мере) фигуры, лежащей между графиком функции f и осью x. Для подсчета площади (меры) эта фигура разбивается на более простые части, для которых выписывается приближенное значение площади (меры). При составлении интегральных сумм Римана отрезок $[a,b]$ разбивается на части точками $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, в каждой части выбирается точка ξ_k и составляется сумма

$$\sum_1^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

При этой конструкции в качестве приближенного значения площади криволинейной трапеции, ограниченной осью x, графиком функции f и вертикальными отрезками, проходящими через точки x_k и x_{k+1}, берется число $f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$. Такое приближение оправдано лишь в случае, когда значения функции на всем отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ близки к значению $f(\xi_k)$, что выполнено, если функция f непрерывна.

При составлении интегральных сумм Лебега выделяются множества A_{kn} и на множестве A_{kn} функция f приближается постоянной k/n. Погрешность при этом не превосходит $1/n$ для любой функции и, следовательно, такое приближение точнее.

Таким образом, различие в двух определениях заключается в том, что при составлении интегральных сумм Римана разбиение отрезка производится по признаку близости точек на оси x, а при составлении интегральных сумм Лебега — по признаку близости значений функции. Одно из преимуществ второго определения нам уже известно – любая измеримая ограниченная функция интегрируема по Лебегу.

Суммирование по Риману и Лебегу аналогично подсчету суммы монет разного достоинства двумя способами. "Риман" считает монеты в том порядке, в котором они ему попадаются $(1+2+3+10+5+20+$ $+2+3+3+\ldots)$. "Лебег" же сначала подсчитывает количество монет достоинством в 1 коп., затем 2, 3 и т. д., а затем определяет сумму. Опытный кассир всегда считает сумму "по Лебегу".

Аналогично определяется интеграл Лебега в общем случае, когда функция может быть неограниченной. Однако неограниченная измеримая функция может оказаться неинтегрируемой. Заметим, что определение 1 в дальнейших рассуждениях не используется, оно является частным случаем более общего определения 4 и приведено только для пояснения естественности конструкции и сравнения с конструкцией интеграла Римана.

Определение 3. Простая функция f, принимающая значения y_k на множествах A_k, $k = 1, 2, \ldots$, называется *интегрируемой*, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\, \mu(A_k)$ сходится абсолютно. Если простая функция f интегрируема, то сумма этого ряда называется *интегралом Лебега* функции f, т. е.

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sum_k y_k\, \mu(A_k). \tag{3}$$

Требование абсолютной сходимости ряда (3) возникает из следующих соображений. Так как нет естественной нумерации множеств A_k, то при изменении нумерации происходит перестановка членов ряда (3) и, если нет абсолютной сходимости, сумма ряда может измениться. Так как интеграл не должен зависеть от случайно выбранной нумерации множеств A_k, то в определении требуется, чтобы ряд (3) сходился абсолютно.

Заметим, что неравенство (2) и основанная на нем лемма 1 справедливы для интегрируемых простых функций. Поэтому корректно следующее определение, аналогичное определению 1.

Определение 4. Измеримая функция f (на пространстве с конечной мерой) называется *интегрируемой* (*суммируемой*), если существует равномерно сходящаяся к f последовательность f_n простых **интегрируемых** функций. *Интегралом Лебега* функции f по множеству X с мерой μ называется предел интегралов Лебега от функций f_n:

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu.$$

Множество всех функций, интегрируемых на множестве X по мере μ, обозначается $\mathbf{L}(X,\mu)$.

Рассмотрим сначала основные элементарные свойства интеграла Лебега.

1. Для измеримого множества A

$$\int\limits_A 1\,d\mu = \mu(A) = \int\limits_X \chi_A(x)\,d\mu.$$

2. Если f и g — интегрируемые функции, то функция $f+g$ интегрируема и справедливо равенство

$$\int\limits_X [f(x)+g(x)]\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu + \int\limits_X g(x)\,d\mu.$$

Проверим сначала свойство 2 для простых функций. Пусть $f(x) = y_k$ при $x\in A_k$, $X=\coprod\limits_k A_k$; $g(x)=z_i$ при $x\in B_i$, $X=\coprod\limits_i B_i$. Тогда $f(x)+g(x) = y_k+z_i$ при $x\in A_k\cap B_i$ и $X=\coprod\limits_{i,k}(A_k\cap B_i)$. Отсюда получаем

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu + \int\limits_X g(x)\,d\mu = \sum_k y_k\,\mu(A_k) + \sum_i z_i\,\mu(B_i) =$$

$$= \sum_k y_k \sum_i \mu\Big(A_k \bigcap B_i\Big) + \sum_i z_i \sum_k \mu\Big(A_k \bigcap B_i\Big) =$$

$$= \sum_i \sum_k (y_k + z_i)\mu\Big(A_k \bigcap B_i\Big) = \int\limits_X [f(x) + g(x)]\, d\mu.$$

Пусть теперь f и g — произвольные интегрируемые функции и пусть f_n и g_n — равномерно сходящиеся к f и g соответственно последовательности простых интегрируемых функций. Последовательность $f_n + g_n$ равномерно сходится к $f + g$, значит, $f + g$ интегрируема. Переходя к пределу в равенстве

$$\int\limits_X f_n\, d\mu + \int\limits_X g_n\, d\mu = \int\limits_X (f_n + g_n)\, d\mu,$$

получаем свойство 2.

3. Пусть f — интегрируемая функция, $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда функция $\lambda \cdot f(x)$ интегрируема и справедливо равенство

$$\int\limits_X \lambda \cdot f(x)\, d\mu = \lambda \int\limits_X f(x)\, d\mu.$$

Для простых функций это утверждение и равенство очевидны. Для произвольных интегрируемых функций оно устанавливается переходом к пределу.

4. Если функция ограничена и измерима, то она интегрируема (следствие леммы 1).

5. Если f — интегрируемая функция, ограниченная сверху постоянной c, т. е. $f(x) \leqslant c$, то $\int\limits_X f(x)\, d\mu \leqslant c \cdot \mu(X)$.

Пусть $f_n(x) = k/n$ при $k/n \leqslant f(x) < (k+1)/n$. Тогда последовательность простых функций f_n равномерно сходится к f и $f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant c$. В неравенстве для простых функций

$$\int\limits_X f_n(x)\, d\mu \leqslant \sup_{x \in X} f_n(x)\, \mu(X) \leqslant c\mu(X)$$

переходим к пределу при $n \to \infty$ и получаем требуемое неравенство.

Отметим частные случаи свойства 5.

5а. Если f интегрируема и $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_X f(x)\, d\mu \geqslant 0$.

5б. Если f_1 и f_2 — интегрируемые функции и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_X f_1(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_X f_2(x)\, d\mu.$$

Утверждение следует из неравенства $f_2(x) - f_1(x) \geqslant 0$ и свойства 5.

6. Если функция f измерима и $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, где функция φ интегрируема, то f интегрируема.

Проверим сначала свойство 6 для простых функций. Пусть f и φ — простые функции. Пусть имеется разбиение $X = \coprod\limits_k A_k$ такое, что $f(x) = y_k$, $\varphi_k(x) = z_k$, если $x \in A_k$. При этом выполняется неравенство $|y_k| \leqslant z_k$. Тогда, составляя ряды, получаем

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_k y_k\,\mu(A_k) \leqslant \sum_k |y_k|\,\mu(A_k) \leqslant \sum_k z_k\,\mu(A_k).$$

Ряд для функции f мажорируется абсолютно сходящимся рядом и, значит, сам абсолютно сходится. Теперь свойство 6 устанавливается предельным переходом.

Отметим частные случаи свойства 6.

6а. Если $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, где f_1 и f_2 — интегрируемые функции и f — измеримая функция, то f интегрируема.

Утверждение получается из неравенства $|f(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)|$.

6б. Если f — интегрируемая функция, а g — ограниченная (выполнено неравенство $|g(x)| \leqslant c$) измеримая функция, то $f \cdot g$ интегрируема, причем $\Big|\int\limits_X f(x) \cdot g(x)\,d\mu\Big| \leqslant c \int\limits_X |f(x)|\,d\mu$.

Действительно, из неравенства $-c \cdot f(x)| \leqslant f(x)g(x) \leqslant c \cdot |f(x)|$ по свойству 6а получаем, что произведение $f \cdot g$ интегрируемо, и по свойству 5б — требуемое неравенство.

Наименьшая из постоянных c, для которых выполнено неравенство $(|g(x)| \leqslant c)$, есть $\sup |g(x)|$. Поэтому неравенство для интегралов из свойства 6б можно записать в виде

$$\Big|\int\limits_X f(x) \cdot g(x)\,d\mu\Big| \leqslant \sup|g(x)| \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

Если f — интегрируемая на X функция, то для любого измеримого подмножества $A \subset X$ интеграл по A определен равенством

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \int\limits_X \chi_A(x) f(x)\,d\mu.$$

Если A и B — измеримые множества и $A \cap B = \emptyset$, то $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B}$. Поэтому, используя свойства 2 и 6, получаем, что

$$\int\limits_{A \cup B} f(x)\,d\mu = \int\limits_A f(x)\,d\mu + \int\limits_B f(x)\,d\mu.$$

Это свойство называется *аддитивностью* интеграла Лебега относительно множеств.

7. Если $f(x)$ — интегрируемая функция, то $|f(x)|$ также интегрируема.

Для простых функций это свойство выполняется по определению (требование абсолютной сходимости ряда), для произвольных интегрируемых функций проверяется с помощью предельного перехода, причем справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_X f(x)\,d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

8. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\,d\mu = 0$ для любой функции f (на множестве меры нуль любая функция измерима).

Для простых функций это свойство очевидно, а для произвольных получается предельным переходом.

Из этого свойства вытекает следующее утверждение.

8а. Если $f(x) = 0$ почти всюду на X, то $\int\limits_X f(x)\,d\mu = 0$. Действительно, пусть A — множество меры нуль, вне которого $f(x) = 0$, тогда

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_A f(x)\,d\mu + \int\limits_{X \setminus A} 0\,d\mu = 0.$$

В частности, если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_X g(x)\,d\mu$.

Последнее свойство позволяет усилить некоторые предыдущие утверждения. В условиях можно потребовать выполнения неравенств почти всюду и при этом выводы сохраняются и даже могут быть усилены. Так, утверждение 6б справедливо, если функция f измерима и почти всюду ограничена, т. е. для некоторого c неравенство $|g(x)| \leqslant c$ выполняется почти всюду. При этом неравенство для интегралов выполняется, если взять наименьшую из таких констант. Таким образом возникает новая характеристика измеримой функции на пространстве с мерой, называемая *существенным супремумом:*

$$ess\ sup\ f := inf\{c\ |\mu(\{x|f(x) > c\}) = 0\} = inf\{c|f(x) \leq c \text{ п. в.}\}.$$

Множество измеримых ограниченных почти всюду на X функций обозначается $\mathcal{L}_\infty(X, \mu)$.

9. Если $\int\limits_X |f(x)|\, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство этого свойства опирается на неравенство Чебышева, которое используется и в других вопросах.

Лемма 2. *Пусть f — интегрируемая функция, $f(x) \geqslant 0$, $c > 0$, и пусть $A_c = \{x|\ f(x) \geqslant c\}$. Тогда справедливо неравенство Чебышева:*

$$\mu(A_c) \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_X f(x)\, d\mu.$$

$\triangleright$ Из свойств 2 и 5 получаем цепочку неравенств:

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \int\limits_{A_c} f(x)\, d\mu + \int\limits_{X \setminus A_c} f(x)\, d\mu \geqslant \int\limits_{A_c} f(x)\, d\mu \geqslant c\mu(A_c).$$

Разделив неравенство на c, получаем неравенство Чебышева. $\triangleleft$

Доказательство свойства 9.

$\triangleright$ Обозначим $A_c = \{x|\ |f(x)| > c\}$. Тогда

$$A_0 = \{x|\ |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}.$$

Нужно показать, что $\mu(A_0) = 0$. По неравенству Чебышева получаем

$$\mu(A_{1/n}) \leqslant \frac{1}{1/n} \int\limits_X |f(x)|\, d\mu = 0.$$

Значит, $\mu(A_0) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_{1/n}) = 0$. $\triangleleft$

§ 9. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

Вопрос о возможности предельного перехода под знаком интеграла для последовательности интегрируемых функций f_n есть вопрос о справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu \tag{1}$$

и включает в себя вопрос о существовании предела в левой части, вопрос о существовании интеграла в правой части равенства, вопрос о том, в каком смысле понимается предел последовательности функций, и вопрос о взаимосвязи существования двух указанных пределов.

Для интеграла Римана возможность предельного перехода доказывается обычно для равномерно сходящихся последовательностей. Однако, как уже отмечалось в § 2, даже в случае, когда последовательность f_n на отрезке точечно сходится к ограниченной функции f, эта функция может оказаться неинтегрируемой по Риману и предельный переход в таком случае будет невозможен.

Возможность перехода к пределу под знаком интеграла Лебега в случае равномерно сходящейся последовательности функций следует из элементарных свойств интеграла Лебега. Действительно, пусть последовательность интегрируемых функций f_n равномерно сходится к функции f. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при $n > n_0$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Отсюда вытекает неравенство $|f(x)| \leqslant \varepsilon + f_{n_0}(x)$, и из свойства 6 получаем интегрируемость функции $f(x)$. Переходя к пределу в неравенстве

$$\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu \leqslant \sup |f_n(x) - f(x)|\, \mu(X),$$

получаем искомое равенство

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu.$$

Если последовательность f_n точечно (или почти всюду) сходится к функции f, то в общем случае переходить к пределу под знаком интеграла нельзя.

П р и м е р 1. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n, & 1/(2n) < x < 1/n, \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда $f_n \to 0$ точечно, но $\int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = 1 \not\to 0$.

При точечной сходимости может также оказаться, что предельная функция не интегрируема.

П р и м е р 2. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 1/n, \\ 0, & x \leqslant 1/n. \end{cases}$$

Тогда $f_n(x) \to 1/x$ точечно на $]0,1[$, но предельная функция $1/x$ не интегрируема.

П р и м е р 3. Пусть $X = \coprod\limits_k A_k$ и $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}$, т.е. f — произвольная простая функция. Последовательность $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}$ простых интегрируемых функций точечно сходится к $f(x)$. Но f интегрируема лишь при дополнительном условии, что ряд $\sum\limits_k |y_k| \mu(A_k)$ сходится. При выполнении этого условия (по определению)

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu.$$

Если ряд $\sum\limits_k y_k \mu(A_k)$ сходится условно, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu$ существует, но предельная функция не интегрируема. При этом за счет изменения нумерации множеств можно построить аналогичную последовательность, сходящуюся к той же функции f, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu$ будет равен произвольному числу.

Эти примеры показывают, что в общем случае при точечной сходимости нет определенной связи между левой и правой частью в выражении (1) (и их существованием). Поэтому теоремы о справедливости предельного перехода под знаком интеграла содержат обычно некоторые дополнительные условия на последовательность, более слабые, чем требование равномерной сходимости, но более сильные, чем сходимость почти всюду.

Обоснование возможности предельного перехода опирается на свойство *абсолютной непрерывности интеграла Лебега.*

Теорема 1 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть f — интегрируемая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(A) < \delta$, то* $\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon$.

$\triangleright$ Пусть сначала f — простая функция, $f(x) = y_k$, если $x \in A_k$, и $X = \coprod\limits_k A_k$. Тогда

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k\,\mu(A_k),$$

причем ряд сходится абсолютно. Выберем номер N так, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |y_k|\,\mu(A_k) < \varepsilon/2$. Пусть $B = \coprod\limits_{k=N+1}^{\infty} A_k$ и $c = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} |y_k| = \max\limits_{X\setminus B} |f(x)|$. Возьмем $\delta < \varepsilon/2c$ и пусть $\mu(A) < \delta$. Тогда

$$\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{A\cap B} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{(X\setminus B)\cap A} |f(x)|\,d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + c\delta \leqslant \varepsilon.$$

Пусть теперь f — произвольная интегрируемая функция. Выберем простую интегрируемую функцию g такую, что выполнено неравенство $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon/2\mu(X)$. Для простой функции g (по доказанному) можем выбрать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\left|\int\limits_A g(x)\,d\mu\right| < \varepsilon/2$, если только $\mu(A) < \delta$. Тогда

$$\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_A |g(x)|\,d\mu + \int\limits_A |f(x) - g(x)|\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon/2\mu(X))\mu(A) + \varepsilon/2 < \varepsilon. \triangleleft$$

Следствие (σ-аддитивность интеграла Лебега). *Пусть f — интегрируемая функция и $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — измеримые множества. Тогда*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x)\,d\mu,$$

причем ряд сходится абсолютно.

$\triangleright$ Для функции f по $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что если $\mu(A) < \delta$, то $\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon$. Выберем номер N таким, чтобы $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \mu(A_k) < \delta$. Тогда для $n > N$ выполняется равенство

$$\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f(x)\,d\mu\right| = \left|\int\limits_{\coprod\limits_{k=N+1}^{\infty} A_k} f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Применяя доказанное утверждение к интегрируемой функции $|f(x)|$, получаем сходимость мажорирующего ряда и, следовательно, абсолютную сходимость рассматриваемого ряда. $\triangleleft$

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если* $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, f *интегрируема на* A_k *и ряд*

$$\sum_k \int\limits_{A_k} |f(x)|\,d\mu \tag{2}$$

сходится, то функция f *интегрируема на* A *и*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_k \int\limits_{A_k} f(x)\,d\mu.$$

$\triangleright$ Сначала предположим, что f — простая функция. Пусть $X = \coprod\limits_i B_i$ и $f(x) = y_i$, если $x \in B_i$. Положив $A_{ki} = A_k \cap B_i$, имеем

$$\int\limits_{A_k} |f(x)|\,d\mu = \sum_i |y_i|\mu(A_{ki}).$$

Из сходимости ряда (2) вытекает, что сходятся ряды

$$\sum_k \sum_i |y_i|\mu(A_{ki}) = \sum_i |y_i|\mu(B_i \cap A).$$

Сходимость последнего ряда означает, что существует интеграл

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_i y_i\mu(B_i \cap A).$$

В общем случае приближаем функцию f простой функцией g так, что

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{A_k} |g(x)|\, d\mu \leqslant \int\limits_{A_k} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon\mu(A_k).$$

Так как ряд $\sum\limits_k \mu(A_k) = \mu(A)$ сходится, то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда

$$\sum_k \int\limits_{A_k} |g(x)|\, d\mu,$$

т. е. по только что доказанному, интегрируемость на A простой функции g. Но тогда исходная функция f тоже интегрируема на A. Теорема доказана. $\lhd$

З а м е ч а н и е 1. При фиксированной интегрируемой функции f отображение

$$A \to \Phi(A) := \int_A f(x)\ dx$$

есть функция множества, определенная на алгебре измеримых множеств. Доказанное в следствии теоремы 1 свойство есть свойство σ-аддитивности этой функции множества, а свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега совпадает со свойством, характеризующим абсолютно непрерывные меры в лемме из § 6.

Теорема 3 (о мажорированной сходимости, Лебег). *Пусть последовательность измеримых функций f_n почти всюду сходится к функции f и пусть существует такая интегрируемая функция φ, что $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ почти всюду. Тогда предельная функция f интегрируема и*

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu.$$

$\rhd$ По свойству 6 § 8 из неравенства $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ следует, что f_n интегрируемы, а из теоремы 1 § 7 получаем, что функция f измерима. Так как выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, то f — интегрируемая функция.

Нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнено

$$\left| \int_X f(x)\, d\mu - \int_X f_n(x)\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

По свойству абсолютной непрерывности выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\int\limits_A \varphi(x)\, d\mu < \varepsilon/3$, если $\mu(A) < \delta$. Тогда выполняются также неравенства $\int\limits_A |f_n(x)|\, d\mu < \varepsilon/3$ и $\int\limits_A |f(x)|\, d\mu < \varepsilon/3$. Воспользуемся теоремой Егорова: по $\delta > 0$ найдем множество $X_\delta \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$ и на X_δ последовательность f_n сходится равномерно. Выберем номер n_ε так, чтобы для $n > n_\varepsilon$ выполнялось

$$\sup_{x \in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(X)}.$$

Тогда для $n > n_\varepsilon$ имеем

$$\left| \int_X f(x)\, d\mu - \int_X f_n(x)\, d\mu \right| \leqslant \int_{X_\delta} |f(x) - f_n(x)|\, d\mu +$$

$$+ \int_{X \setminus X_\delta} |f(x)|\, d\mu + \int_{X \setminus X_\delta} |f_n(x)|\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{3\mu(X)} \mu(X_\delta) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \varepsilon. \lhd$$

Теорема 4 (Б. Леви). *Пусть $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность интегрируемых функций и пусть существует постоянная C такая, что $\int\limits_X f_n(x)\, d\mu \leqslant C$ для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда почти всюду существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$, функция f интегрируема и*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

$\rhd$ Заметим, что последовательность $\varphi_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы и состоит из неотрицательных функций. Поэтому доказательство теоремы достаточно провести для случая $f_n(x) \geqslant 0$. Зафиксируем точку x. Числовая последовательность

$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ возрастает и, значит, имеет конечный или бесконечный предел. Покажем, что для почти всех x предел $f_n(x)$ при $n \to \infty$ конечен. Введем множество

$$\Omega = \{x|\ x \in X, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}.$$

Докажем, что $\mu(\Omega) = 0$. Возьмем произвольное число $r > 0$. Если $x \in \Omega$, то существует номер $n(x)$ такой, что $f_n(x) > r$. Если ввести множества $\Omega_n = \{x|\ f_n(x) > r\}$, то предыдущая фраза означает, что $\Omega \subset \bigcup\limits_n \Omega_n$.

Так как $f_n \geqslant 0$, то применимо неравенство Чебышева, в силу которого $\mu(\Omega_n) \leqslant C/r$. Поскольку последовательность f_n монотонно возрастает, то $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ и, значит,

$$\mu(\Omega) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) \leqslant C/r.$$

Ввиду того, что r произвольно, $\mu(\Omega) = 0$.

Теперь докажем с помощью теоремы Лебега, что функция f интегрируема и возможен предельный переход под знаком интеграла. Пусть $\varphi(x) = k$, если $x \in A_k$, где $A_k = \{x|\ k-1 \leqslant f(x) < k\}$. Тогда $f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ и нужно только доказать, что функция φ интегрируема, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,\mu(A_k)$ сходится. Для этого достаточно показать, что частичные суммы

$$\sum_{k=1}^{m} k\mu(A_k) = \int\limits_{B_m} \varphi(x)\,d\mu,$$

где $B_m = \coprod\limits_{k=1}^{m} A_k$, ограничены в совокупности. На множестве B_m имеем $f_n(x) \leqslant m$, поэтому на B_m применима теорема Лебега и

$$\int\limits_{B_m} f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_m} f_n(x)\,d\mu \leqslant C.$$

Но по построению $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, откуда получаем

$$\int\limits_{B_m} \varphi(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_{B_m} (f(x)+1)\,d\mu \leqslant C + \mu(X). \lhd$$

Следствие 1. *Пусть $\varphi_n(x)$ — последовательность неотрицательных интегрируемых функций и пусть числовой ряд $\sum\limits_1^\infty \int\limits_X \varphi_n(x)\,d\mu$ сходится. Тогда почти всюду сходится ряд $\sum\limits_1^\infty \varphi_n(x)$ и*

$$\int\limits_X \left(\sum_1^\infty \varphi_n(x)\right) d\mu = \sum_1^\infty \int\limits_X \varphi_n(x)\,d\mu.$$

Доказательство получается применением теоремы Б. Леви к последовательности частичных сумм $\sum\limits_1^n \varphi_k(x)$.

Заметим, что утверждение теоремы 2 § 9 является простым следствием теоремы Б. Леви и теоремы Лебега.

Следствие 2. *Пусть $X = \coprod\limits_1^\infty A_k$ и пусть f — такая измеримая функция, что интегралы $\int\limits_{A_k} |f(x)|\,d\mu$ существуют и ряд $\sum\limits_k \int\limits_{A_k} |f(x)|\,d\mu$ сходится. Тогда f интегрируема и*

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_k \int\limits_{A_k} f(x)\,d\mu. \tag{3}$$

$\triangleright$ Пусть $\varphi_k(x) = \begin{cases} |f(x)|, & x \in A_k, \\ 0, & x \notin A_k, \end{cases}$ тогда $|f(x)| = \sum\limits_k \varphi_k(x)$. В силу следствия 1 функция $|f|$ интегрируема, а значит, интегрируема функция f и выполняется равенство (3). $\triangleleft$

Теорема 5 (лемма Фату). *Если последовательность неотрицательных интегрируемых функций f_n сходится почти всюду к f и существует постоянная K такая, что $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu \leqslant K$ (интегралы $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu$ ограничены в совокупности постоянной K), то функция f интегрируема и $\int\limits_X f(x)\,d\mu \leqslant K$.*

$\triangleright$ По последовательности f_n построим новую последовательность $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$. Функция $\varphi_n(x)$ измерима. Действительно, для любой постоянной C множество $A_C = \{x \mid \varphi_n(x) < C\}$ представляется в виде $A_C = \bigcup\limits_{k \geqslant n} \{x|\ f_k(x) < C\}$ и, значит, A_C измеримо как объединение счетного числа измеримых множеств. Последовательность $\varphi_n(x)$ монотонно возрастает, $\varphi_n(x) \to f(x)$ и $\varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$. Применяя теорему Б. Леви, получаем утверждение теоремы Фату. ◁

Замечание 2. Если последовательность f_n удовлетворяет условиям теоремы Фату, то нельзя утверждать, что

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu.$$

Пусть, например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n, & 1/2n \leqslant x < 1/n, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда точечно $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$, $\int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = 1$, но

$$0 = \int\limits_{[0,1]} f(x)\,d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = 1.$$

Определение 1. Говорят, что последовательность функций f_n *сходится в среднем* к функции f, если

$$\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\,d\mu \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Как показывают приведенные выше примеры, из сходимости почти всюду не следует сходимость в среднем. Из теорем о предельном переходе следует, что из сходимости почти всюду последовательности функций f_n к f при некоторых дополнительных условиях вытекает сходимость в среднем. Покажем, что обратное утверждение не всегда верно, т. е. сходящаяся в среднем последовательность функций может не быть почти всюду сходящейся.

Пример. Пусть последовательность $f_n(x)$ функций на отрезке $[0,1]$ построена следующим образом: зададим функции

$$\varphi_{mk}(x) = \begin{cases} 1, & (k-1)/m \leqslant x < k/m;\, k = 1, \ldots, m;\, m = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

и занумеруем их следующим образом: $f_1 = \varphi_{11}$, $f_2 = \varphi_{21}$, $f_3 = \varphi_{22}$, $f_4 = \varphi_{31}$, $f_5 = \varphi_{32}$, $f_6 = \varphi_{33}$, $f_7 = \varphi_{41}, \ldots$. Тогда ни в одной точке последовательность $f_n(x)$ не имеет предела, но $\int\limits_0^1 |f_n(x)|\,d\mu \to 0$, т. е. последовательность сходится в среднем к нулю.

Следствие 2 теоремы 4 подсказывает, как естественно записать определение интеграла Лебега в случае σ-конечной меры.

Определение 2. Пусть X — множество с σ-конечной мерой μ, $X = \coprod\limits_1^\infty X_k$, где $\mu(X_k) < +\infty$. Измеримая функция f называется *интегрируемой на* X, если сходится ряд $\sum\limits_1^\infty \int\limits_{X_k} |f(x)|\,d\mu$. *Интегралом Лебега* интегрируемой функции f называется число

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{X_k} f(x)\,d\mu.$$

Легко проверить, что определенный таким образом интеграл не зависит от способа разбиения X на множества конечной меры и что для функций, интегрируемых на множестве X с σ-конечной мерой, справедливы теоремы 1 – 5 о предельном переходе.

Доказанные теоремы позволяют получить критерий интегрируемости, который иногда берется в качестве определения интеграла Лебега.

Теорема 6. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — измеримая функция на множестве X с σ-аддитивной мерой μ. Пусть M — множество простых функций g, каждая из которых принимает конечное число значений и удовлетворяет неравенству $g(x) \leqslant f(x)$. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда существует постоянная C, такая, что $\int\limits_X g(x)\,d\mu \leqslant C$ для любой функции $g \in M$, при этом*

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sup_M \int\limits_X g(x)\,d\mu. \tag{4}$$

$\triangleright$ Обозначим $C_0 = \sup\limits_M \int\limits_X g(x)\,d\mu$. Для неотрицательной измеримой функции существует последовательность g_n простых функций, принимающих конечное число значений, которая монотонно возрастает и почти всюду сходится к f (упр. 3 § 7). Если f — интегрируемая функция, то по теореме Лебега $\int\limits_X g_n(x)\,d\mu \to \int\limits_X f(x)\,d\mu$ и, значит, $\int\limits_X f(x)\,d\mu \geqslant C_0$.

Так как неравенство $\int\limits_X g(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)\,d\mu$ для $g \in M$ очевидно (свойство 5 интеграла Лебега), получаем (4).

Если существует C из условия теоремы, то к последовательности g_n применима теорема Б. Леви, функция f интегрируема и по доказанному выполнено (4). $\lhd$

Доказанная теорема показывает, что для неотрицательных измеримых функций интеграл Лебега может быть определен по формуле (4). Произвольная функция f представляется в виде $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm(x) = 1/2[|f(x)| \pm f(x)]$, $f_\pm \geqslant 0$. Поэтому интеграл от f может быть определен равенством

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_X f_+(x)\,d\mu - \int\limits_X f_-(x)\,d\mu.$$

По доказанному определение интеграла Лебега с помощью равенства (4) эквивалентно определению 4 § 8, такое определение используется в ряде книг и учебников.

§ 10. СРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА С ИНТЕГРАЛОМ РИМАНА

В § 8 были отмечены различия в определениях интеграла Римана и интеграла Лебега, приводящие к различию классов функций, интегрируемых по Риману и по Лебегу. Рассмотрим подробнее взаимоотношения между этими классами. Прежде всего заметим. что для непрерывных функций на отрезке совпадение интеграла Римана и интеграла Лебега почти очевидно. Действительно, конструкция интеграла Римана эквивалентна тому, что для функции строится некоторая аппроксимирующая последовательность кусочно постоянных функций, и интегралом называется предел интегралов от функций из этой последовательности. Но в случае непрерывных функций такая последовательность сходится равномерно к исходной функции и предел указанных интегралов есть по определению интеграл Лебега. Однако среди интегрируемых по Риману функций есть разрывные функции, и для таких функций совпадение двух рассматриваемых интегралов требует более детального доказательства.

Теорема 1 (Лебег). *Если для функции f, заданной на отрезке $[a,b]$, существует собственный интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то она интегрируема по Лебегу и ее интеграл Лебега $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu$ равен интегралу Римана.*

$\triangleright$ Построим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для интеграла Римана. Отрезок интегрирования $[a,b]$ разбиваем на 2^n частей точками $x_k = a + k(b-a)/2^n$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n$.

Пусть

$$M_{nk} = \sup_{x_{k-1} \leqslant x < x_k} f(x), \quad m_{nk} = \inf_{x_{k-1} \leqslant x < x_k} f(x). \tag{1}$$

Тогда верхняя сумма Дарбу $\overline{S}_n$ и нижняя сумма Дарбу $\underline{S}_n$ определяются равенствами

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk} \frac{b-a}{2^n}, \quad \underline{S}_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk} \frac{b-a}{2^n}.$$

Построим функции $\overline{f}_n = M_{nk}$ и $\underline{f}_n(x) = m_{nk}$, если $x_{k-1} \leqslant x < x_k$. Это простые функции и

$$\overline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n\,d\mu, \quad \underline{S}_n = \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n\,d\mu.$$

С ростом n отрезок, по которому вычисляется inf в (1), уменьшается и, следовательно, inf увеличивается. Поэтому последовательность $\underline{f}_n(x)$ монотонно возрастает, т. е. $\underline{f}_n(x) \leqslant \underline{f}_{n+1}(x)$. Аналогично последовательность $\overline{f}_n(x)$ монотонно убывает, т. е. $\overline{f}_n(x) \geqslant \overline{f}_{n+1}(x)$. Так как $\underline{f}_n(x) \leqslant f(x)$ и $\overline{f}_n(x) \geqslant f(x)$, то существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \underline{f}_n(x) = \underline{f}(x) \leqslant f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(x) = \overline{f}(x) \geqslant f(x).$$

Так как $|\underline{f}_n(x)| \leqslant \sup|f(x)|$, $|\overline{f}_n(x)| \leqslant \sup|f(x)|$, то по теореме Лебега о предельном переходе $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ — интегрируемые по Лебегу функции и

$$\int\limits_{[a,b]} \overline{f}(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n,$$

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n.$$

Согласно известному из математического анализа критерию, функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n := I.$$

Это общее значение пределов I и есть интеграл Римана. Поэтому

$$\int\limits_{[a,b]} [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\,d\mu = 0$$

и, значит, $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду. Так как $\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x)$, то $f(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду, функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу и $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu = I$. $\lhd$

Замечание 1. Среди функций, для которых существует несобственный интеграл Римана, есть функции, неинтегрируемые по Лебегу. Это функции, для которых несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, а $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится. В качестве примера можно взять $f(x) = (1/x)\sin(1/x)$ на $[0,1]$.

Здесь нужно отметить, что понятие несобственного интеграла не связано непосредственно с определением интеграла Римана и имеет смысл при использовании интеграла Лебега. При этом класс функций, интегрируемых в несобственном смысле по Лебегу, оказывается шире класса функций, интегрируемых в несобственном смысле по Риману. Однако несобственный интеграл по Лебегу (как и по Риману) не обладает всеми хорошими свойствами интеграла Лебега и должен изучаться отдельно.

Теорема 2. *Ограниченная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда она почти всюду непрерывна, т. е. множество точек разрыва имеет меру нуль.*

$\rhd$ Пусть f интегрируема по Риману. Как показано в доказательстве теоремы 1, $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду. Запишем подробнее, что значит $\underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что $|\underline{f}_n(x_0) - \overline{f}_n(x_0)| < \varepsilon$. Пусть x_0 принадлежит некоторому интервалу $]\alpha,\beta[$, полученному при разбиении отрезка $[a,b]$ на 2^n частей. Тогда

$$\sup_{x\in]\alpha,\beta[} f(x) - \inf_{x\in]\alpha,\beta[} f(x) < \varepsilon$$

и, значит, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ для $x \in]\alpha, \beta[$, т. е. функция f непрерывна в точке x_0. Таким образом, доказана непрерывность функции f во всех точках, кроме тех точек, где $\underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)$, и точек вида $x = k/2^n$, т. е. всюду, кроме множества меры нуль.

Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем, что если f непрерывна почти всюду, то $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$ почти всюду. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \int\limits_X \overline{f}\, d\mu = \int\limits_X \underline{f}\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n$ и по критерию интегрируемости функция f интегрируема по Риману. $\lhd$

З а м е ч а н и е 2. Следует отличать два условия: а) функция почти всюду непрерывна; б) функция почти всюду совпадает с непрерывной. Так, функция Дирихле почти всюду совпадает с непрерывной функцией $f(x) \equiv 0$, но она разрывна во всех точках и не интегрируема по Риману. Функция $sign\ x$ почти всюду (кроме точки 0) непрерывна, но не существует непрерывной функции, почти всюду совпадающей с функцией $sign\ x$.

В дальнейшем меру Лебега на прямой и в $\mathbf{R}^n$ будем обозначать dx и интеграл Лебега — $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, что естественно в силу теоремы 1.

Функция Дирихле не интегрируема по Риману, но может быть изменена на множестве меры нуль так, что измененная функция окажется интегрируемой по Риману. Покажем на примерах, что среди интегрируемых по Лебегу функций есть функции, у которых неинтегрируемость по Риману имеет более сильный характер в следующем смысле: любая эквивалентная ей функция неинтегрируема по Риману, т. е. при любом изменении функции f на множестве меры нуль измененная функция остается не интегрируемой по Риману.

П р и м е р ы.

1. На отрезке $[0,1]$ построим множество, устроенное аналогично множеству Кантора, но имеющее меру $1/2$. Для этого из отрезка $[0,1]$ сначала выбросим интервал длины $1/2 \cdot 1/3$, расположенный в середине отрезка. Затем из каждого оставшегося отрезка выбрасываем интервал длины $1/2 \cdot 1/9$, расположенный в середине, и т. д.. Сумма длин выброшенных интервалов равна $1/2(1/3 + 2/9 + \ldots) = 1/2$. Оставшееся множество K_1 есть канторово множество меры $1/2$.

Положим $f(x) = 0$ на K_1, а на каждом из выброшенных интервалов $]\alpha, \beta[$ определим функцию f формулой

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\beta - \alpha}\ |x - \frac{\alpha + \beta}{2}|.$$

Функция f ограничена, измерима и, значит, интегрируема по Лебегу. Но во всех точках множества K_1 она разрывна. Действительно, если $x_0 \in K_1$, то в любой окрестности точки x_0 есть точка x_1, являющаяся серединой смежного интервала. Тогда $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$, откуда следует, что функция f разрывна в точке x_0. Так как $\mu(K_1) = 1/2$, функция f не интегрируема по Риману в силу теоремы 2. Легко проверить, что любая функция, эквивалентная построенной, также имеет разрывы во всех точках множества K_1 и, следовательно, неинтегрируема по Риману.

2. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} - 1 \text{ при } |x| \leqslant 1, \text{и } \varphi(x) = 0 \text{ при } |x| > 1.$$

Функция φ интегрируема на $\mathbf{R}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 2$. Занумеруем в последовательность (r_k) все рациональные числа и рассмотрим ряд

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2^k}\, \varphi(x - r_k).$$

По следствию 1 теоремы Б. Леви этот ряд почти всюду сходится, его сумма f является интегрируемой функцией и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2.$$

Построенная функция f является в определенном смысле рекордной по своей сложности: она разрывна в каждой точке и, более того, существенно неограничена в окрестности каждой точки (т. е. не принадлежит $L_\infty[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$). Действительно, покажем, что для каждого интервала (a, b) множество $\{x : f(x) > C,\ a < x < b\}$ имеет положительную меру. В заданном интервале есть хотя бы одна точка r_k. Тогда указанное множество содержит окрестность точки r_k, в которой $2^{-k}\varphi(x - r_k) > C$, а любая окрестность имеет положительную меру. Но функция f интегрируема по Лебегу, и мы даже вычислили интеграл от этой функции.

§ 11. ЗАРЯДЫ

Нам уже встречались аддитивные и σ -аддитивные функции множеств, которые не обладают свойством положительности. Это, например, электрический заряд (пример 6 § 3) или интеграл Лебега интегрируемой функции: $\Phi(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu$, для которого σ-аддитивность была доказана в следствии теоремы 1 § 9.

Определение 1. Пусть X — произвольное множество, S — σ-кольцо его подмножеств. Отображение $\Phi\colon S \to \mathbf{R}$ называется *зарядом* или *знакопеременной мерой*, если оно σ-аддитивно, т. е. из разложения $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k, A \in S$, следует, что $\Phi(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$.

Замечание. Из определения 1 следует, что последний ряд сходится абсолютно, так как его сумма не зависит от способа нумерации множеств A_k.

Примеры.

1. Пусть X — пространство с мерой μ, S — σ-кольцо измеримых подмножеств из X, f — функция, интегрируемая на X. Тогда функция множества, заданная для $A \in S$ формулой

$$\Phi(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu, \tag{1}$$

является зарядом.

2. Пусть на X заданы две меры μ_1 и μ_2. Разность двух мер $\Phi(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$ является зарядом.

Пусть $\Phi(A)$ — заряд, заданный формулой (1). Обозначим $X^+ = \{x \in X |\ f(x) \geqslant 0\}$, $X^- = \{x \in X |\ f(x) < 0\}$. Получаем представление

$$\Phi(A) = \Phi(A \cap X^+) + \Phi(A \cap X^-). \tag{2}$$

Так как на X^+ функция f положительна, то $\Phi(A \cap X^+) \geqslant 0$ и, значит, $\mu_1(A) := \Phi(A \cap X^+)$ — мера. Аналогично $\mu_2(A) = -\Phi(A \cap X^-)$ является мерой. Получаем представление заряда в виде разности двух мер: $\Phi(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$. Так как $\mu_1(X^-) = \mu_2(X^+) = 0$, то меры μ_1 и μ_2 взаимно сингулярны.

Покажем, что аналогичное разложение существует для любого заряда.

Определение 2. Измеримое множество $A \subset X$ называется *положительным* (*отрицательным*) *относительно заряда* Φ, если для любого измеримого подмножества $B \subset A$, $\Phi(B) \geqslant 0$ $(\Phi(B) \leqslant 0)$.

Другими словами, множество A является положительным, если сужение заряда на это множество (т. е. на систему его измеримых подмножеств) является мерой. В предыдущем примере множество X^+ — положительное, а X^- — отрицательное.

Теорема 1 (теорема Хана о разложении заряда.) *Пусть Φ — заряд, заданный на σ-кольце S подмножеств из X. Тогда существует такое положительное подмножество $X^+ \subset X$ и отрицательное подмножество $X^- \subset X$, что $X = X^+ \coprod X^-$.*

Лемма 1. *Если заряд Φ задан на σ-кольце S подмножеств из X, то для любого $A \in S$*

$$\sup_{B \subset A} |\Phi(B)| < +\infty.$$

$\triangleright$ Обозначим $\overline{\Phi}(A) = \sup\limits_{B \subset A} |\Phi(B)|$. Предположим, что для некоторого множества $A \in S$ имеем $\overline{\Phi}(A) = +\infty$. Покажем, что существует монотонная последовательность $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ такая, что $|\Phi(A_n)| > n$. Выберем $B_1 \subset A$ так, что $|\Phi(B_1)| > |\Phi(A)| + 1$. Тогда имеем $|\Phi(A \setminus B_1)| = |\Phi(A) - \Phi(B_1)| \geqslant |\Phi(B_1)| - |\Phi(A)| > 1$. Положим

$$A_1 = \begin{cases} B_1, & \text{если } \overline{\Phi}(B_1) = +\infty, \\ A \setminus B_1, & \text{если } \overline{\Phi}(B_1) < +\infty. \end{cases}$$

Тогда $\overline{\Phi}(A_1) = +\infty$. Далее построение ведем по индукции. В множестве A_{n-1} выбираем такое измеримое подмножество B_n, для которого $|\Phi(B_n)| > |\Phi(A_{n-1})| + n$, и полагаем

$$A_n = \begin{cases} B_n, & \text{если } \overline{\Phi}(B_n) = +\infty, \\ A_{n-1} \setminus B_n, & \text{если } \overline{\Phi}(B_n) < +\infty. \end{cases}$$

Тогда в силу σ-аддитивности заряда существует конечный предел $\Phi(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \Phi(A_n)$. Но, с другой стороны, $|\Phi(A_n)| \to \infty$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\triangleleft$

Доказательство теоремы 1.

$\triangleright$ Покажем сначала, что если $\Phi(A) < 0$, то в A существует отрицательное множество A_0. Если само A отрицательно, то утверждение очевидно. Если же A не отрицательно, то в A существуют множества с положительным зарядом. Выбираем среди них такое множество B_1, что $\Phi(B_1) > S\Phi(A) - 1/2$, где $S\Phi(A) = \sup\limits_{C \subset A} \Phi(C)$. Положим

$A_1 = A \setminus B_1$. Далее, по индукции строим множество $B_n \subset A_{n-1}$ такое, что $\Phi(B_n) \geqslant S\Phi(A_{n-1}) - 1/2^n$, и полагаем $A_n = A_{n-1} \setminus B_n$. Так как $\Phi(B_n) > 0$, то $\Phi(A_0) < \Phi(A_{n-1}) < \Phi(A) < 0$. Пусть $A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\Phi(A_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(A_n) < 0$. Покажем, что A_0 — отрицательное. Предположим, что существует подмножество $B \subset A_0$ такое, что $\Phi(B) > 0$. Выберем номер n так, чтобы $1/2^n < \Phi(B)$. Тогда

$$\Phi(B \cup B_n) = \Phi(B) + \Phi(B_n) > S\Phi(A_{n-1})$$

$$(B \subset A_n, \quad B_n \not\subset A_n, \quad B \cup B_n \subset A_{n-1}),$$

что противоречит определению $S\Phi(A_{n-1})$.

Перейдем к построению множеств X^+ и X^-. Пусть $b = \inf \Phi(A)$, где нижняя грань вычисляется по всем отрицательным подмножествам из X. Пусть A_n — последовательность отрицательных подмножеств такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(A_n) = b$ и пусть $X^- = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Множество X^- отрицательно и $\Phi(X^-) = b$.

Покажем, что множество $X^+ = X \setminus X^-$ положительно. Если в X^+ существует A такое, что $\Phi(A) < 0$, то по доказанному существует такое отрицательное множество $A_0 \subset A$, что $\Phi(A_0) < 0$. Тогда $X^- \coprod A_0$ — отрицательное множество, и при этом $\Phi(X^- \coprod A_0) = \Phi(X^-) + \Phi(A_0) < b$, что противоречит определению числа b. Значит, X^+ — положительное множество. $\triangleleft$

Следствие 1. *Для любого заряда* Φ *существуют взаимно сингулярные меры* μ_1 *и* μ_1 *такие, что* $\Phi(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$.

$\triangleright$ Положив $\mu_1(A) = \Phi(X^+ \cap A)$ и $\mu_2(A) = -\Phi(X^- \cap A)$, получим требуемое разложение. $\triangleleft$

Рассмотрим подробнее заряды на σ-алгебре, порожденной полуинтервалами на отрезке $[0,1]$. Каждому заряду ν на этой σ-алгебре поставим в соответствие производящую функцию $F(t) = \nu([0,t[),\ \ F(0) = 0$. Тогда $\nu([a,d[) = F(b) - F(a)$, т.е. связь производящей функции с зарядом та же, что и в рассмотренном ранее случае мер. Опишем класс функций на $[0,1]$, которые соответствуют зарядам.

Определение 3. Функция $g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ называется *функцией ограниченной (конечной) вариации*, если существует число c такое, что для любого конечного разбиения $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < x_n \leqslant b$ отрезка справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leqslant c. \tag{3}$$

Наименьшая из постоянных c, при которых выполнено неравенство (3), называется *вариацией функции* g на $[a, b]$ и обозначается $\overset{b}{\underset{a}{\vee}} g$ или $\mathbf{Var}_a^b[g]$. По определению

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}} g = \sup \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|,$$

где верхняя грань берется по множеству всех конечных разбиений отрезка $[a, b[$.

Упражнение 1. Доказать следующие свойства вариации функции, непосредственно вытекающие из определения:

1. $|g(b) - g(a)| \leq \overset{b}{\underset{a}{\vee}} g$.

2. $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(g + f) \leq \overset{b}{\underset{a}{\vee}} g + \overset{b}{\underset{a}{\vee}} f$.

3. Если $a < b < c$, то $\overset{c}{\underset{a}{\vee}} g = \overset{b}{\underset{a}{\vee}} g + \overset{c}{\underset{b}{\vee}} g$.

4. Если g — функция ограниченной вариации, то функция $v(x) = \overset{x}{\underset{a}{\vee}} g$ монотонно возрастает.

Примеры.

3. Любая монотонная функция g (в том числе и разрывная) является функцией ограниченной вариации и $\overset{b}{\underset{a}{\vee}} g = |g(b) - g(a)|$.

4. Непрерывная функция может иметь бесконечную вариацию. Например, функция $f(x) = x\cos(1/x)$ при $x > 0, f(0) = 0$, непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Если выбрать точки разбиения $t_k = 1/(k\pi)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| > \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$$

и, значит, f не является функцией ограниченной вариации.

5. Если $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$, где g_1 и g_2 — монотонно возрастающие функции, то g является функцией ограниченной вариации и выполнено неравенство

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}} g \leq \overset{b}{\underset{a}{\vee}} g_1 + \overset{b}{\underset{a}{\vee}} g_2. \tag{4}$$

6. Любая абсолютно непрерывная функция является функцией ограниченной вариации.

7. Если функция g непрерывно дифференцируема, то

$$\bigvee_a^b g = \int_a^b |g'(x)|dx.$$

В общем случае неравенство (4) в примере 5 строгое (можно поставить знак <). Заметим также, что если h — произвольная монотонно возрастающая функция, то $g(x) = [g_1(x) + h(x)] - [g_2(x) + h(x)]$, т. е. представление функции g в виде разности монотонно возрастающих функций не единственно. Следующая лемма показывает, в частности, что среди таких представлений существует наилучшее, при котором неравенство (4) превращается в точное равенство.

Лемма 2. *Для любой функции g ограниченной вариации на $[0,1]$ существуют такие монотонно возрастающие функции g_1 и g_2, что $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$, и при этом для любых a, b, где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, выполнено*

$$\bigvee_a^b g = \bigvee_a^b g_1 + \bigvee_a^b g_2. \tag{5}$$

Если функция g непрерывна слева, то функции g_1 и g_2 можно выбрать непрерывными слева. Если g абсолютно непрерывна, то функции g_1 и g_2 также абсолютно непрерывны.

$\triangleright$ Функция $v(t) = \bigvee_0^t g$ монотонно возрастает. Положим $g_1(t) = 1/2[v(t) + g(t)]$, $g_2(t) = 1/2[v(t) - g(t)]$.Тогда $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$ и нужно проверить монотонность построенных функций. Если $t_1 < t_2$, то, используя свойство 1 из упражнения 1, получаем

$$g_1(t_2) - g_1(t_1) = 1/2 \ \{\bigvee_{t_1}^{t_2} g + [g(t_2) - g(t_1)]\} \geqslant 0,$$

$$g_2(t_2) - g_2(t_1) = 1/2 \ \{\bigvee_{t_1}^{t_2} g - [g(t_2) - g(t_1)]\} \geqslant 0,$$

что и означает монотонность функций. При $t_1 = a$, $t_2 = b$ из предыдущих соотношений получаем равенство (5).

Покажем, что если g непрерывна слева в точке $b \in (0,1]$, то функция v также непрерывна слева в этой точке. Ввиду монотонности функции v для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $x^* < b$, что выполнено неравенство $v(b) - v(x^*) < \varepsilon$.

В силу непрерывности слева функции g выберем $\delta > 0$ так, что для всех $x \in (b - \delta, b]$ выполнено неравенство $|g(x) - g(b)| < \varepsilon/2$. Выберем разбиение $0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| > v(b) - \varepsilon/2 \tag{6}$$

и при этом $x_{n-1} \in (b - \delta, b)$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n-1} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \bigvee_{0}^{x_{n-1}} = v(x_{n-1}), \tag{7}$$

вычитая из (6) неравенство (7) получаем требуемое:

$$v(b) - v(x_{n-1}) \leqslant |g(b) - g(x_{n-1})| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Пусть функция g абсолютно непрерывна. Тогда в обозначениях из определения 3 § 6 для любых разбиений полуинтервалов $[\alpha_i, \beta_i[$ вида $\alpha_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \ldots < x_{i,m_i} = \beta_i$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} |g(x_{i,k}) - g(x_{i,k-1})| < \delta,$$

из которого получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{\{x_{i,k}\}} \sum_{k=1}^{m_i} |g(x_{i,k}) - g(x_{i,k-1})| = \sum_{i=1}^{n} \bigvee_{\alpha_i}^{\beta_i} g = \sum_{i=1}^{n} |v(\beta_i) - v(\alpha_i)| \leqslant \delta. \triangleleft$$

Теорема 2. *Функция $g\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ соответствует некоторому заряду ν по формуле $g(t) = \nu([0,t[)$ тогда и только тогда, когда g есть непрерывная слева функция ограниченной вариации и $g(0) = 0$.*

$\triangleright$ Пусть функция g построена по некоторому заряду ν. Тогда по теореме 1 имеем $\nu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — взаимно сингулярные меры. Мерам μ_1 и μ_2 соответствуют монотонные, непрерывные слева функции g_1 и g_2 такие, что $g_1(0) = g_2(0) = 0$ (теорема 1 § 6). Тогда $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$ удовлетворяет требуемым условиям.

Если g — функция ограниченной вариации, то в силу леммы $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$, где g_1 и g_2 — монотонные непрерывные слева функции. Причем их можно выбрать так, чтобы $g_1(0) = g_2(0) = 0$. Поэтому им соответствуют меры μ_1 и μ_2 и, следовательно, функции g соответствует заряд $\nu = \mu_1 - \mu_2$. $\triangleleft$

§ 12. ТЕОРЕМА РАДОНА — НИКОДИМА

Пусть Σ — σ-алгебра подмножеств множества X и μ — мера на Σ. На той же σ-алгебре может быть определено много других мер и зарядов. Некоторые из них (но не все) могут быть представлены в виде

$$\nu(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu, \tag{1}$$

где f — интегрируемая функция.

Определение 1. Заряд ν называется *абсолютно непрерывным относительно меры* μ, если из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$.

Из свойств интеграла видно, что правая часть в (1) определяет заряд, обладающий свойством абсолютной непрерывности и, значит, свойство абсолютной непрерывности заряда ν является необходимым для представления заряда в виде (1).

Существуют меры и заряды, которые не могут быть представлены в виде (1). Например, пусть μ — мера Лебега на отрезке $[0,1]$, и

$$\nu_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in A, \\ 0, & \text{если } 0 \notin A. \end{cases}$$

Мера ν_0 не является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега: взяв $A = \{0\}$, получаем $\mu(A) = 0$, но $\nu_0(A) = 1$, что противоречит абсолютной непрерывности. Значит, мера ν_0 не может быть представлена в виде (1).

Основная теорема данного параграфа (теорема Радона — Никодима) утверждает, что свойство абсолютной непрерывности является также и достаточным для представления заряда в виде (1). Теорема Радона — Никодима служит мощным средством для получения нетривиальных результатов, так как в ней утверждается, что из достаточно просто проверяемого условия абсолютной непрерывности следует существование некоторой интегрируемой функции. Примеры таких приложений будут приведены ниже.

Лемма 1. *Пусть ненулевая мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ. Тогда существует μ-измеримое множество B и $\delta > 0$ такие, что $\mu(B) > 0$ и*

$$\nu(A) \geqslant \delta\mu(A) \quad \forall A \subset B. \tag{2}$$

$\triangleright$ Неравенство (2) означает, что множество B положительно относительно заряда $\Phi = \nu - \delta\mu$. Рассмотрим последовательность зарядов $\Phi_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$. Пусть $X_n^+ \coprod X_n^- = X$ — разложение X на положительные и отрицательные множества для заряда Φ_n. Для подмножества $A \subset X_n^-$ справедливо неравенство

$$\nu(A) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A). \tag{3}$$

Если $A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n^-$, то (3) справедливо с любым n, т. е. $\nu(A_0) = 0$. Поэтому $\nu(X \setminus A_0) > 0$. Ввиду абсолютной непрерывности ν относительно μ имеем $\mu(X \setminus A_0) > 0$. Так как $X \setminus A_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^+$, то существует n_0 такое, что $\mu(X_{n_0}^+) > 0$. Полагая $B = X_{n_0}^+$ и $\delta = 1/n_0$, получаем утверждение леммы. $\triangleleft$

Теорема 1 (Радон — Никодим). *Если заряд ν, определенный на σ-алгебре Σ измеримых множеств, абсолютно непрерывен относительно меры μ, то существует такая μ-интегрируемая функция f, что $\nu(A) = \int\limits_A f(x)\, d\mu$ для любого $A \in \Sigma$.*

$\triangleright$ Согласно следствию 1 теоремы 1 § 11, заряд может быть представлен в виде разности двух взаимно сингулярных мер μ_1 и μ_2, причем, если заряд ν абсолютно непрерывен относительно меры μ, то и меры μ_1 и μ_2 также абсолютно непрерывны относительно μ. Поэтому доказательство достаточно провести для мер.

Обозначим через H следующее множество функций:

$$H = \left\{ h \geqslant 0 \,\middle|\, h \in \mathbf{L}(X, \mu),\ \int\limits_A h\, d\mu \leqslant \nu(A)\ \forall\ A \in \Sigma \right\}.$$

Пусть $M = \sup\limits_{h \in H} \int\limits_X h\, d\mu$. Возьмем последовательность $h_n \in H$ такую, что $\int\limits_X h_n\, d\mu \to M$. Построим новую последовательность функций $f_n(x) = \max\{h_1(x), \ldots, h_n(x)\}$. Тогда $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Положим

$$A_k = \{x \in A |\ f_n(x) = h_k(x),\ f_n(x) \neq h_i(x),\ i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Тогда $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ и

$$\int_A f_n\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f_n\,d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) = \nu(A),$$

т. е. $f_n \in H$. По теореме Б. Леви (см. § 9) последовательность f_n сходится к некоторой интегрируемой функции f и

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = M.$$

Кроме того, $\int_A f\,d\mu \leqslant \nu(A)$. Следовательно, $f \in H$. Это означает, что $\Phi(A) = \nu(A) - \int_A f\,d\mu$ — мера.

Нам нужно доказать, что $\Phi(A) = 0$ для любого $A \in \Sigma$. Для этого достаточно показать, что $\Phi(X) = 0$. Предположим противное, т. е. $\Phi(X) > 0$. Тогда по лемме 1 найдутся множество $B \subset X$ и число $\delta > 0$ такие, что $\Phi(A) > \delta\mu(A)$ для любого $A \subset B$ и $\mu(B) > 0$. Возьмем функцию $h_0(x) = \delta \cdot \chi_B(x)$. Тогда

$$\int_A h_0\,d\mu = \delta\mu(A\cap B) \leqslant \Phi(A\cap B) = \nu(A\cap B) - \int_{A\cap B} f\,d\mu =$$

$$= \nu(A\cap B) - \int_A f\,d\mu + \int_{A\setminus B} f\,d\mu \leqslant \nu(A\cap B) + \nu(A\setminus B) -$$

$$- \int_A f\,d\mu = \nu(A) - \int_A f\,d\mu,$$

т. е. $\int_A [h_0 + f]\,d\mu \leqslant \nu(A)$. Следовательно, $h_0 + f \in H$ и $\int_X [h_0 + f]\,d\mu = \delta\mu(B) + M > M$, что противоречит определению числа M. Таким образом, $\Phi(X) = 0$. $\lhd$

В качестве примеров приложения доказанной общей теоремы покажем, как эта теорема позволяет получить в наибольшей общности такие важнейшие утверждения из математического анализа, как формула Ньютона — Лейбница и формула замены переменных в интеграле. Теорема Радона — Никодима будет также использована ниже при доказательстве теоремы 4 § 42.

Приложения теоремы Радона — Никодима

1. *Формула Ньютона — Лейбница*

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\,dx$$

доказывается обычно в курсе математического анализа для непрерывно дифференцируемых функций. Эта формула справедлива и для некоторых функций, у которых производная разрывна. Но существуют функции, у которых почти всюду существует производная, но формула Ньютона — Лейбница не справедлива. Примером может служить функция Кантора $\varphi(t)$ (см. § 6). Эта функция непрерывна, у нее почти всюду (на дополнении к канторову множеству) существует производная $\varphi'(t)$ и $\varphi'(t) = 0$ почти всюду. Однако

$$1 = \varphi(1) - \varphi(0) \neq \int\limits_0^1 \varphi'(t)\,dt = 0.$$

Возникает вопрос: как описать множество всех функций, для которых справедлива формула Ньютона — Лейбница? Этот вопрос можно разбить на два. Первый вопрос: для каких функций f существует (интегрируемая по Лебегу) функция h такая, что для любого отрезка $[a, b]$ справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b h(x)\,dx\ ?$$

Такую функцию h называют *обобщенной производной функции* f, так как в случае непрерывно дифференцируемых функций f всегда $h = f'$.

Ответ на вопрос о существовании обобщенной производной получается непосредственно из теоремы Радона — Никодима.

Второй вопрос: как связано существование обобщенной производной с существованием (почти всюду) обычной производной? Как показывает пример функции Кантора, из существования почти всюду обычной производной не следует, что она является обобщенной производной, т. е. что справедлива формула Ньютона — Лейбница.

Утверждение 1. *Если у функции существует обобщенная производная, то почти всюду существует обычная производная и они совпадают почти всюду.*

Для доказательства этого утверждения требуется ряд подготовительных фактов из теории дифференцирования (см. [31]), мы его здесь не приводим.

Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Формула Ньютона — Лейбница*

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\,dx \tag{4}$$

справедлива тогда и только тогда, когда функция f абсолютно непрерывна.

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть справедлива формула (4). В этой формуле предполагается, что интеграл определен, т. е. почти всюду существует производная и эта производная является интегрируемой по Лебегу функцией. Поэтому правая часть (4) задает заряд ν, абсолютно непрерывный относительно меры Лебега. Равенство (4) означает, что этот заряд порожден функцией f. Но, по теореме 2 § 11, абсолютно непрерывный заряд порожден абсолютно непрерывной функцией. Значит, функция f абсолютно непрерывна.

Достаточность. Пусть функция f абсолютно непрерывна. Согласно теореме 2 § 11 она определяет на полуинтервалах заряд, абсолютно непрерывный относительно меры Лебега. Применяя к этому заряду теорему Радона — Никодима, получаем, что существует интегрируемая функция h такая, что

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b h(x)\,dx,$$

т. е. являющаяся обобщенной производной функции f. Далее, в силу утверждения 1 почти всюду существует обычная производная f' и она почти всюду совпадает с h. $\triangleleft$

Заметим, что во многих вопросах существенна именно возможность представления приращения функции f в виде интеграла (4), т. е. существование обобщенной производной, а тот факт, что обобщенная производная совпадает с обычной, часто не имеет принципиального значения.

Иногда скептики высказывают мнение, что интеграл Лебега имеет только теоретическое значение, а на практике все интегралы считаются по Риману. Однако при этом имеется в виду, что интегралы считаются по формуле Ньютона — Лейбница. Но эта формула верна в случае интеграла Лебега, причем для более широкого класса функций, и поэтому с большим основанием можно утверждать, что все интегралы считаются по Лебегу.

2. *Связь интегралов по разным мерам*

Обсуждаемая здесь проблема связана с вопросом о возможности выразить интеграл по одной мере через интеграл по другой мере. Задачу можно поставить следующим образом. Пусть имеется две меры μ и ν, определенные на одной и той же σ-алгебре, и пусть функция f интегрируема по мере ν. Спрашивается: можно ли по f построить такую функцию g, что

$$\int_A f(x)d\nu = \int_A g(x)d\mu$$

для любого измеримого множества A? Заметим, что если такая функция существует, то она единственна с точностью до эквивалентности. Если мера ν не является абсолютно непрерывной относительно меры μ, то ответ заведомо отрицательный.

Если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, то функция ρ, такая что $\nu(A) = \int\limits_A \rho\, d\mu$, называется (по аналогии с формулой Ньютона — Лейбница) *производной Радона — Никодима* меры ν по мере μ и обозначается $d\nu/d\mu$.

Теорема 3. *Пусть мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ и $\rho(x) = d\nu/d\mu$ — производная Радона — Никодима. Если функция f интегрируема по мере ν, то функция $g(x) = f(x)\rho(x)$ интегрируема по мере μ и*

$$\int\limits_X f(x)\, d\nu = \int\limits_X f(x)\rho(x)\, d\mu. \tag{5}$$

$\triangleright$ Если f — характеристическая функция множества A, то равенство (5) имеет вид $\nu(A) = \int\limits_A \rho(x)\, d\mu$ и выполняется по определению производной Радона — Никодима. Следовательно, равенство (5) выполняется для линейных комбинаций характеристических функций, т. е. для простых функций, принимающих конечное число значений. Для произвольных интегрируемых функций f равенство (5) получим предельным переходом.

Любая функция представляется в виде разности двух неотрицательных функций. Поэтому доказательство достаточно провести для неотрицательной функции.

Пусть функция f неотрицательна. Тогда существует монотонно возрастающая последовательность простых функций $f_n(x)$, каждая из которых принимает конечное число значений, почти всюду сходящаяся к $f(x)$. Последовательность $f_n(x)\rho(x)$ монотонно возрастает и почти всюду сходится к $f(x)\rho(x)$. Так как последовательность интегралов $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu$ сходится к $\int\limits_X f(x)\,d\nu$, к последовательности $f_n(x)\rho(x)$ применима теорема Б. Леви, откуда получаем утверждение теоремы. ◁

3. *Замена переменной в интеграле Лебега*

Формула замены переменных в интеграле связывает интеграл от функции $f(x)$ с интегралом от функции $f(g(y))$ для заданного отображения g. Напомним, например, утверждение о возможности замены переменных в двойном интеграле, доказываемое обычно в курсе математического анализа.

Пусть Ω некоторая область в $\mathbf{R}^2$, D – некоторая другая область и пусть задано биективное непрерывно дифференцируемое отображение $g : D \to \Omega; g(y_1, y_2) = (g_1(y_1, y_2),\ g_2(y_1, y_2))$ такое, что якобиан

$$J = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial g_2}{\partial y_2} - \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1}$$

отличен от нуля во всех точках области D. Тогда для любой интегрируемой в области Ω функции f справедливо равенство:

$$\int_\Omega f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_D f(g(y_1, y_2)\rho(y_1, y_2)dy_1dy_2, \tag{6}$$

где $\rho = |J|$.

Возникают следующие вопросы. Насколько существенно в этих формулах условие непрерывной дифференцируемости и условие биективности отображения g? Для каких отображений могут быть получены аналогичные формулы? Как выглядят их аналоги в случае произвольных пространств с мерой?

Рассмотрим задачу о замене переменных в общем виде. Пусть заданы два пространства с мерами (X, Σ_x, μ) и (Y, Σ_y, ν) и задано отображение $g : Y \to X$. Аналогом формулы (6) можно считать утверждение о существовании такой функции $\rho(y)$, что выполнено равенство

$$\int_X f(x)d\mu = \int_Y f(g(y))\rho(y)d\nu. \tag{7}$$

В случае, когда мера на Y не задана, аналогом (6) можно также считать утверждение, что на Y существует такая мера μ_1, определенная на некоторой σ-алгебре Σ_1 множеств из Y, что выполнено равенство

$$\int_X f(x)d\mu = \int_Y f(g(y))d\mu_1. \tag{8}$$

Таким образом, нужно выяснить, для каких отображений g имеют место формулы (7) или (8), и что собой представляет функция ρ или мера μ_1.

Предположим, что равенство (8) имеет место, и получим необходимые условия на отображение g.

Прежде всего отметим, что правая часть в (8) не зависит от значений функции f на множестве $X \setminus g(Y)$, а левая часть не зависит от значений функции f на некотором множестве только в том случае, когда это множество нулевой меры. Отображение g будем называть *почти сюръективным*, если $\mu(X \setminus g(Y)) = 0$. Таким образом, условие почти сюръективности отображения g необходимо для выполнения равенства (8).

Пусть f есть характеристическая функция измеримого множества $A \subset X$. Тогда $f(g)$ есть характеристическая функция прообраза $g^{-1}(A)$ и получаем второе необходимое условие: если выполнено (8), то прообраз $g^{-1}(A)$ является μ_1-измеримым множеством и $\mu_1(g^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Теорема 4. *Для того, чтобы на Y существовала мера μ_1 такая, что равенство (8) выполнено для любой μ-интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы отображение g было почти сюръективным.*

$\triangleright$ Необходимость условия уже доказана.

Достаточность. Пусть отображение g почти сюръективно. Рассмотрим совокупность Σ_1 подмножеств в Y вида $(g^{-1}(A))$, где A — измеримое множество в X. Из того, что измеримые множества в X образуют σ-алгебру, следует, что Σ_1 есть σ-алгебра. Зададим на этой алгебре меру $\mu_1(g^{-1}(A)) = \mu(A)$. Из условия почти сюръективности отображения g следует, что это определение корректно, а из σ-аддитивности μ

следует σ-аддитивность меры μ_1. Равенство (8) для характеристических функций выполняется по построению меры μ_1. Для произвольных интегрируемых функций равенство (8) получается предельным переходом аналогично доказательству теоремы 3. $\triangleleft$

Чтобы из (8) получить формулу (7), нужно от интеграла по мере μ_1 перейти к интегралу по мере ν. Согласно теореме 3 это возможно, если мера ν определена на алгебре Σ_1 и мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры ν. В этом случае, согласно теореме 3, получаем формулу (7), где ρ есть производная Радона — Никодима меры μ_1 по мере ν.

Чтобы мера ν была определена на алгебре Σ_1 нужно, чтобы прообраз $g^{-1}(A)$ любого A из Σ_x принадлежал Σ_y. Отображение g, удовлетворяющее этому условию, называется *измеримым.*

Чтобы мера μ_1 была абсолютно непрерывна относительно меры ν, нужно, чтобы прообраз $g^{-1}(A)$ любого множества меры нуль из X был множеством меры нуль в Y. Последнее свойство выглядит как условие абсолютной непрерывности. Однако в случае, когда $X = \mathbf{R}$ с мерой Лебега, этому условию удовлетворяют многие разрывные отображения. Поэтому будем называть это свойство *метрической абсолютной непрерывностью*, чтобы избежать необоснованных ассоциаций.

Из предыдущих рассуждений получаем общую теорему о замене переменных в интеграле Лебега.

Теорема 5. *Пусть (X, Σ_x, μ) и (Y, Σ_y, ν) есть пространства с заданными мерами и $g : Y \to X$ — некоторое отображение. Если отображение g почти сюръективно, измеримо и метрически абсолютно непрерывно, то для любой интегрируемой в X функции f справедлива формула замены переменных вида (7), где функция ρ есть производная Радона — Никодима построенной выше меры μ_1 по мере ν.*

Условие биективности и непрерывной дифференцируемости отображения g в классической формуле замены переменных (6) является достаточным условием, при котором выполнены условия теоремы 5 на отображение g. Заметим, что формула (6) содержит больше информации, чем теорема 5, — в этой формуле дано явное выражение для соответствующей производной Радона — Никодима через частные производные.

§ 13. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР. ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Пусть заданы два пространства с мерами: (X, Σ_x, μ_X) и (Y, Σ_y, μ_Y). В этом параграфе будет показано, как можно естественным образом задать меру на декартовом произведении $X \times Y$ и как связан интеграл от функции на этом произведении с интегралами по исходным мерам.

Сначала рассмотрим модельный пример. Пусть на прямой $\mathbf{R}$ задана мера Лебега μ_1, а на плоскости $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ — мера Лебега μ_2. Посмотрим, как связаны между собой эти меры. Прямоугольник $D = \{(x_1, x_2)\colon\ a \leqslant x_1 < b,\ c \leqslant x_2 < d\}$ является декартовым произведением множества $A = [a, b[$ на множество $B = [c, d[$. Мера $\mu_2(D)$ — площадь прямоугольника D выражается через длины сторон, т. е. через меры $\mu_1(A)$ и $\mu_1(B)$, формулой

$$\mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_1(B).$$

Аналогичное равенство берется за основу при определении произведения мер в общем случае.

Пусть S_X есть такое подкольцо в Σ_x, что лебеговское продолжение с S_X порождает всю σ-алгебру Σ_x. В качестве S_X можно взять всю алгебру Σ_x, но в примерах удобнее рассмотреть более узкое подкольцо, которое естественно выделяется в случае, когда рассматриваемая мера была определена с помощью лебеговского продолжения. Пусть S_Y — аналогичное подкольцо в Σ_y. В произведении $Z = X \times Y$ выделим систему подмножеств

$$S_Z = \{A \times B |\ A \in S_X,\ B \in S_Y\},$$

которые являются аналогами прямоугольников на плоскости.

Предложение 1. *Система подмножеств S_Z является полукольцом.*

$\triangleright$ Пусть $D_1 = A_1 \times B_1,\ D_2 = A_2 \times B_2$. Тогда $D_1 \cap D_2 = (A_1 \cap A_2) \times \times (B_1 \cap B_2) \in S_Z$. Если $D_1 \supset D_2$, то

$$D_1 = A_1 \times B_1 = [(A_1 \setminus A_2) \coprod A_2] \times [(B_1 \setminus B_2) \coprod B_2] =$$

$$= \Big((A_1 \setminus A_2) \times [(B_1 \setminus B_2) \coprod B_2]\Big) \coprod \Big(A_2 \times [(B_1 \setminus B_2) \coprod B_2]\Big) =$$

$$= [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \coprod [(A_1 \setminus A_2) \times B_2] \coprod$$

$$\coprod [A_2 \times (B_1 \setminus B_2)] \coprod (A_2 \times B_2).$$

Тогда

$$D_1 \setminus D_2 = [(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \coprod [(A_1 \setminus A_2) \times B_2] \coprod$$

$$\coprod [A_2 \times (B_1 \setminus B_2)]. \lhd$$

На полукольце S_Z зададим меру

$$\mu_Z(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если μ_X и μ_Y — σ-аддитивные меры, то μ_Z является σ-аддитивной мерой.*

$\rhd$ Множеству $D = A \times B$ поставим в соответствие функцию $f_D(x) = \chi_A(x)\mu_Y(B)$. Тогда $\mu_Z(D) = \int\limits_X f_D \, d\mu_X$. Если $D = \coprod\limits_{k=1}^{n} D_k$, где $D, D_k \in S_Z$, то $f_D(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{D_k}(x)$. Тогда

$$\mu_Z(D) = \int\limits_X f_D(x) \, d\mu_X = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_{D_k}(x) \, d\mu_X = \sum_{k=1}^{n} \mu_Z(D_k),$$

т. е. μ_Z является аддитивной функцией множеств.

Пусть $D_x = \{y | \ (x, y) \in D\}$ — сечение множества $D = A \times B \in S_Z$. Тогда $f_D(x) = \mu_Y(D_x)$. Если $D = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, $D_k \in S_Z$, то $D_x = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} D_{kx}$. В силу σ-аддитивности меры μ_Y будем иметь

$$f_D(x) = \mu_Y(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_Y(D_{kx}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{D_k}(x). \tag{2}$$

К ряду (2) применима теорема Лебега (здесь использована σ-аддитивность меры μ_X) и, значит,

$$\mu_Z(D) = \int\limits_X f_D(x) \, d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_{D_k}(x) \, d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_Z(D_k).$$

Тем самым теорема доказана. $\lhd$

Определение 1. Лебеговское продолжение меры μ_Z, определенной на S_Z формулой (1), называется *произведением мер* μ_X и μ_Y и обозначается $\mu_X \otimes \mu_Y$, а пространство $X \times Y$ с мерой $\mu_X \otimes \mu_Y$ — *произведением пространств* (X, μ_X) и (Y, μ_Y).

Аналогично определяется произведение σ-конечных мер.

Если есть три пространства с мерами μ_1, μ_2 и μ_3 соответственно, то можно определить произведение $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$ и произведение $\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$. Легко проверяется, что эти произведения совпадают (т. е. выполнено свойство ассоциативности произведения мер) и, значит, однозначно определено произведение $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$.

Связь меры Лебега на плоскости с мерой Лебега на прямой проявляется также в геометрическом смысле интеграла – площадь фигуры, лежащей под графиком неотрицательной функции, равна интегралу от этой функции. Обобщение этого свойства на случай произвольного произведения мер приведено в теореме 2. Доказательство этой теоремы проводится с помощью предельного перехода под знаком интеграла для монотонных последовательностей. Поэтому сначала рассмотрим лемму о представлении измеримого множества с помощью монотонных последовательностей множеств.

Лемма 1. *Пусть мера μ получена с помощью продолжения по Лебегу некоторой меры, определенной на полукольце S. Для любого измеримого множества C существует множество D такое, что $C \subset D$, $\mu(C) = \mu(D)$ и*

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \quad D_1 \supset D_2 \supset \ldots,$$

$$D_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{nk}, \quad D_{n1} \subset D_{n2} \subset \ldots, \quad D_{nk} \in K(S).$$

$\triangleright$ По определению измеримого множества для любого n существует множество A_n, являющееся счетным объединением множеств из $K(S)$ такое, что $C \subset A_n$ и

$$\mu(A_n) \leqslant \mu(C) + 1/n. \tag{3}$$

Положим $D_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, $D = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D_n$. Тогда $C \subset D$, в силу монотонности построенной последовательности имеем $\mu(C) = \mu(D)$. Множества D_n представляем в виде $D_n = \bigcup\limits_j B_{nj}$, где $B_{nj} \in K(S)$. Положив $D_{nk} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} B_{nj}$, получаем требуемую систему множеств. $\lhd$

Теорема 2. *Пусть X и Y — пространства с полными мерами μ_X и μ_Y, $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$ и $C \subset X \times Y$ — μ-измеримое множество конечной меры. Тогда*

1) для почти всех $x \in X$ множество $C_x = \{y \in Y |\ (x, y) \in C\}$ является μ_Y измеримым в Y и почти всюду на X определена функция $f_C(x) = \mu_Y(C_x)$;

2) справедливо равенство

$$(\mu_X \otimes \mu_Y)(C) = \int\limits_X f_C(x)\, d\mu_X. \tag{4}$$

$\rhd$ Утверждения 1) и 2) для множеств C из кольца $K(S)$ фактически доказаны в теореме 1. Если $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$, $C_n \in K(S)$, то последовательность $f_{C_n}(x)$ монотонно возрастает, и, так как $C_x = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{kx}$, то $f_C(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{C_k}(x)$ и $\int\limits_X f_{C_k}(x)\, d\mu_X \leqslant \mu(C)$. По теореме Б. Леви

$$\mu(C) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_{C_k}(x)\, d\mu_X = \int\limits_X f_C(x)\, d\mu_X.$$

Аналогично проверяется справедливость утверждений 1) и 2) для множеств вида $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, где $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, и для множеств D_n утверждения 1) и 2) уже имеют место. Таким образом, справедливость теоремы установлена для множеств типа множества D из леммы 1.

Теперь пусть C — измеримое множество меры нуль, т. е. такое, что $(\mu_X \otimes \mu_Y)(C) = 0$. Тогда по лемме найдется множество $D \supset C$ такое, что $(\mu_X \otimes \mu_Y)(C) = (\mu_X \otimes \mu_Y)(D) = 0$ и для D справедлива теорема. Так как $f_D(x) = f_C(x)$ почти всюду и $C_x \subset D_x$, то в силу полноты меры μ_Y получаем, что $\mu_Y(C_x) = 0$ для почти всех x. Таким образом, утверждение теоремы доказано для произвольных множеств C нулевой меры $\mu = \mu_X \otimes \mu_Y$.

Поэтому, если C — произвольное измеримое множество, то, выбирая $D \supset C$, как в лемме, будем иметь, что $f_C(x) = f_D(x)$ почти всюду. Так как для множества D теорема справедлива, то получаем

$$\mu(C) = \mu(D) = \int\limits_X f_D(x)\,d\mu_X = \int\limits_X f_C(x)\,d\mu_X. \ \triangleleft$$

Следствие. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — измеримая на X функция, μ_X — мера на X, μ — мера Лебега на прямой $\mathbf{R}$ и $C = \{(x,t)|\ 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ есть множество в $X \times \mathbf{R}$, лежащее под графиком функции f. Тогда*

$$(\mu_X \otimes \mu)(C) = \int\limits_X f(x)\,d\mu_X.$$

Основным результатом является следующая теорема, обосновывающая возможность перемены порядка интегрирования в повторном интеграле.

Теорема 3. I (Фубини). *Пусть $f(x,y)$ — интегрируемая функция на произведении пространств (X, μ_X) и (Y, μ_Y), где меры μ_X и μ_Y полны и σ-аддитивны. Тогда*

1) *$f(x,y)$ как функция y при почти всех x интегрируема по мере μ_Y и существует повторный интеграл*

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_Y \right) d\mu_X;$$

2) *$f(x,y)$ как функция x при почти всех y интегрируема по мере μ_X и существует повторный интеграл*

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\,d\mu_X \right) d\mu_Y;$$

3) *справедливо равенство*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu_X \otimes \mu_Y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_Y \right) d\mu_X =$$

$$= \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\,d\mu_X \right) d\mu_Y. \qquad (5)$$

II (Тонелли). *Если* $f(x,y) \geqslant 0$ *и функция* f *измерима на* $X \times Y$, *то из существования одного из повторных интегралов следует, что* f *интегрируема* (*и выполнено равенство* (5)).

$\triangleright$ I. Так как любую функцию f можно представить в виде разности двух неотрицательных функций, то доказательство теоремы достаточно провести для неотрицательной функции f.

В произведении $(X, \mu_X) \times (Y, \mu_Y) \times (\mathbf{R}, \mu_1)$, где μ_1 — мера Лебега, рассмотрим множество C, лежащее под графиком функции $f(x,y)$:

$$C = \{(x,y,z) \in X \times Y \times \mathbf{R} \mid \ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}.$$

Согласно следствию теоремы 2 имеем

$$(\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \mu_1)(C) = \int\limits_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu_X \otimes \mu_Y). \tag{6}$$

Представим теперь произведение $X \times Y \times \mathbf{R}$ в виде $X \times (Y \times \mathbf{R})$ и снова применим теорему 2. Тогда

$$(\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \mu_1)(C) = \int\limits_X (\mu_Y \otimes \mu_1)(C_x)\, d\mu_X, \tag{7}$$

где $C_x = \{(y,z) |\ (x,y,z) \in C\} = \{(y,z) |\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}$.

При фиксированном x множество C_x лежит под графиком функции $\varphi(y) = f(x,y)$. По следствию теоремы 2

$$(\mu_Y \otimes \mu_1)(C_x) = \int\limits_Y f(x,y)\, d\mu_Y. \tag{8}$$

Из (6) — (8) получаем

$$\int\limits_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu_X \otimes \mu_Y) = \int\limits_X \Bigg(\int\limits_Y f(x,y)\, d\mu_Y \Bigg) d\mu_X. \tag{9}$$

Поскольку X и Y входят в условия теоремы равноправно, то получаем тот же результат, поменяв местами X и Y. Тем самым утверждения 1) — 3) доказаны.

II. Для доказательства утверждения II рассмотрим последовательность функций $f_n(x,y) = \min\{f(x,y), n\}$. Эти функции измеримы на

$X\times Y$ и ограничены. Если меры μ_X и μ_Y конечны, то функции f_n интегрируемы. Последовательность $f_n(x,y)$ точечно сходится к $f(x,y)$, монотонно возрастает и интегралы от функций f_n ограничены в совокупности:

$$\int\limits_{X\times Y} f_n(x,y)\,d(\mu_X\otimes\mu_Y)=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f_n(x,y)\,d\mu_Y\right)d\mu_X\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_X\left(\int\limits_Y f(x,y)\,d\mu_Y\right)d\mu_X=M.$$

Значит, по теореме Б. Леви функция f интегрируема.

В случае σ-конечных мер интеграл по любому множеству конечной меры ограничен повторным интегралом и, следовательно, функция f интегрируема. $\lhd$

Примеры.

1. Пусть $X=Y=[-1,1]$ и

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},\ f(0,0)=0.$$

Тогда $\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dx=\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dy=0$. Поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy=0.$$

Но интеграл Лебега на $X\times Y$ не существует, так как

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}|f(x,y)|\,dxdy\geqslant\int\limits_0^1 dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{|\sin\varphi\cdot\cos\varphi|}{r}\,d\varphi=2\int\limits_0^1\frac{dr}{r}=+\infty.$$

Этот пример показывает, что в случае знакопеременных функций из существования и даже равенства повторных интегралов не следует, что функция f интегрируема. Более сложные примеры показывают, что из существования и равенства повторных интегралов не следует даже измеримость f как функции на $X\times Y$.

2. Пусть $X = Y = [0,1]$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},\ f(0,0) = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy\right) dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как $f(x,y) = -f(y,x)$, при изменении порядка вычисления повторных интегралов получаем результат со знаком минус:

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\right) dy = -\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Этот пример показывает, что из существования повторных интегралов не следует, что они равны. Разумеется, в этом примере функция f не интегрируема.

ГЛАВА III
МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 14. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Основным объектом изучения в функциональном анализе являются множества, снабженные одновременно алгебраической и топологической структурой. Наиболее просто топология на множестве задается с помощью метрики. Кроме того, задание метрики позволяет рассмотреть с общей точки зрения ряд других понятий, используемых в анализе, но не имеющих смысла в произвольных топологических пространствах. Понятие метрического пространства уже встречалось студентам математических специальностей в других учебных курсах. Поэтому в данной главе кратко изложены основные факты теории метрических пространств, которые в последующих главах используются при изучении основных объектов функционального анализа. При этом внимание уделяется примерам, типичным для функционального анализа.

Определение 1. *Метрикой* на множестве X называется отображение $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$, принимающее неотрицательные значения и удовлетворяющее следующим трем аксиомам (*аксиомам метрики*):

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*неравенство треугольника*).

Значение $\rho(x, y)$ метрики ρ на паре элементов (x, y) называется *расстоянием между точками x и y*.

Определение 2. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), где X — множество, ρ — метрика на нем.

Если метрика на множестве X зафиксирована, то метрическое пространство (X, ρ) будем обозначать просто X. Отображение f из X в Y будем иногда обозначать $f\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$, подчеркивая тем самым, что множества рассматриваются как метрические пространства.

Поскольку само множество X называют пространством, то его подмножества называют множествами в пространстве X.

На каждом множестве A в метрическом пространстве (X, ρ_X) естественным образом определяется метрика $\rho_A(x, y) := \rho_X(x, y)$; $x, y \in A$. Множество A с определенной выше метрикой называется *подпространством метрического пространства* (X, ρ_X).

П р и м е р ы м е т р и ч е с к и х п р о с т р а н с т в (типичные для функционального анализа).

1. *Пространство* $C[a, b]$ состоит из числовых функций, заданных и непрерывных на отрезке $[a, b]$. Если x и y — непрерывные функции, то положим

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Проверим выполнение аксиом метрики. Прежде всего отметим, что расстояние задано для любых функций из $C[a, b]$.

Если $\rho(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| = 0$, то $x(t) = y(t)$, т. е. аксиома 1) выполнена. Выполнение аксиомы 2) очевидно. Далее имеем

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \Big(|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

т. е. выполнено неравенство треугольника.

Таким образом, получаем метрическое пространство, точками которого являются непрерывные функции. Эта метрика была впервые введена П. Л. Чебышевым и ее обычно называют *чебышевской.* В дальнейшем, когда речь идет о пространстве $C[a, b]$, метрика обычно не указывается, а предполагается, что на пространстве задана указанная выше стандартная метрика (если не оговорено противное). Это замечание относится и к другим классическим примерам метрических пространств из приведенного ниже списка.

Заметим также, что в этом примере и во всех остальных рассматриваются параллельно два случая — в первом случае рассматриваются функции или последовательности с действительными значениями, во втором — с комплексными значениями.

2. *Пространство* l_1. Элементами этого пространства являются бесконечные последовательности чисел (действительных или комплексных) $x = (x_1, x_2, \ldots)$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$.

Метрику зададим формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|,$$

где y — последовательность $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Выполнение аксиом 1), 2) метрики очевидно. Проверим неравенство треугольника. Для любого k имеем $|x_k - y_k| \leqslant |x_k - z_k| + |z_k - y_k|$. Суммируя по k, получаем $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Замечание 1. Последовательность, по определению, есть функция натурального элемента. Поэтому можно употреблять для члена последовательности x обозначение $x(k)$, используемое для обозначения значений функции, а не x_k. Такое обозначнение более удобно в ряде вопросов, например при рассмотрении последовательностей элементов из пространства последовательностей.

3. *Пространство* l_∞. Элементами этого пространства являются все бесконечные последовательности действительных или комплексных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, такие, что $\sup\limits_k |x_k| < +\infty$, т. е. ограниченные. Метрику определим формулой $\rho(x,y) = \sup\limits_k |x_k - y_k|$. Проверка выполнимости аксиом метрики аналогична проверке в примере 1.

4. *Пространства* l_p, $p > 1$. Элементами пространства являются бесконечные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ такие, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ сходится. Метрика задается формулой

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Очевидно, что аксиомы 1) и 2) выполняются; выполнение аксиомы 3) есть довольно тонкий аналитический факт, доказательство которого будет дано в § 20.

5. *Пространство* $\mathbf{s}$. Элементами пространства являются все бесконечные числовые последовательности. Метрика задается формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \, \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Проверим выполнение аксиом метрики. Если имеем $\rho(x,y) = 0$, то $|x_k - y_k|/(1 + |x_k - y_k|) = 0$ для любого k, откуда $x_k = y_k$ и, значит, $x = y$. Равенство $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ очевидно.

Для доказательства неравенства треугольника рассмотрим функцию $\varphi(t) = t/(1+t)$. Так как производная $\varphi'(t) = 1/(1+t)^2$ монотонно убывает на $]-1, +\infty[$ и положительна, функция φ выпукла вверх и монотонно возрастает. В частности, при $0 \leqslant a \leqslant b$ приращение функции на $[a,\ a+b]$ не превосходит приращения на $[0, b]$, т. е. выполнено

$$\varphi(a+b) - \varphi(a) \leqslant \varphi(b),$$

откуда

$$\varphi(|a+b|) \leqslant \varphi(|a|) + \varphi(|b|).$$

Представляя $x_k - y_k$ в виде $(x_k - z_k) + (z_k - y_k)$, имеем

$$\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \leqslant \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|}.$$

Суммируя по k, получаем неравенство треугольника.

6. *Пространство* $C_L[a,b]$. Элементами пространства являются непрерывные функции на отрезке $[a,b]$. Метрику зададим формулой

$$\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Проверка аксиом метрики аналогична проверке в примере 2 с заменой суммы ряда интегралом.

7. *Пространство* $\mathbf{R}^n$. Существует много естественных с разных точек зрения способов введения метрики в пространстве $\mathbf{R}^n$. Отметим одну серию таких способов. Для любого $p \geqslant 1$ зададим метрику:

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Выполнение аксиом 1), 2) метрики очевидно, неравенство треугольника будет доказано в § 20. Наиболее часто используется *евклидова метрика* $\rho_2(x,y)$, метрика $\rho_1(x,y)$, а также метрика ρ_∞, заданная формулой $\rho_\infty(x,y) = \max\limits_k |x_k - y_k|$.

В случае пространства $\mathbf{R}$ все эти метрики сводятся к одной метрике $\rho(x,y) = |x - y|$.

Пространство $\mathbf{R}^n$ с евклидовой метрикой является одной из основных моделей при построении теории метрических пространств. В теории метрических пространства аксиоматизированы основные свойства расстояния, и эта теория изучает те свойства и понятия, которые могут быть введены с помощью расстояния. Легко заметить, что такие базовые понятия математического анализа, как предел, непрерывность, равномерная непрерывность, последовательность Коши, можно сформулировать так, что они используют лишь расстояние между точками в $\mathbf{R}^n$ и, следовательно, имеют смысл в произвольных метрических пространствах. В результате получаем соответствующие определения для произвольных метрических пространств.

Определение 3. Последовательность (x_n) точек метрического пространства (X, ρ) называется *сходящейся*, если существует такой элемент $a \in X$, что $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x_n, a) < \varepsilon$. Точка a называется *пределом последовательности* (x_n). В этом случае записываем $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to a$.

Предложение 1. *В метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

$\triangleright$ Если $x_n \to a$ и $x_n \to b$, то по неравенству треугольника будем иметь $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) \to 0$, т. е. $\rho(a, b) = 0$, и в силу аксиомы 1) метрики $a = b$. $\triangleleft$

Определение 4. Отображение $f\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что из неравенства $\rho_X(x, x_0) < \delta$ следует $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Отображение f называется *непрерывным на* X (на множестве $A \subset X$), если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$ ($x_0 \in A$).

Определение 5. Отображение $f\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$ следует неравенство $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Определение 6. Последовательность $(x_n) \in X$ называется *последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью, сходящейся в себе последовательностью)* в метрическом пространстве (X, ρ), если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для $n, m > n(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Общее понятие сходящейся последовательности в метрическом пространстве в конкретных случаях может иметь весьма различный вид; многие известные типы сходимости в пространствах функций и последовательностей совпадают со сходимостью по какой-нибудь метрике.

Рассмотрим конкретный вид сходимости последовательностей в различных пространствах.

1. *Пространство* $C[a,b]$. Условие $\rho(x_n, x_0) \to 0$ в этом пространстве имеет следующий вид: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$ выполняется $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$. Это есть широко используемое в математическом анализе и других вопросах понятие равномерной сходимости последовательности функций.

2. *Пространство* $C_L[a,b]$. Условие $\rho_L(x_n, x_0) \to 0$ имеет вид: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$ выполняется

$$\int\limits_a^1 |x_n(t) - x_0(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Этот тип сходимости называется *сходимостью в среднем* и также часто встречается в математическом анализе и в теории интегрирования.

3. *Пространство* $\mathbf{s}$. Пусть x_n — последовательность элементов пространства $\mathbf{s}$. Каждый элемент x_n является последовательностью чисел $x_n(k)$ (здесь удобно обозначение последовательности $x_n = (x_n(k))$ как функции натурального аргумента k). Сходимость в пространстве $\mathbf{s}$ последовательности x_n к элементу x_0 означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k) - x_0(k)|}{1 + |x_n(k) - x_0(k)|} < \varepsilon.$$

Тогда для каждого слагаемого получаем

$$\frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k) - x_0(k)|}{1 + |x_n(k) - x_0(k)|} < \varepsilon,$$

откуда следует, что $|x_n(k) - x_0(k)| \to 0$ при $n \to \infty$ (дробь стремится к нулю, знаменатель ограничен) для любого k. Таким образом, из сходимости в метрике пространства $\mathbf{s}$ вытекает покоординатная сходимость последовательности x_n (число $x(k)$ по аналогии со случаем пространства $\mathbf{R}^n$ называют k-й координатой элемента $x \in \mathbf{s}$).

Сейчас покажем, что из покоординатной сходимости вытекает сходимость в метрике пространства $\mathbf{s}$. Действительно, пусть последовательность x_n сходится покоординатно: $|x_n(k) - x_0(k)| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого k. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем N так, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} 1/2^k < \varepsilon/2$. Для каждого k, $k = 1, \ldots, N$, выберем номер n_k такой, что для $n > n_k$ выполняется $\varphi(x_n(k) - x_0(k)) \leqslant \varepsilon/2$, где $\varphi(t) = |t|/(1 + |t|)$, $t \in \mathbf{R}$. Пусть $n(\varepsilon) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} n_k$, тогда для $n > n(\varepsilon)$ получаем

$$\rho(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \varphi(x_n(k) - x_0(k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\, \varphi(x_n(k) - x_0(k)) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \varphi(x_n(k) - x_0(k)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\, \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 1. Показать, что из сходимости в пространстве l_p вытекает покоординатная сходимость, но покоординатно сходящаяся последовательность может не сходиться в смысле метрики l_p.

При изучении различных классов пространств и других математических объектов возникает естественное понятие изоморфизма — биективного отображения одного пространства в другое, которое сохраняет заданную структуру. В случае топологических пространств изоморфизм называется *гомеоморфизмом.* В случае метрических пространств изоморфизм определяется следующим образом.

Определение 7. Отображение f метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) называется *изометрическим (изометрией)*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$. Сюръективное изометрическое отображение $f\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется *изометрическим изоморфизмом.* Метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называются *изометричными* или *изометрически изоморфными*, если между ними существует изометрический изоморфизм.

В теории метрических пространств изучаются те свойства метрических пространств, которые сохраняются при изометрических изоморфизмах. Иначе говоря, изометричные пространства считаются одинаковыми с точки зрения теории метрических пространств.

П р и м е р ы.

1. Множество $X = \mathbf{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ изометрично интервалу $]-1,1[$ с обычной метрикой. Изометрия задается отображением $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

2. Пространства $C[0,1]$ и $C[a,b]$ изометричны. Изометрией является, например, отображение $f(x)(t) = x(a(1-t)+bt)$, действующее из $C[a,b]$ в $C[0,1]$. Поэтому в дальнейшем мы будем в основном изучать пространство $C[0,1]$, имея в виду, что пространство $C[a,b]$ обладает точно такими же свойствами.

§ 15. ТОПОЛОГИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим топологию на множестве X, порожденную метрикой.

Напомним, что *топологией* на множестве X называется семейство τ подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим аксиомам: 1) если $U_\alpha \in \tau$, то $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau$; 2) если $U_1 \in \tau$, $U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$; 3) $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$. Подмножества, входящие в семейство τ, называют *открытыми в топологии* τ.

Определение 1. *Открытым* (*замкнутым*) *шаром с центром в точке* x_0 *радиуса* r в метрическом пространстве (X,ρ) называется множество

$$B(x_0,r) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) < r\}, \quad (B[x_0,r] = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) \leqslant r\}).$$

В случае пространства $\mathbf{R}^3$ с евклидовой метрикой шар $B(x_0,r)$ в смысле определения 1 есть обычный открытый (без граничной сферы) шар, в случае пространства $\mathbf{R}^2$ — круг, в случае пространства $\mathbf{R}$ — интервал. Многие факты в теории метрических пространств удается получить по аналогии со случаем пространства $\mathbf{R}^3$: сначала из наглядных геометрических соображений доказывается утверждение (или вводится новое понятие) для случая пространства $\mathbf{R}^3$, а затем часто оказывается, что то же доказательство корректно в случае произвольных метрических пространств.

Однако следует иметь в виду, что далеко не все свойства пространства $\mathbf{R}^3$ переносятся на случай произвольных метрических пространств. В частности, шары в произвольных метрических пространствах не наследуют все свойства обычных шаров в $\mathbf{R}^3$. Так, например, в пространстве $\overline{\mathbf{R}}_+$, состоящем из неотрицательных чисел с обычной метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$, имеем $B[3,3]=[0,6]$, $B\left[\frac{1}{2},5\right]=\left[0,5\frac{1}{2}\right]$. Получаем, что в этом пространстве существует шар радиуса 5, который является собственным подмножеством шара радиуса 3.

Определение 2. Множество $U\subset X$ называется *открытым* в метрическом пространстве (X,ρ), если для любого $x_0\in U$ существует число $r>0$ такое, что справедливо включение $B(x_0,r)\subset U$.

Проверим, что определенное таким образом семейство τ открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологии.

1. Пусть U_α — открытые множества в (X,ρ) и пусть $U=\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha$. Если $x_0\in U$, то существует U_{α_0} такое, что $x_0\in U_{\alpha_0}$. Значит, существует радиус $r>0$ такой, что $B(x_0,r)\subset U_{\alpha_0}\subset U$.

2. Пусть U_1 и U_2 — открытые множества в (X,ρ) и $U=U_1\cap U_2$. Если $x_0\in U_1\cap U_2$, то $x_0\in U_1$ и $x_0\in U_2$ и, значит, существует шар $B(x_0,r_1)\subset U_1$ и шар $B(x_0,r_2)\subset U_2$. Тогда для $r=\min\{r_1,r_2\}$ имеем $B(x_0,r)\subset U$, т. е. U открыто.

3. Пространство X содержит все шары и, значит, удовлетворяет определению открытого множества. Пустое множество $\emptyset$ также будем считать открытым.

Построенная описанным выше способом топология на множестве X называется *естественной топологией метрического пространства* или *топологией, индуцированной метрикой ρ.*

Таким образом, в метрическом пространстве имеют смысл все понятия, которые можно рассматривать в топологических пространствах. Заметим, что приведенные в § 14 определения сходящейся последовательности и непрерывного отображения эквивалентны соответствующим определениям для топологических пространств с топологией, индуцированной метрикой.

Предложение 1. *Открытый шар $B(x_0,r)$ является открытым множеством.* (Лингвистическая очевидность не является доказательством, так как определение открытого шара и определение открытого множества были даны независимо.)

$\triangleright$ Если $x_1\in B(x_0,r)$, то $\rho(x_0,x_1)<r$. Рассмотрим шар $B(x_1,r_1)$, где $r_1=r-\rho(x_0,x_1)>0$. Если $x\in B(x_1,r_1)$, то, применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x,x_0)\leqslant\rho(x,x_1)+\rho(x_1,x_0)<r_1+\rho(x_1,x_0)=r.$$

Таким образом, $B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r)$. $\triangleleft$

Если A — подмножество множества X, то для точки $x \in X$ возможны два случая: $x \in A$ или $x \notin A$. Если A — подмножество в метрическом пространстве (X, ρ) (или в топологическом пространстве), то можно более детально описать расположение точки x относительно множества A. Различные варианты расположения точки относительно множества выделяются следующими определениями.

Точка $x_0 \in X$ называется *внешней точкой* множества A, если существует радиус $r > 0$ такой, что $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$.

Точка $x_0 \in X$ называется *точкой прикосновения* множества A, если для любого $r > 0$ шар $B(x_0, r)$ содержит точки множества A, т. е. $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

Если $x_0 \in X$ — внешняя точка множества A, т. е. $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$, то все точки открытого шара $B(x_0, r)$ — внешние для множества A (предложение 1). Поэтому множество внешних точек является открытым.

Множество точек прикосновения множества A называется *замыканием множества* A и обозначается $\overline{A}$.

Любая точка $x \in A$ является точкой прикосновения для множества A, т. е. $A \subset \overline{A}$, так как $x \in B(x, r) \cap A$.

Точки прикосновения можно также расклассифицировать, учитывая, насколько велико множество $B(x_0, r) \cap A$.

Точка $x_0 \in X$ называется *внутренней точкой* множества A, если существует радиус $r > 0$, такой, что шар $B(x_0, r)$ содержится в A, т. е. $B(x_0, r) \cap A = B(x_0, r)$.

Точка $x_0 \in X$ называется *граничной точкой* множества A, если для любого $r > 0$ шар $B(x_0, r)$ содержит как точки множества A, так и точки, не принадлежащие A, т. е.

$$B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset, \quad B(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Точка $x_0 \in X$ называется *изолированной точкой* множества A, если существует радиус $r > 0$, такой, что шар $B(x_0, r)$ содержит только одну точку множества A – саму точку x_0, т. е. $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$.

Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества A, если для любого $r > 0$ шар $B(x_0, r)$ содержит точки множества A, отличные от x_0, т. е. $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Множество A называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Напомним, что множество $V \subset X$ называется *окрестностью точки* x_0 в топологическом пространстве (X, τ), если существует открытое множество U $(U \in \tau)$ такое, что $x_0 \in U \subset V$. В топологических пространствах определения, аналогичные приведенным выше, отличаются тем, что вместо шаров (являющихся окрестностями в топологии, индуцированной метрикой) рассматриваются окрестности точки.

Свойства замкнутых множеств описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть A — подмножество в метрическом пространстве (X, ρ). Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) дополнение $X \backslash A$ есть открытое множество, т. е. A замкнуто;

2) $\overline{A} \subset A$, т. е. A содержит все свои точки прикосновения;

3) $\overline{A} = A$, т. е. совпадает со своим замыканием;

4) из того, что $x_n \in A$ и последовательность $x_n \to x_0$, следует, что $x_0 \in A$.

$\triangleright$ $1 \Leftrightarrow 2$. Если $X \setminus A$ — открытое множество, то для любой точки $x_0 \notin A$ существует шар $B(x_0, r)$, $r > 0$, такой, что $B(x_0, r) \subset X \setminus A$, т. е. $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$. Это означает, что $x_0 \notin \overline{A}$. Таким образом, $X \setminus A \subset$ $\subset X \setminus \overline{A}$.

Если $\overline{A} \subset A$, то любая точка $x_0 \in X \setminus A \subset X \setminus \overline{A}$ является внешней для A, т. е. существует шар $B(x_0, r)$, $r > 0$, такой, что $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$, т. е. $B(x_0, r) \subset X \setminus A$. Эквивалентность доказана.

$2 \Leftrightarrow 3$. Ввиду отмеченного ранее включения $A \subset \overline{A}$ эквивалентность очевидна.

$3 \Rightarrow 4$. Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in A$. Тогда для любого $r > 0$ пересечение $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$, так как для любого $r > 0$ существует номер $n(r)$ такой, что для $n \geqslant n(r)$ $x_n \in B(x_0, r)$ и, значит, $x_n \in B(x_0, r) \cap A$.

$4 \Rightarrow 3$. Пусть $x_0 \in \overline{A}$. Так как $B(x_0, 1/n) \cap A \neq \emptyset$, то выберем $x_n \in B(x_0, 1/n) \cap A$. Тогда последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, и в силу 4) $x_0 \in A$, т. е. $\overline{A} \subset A$, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Множество, обладающее свойством 4) из формулировки теоремы 1, называется *секвенциально замкнутым.* Специальные свойства метрических пространств использовались только при доказательстве того, что из свойства 4) следует свойство 3), а все остальные утверждения имеют место и в произвольных топологических пространствах. В частности, из замкнутости множества следует секвенциальная замкнутость. Приведенный ниже пример 1 показывает, что в произвольных топологических пространствах из секвенциальной замкнутости множества не следует его замкнутость.

П р и м е р ы.

1. Пусть $X := F[0,1]$ есть множество всех функций, определенных на отрезке [0,1]. Зададим топологию на X. Пусть

$$V_{t_1,t_2,\dots,t_m;r}(x_0) = \{x \in F|\ |x(t_k) - x_0(t_k)| < r, k = 1,\dots,m\},$$

где $t_1, t_2, ..., t_m$ — произвольный конечный набор точек отрезка [0,1], $r > 0$. Множество $U \subset F[0,1]$ будем называть открытым, если для любого $x_0 \in U$ существует множество вида $V_{t_1,t_2,\dots,t_m;r}(x_0)$ такое, что $V_{t_1,t_2,\dots,t_m;r}(x_0) \subset U$. Заданная топология называется *топологией точечной сходимости*, так как последовательность функций x_n сходится к x_0 в этой топологии тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится точечно.

Пусть $A \subset F[0,1]$ есть множество всех измеримых функций. Согласно теореме 1 § 7 предел точечно сходящейся последовательности измеримых функций является измеримой функцией. Это означает, что множество измеримых функций обладает свойством секвенциальной замкнутости. Однако данное множество A не является замкнутым в рассматриваемой топологии. Действительно, в окрестности $V_{t_1,t_2,\dots,t_m;r}(x_0)$ произвольной функции x_0 существуют измеримые функции (например, функция $x : x(t_k) = x_0(t_k), x(t) = 0,$ если $x \neq t_k$). Поэтому любая функция является точкой прикосновения множества A и $\overline{A} = F[0,1] \neq A$.

2. В пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций рассмотрим подмножество $\mathcal{P}$, состоящее из функций, являющихся полиномами, т. е. имеющими вид $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция может быть равномерно приближена полиномом, т. е. если $x \in C[0,1]$, то для любого $r > 0$ существует полином p такой, что $|x(t) - p(t)| < r$, т. е. $p \in B(x,r)$. Таким образом, любая функция $x \in C[0,1]$ является точкой прикосновения множества полиномов, т. е. $\overline{\mathcal{P}} = C[0,1]$. Последнее равенство является фактически переформулировкой теоремы Вейерштрасса.

3. В пространстве $\mathbf{R}$ вещественных чисел с естественной метрикой $\rho(x,y) = |x - y|$ рассмотрим подмножество $\mathbf{Q}$, состоящее из рациональных чисел. Так как в любом интервале $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ существуют рациональные числа, то каждое действительное число является точкой прикосновения множества $\mathbf{Q}$, т. е. $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Определение 3. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным*, если $\overline{A} = X$.

Рассмотренные в предыдущих примерах множества $\mathcal{P}$ и $\mathbf{Q}$ являются всюду плотными соответственно в $C[0,1]$ и $\mathbf{R}$.

Теперь рассмотрим свойство непрерывности.

Теорема 2. *Для отображения $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ метрических пространств следующие свойства эквивалентны:*

1) f непрерывно в точке $x_0 \in X$;

2) для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

$\triangleright$ 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть f непрерывно в точке x_0 и $x_n \to x_0$. По $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta > 0$ так, что из неравенства $\rho_X(x, x_0) < \delta$ следует неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Для $\delta > 0$ найдем число $n(\delta)$ такое, что для $n \geqslant n(\delta)$ выполнено $\rho_X(x_n, x_0) < \delta$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ и, значит, $f(x_n) \to f(x_0)$.

2)$\Rightarrow$ 1). Пусть для любой последовательности $x_n \to x_0$ имеем $f(x_n) \to f(x_0)$. Предположим, что отображение f разрывно в точке x_0. Это значит, что существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует точка $x_\delta \in X$, для которой $\rho_X(x_\delta, x_0) < \delta$, но $\rho_Y(f(x_\delta), f(x_0)) > \varepsilon_0$. Возьмем последовательность $\delta_n \to 0$ и выберем x_n так, что $\rho(x_n, x_0) < \delta_n$, но $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon_0 > 0$. Тогда $x_n \to x_0$, но $f(x_n)$ не сходится к $f(x_0)$, что противоречит условию. $\triangleleft$

Следствие. *Для непрерывности отображения f метрических пространств в точке x_0 достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0$ последовательность $f(x_n)$ была сходящейся.*

$\triangleright$ Пусть существует последовательность x_n такая, что $x_n \to x_0$, и при этом $f(x_n) \to y \neq f(x_0)$. Построим новую последовательность x'_n такую, что $x'_{2n} = x_n$, $x'_{2n+1} = x_0$. Тогда $x'_n \to x_0$, но $f(x'_n)$ не сходится, так как $f(x'_{2n}) \to y$, $f(x'_{2n+1}) \to f(x_0)$ и $y \neq f(x_0)$. $\triangleleft$

Отображение, обладающее свойством 2) теоремы 2, называют *секвенциально непрерывным.* Следующий пример показывает, что в произвольных топологических пространствах из секвенциальной непрерывности не следует непрерывность.

Пример 4. Пусть на множестве $X = \mathbf{R}$ заданы две топологии: $\tau_1 = \mathbf{P}(X)$ — дискретная топология и топология τ_2, в которую входят те и только те множества, у которых дополнения конечны или счетны, и пустое множество. Сходящиеся последовательности в пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2) одни и те же — это последовательности, все члены которых, начиная с некоторого номера, совпадают. Поэтому тождественное отображение $f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1); f(x) = x$, разрывно, но является секвенциально непрерывным.

Замечание 1. Кроме того, что топология метрического пространства обладает дополнительными хорошими свойствами, отметим, что проверка условий в определениях в случае метрических пространств проще, чем для произвольных топологических, так как такая проверка сводится к сравнению чисел, а в топологических пространствах — к сравнению множеств.

Замечание 2. Полезно различать, какие из рассматриваемых свойств или понятий являются топологическими, т. е. определяются только топологией, и какие являются метрическими — для введения которых недостаточно знания топологии. Например, понятие сходящейся последовательности определяется через топологию, а для введения понятия последовательности Коши топологии недостаточно.

До сих пор мы только один раз, в доказательстве теоремы о единственности предела, воспользовались аксиомой 1) метрики, которая утверждает, что равенство $\rho(x, y) = 0$ эквивалентно равенству $x = y$.

Определение 4. *Полуметрикой* на множестве X называется отображение $\rho : X \times X \to \overline{\mathbf{R}}_+$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $x = y \Rightarrow \rho(x, y) = 0$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \;\; x, y \in X$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y), \;\; x, y, z \in X$.

Полуметрическим пространством называется пара (X, ρ), где X — множество, ρ — полуметрика на X.

В определении полуметрики только аксиома 1) отличается от аксиомы 1) в определении метрики. Поскольку аксиома 1) метрики использовалась лишь в доказательстве предложения о единственности предела, в полуметрических пространствах имеют смысл все приведенные выше определения и справедливы все утверждения, кроме утверждения о единственности предела.

Пример 5. Рассмотрим множество $\mathbf{P}(X)$ всех подмножеств пространства X с σ-аддитивной мерой μ, заданной на алгебре Σ элементарных множеств. Для двух подмножеств A и B положим $\rho(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$, где μ^* — внешняя мера. Следствие 3 теоремы 1 § 4 утверждает, что для $\rho(A, B)$ выполнены аксиомы полуметрики.

Если $\rho(A, B) = 0$, то $A \triangle B$ есть множество меры нуль, но не обязательно $A = B$, т.е. ρ не является метрикой. Используя введенную в § 14 терминологию, утверждение теоремы 2 § 4 можно перефразировать следующим образом: совокупность измеримых по Лебегу множеств есть замыкание множества элементарных множеств в построенном полуметрическом пространстве $(\mathbf{P}(X), \rho)$.

§ 16. ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Доказательства основных теорем математического анализа используют "критерий Коши" — утверждение, что любая числовая последовательность Коши сходится. Рассмотрим взаимосвязь между последовательностями Коши и сходящимися последовательностями в произвольных метрических пространствах.

Обратим внимание на то, что понятию последовательности Коши не может быть придан смысл в произвольном топологическом пространстве, так как для введения этого понятия нужно сравнивать по "величине" окрестности различных точек, что невозможно в произвольном топологическом пространстве.

Теорема 1. *В любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.*

$\triangleright$ Пусть $x_n \to x_0$. Тогда $\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Обратное утверждение для произвольных метрических пространств неверно.

Примеры.

1. Пусть $X =]-1, 1[$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность $x_n = n/(n+1)$ является последовательностью Коши, но не имеет предела в X.

2. Пусть $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x-y|$. Последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ является последовательностью Коши, но не сходится в пространстве $\mathbf{Q}$.

3. В пространстве $C_L[0, 1]$ рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 1, & 1/2 + 1/n \leqslant t \leqslant 1, \\ n(t - 1/2), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1/2 + 1/n. \end{cases}$$

Проверим, что x_n — последовательность Коши. Действительно, если $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \int\limits_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\, dt = \int\limits_{1/2}^{1/2+1/n} |x_n(t) - x_m(t)|\, dt < \frac{1}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Эта последовательность сходится к разрывной функции

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Предположим, что $x_n \to y_0$ и $y_0 \in C_L[0,1]$. Запишем неравенство для интегралов:

$$\int_0^1 |x_0(t) - y_0(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 |x_0(t) - x_n(t)|\, dt + \int_0^1 |x_n(t) - y_0(t)|\, dt.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\int_0^1 |x_0(t) - y_0(t)|\, dt = 0$ и, значит, $y_0(t)$ почти всюду совпадает с $x_0(t)$ (свойство 9 § 8).

Значит, функция $y_0(t)$ разрывна в точке $t = 1/2$ и последовательность x_n не имеет предела в пространстве $C_L[0,1]$.

4. На $\mathbf{R}$ введем метрику

$$\rho_1(x,y) = \Big| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \Big|.$$

Последовательность $x_n = n$ является последовательностью Коши в этой метрике:

$$\rho_1(n,m) = \Big| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \Big| \to 0 \ \text{ при } \quad n, m \to \infty.$$

Однако эта последовательность не сходится, так как для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем $\lim \rho(n,x) = 1 - x/(1+|x|) \neq 0$.

Отметим, что в примерах 1 и 2 пространство легко “исправить” так, чтобы любая последовательность Коши оказалась сходящейся. Так, в примере 1 естественно рассмотреть более широкое пространство $[-1,1]$, в примере 2 — более широкое пространство $\mathbf{R}$. Подобное “исправление” пространства $C_L[0,1]$ представляет собой более сложную задачу, которая будет рассмотрена в § 19. В примере 4 “исправить” пространство можно следующим образом. Заметим, что функция $f(x) = x/(1+|x|)$ является изометрией между пространством $X = (\mathbf{R}, \rho_1)$ и пространством $X_1 = (]-1,1[, \rho)$ из примера 1. Так как эти пространства изометричны, то “исправленным” пространством можно считать пространство $Y = [-1,1]$.

Определение 1. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если в нем любая последовательность Коши сходится.

Таким образом, $\mathbf{R}_+, \mathbf{Q}, C_L[0,1]$ — неполные пространства, а пространства $\overline{\mathbf{R}}_+, \mathbf{R}$ — полные.

Замечание 1. Метрика из примера 4 порождает на $\mathbf{R}$ ту же топологию, что и метрика $\rho(x,y) = |x-y|$, так как шар $\{x| \; \rho_1(x,x_0) < r\}$ есть обычный интервал $\{x \in \mathbf{R}| \; ;\varphi(x_0 - r) \leqslant x < \varphi(x_0 + r)\}$, где $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$, и любой интервал $]a,b[$ может быть представлен в виде шара в метрике ρ_1. Как мы убедились выше, последовательности Коши в этих пространствах различны. Это означает, в частности, что полнота не является топологическим свойством.

Теорема 2. *Пространство $C[0,1]$ является полным метрическим пространством.*

$\triangleright$ Эта теорема фактически доказывается в курсе математического анализа под названием "критерий Коши равномерной сходимости последовательностей функций". Однако ввиду особой важности повторим это доказательство.

Пусть x_n — последовательность Коши в пространстве $C[0,1]$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n(\varepsilon)$ такое, что для $n, m \geqslant n(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

Зафиксируем точку t. Для $n, m \geqslant n(\varepsilon)$ имеем $|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon$, т. е. числовая последовательность $x_n(t)$ является последовательностью Коши и, в силу полноты пространства $\mathbf{R}$, сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$. Получили функцию $x_0(t)$, к которой последовательность $x_n(t)$ сходится точечно. Остается доказать, что предельная функция $x_0(t)$ непрерывна и что $x_n \to x_0$ в смысле пространства $C[0,1]$, т. е. равномерно.

В неравенстве (1) перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получаем, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$ выполнено $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n(t) - x_0(t)| \leqslant \varepsilon$, т. е. последовательность x_n сходится к x_0 равномерно. Покажем, что $x_0(t)$ — непрерывная функция. Пусть $t_0 \in [0,1]$. По $\varepsilon > 0$ выберем n_1 так, что выполнено $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_{n_1}(t) - x_0(t)| \leqslant \varepsilon/3$, и выберем $\delta > 0$ так, что из $|t - t_0| \leqslant \delta$ следует $|x_{n_1}(t_0) - x_{n_1}(t)| \leqslant \varepsilon/3$. Тогда для t таких, что $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|x_0(t) - x_0(t_0)| \leqslant |x_0(t) - x_{n_1}(t)| +$$

$$+|x_{n_1}(t) - x_{n_1}(t_0)| + |x_{n_1}(t_0) - x_0(t_0)| \leqslant \varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции x_0 в точке t_0. $\lhd$

Упражнение 1. Доказать полноту пространств l_1, l_∞, $\mathbf{s}$, l_p.

Свойство полноты пространства $\mathbf{R}$ используется в подавляющем большинстве теорем математического анализа. Выделение свойства полноты позволяет доказать ряд общих теорем, не имеющих места в неполных метрических пространствах и тем более в произвольных топологических (если даже формулировка имеет смысл). Рассмотрим несколько таких теорем, условно назвав их теоремами о полных метрических пространствах.

Обобщением принципа вложенных отрезков, известного из курса математического анализа, является следующая теорема.

Теорема 3 (принцип вложенных шаров). *В полном метрическом пространстве любая последовательность замкнутых, вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

$\rhd$ Пусть $r_n \to 0$ и $B[x_n, r_n] \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}] \supset \ldots$ — последовательность вложенных шаров. Докажем, что точки x_n — центры шаров — образуют последовательность Коши. Действительно, $x_m \in B[x_n, r_n]$ при $m > n$, т. е. $\rho(x_n, x_m) \leqslant r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как пространство X полное, то последовательность x_n сходится к некоторой точке x^*. При $m > n$ $\rho(x^*, x_n) \leqslant \rho(x^*, x_m) + \rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x^*, x_m) + r_n$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $m \to \infty$, получаем $\rho(x^*, x_n) \leqslant r_n$, что и означает $x^* \in B[x_n, r_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ $\lhd$

Замечание 2. Справедлива и обратная теорема: если в метрическом пространстве (X, ρ) любая последовательность замкнутых, вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку, то это пространство полное.

Покажем на примерах, что все условия теоремы 3 существенны.

Пример 1. В пространстве $\mathbf{R}_+$ множества $B[1/n, 1/n] =]0, 2/n]$ образуют последовательность замкнутых, вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Эти шары не имеют общей точки (нарушено условие полноты пространства).

В случае пространства $\mathbf{R}^n$ утверждение теоремы выполнено и без условия, что $r_n \to 0$. Однако для произвольных метрических пространств это условие существенно.

Пример 2. Пусть X — подпространство в l_1, образованное счетным набором элементов вида $x_n = (0, 0, \ldots, 1/2 + 1/n, 0, \ldots)$. В этом пространстве при $m \neq n$ имеем $\rho(x_n, x_m) = 1 + 1/n + 1/m$. Рассмотрим шары $B_n := B[x_n, 1 + 2/n] = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Очевидно, что $B_n \supset B_{n+1}$, но общей точки эти шары не имеют.

Заметим, что пространство X полное. Действительно, если y_n — последовательность Коши в X, то $\rho(y_n, y_m) < 1$ для $n, m \geqslant n_0$ и, так как $\rho(y_n, y_m) \geqslant 1$ при $n \neq m$, то $y_n = y_{n_0}$ для $n \geqslant n_0$ и последовательность сходится к y_{n_0}.

Следующая теорема описывает новое, достаточно тонкое свойство полных метрических пространств, которое в последующих главах используется при доказательстве основных теорем функционального анализа. Заметим, что это свойство в стандартных курсах математического анализа не рассматривается даже для пространства **R**.

Теорема 4 (Бэр). *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, U_k – последовательность открытых всюду плотных множеств. Тогда пересечение $U := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ является всюду плотным множеством.*

$\triangleright$ Заметим, что, согласно определению, множество всюду плотно, если его пересечение с любым открытым шаром непусто. Возьмем произвольный шар $B(x_0, r_0)$ и покажем, что его пересечение с U непусто.

Пересечение шара $B(x_0, r_0)$ с множеством U_1 есть непустое открытое множество. Поэтому существует открытый шар $B(x_1, r_1)$ такой, что $B(x_1, r_1) \subset (U_1 \cap B(x_0, r_0))$. В открытом множестве $B(x_1, r_1/2) \cap U_2$ выберем шар $B(x_2, r_2)$, причем будем считать, что $r_2 < r_1/4$. Аналогично в пересечении $B(x_2, r_2/2) \cap U_3$ выберем шар $B(x_3, r_3)$, причем возьмем $r_3 < r_2/4$ и т. д. Получаем вложения $B[x_k, r_k/2] \subset \subset B(x_k, r_k) \subset B[x_{k-1}, r_{k-1}/2]$ и, значит, замкнутые шары $B[x_k, r_k/2]$ вложены друг в друга, причем их радиусы стремятся к нулю. В силу принципа вложенных шаров существует точка $x^* \in B[x_k, r_k/2]$, $k = 1, 2, \ldots$. По построению имеем включение $B[x_k, r_k/2] \subset U_k$, и включение $B[x_0, r_k/2] \subset B(x_0, r_0)$. Поэтому $x^* \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_k = U$ и при этом $U \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$.$\triangleleft$

Эквивалентное утверждение (другую формулировку теоремы Бэра) получаем, рассматривая дополнения открытых множеств U_k.

Теорема 4$'$ (Бэр). *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и F_k — такая последовательность замкнутых множеств в X, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Тогда хотя бы одно из множеств F_k содержит открытый шар.*

▷ Предположим противное, т. е. пусть $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ и для любого k F_k не содержит открытого шара. Это значит, что дополнение $U_k = X \setminus F_k$ пересекается с любым открытым шаром, т. е. является всюду плотным множеством. По формулам двойственности получаем $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_k = \emptyset$, что противоречит теореме 3. ◁

Определение 2. Множество A называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит ни одного открытого шара.

Следствие 2. *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

▷ Предположим противное: пусть A_n — последовательность нигде не плотных множеств и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда последовательность $\overline{A}_n$ удовлетворяет условиям теоремы $4'$ и получаем противоречие. ◁

В качестве одного из простейших применений теоремы Бэра покажем, как просто из этой теоремы вытекает несчетность множества $\mathbf{R}$ действительных чисел. Предположим, что $\mathbf{R}$ счетно, т. е.

$$\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}, \quad x_k \in \mathbf{R}.$$

Поскольку ни одно из одноточечных множеств $\{x_k\}$ не содержит открытого шара, получаем противоречие с теоремой Бэра.

Понятие мощности множества и понятие меры позволяют выделить среди бесконечных множеств (разными способами) "малые" множества, которыми можно пренебрегать в ряде вопросов, и "большие". Например, счетные множества можно считать, с точки зрения мощности множеств, малыми множествами, а несчетные — большими. С точки зрения теории меры малыми считаются множества меры нуль, а множества положительной меры считаются большими. Например, канторово множество является большим с точки зрения мощности, но является малым с точки зрения теории меры.

Свойство, рассмотренное в теореме Бэра, позволяет указать способ разбиения множеств на "большие" и "малые" с топологической точки зрения.

Множество в метрическом пространстве называется *множеством первой категории (по Бэру)*, если оно является объединением счетного числа нигде не плотных множеств. Такие множества считаются малыми с топологической точки зрения. Множества, не являющиеся множествами первой категории, называются *множествами второй категории.*

Теорема Бэра (следствие 2) утверждает, что полное метрическое пространство является множеством второй категории, т. е. большим с этой точки зрения.

Покажем на примере, что разбиение на большие и малые множества в смысле категорий Бэра принципиально отличается от аналогичного разбиения в смысле теории меры.

П р и м е р 3. Пусть $X = [0,1]$. Занумеруем в последовательность (q_i) все рациональные числа отрезка [0,1]. Для любого $n \in \mathbf{N}$ множество

$$A_n = \{\cup_{i=1}^{\infty}(q_i - \frac{1}{2^{n+i}}, q_i + \frac{1}{2^{n+i}})\} \cap [0,1]$$

является открытым и всюду плотным в X, а его дополнение $B_n = X \setminus A_n$ есть замкнутое нигде не плотное множество. Множество $B = \cup B_n$ является множеством первой категории (малым), а его дополнение — множество $A = \cap A_n$ является множеством второй категории (большим). Однако с точки зрения теории меры картина противоположная. Действительно,

$$\mu(A) \leqslant \mu(A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+i-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

откуда $\mu(A) = 0$ и $\mu(B) = 1$, т. е. с точки зрения теории меры множество A малое, а множество B — большое.

§ 17. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В § 16 были приведены примеры, в которых для неполных метрических пространств строились содержащие их полные пространства. Такое построение возможно для любых метрических пространств. Строгий смысл этому утверждению придается следующим образом.

Определение 1. Полное метрическое пространство (Y, ρ_Y) называется *пополнением метрического пространства* (X, ρ_X), если (X, ρ_X) является его всюду плотным подпространством.

Так как изометричные метрические пространства с точки зрения теории метрических пространств считаются одинаковыми, то любое метрическое пространство, изометричное (Y, ρ_Y), тоже будем называть пополнением метрического пространства (X, ρ_X) и пополнение пространства, изометричного X, будем считать пополнением пространства X. Как будет показано в § 18, из общих соображений следует, что пополнение метрического пространства единственно с точностью до изоморфизма.

Приведенные в предыдущем параграфе примеры "исправления" неполных метрических пространств есть примеры построения пополнений, отражающие следующий общий факт.

Теорема 1 (о пополнении метрического пространства). *Для любого метрического пространства существует пополнение.*

Лемма 1. *Для любых четырех точек x, y, z, t в метрическом пространстве справедливо неравенство четырехугольника*

$$|\rho(x,y) - \rho(z,t)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,t).$$

$\triangleright$ Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,t) + \rho(t,y)$$

или

$$\rho(x,y) - \rho(z,t) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,t). \tag{1}$$

Поменяв в (1) местами пары точек (x, y) и (z, t), получаем

$$-\big(\rho(x,y) - \rho(z,t)\big) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,t),$$

что вместе с (1) дает

$$-\big(\rho(x,z) + \rho(y,t)\big) \leqslant \rho(x,y) - \rho(z,t) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,t). \quad \triangleleft$$

Доказательство теоремы 1.

$\triangleright$ Если пространство X полное, то оно само является своим пополнением. Пусть X — неполное пространство, т. е. в X существуют последовательности Коши, которые не сходятся в X. Пусть $\widetilde{Z}$ — множество всех несходящихся последовательностей Коши. В множестве $\widetilde{Z}$ введем отношение эквивалентности: последовательность z_n эквивалентна последовательности z'_n, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(z_n, z'_n) = 0$ (записываем $(z_n) \sim (z'_n)$). Рефлексивность и симметричность очевидны. Если $(z_n) \sim (z'_n)$ и $(z'_n) \sim (z''_n)$, то $\rho(z_n, z''_n) \leqslant \rho(z_n, z'_n) + \rho(z'_n, z''_n) \to 0$, т. е. $(z_n) \sim (z''_n)$. Введенное отношение транзитивно и, значит, действительно является отношением эквивалентности.

Множество $\widetilde{Z}$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей Коши. Множество классов эквивалентности обозначим Z. Фактически искомым множеством является объединение $X \cup Z$. Однако более удобно иметь множество, состоящее из элементов одинаковой природы.

Чтобы добиться этого, каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие класс $[x]$ — множество всех последовательностей, которые сходятся к x. Эти последовательности являются последовательностями Коши и эквивалентны в определенном выше смысле. Пусть X' — множество таких классов. Очевидно, что отображение $x \to [x]$ есть биективное отображение между X и X'. Будем рассматривать вместо X множество X' и определим множество $Y = X' \cup Z$, состоящее из элементов одинаковой природы.

Введем на множестве Y метрику. Если $y = [x_n]$ — класс, содержащий последовательность (x_n), $y' = [x'_n]$, то положим

$$\rho(y, y') = \lim_{n\to\infty} \rho_X(x_n, x'_n). \tag{2}$$

Проверим, что равенство (2) действительно задает на $Y \times Y$ функцию, т. е. предел существует и не зависит от выбора последовательностей.

Так как (x_n) и (x'_n) — последовательности Коши, то, используя неравенство четырехугольника, получаем

$$|\rho_X(x_n, x'_n) - \rho_X(x_m, x'_m)| \leqslant \rho_X(x_n, x_m) + \rho_X(x'_n, x'_m) \to 0.$$

Это означает, что числовая последовательность $\rho(x_n, x'_n)$ есть последовательность Коши и, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n)$.

Пусть (y^*_n) — другой представитель класса y. Тогда

$$|\rho_X(y^*_n, y'_n) - \rho_X(y_n, y'_n)| \leqslant \rho_X(y^*_n, y_n) \to 0$$

и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(y^*_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_X(y_n, y'_n)$, т. е. предел не зависит от того, какой представитель из класса последовательностей выбран.

Выполнение аксиом метрики легко проверяется. Пусть, например, $\bar{y}, \bar{y}'$ — элементы из Z и $\rho_Y(\bar{y}, \bar{y}') = 0$. Тогда для представителей y_n и y'_n классов $\bar{y}$ и $\bar{y}'$ имеем $(y_n) \sim (y'_n)$, откуда $\bar{y} = \bar{y}'$. Равенство $\rho_Y(\bar{y}, \bar{y}') = \rho_Y(\bar{y}', \bar{y})$ очевидно. Предельным переходом из неравенства

$$\rho_X(y_n, y'_n) \leqslant \rho_X(y_n, y''_n) + \rho_X(y''_n, y'_n)$$

получаем неравенство треугольника для ρ_Y:

$$\rho_Y(y,y') \leqslant \rho_Y(y,y'') + \rho_Y(y'',y').$$

Переходим к проверке того, что метрическое пространство (Y,ρ_Y) является пополнением (X,ρ_X). Для $y=[x]\in X'$ и $y'=[x']\in X'$ очевидно, что $\rho_Y(y,y')=\rho_X(x,x')$, т. е. (X',ρ_X) — подпространство в (Y,ρ_Y), изометричное X. Пусть $y\in Y$ и этот класс порожден некоторой последовательностью Коши (x_n). Тогда $\rho_Y([x_n],y)=\lim\limits_{m\to\infty}\rho_X(x_n,x_m)\to 0$ при $n\to\infty$. Значит, $y\in\overline{X'}$ (теорема 1 § 15), т. е. подпространство X' всюду плотно в Y.

Проверим полноту пространства Y. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть X — всюду плотное подпространство в метрическом пространстве Y. Если любая последовательность Коши, составленная из элементов X, сходится в Y, то пространство Y полное.*

$\triangleright$ Пусть y_n — последовательность Коши в Y. Для каждого y_n возьмем элемент $x_n\in X$ так, чтобы выполнялось $\rho(x_n,y_n)<1/n$. Тогда x_n — тоже последовательность Коши

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_m)+\rho(y_m,x_m)\leqslant$$

$$\leqslant 1/n+\rho(y_n,y_m)+1/m\to 0$$

при $n,m\to\infty$. По условию последовательность x_n имеет предел $y\in Y$ и, значит, $y_n\to y$. $\triangleleft$

Продолжим доказательство теоремы. В силу леммы 2 достаточно проверить сходимость последовательности Коши, составленной из элементов пространства X. Пусть (x_n) — такая последовательность и $\bar{x}=[x_n]$. Тогда

$$\rho(x_n,\bar{x})=\lim_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\ \to 0\ \text{ при } n\to\infty.$$

Значит, последовательность (x_n) сходится в пространстве Y. Теорема доказана. $\triangleleft$

Замечание 1. Конструкция в доказательстве теоремы аналогична одному из вариантов построения действительных чисел (по Коши). Если в качестве исходного пространства X взять множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$, то построенное в теореме множество Z есть множество иррациональных чисел. Иначе говоря, иррациональное число можно считать классом эквивалентных последовательностей Коши, состоящих из рациональных чисел и не имеющих предела в множестве рациональных чисел. Запись иррационального числа в виде бесконечной непериодической десятичной дроби представляет собой выбор представителя из класса последовательностей Коши. Например, равенство $\pi = 3,14159259\ldots$ означает, что число π есть класс последовательностей Коши, содержащий последовательность рациональных чисел $x_1 = 3$; $x_2 = 3,1$; $x_3 = 3,14$; $x_4 = 3,141; \ldots$. Заметим вместе с тем, что построение действительных чисел нельзя рассматривать как частный случай теоремы о пополнении метрических пространств, так как само понятие метрического пространства и доказательство теоремы уже используют действительные числа.

П р и м е р 3. Построим пополнение метрического пространства из примера 4 § 16 с помощью конструкции, описанной в общем виде в теореме о пополнении. Если x_n — последовательность Коши в (X,ρ), т. е.

$$\left|\frac{x_n}{1+|x_n|} - \frac{x_m}{1+|x_m|}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n,m \to \infty,$$

то возможны только три случая, т. е. последовательности Коши могут быть трех видов: 1) $|x_n - x_m| \to 0$; 2) $x_n \to +\infty$; 3) $x_n \to -\infty$. Последовательности Коши первого вида сходятся, последовательности вида 2) и 3) не сходятся в рассматриваемом пространстве. Последовательности Коши вида 2) эквивалентны между собой, т. е. образуют один класс эквивалентных последовательностей, который обозначим $+\infty$; последовательности вида 3) образуют другой класс, который обозначим символом $-\infty$. Таким образом, множество Z в данном примере состоит из двух точек $+\infty$ и $-\infty$, и процесс пополнения пространства X сводится к добавлению двух точек. Построенное пространство иногда называют *расширенной числовой прямой*.

В других конкретных примерах построение пополнения с помощью общей конструкции из доказательства теоремы о пополнении приводит к весьма громоздким объектам (элементами построенного пространства являются классы эквивалентных последовательностей Коши). Поэтому обычно конкретные пополнения стараются строить так, чтобы их элементами были более простые объекты (функции, последовательности и т. д.). Например, в § 19 будет показано, что пополнение пространства $C_L[0,1]$ может быть описано более просто — как множество функций, интегрируемых по Лебегу.

§ 18. ТЕОРЕМЫ О ПРОДОЛЖЕНИИ

Многие задачи анализа заключаются в нахождении функций или отображений из фиксированного класса (непрерывных, дифференцируемых, измеримых и т. д.), обладающих заданными дополнительными свойствами. Ряд задач такого типа редуцируется к следующей задаче о продолжении.

Пусть X и Y — метрические (или топологические) пространства, $A \subset X$ — подмножество, и $f_0 : A \to Y$ — заданное на A непрерывное отображение. Требуется найти непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(x) = f_0(x)$ для $x \in A$, или доказать его существование. Отображение f называется *продолжением отображения* f_0.

Сразу отметим, что задача продолжения не всегда имеет решение.

П р и м е р 1. Если $X = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $f_0(x) = \sin\frac{1}{x}$, то не существует непрерывной на $\mathbf{R}$ функции f, совпадающей с f_0 при $x \neq 0$ (функцию f_0 нельзя доопределить в нуле так, чтобы она стала непрерывной).

Ясно также, что, вообще говоря, продолжение может быть не единственным. Поэтому представляют интерес теоремы о существовании и о единственности продолжения. Наиболее простой случай, который рассмотрен ниже, связан с продолжением функции с некоторого подмножества на его замыкание.

Теорема 1. *Пусть X, Y — метрические пространства, f и g — непрерывные отображения из X в Y. Тогда множество точек*

$$S = \{x \in X |\ f(x) = g(x)\}$$

замкнуто в X.

$\triangleright$ Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in S$. Тогда $f(x_n) = g(x_n)$ и, переходя к пределу, получаем $f(x_0) = g(x_0)$, т. е. $x_0 \in S$. По теореме 1 § 15 множество S замкнуто. $\triangleleft$

Следствие 1 (принцип продолжения тождеств). *Если f и g — два непрерывных продолжения функции f_0, заданной на подмножестве A, то $f(x) = g(x)$ на $\overline{A}$. В частности, если A всюду плотно, то $f(x) \equiv g(x)$, т. е. продолжение с всюду плотного множества на все пространство единственно (если существует).*

$\triangleright$ Так как на A выполняется равенство $f(x) = g(x)$, то по доказанному это равенство выполняется для всех точек прикосновения множества A, т. е. на $\overline{A}$. $\triangleleft$

Подходящим классом отображений, для которых будет доказана теорема о существовании продолжения, являются равномерно непрерывные отображения. Рассмотрим предварительно некоторые свойства равномерно непрерывных отображений.

Вначале отметим, что понятие эквивалентности, введенное в предыдущем параграфе для последовательностей Коши, можно рассмотреть для произвольных последовательностей: будем говорить, что $(x_n) \sim (x'_n)$, если $\rho(x_n, x'_n) \to 0$. Заметим, что если $x_n \to x_0$ и $\rho(x_n, x'_n) \to 0$, то $x'_n \to x_0$, так как $\rho(x'_n, x_0) \leqslant \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, x_0) \to 0$.

Лемма 1. *Равномерно непрерывное отображение метрических пространств переводит последовательности Коши в последовательности Коши, а эквивалентные последовательности — в эквивалентные последовательности.*

$\triangleright$ Пусть $f : X \to Y$ — равномерно непрерывное отображение метрических пространств, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho_X(x, x') < \delta$ следует, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Если $(x_n) \sim (x'_n)$, то для $n > n(\delta)$ выполнено $\rho(x_n, x'_n) < \delta$ и, следовательно, $\rho(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon$, т. е. $(f(x_n)) \sim (f(x'_n))$.

Если (x_n) — последовательность Коши, то для $n, m \geqslant n(\delta)$ выполнено $\rho(x_n, x_m) < \delta$ и, значит, $\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, т. е. $(f(x_n))$ — последовательность Коши. $\triangleleft$

П р и м е р 2. Пусть $X = Y = \mathbf{R}_+$ и $f(x) = 1/x$. Последовательности $x_n = 1/n$ и $x'_n = 1/n^2$ эквивалентны и являются последовательностями Коши. Но последовательность $f(x_n) = n$ не является последовательностью Коши и не эквивалентна последовательности $f(x'_n) = n^2$. Это является проявлением того, что функция $1/x$ не является равномерно непрерывной.

Более сильным условием, чем равномерная непрерывность, является условие Липшица.

Определение. Говорят, что отображение $f\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ *удовлетворяет условию Липшица*, если существует такая постоянная C (*константа Липшица*), что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено неравенство $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C\rho_X(x_1, x_2)$.

Отображение f, удовлетворяющее условию Липшица, является равномерно непрерывным (определение выполняется при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/C$), равномерно непрерывное отображение является непрерывным. Обратное неверно: непрерывное отображение может не быть равномерно непрерывным, а равномерно непрерывное — не удовлетворять условию Липшица.

П р и м е р ы.

3. Числовая функция $f(x) = x^2$ на $\mathbf{R}$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной.

4. Числовая функция $g(x) = \sqrt{x}$ на $[0{,}1]$ равномерно непрерывна, но не удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2. *Пусть X, Y — метрические пространства, Y — полное, $A \subset X$, $\overline{A} = X$, $f_0 : A \to Y$ — равномерно непрерывное отображение. Тогда существует, и при том единственное, непрерывное продолжение f отображения f_0 на все X и это продолжение равномерно непрерывно.*

Если f_0 удовлетворяет условию Липшица с константой C, то продолжение f удовлетворяет условию Липшица с той же константой.

$\rhd$ Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$. Тогда существует последовательность $x_n \in A$ такая, что $x_n \to x_0$. Так как x_n — последовательность Коши, то в силу леммы $f_0(x_n)$ есть последовательность Коши в Y и, значит, существует элемент y_0 такой, что $f_0(x_n) \to y_0$. Если $x'_n \to x_0$, то $(x_n) \sim (x'_n)$, и в силу той же леммы $f_0(x_n) \sim f_0(x'_n)$. Значит $f_0(x'_n) \to y_0$, т. е. y_0 не зависит от выбора последовательности x_n. Положим $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_0(x_n)$. Если $x_0 \in A$, то, согласно теореме 2 § 15, $f_0(x_n) \to f_0(x_0)$ и, значит, $f(x_0) = f_0(x_0)$.

Пусть $x_0, x'_0 \in X$, $x_n \to x_0$, $x'_n \to x'_0$, $x_n \in A$, $x'_n \in A$. По $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x, x') < \delta$ следует, что $\rho(f_0(x), f_0(x')) < \varepsilon$. Если $\rho(x_0, x'_0) < \delta$, то для достаточно больших номеров n выполнено $\rho(x_n, x'_n) < \delta$ и, значит,

$$\rho(f_0(x_n), f_0(x'_n)) \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Так как по построению $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_0(x_n)$, $f(x'_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_0(x'_n)$, то, переходя к пределу в (1), получаем $\rho(f(x_0), f(x'_0)) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, f является равномерно непрерывным продолжением отображения f_0, причем свойство равномерной непрерывности выполнено с теми же самыми δ и ε, что и для f_0. Единственность продолжения следует из теоремы 1.

Пусть отображение f_0 удовлетворяет условию Липшица. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(f_0(x_n), f_0(x'_n)) \leqslant C\rho(x_n, x'_n)$, получаем условие Липшица для отображения f с той же постоянной C. $\lhd$

С помощью доказанных теорем получаем, например, следующее утверждение.

Предложение 1. *Любые два пополнения метрического пространства изометричны.*

$\triangleright$ Пусть Y и Y' — два пополнения пространства X. Тогда $X \subset Y$ и $X \subset Y'$. Построим отображение $\varphi_0(x) = x$, определенное на $X \subset Y$ со значением в $X \subset Y'$. Это отображение, очевидно, изометрично и, в частности, равномерно непрерывно. По теореме 2 существует продолжение $\varphi : Y \to Y'$. Так как равенство $\rho(x, x') = \rho(\varphi(x), \varphi(x'))$ выполняется на плотном множестве X, то оно выполняется тождественно. Для отображения φ_0^{-1} также существует продолжение $g : Y' \to Y$. Так как равенства $g(\varphi(x)) = x$, $\varphi(g(x)) = x$ выполняются на плотном множестве X, то эти равенства выполняются тождественно. $\triangleleft$

Замечание 1. Продолжение непрерывного отображения с замкнутых множеств представляет собой более сложную задачу. Пусть $X = D^1$ — единичный замкнутый круг на плоскости, $Y = S^1$ — единичная окружность, $A \subset X$ — также единичная окружность, отображение $f_0\colon A \to Y$ определено формулой $f_0(x) = x$ (тождественное отображение). Отображение f_0 — изометрия и, в частности, удовлетворяет условию Липшица. Однако не существует непрерывного продолжения отображения f_0 на все X.

Из доказанных теорем следует, что формулы вида $f(x) = g(x)$, где f и g — непрерывные отображения, достаточно проверять на всюду плотных множествах, и равномерно непрерывные отображения достаточно задавать на всюду плотных множествах. В связи с этим желательно иметь всюду плотные множества возможно меньшей мощности, чтобы такое задание или проверка были проще. С этой точки зрения особенно удобны пространства, в которых существуют счетные всюду плотные множества. Такие пространства называются *сепарабельными.* В сепарабельных пространствах непрерывные отображения однозначно определяются своими значениями в счетном числе точек. Сепарабельные пространства обладают также рядом других свойств, не имеющих места в произвольных метрических пространствах.

Примеры.

5. *Пространство* $\mathbf{R}$. Стандартное счетное всюду плотное множество в $\mathbf{R}$ — множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

6. *Пространство* $C[0,1]$. Счетным всюду плотным множеством в этом пространстве является множество полиномов с рациональными коэффициентами.

7. *Пространство* l_1. Счетным всюду плотным множеством является множество финитных последовательностей с рациональными координатами, т. е. последовательностей вида $x = (q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, \ldots)$, где $q_i \in \mathbf{Q}$.

8. *Пространство* l_∞ не сепарабельно. В пространстве l_∞ рассмотрим подмножество A, элементами которого являются последовательности из 0 и 1. Таких последовательностей несчетное множество. Для любых $x, y \in A$, $x \neq y$, $\rho_\infty(x, y) = 1$ и, значит, $B(x, 1/3) \cap B(y, 1/3) = \emptyset$. Пусть теперь S — всюду плотное множество в l_∞. Тогда в каждом из шаров $B(x, 1/3)$, $x \in A$, должен содержаться элемент $s_x \in S$. Так как, если $x \neq y$, шары не пересекаются, то $s_x \neq s_y$. Таким образом, в S имеется несчетное подмножество, значит, и само S несчетно.

§ 19. ПРОСТРАНСТВО $L_1(T, \mu)$

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, т. е. T — множество, Σ — σ-алгебра измеримых множеств, μ — полная σ-аддитивная мера, конечная или σ-конечная. Обозначим через $\mathbf{L}_1(T, \mu)$ множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на T, т. е. функций, для которых существует интеграл Лебега $\int\limits_T x(t)\, d\mu$. Наиболее часто встречающийся случай — когда $T = [0, 1]$, а μ — мера Лебега.

Каждой паре функций из $\mathbf{L}_1(T, \mu)$ поставим в соответствие число $\rho(x, y) = \int\limits_T |x(t) - y(t)|\, d\mu$. Как и в примере 6 § 14, проверяем, что $\rho(x, y)$ удовлетворяет аксиомам 2 и 3 метрики. Однако аксиома 1 не выполняется: если $\rho(x, y) = 0$, то $x(t) = y(t)$ почти всюду, но, вообще говоря, $x \neq y$. Таким образом, $\mathbf{L}_1(T, \mu)$ есть полуметрическое пространство. Построим новое метрическое пространство. В $\mathbf{L}_1(T, \mu)$ введем отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x(t) = y(t)$ почти всюду. Множество классов эквивалентности обозначим $L_1(T, \mu)$. Метрика в $L_1(T, \mu)$ задается формулой

$$\rho([x], [y]) = \int\limits_T |x(t) - y(t)|\, d\mu = \rho(x, y).$$

Очевидно, что расстояние определено корректно: замена в интеграле функции x на эквивалентную не меняет интеграла. Аксиома 1 метрики выполняется по построению: если $\rho([x], [y]) = 0$, то $x \sim y$ и, значит, $[x] = [y]$. Построенное метрическое пространство обозначается $L_1(T, \mu)$.

Теорема 1. *Пространство* $L_1(T, \mu)$ *полное.*

$\triangleright$ Пусть $[x_n]$ — последовательность Коши в $L_1(T, \mu)$, x_n — последовательность представителей, тогда $\rho([x_n], [x_m]) \to 0$. Выберем подпоследовательность номеров $n_k \to \infty$ так, что $\rho([x_{n_k}], [x_{n_{k+1}}]) < 1/2^k$. Рассмотрим ряд

$$x_{n_1}(t) + \sum_{i=2}^{\infty} (x_{n_i}(t) - x_{n_{i-1}}(t)), \tag{1}$$

который строится так, что x_{n_k} является его частичной суммой. Построим новый ряд, составленный из модулей:

$$|x_{n_1}(t)| + \sum_{i=2}^{\infty} |x_{n_i}(t) - x_{n_{i-1}}(t)|. \tag{2}$$

Покажем, что для него выполнены условия следствия из теоремы Б. Леви (§ 9). Заметим, что ряд (2)состоит из неотрицательных функций, нужно оценить интегралы от частичных сумм. Имеем

$$\int_T \left(|x_{n_1}(t)| + \sum_{i=2}^{k} |x_{n_i}(t) - x_{n_{i-1}}(t)| \right) d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_T |x_{n_1}(t)| \, d\mu + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{2^i} \leqslant \int_T |x_{n_1}(t)| \, d\mu + 1.$$

По теореме Б. Леви ряд (2) сходится почти всюду к интегрируемой функции $\varphi(t)$. Поскольку абсолютно сходящийся числовой ряд сходится, ряд (1) также сходится почти всюду к некоторой функции $x(t)$. Так как

$$|x_{n_k}(t)| \leqslant |x_{n_1}(t)| + \sum_{i=2}^{k} |x_{n_i}(t) - x_{n_{i-1}}(t)| \leqslant \varphi(t),$$

то по теореме Лебега (§ 9) функция $x(t)$ интегрируема. Поскольку $|x_{n_k}(t) - x(t)| \leqslant 2\varphi(t)$, то по той же теореме $\rho([x_{n_k}], [x]) = \int_T |x_{n_k}(t) - - x(t)| \, d\mu \to 0$, т. е. последовательность x_{n_k} сходится к x в метрике L_1.

Тогда $\rho([x_n],[x]) \leqslant \rho([x_n],[x_{n_k}]) + \rho([x_{n_k}],[x]) \to 0$ при $n, n_k \to \infty$, т. е. $[x_n] \to [x]$. $\lhd$

Замечание. Выделение в доказательстве у последовательности $x_n(t)$ подпоследовательности, сходящейся почти всюду, существенно, так как последовательность, сходящаяся в смысле метрики пространства $L_1(T,\mu)$, может не сходиться ни в одной точке (см. пример § 9).

Элементы пространства $L_1(T,\mu)$ обычно называют функциями, хотя это неточно: пространство состоит из классов функций и обладает не всеми свойствами пространств функций. Например, для элемента $x \in L_1(T,\mu)$ не определено значение в точке t из T, так как x есть класс функций и значение в точке зависит от выбора представителя из этого класса.

Укажем в пространстве $L_1(T,\mu)$ некоторые всюду плотные множества. Определение всюду плотного множества можно перефразировать следующим образом: множество M является всюду плотным в пространстве X, если любой элемент из X может быть сколь угодно точно приближен элементами из M. Таким свойством обладают, в частности, следующие подмножества в $L_1(T,\mu)$.

1. Множество простых интегрируемых функций. Интегрируемая по Лебегу функция является, по определению, пределом последовательности простых функций.

2. Множество простых функций, принимающих конечное число значений. Пусть x — простая интегрируемая функция и $x(t) = y_k$ при $t \in T_k$, $T = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k$, то последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & \text{для } t \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k, \\ 0, & \text{для } t \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k \end{cases}$$

сходится к $x(t)$ в метрике $L_1(T,\mu)$.

В случае, когда T есть топологическое пространство, среди интегрируемых функций могут оказаться непрерывные и возникает вопрос о плотности множества непрерывных функций в $L_1(T,\mu)$.

Теорема 2. *Пусть $T = [0,1]$, μ — мера Лебега. Множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $L_1(T,\mu)$, и, следовательно, пространство $L_1(T,\mu)$ является пополнением пространства $C_L[0,1]$.*

$\triangleright$ Для доказательства достаточно показать, что в любой окрестности любой функции x из $L_1(T,\mu)$ есть непрерывная функция, т. е. любая функция x может быть сколь угодно точно в метрике $L_1(T,\mu)$ приближена непрерывной функцией. Построим такое приближение поэтапно. Как показано выше, функция x может быть приближена простой функцией, принимающей конечное число значений, т. е. линейной комбинацией характеристических функций измеримых множеств.

По теореме 2 § 4 для измеримого множества A существует элементарное множество B такое, что $\mu(A\triangle B) < \varepsilon$. Тогда $\rho(\chi_A,\chi_B) < \varepsilon$, т. е. характеристическая функция χ_A измеримого множества A может быть приближена характеристической функцией χ_B элементарного множества B — линейной комбинацией характеристических функций полуинтервалов. Характеристическая функция полуинтервала $[a,b[$ с точностью ε в метрике пространства $L_1(T,\mu)$ может быть приближена непрерывной функцией, например функцией

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant a-\varepsilon,\ t > b+\varepsilon, \\ (t-a+\varepsilon)/\varepsilon, & a-\varepsilon \leqslant t < a, \\ 1, & a \leqslant t \leqslant b, \\ (b+\varepsilon-t)/\varepsilon, & b \leqslant t < b+\varepsilon. \end{cases}$$

Таким образом, функция x может быть приближена непрерывной функцией, т. е. $\overline{C_L[0,1]} = L_1(T,\mu)$.

Пространство $L_1(T,\mu)$ полно и содержит $C_L[0,1]$ в качестве подпространства, т. к. метрика задана той же формулой. По доказанному $\overline{C_L[0,1]} = L_1(T,\mu)$ и, значит, $L_1(T,\mu)$ есть пополнение пространства $C_L[0,1]$. $\triangleleft$

Следствие 1. *Если $T=[0,1]$ и μ — мера Лебега, то пространство $L_1(T,\mu)$ сепарабельно.*

$\triangleright$ Любая непрерывная функция на отрезке может быть равномерно приближена многочленом. Многочлен можно приблизить многочленом с рациональными коэффициентами, т. е. множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в $L_1(T,\mu)$. Это множество счетно, пространство $L_1(T,\mu)$ сепарабельно. $\triangleleft$

В дальнейшем пространство интегрируемых по мере Лебега функций на отрезке $[0,1]$ будем обозначать $L_1[0,1]$.

Укажем более явный способ построения по функции $x \in L_1[0,1]$ близкой к ней непрерывной функции.

Определение 1. *Средней по Стеклову* от функции x будем называть функцию $x_h(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau$, $h > 0$ (при вычислении интеграла полагаем, что $x(\tau) = 0$ вне отрезка $[0,1]$).

Лемма 1. *Пусть* $x \in L_1[0,1]$. *Тогда*

$$\omega(h) = \int\limits_0^1 |x(t+h) - x(t)|\,dt \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

$\triangleright$ Возьмем $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 2 существует такая непрерывная функция $x_1(t)$ на $[0,1]$, что для разности $x_2(t) = x(t) - x_1(t)$ имеем $\int\limits_0^1 |x_2(t)|\,dt < \varepsilon/3$. Непрерывная функция $x_1(t)$ равномерно непрерывна, т. е. для $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $|h| < \delta$, то $|x_1(t+h) - x_1(t)| < \varepsilon_1$. Тогда при $|h| < \delta$ выполнено неравенство

$$\omega(h) \leqslant \int\limits_0^t |x_1(t+h) - x_1(t)|\,dt + \int\limits_0^1 |x_2(t+h)|\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 |x_2(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \triangleleft$$

Сформулированное в лемме 1 свойство функции x называется *непрерывностью в среднем.* Это свойство означает, что отображение $\mathbf{R} \ni h \to x(t+h) \in L_1$ непрерывно.

Теорема 3. *Для любой функции x из $L_1[0,1]$ средние по Стеклову x_h являются непрерывными функциями и*

$$\int\limits_0^1 |x_h(t) - x(t)|\,dt \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

$\triangleright$ Функция $x_h(t)$ есть интеграл с переменным верхним пределом и, в силу теоремы 1 § 9, является непрерывной (даже абсолютно непрерывной) функцией. Покажем, что $\rho(x_h, x) \to 0$ при $h \to 0$. Имеем

$$\rho(x, x_h) = \int\limits_0^1 \left| x(t) - \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau \right| dt = \frac{1}{2h}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)|\,d\tau \right) dt.$$

По теореме Фубини

$$\rho(x, x_h) = \frac{1}{2h} \int\limits_0^1 \int\limits_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)| \, d\tau dt.$$

Обозначив $\tau - t = s$, получаем

$$\frac{1}{2h} \int\limits_0^1 \int\limits_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)| \, d\tau dt = \frac{1}{2h} \int\limits_0^1 \int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+s)| \, dt ds = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \omega(s) \, ds,$$

$$\rho(x, x_h) = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \omega(s) \, ds.$$

В силу леммы для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|s| < \delta$ выполнено $\omega(s) < \varepsilon$. Тогда $\rho(x, x_h) \leqslant \frac{1}{2h} \cdot 2h\varepsilon = \varepsilon$ при $0 < h < \delta$. Теорема доказана. $\lhd$

С помощью средних по Стеклову можно получить описание обобщенных производных и абсолютно непрерывных функций, отличное от описания из § 12.

Согласно теореме 2 § 12 функция x абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t x'(s) ds.$$

Если рассмотреть разностное отношение $(1/h)(x(t+h) - x(t))$, пределом которого является, по определению, производная функции x, то при $h \to 0$ получаем, согласно теореме 3, предел в смысле сходимости в среднем

$$\lim \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim \, x'_h(t) = x'(t),$$

т. е. что обобщенная производная есть предел указанных разностных отношений в смысле сходимости в среднем. Это утверждение аналогично утверждению из § 12, но они не являются следствием друг друга, так как из сходимости в среднем не следует сходимость почти всюду и из сходимости почти всюду не следует сходимость в среднем.

Из полученого утверждения можно получить другой способ характеризации множества абсолютно непрерывных функций. На множестве $C^1[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке [0,1] зададим метрику

$$\rho(x,y) = \max|x(t) - y(t)| + \int\limits_0^1 |x'(t) - y'(t)|dt. \tag{3}$$

Теорема 4. *Пополнением пространства $C^1[0,1]$ с указанной метрикой (3) является пространство $AC[0,1]$ абсолютно непрерывных функций с метрикой, заданной той же формулой (если производную в* (3)*понимать как обобщенную производную).*

$\triangleright$ Пусть $x \in AC[0,1]$. Тогда последовательность

$$x_n(t) = x(0) + \int\limits_0^t g_n(s)ds,$$

где $g_n = x'_{1/n}$, т. е. это функция, средняя по Стеклову с параметром $h = 1/n$ для функции x', состоит из непрерывно дифференцируемых функций и, согласно доказанному выше, сходится по метрике (3) к x, т. е. $C^1[0,1]$ всюду плотно в $AC[0,1]$.

Докажем полноту пространства $AC[0,1]$. Пусть (x_n) — последовательность Коши в $AC[0,1]$. Тогда последовательность (x_n) является последовательностью Коши в $C[0,1]$ и сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, а последовательность производных (x'_n) является последовательностью Коши в пространстве $L_1[0,1]$ и сходится в среднем к некоторой интегрируемой функции g. Переходя к пределу в равенстве

$$x_n(t) = x(0) + \int\limits_0^t x'_n(s)ds,$$

получаем

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t g(s)ds,$$

откуда следует, что функция x абсолютно непрерывна и последовательность (x_n) сходится к x по метрике (3). $\triangleleft$

§ 20. ПРОСТРАНСТВО $L_p(T, \mu)$

Пусть T — пространство с полной σ-аддитивной и σ-конечной мерой μ, как в § 19. Зададим число $1 < p < \infty$ и обозначим через $\mathbf{L}_p(T, \mu)$ множество измеримых функций, для которых существует интеграл $\int\limits_T |x(t)|^p d\mu$. В этом множестве рассмотрим стандартное отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x(t) = y(t)$ почти всюду. Множество классов эквивалентных между собой функций обозначим через $L_p(T, \mu)$. На этом множестве зададим метрику формулой

$$\rho([x], [y]) = \left(\int\limits_T |x(t) - y(t)|^p d\mu \right)^{1/p},$$

где $[x]$ — класс эквивалентных между собой функций, содержащих x (класс функций, эквивалентных x). Очевидно, что $\rho([x], [y])$ не зависит от выбора представителя из класса $[x]$ и что выполняются аксиомы 1 и 2 метрики. Прежде чем проверить неравенство треугольника, докажем три вспомогательных неравенства.

1. Неравенство Юнга. *Пусть $1 < p < +\infty$ и пусть $q = p/(p-1)$ (число q называется сопряженным показателем к p, оно определяется из равенства $1/p + 1/q = 1$). Тогда для любых неотрицательных чисел u и v справедливо неравенство Юнга:*

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \tag{1}$$

причем равенство в (1) имеет место тогда и только тогда, когда $v = u^{p-1}$.

$\triangleright$ Найдем (при фиксированном $v \geqslant 0$) максимум функции

$$\varphi(u) = uv - \frac{u^p}{p},$$

определенной при $u \geqslant 0$. Так как $\varphi'(u) = v - u^{p-1}$, максимум достигается в единственной точке $u = v^{1/(p-1)}$ и этот максимум есть число

$$v^{1/(p-1)}v - [v^{1/(p-1)}]^p]/p = \frac{v^q}{q}.$$

Таким образом, справедливо неравенство, эквивалентное (1):

$$uv - \frac{u^p}{p} \leqslant \frac{v^q}{q}.$$

Замечание 1. Вычисления, входящие в доказательство неравенства Юнга, связаны с общей конструкцией, используемой в ряде других задач. Функция g, определенная формулой

$$g(v) = max_u[uv - f(u)],$$

называется *преобразованием Лежандра* функции f; по определению g есть наименьшая из функций, для которых выполнено неравенство $uv \le f(u)+g(v)$. Таким образом, неравенство Юнга есть утверждение, что функции $1/p\ u^p$ и $1/q\ v^q$ являются преобразованиями Лежандра друг друга.

2. Неравенство Гельдера. Нормой функции $x \in L_p(T,\mu)$ будем называть число

$$\|x\|_p = \rho(0,x) = \left(\int_T |x(t)|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Для любых функций $x \in L_p(T,\mu)$ и $y \in L_q(T,\mu)$ их произведение интегрируемо и справедливо неравенство Гельдера:

$$\left|\int_T x(t)y(t)\,d\mu\right| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q. \tag{2}$$

$\triangleright$ Пусть $\|x_0\|_p = \|y_0\|_q = 1$. Зафиксируем t и применим неравенство Юнга

$$|x_0(t)y_0(t)| \leqslant \frac{|x_0(t)|^p}{p} + \frac{|y_0(t)|^q}{q}. \tag{3}$$

Проинтегрируем неравенство (3) и получим

$$\int_T |x_0(t)y_0(t)|\,d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4}$$

Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство Гельдера очевидно. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то построим вспомогательные функции $x_0(t) = x(t)/\|x\|_p$ и $y_0(t) = y(t)/\|y\|_q$, имеющие единичные нормы. Подставляя их в неравенство (4), получаем

$$\frac{1}{\|x\|_p}\,\frac{1}{\|y\|_q}\int_T |x(t)y(t)|\,d\mu \leqslant 1.$$

Умножая последнее неравенство на $\|x\|_p\|y\|_q$, получаем неравенство Гельдера. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 2. В случае $p=2$ неравенство Гельдера имеет вид

$$\Big|\int\limits_T x(t)y(t)\,d\mu\Big| \leqslant \Big(\int\limits_T |x(t)|^2 d\mu\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_T |x(t)|^2 d\mu\Big)^{1/2}$$

и называется *неравенством Коши — Буняковского.* В западной математической литературе это неравенство часто называют *неравенством Шварца.*

3. Неравенство Минковского. *Сумма любых функций x и y из пространства $L_p(T,\mu)$ принадлежит $L_p(T,\mu)$ и справедливо неравенство Минковского:* $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

$\triangleright$ Заметим, что при фиксированном t справедлива цепочка неравенств

$$|x(t)+y(t)|^p \leqslant [2\max\{|x(t)|,|y(t)|\}]^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \max\{|x(t)|^p,|y(t)|^p\} \leqslant 2^p(|x(t)|^p+|y(t)|^p),$$

из которой следует интегрируемость функции $|x(t)+y(t)|^p$. Так как $[|x(t)+y(t)|^{p-1}]^q = |x(t)+y(t)|^p$ (напомним, что $q=p/(p-1)$), то функция $|x(t)+y(t)|^{p-1}$ принадлежит $L_q(T,\mu)$. Перейдем к доказательству неравенства Минковского:

$$\int\limits_T |x(t)+y(t)|^p d\mu = \int\limits_T |x(t)+y(t)|\,|x(t)+y(t)|^{p-1} d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_T |x(t)|\,|x(t)+y(t)|^{p-1} d\mu + \int\limits_T |y(t)|\,|x(t)+y(t)|^{p-1} d\mu.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_T |x(t)+y(t)|^p d\mu \leqslant \|x\|_p \Bigg(\int\limits_T |x(t)+y(t)|^p d\mu\Bigg)^{1/q} +$$

$$+\|y\|_p \Bigg(\int\limits_T |x(t)+y(t)|^p d\mu\Bigg)^{1/q}.$$

Разделив неравенство на интеграл, стоящий в правой части, получаем

$$\Bigg(\int\limits_T |x(t)+y(t)|^p d\mu\Bigg)^{1-1/q} = \|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p. \ \triangleleft$$

Из неравенства Минковского получаем неравенство треугольника для метрики пространства $L_p(T,\mu)$:

$$\rho(x,y) = \|x-y\|_p = \|(x-z)+(z-y)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \|x-z\|_p + \|z-y\|_p = \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Значит, $L_p(T,\mu)$ действительно является метрическим пространством.

З а м е ч а н и е 3. Если взять в качестве T множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел и задать меру μ так, что мера каждой точки равна 1, то функция $x(t)$ есть фактически числовая последовательность $x(k)$ и интеграл Лебега $\int\limits_T x(t)\,d\mu$ совпадает с суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)$. Поэтому пространство l_p, введенное в примере 4 § 14, является частным случаем пространства $L_p(T,\mu)$ и для него справедливы неравенства Гельдера, Минковского и неравенство треугольника. Аналогично, взяв $T=\{1,2,\ldots,n\}$, получаем пространство $\mathbf{R}^n$ с метрикой $\rho_p(x,y)$ из примера 7 § 14 и выполнение неравенства треугольника для этого пространства.

Теорема 1. *Пространство* $L_p(T,\mu)$ *полно.*

$\triangleright$ Возьмем произвольную последовательность Коши (x_n) в $L_p(T,\mu)$. Пусть $A\subset T$ — произвольное измеримое множество конечной меры. Тогда с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\int\limits_A |x_n(t)-x_m(t)|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_A |x_n(t)-x_m(t)|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_A 1\,d\mu\right)^{1/q} \to 0, \quad n,m\to\infty.$$

Значит, x_n есть последовательность Коши в $L_1(A,\mu)$ и, как показано в доказательстве теоремы 1 § 19, существует подпоследовательность, которая сходится почти всюду в A. Если мера σ-конечна, т. е. $T=\coprod\limits_{k=1}^{\infty} T_k$, где $\mu(T_k)<+\infty$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на T к некоторой функции x_0. Проверим, что $x_{n_k}\to x_0$ по метрике пространства $L_p(T,\mu)$. Для $\varepsilon>0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для $k,i\geqslant n(\varepsilon)$ выполняется

$$\left(\int\limits_T |x_{n_k}(t)-x_{n_i}(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, по теореме Фату получаем

$$\left(\int\limits_T |x_{n_k}(t) - x_0(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$. Значит, и сама последовательность x_n сходится в пространстве $L_p(T, \mu)$. $\lhd$

Следствие. *Пространство l_p полное.*

З а м е ч а н и е 4. Множества, для которых в § 19 было доказано, что они всюду плотны в $L_1(T, \mu)$, являются всюду плотными в $L_p(T, \mu)$. Доказательство этого факта аналогично случаю $p = 1$.

Теорема 2 (непрерывность в среднем функций из $L_p[0, 1]$). *Если $x \in L_p[0, 1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|s| < \delta$ следует, что*

$$\left(\int\limits_0^1 |x(t+s) - x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

(Как и в § 19, считаем, что все функции продолжены нулем вне $[0, 1]$.)

$\rhd$ Пусть y — такая непрерывная функция, что $\|x - y\|_p \leqslant \varepsilon/4$. Функция y равномерно непрерывна на $[0, 1]$. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что если $|s| < \delta$, то $|y(t+s) - y(t)| \leqslant \varepsilon/4$ для всех t и $t + s$, принадлежащих $[0, 1]$. Тогда, если $0 < s < \delta < \delta_1$, получаем

$$\left(\int\limits_0^1 |y(t+s) - y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_0^{1-s} |y(t+s) - y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int\limits_{1-s}^1 |y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \delta^{1/p} M,$$

где $M = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y(t)|$. Если выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta^{1/p} M \leqslant \varepsilon/4$, получаем $\|y(t+s) - y(t)\|_p \leqslant \varepsilon/2$. Аналогично поступаем в случае, когда $-\delta < s < 0$. Тогда для $|s| < \delta$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^1 |x(t+s) - x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \|x(t+s) - x(t)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t+s)-y(t+s)\|_p + \|y(t+s)-y(t)\|_p + \|y(t)-x(t)\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \lhd$$

Теорема 3. *Пусть* $x \in L_p[0,1]$ *и* $x_h(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau$ *— средние по Стеклову. Тогда* $x_h(t)$ *— непрерывные функции и* $\|x_h - x\|_p \to 0$ *при* $h \to 0$.

$\rhd$ Функция $x_h(t)$, как интеграл с переменным верхним пределом, является непрерывной (и даже абсолютно непрерывной). Оценим разность

$$|x(t) - x_h(t)| \leqslant \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)|\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{1}{2h}(2h)^{1/q}\left(\int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p}.$$

Значит,

$$\int\limits_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p dt = \frac{1}{2h}\int\limits_0^1\int\limits_{-h}^{h} |x(t) - x(t+s)|^p\,dsdt,$$

и, поменяв порядок интегрирования (что возможно по теореме Фубини), получаем

$$\int\limits_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_0^1 |x(t) - x(t+s)|^p\,dtds. \tag{5}$$

В силу непрерывности в среднем функции x по $\varepsilon > 0$ можем найти $\delta > 0$ такое, что для $|s| < \delta$ выполняется $\int\limits_0^1 |x(t) - x(t+s)|^p\,dt \leqslant \varepsilon^p$. Тогда при $0 < h < \delta$ имеем

$$\|x - x_h\|_p^p \leqslant \int\limits_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \varepsilon^p\,ds = \varepsilon^p. \lhd$$

§ 21. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $f\colon X \to X$ — отображение метрического пространства X в себя. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения f, если $f(x^*) = x^*$. Иначе говоря, неподвижная точка есть решение уравнения $x = f(x)$. Уравнения, которые могут быть записаны в таком виде, возникают в различных приложениях, вопрос о существовании и о построении неподвижной точки есть один из важнейших — это вопрос о существовании и построении решений уравнений.

Одним из общих методов построения решений уравнений указанного специального вида является метод итераций. Он заключается в следующем. Берется некоторая точка $x_0 \in X$ (начальное или нулевое приближение) и по ней строится последовательность по правилу: $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), ..., x_n = f(x_{n-1})$. Если последовательность x_n сходится к некоторой точке x^* и отображение f непрерывно, то, переходя к пределу в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$, получаем, что $x^* = f(x^*)$, т. е. x^* есть неподвижная точка. В этом случае точки x_n называют *последовательными приближениями* к решению x^*.

Однако в общем случае последовательность x_n может не быть сходящейся и ее поведение может быть очень сложным. Например, может оказаться, что множество точек такой последовательности всюду плотно в X.

Простые достаточные условия сходимости построенной последовательности и существования неподвижной точки сформулированы в *принципе сжимающих отображений.*

Определение 1. Отображение $f\colon (X, \rho_X) \to (X, \rho_X)$ называется *сжимающим*, если существует константа $0 \leqslant \alpha < 1$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2). \tag{1}$$

Другими словами, сжимающее отображение есть отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой $\alpha < 1$. Напомним, что такое отображение равномерно непрерывно.

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений, Банах). *В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку и притом только одну. Для любого начального приближения x_0 последовательные приближения сходятся к неподвижной точке.*

$\triangleright$ Единственность неподвижной точки доказывается независимо от полноты пространства. Если $a = f(a)$, $b = f(b)$, $a \neq b$, то

$$\rho(a,b) = \rho(f(a), f(b)) \leqslant \alpha\rho(a,b) < \rho(a,b).$$

Получаем противоречие.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и построим последовательные приближения $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$ Покажем, что построенная последовательность x_n есть последовательность Коши. Оценим сначала расстояние между соседними членами последовательности: $\rho(x_k, x_{k+1}) = \rho(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leqslant \alpha\rho(x_{k-1}, x_k) = \alpha\rho(f(x_{k-2}), f(x_{k-1})) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^k\rho(x_0, x_1)$. Применяя неравенство треугольника, получаем (считая $m > n$)

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots$$

$$\ldots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{m-1})\rho(x_0, x_1),$$

откуда

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, f(x_0)) \to 0. \tag{2}$$

Так как пространство X полное, то последовательность x_n сходится к некоторому элементу $x^* \in X$. Переходя в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$ к пределу (что обосновано ввиду непрерывности f), получаем требуемое равенство $x^* = f(x^*)$. $\triangleleft$

Следствие. *Для последовательных приближений $x_n = f(x_{n-1})$ имеет место оценка погрешности*

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, f(x_0)). \tag{3}$$

$\triangleright$ В неравенстве (2) перейдем к пределу при $m \to \infty$ и получим неравенство (3). $\triangleleft$

Таким образом, доказанная теорема, кроме утверждения о существовании решения, дает простой способ построения приближенного решения уравнения вида $x = f(x)$.

Оценка (3) позволяет также оценить количество последовательных приближений, нужное для достижения требуемой точности: чтобы для x_n выполнялось неравенство $\rho(x_n, x^*) \leqslant \varepsilon$, достаточно взять

$$n > \frac{1}{\ln\alpha}\ln\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}.$$

Взяв в качестве начального приближения точку x_{n-1}, из оценки (3) получаем

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{n-1}, x_n). \tag{4}$$

Последняя оценка (4) часто оказывается точнее оценки (3), но эффективно использовать ее можно только после построения n приближений. Такие оценки называют апостериорными в отличие от априорных оценок вида (3), которые могут быть эффективно получены до построения последовательных приближений.

Укажем несколько случаев, когда решение уравнения $x = f(x)$ с несжимающим отображением f можно свести к рассмотрению сжимающих отображений.

Отображение f может оказаться сжимающим не на всем пространстве, а на некотором подпространстве $M \subset X$, т. е. существует $\alpha < 1$ такое, что неравенство $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2)$ выполняется для $x_1, x_2 \in M$. Если неравенство выполняется на множестве M, то оно выполняется и на его замыкании $\overline{M}$. Поэтому множество M будем считать замкнутым. Чтобы к множеству M, рассматриваемому как самостоятельное метрическое пространство, можно было применить теорему Банаха, нужно еще, чтобы выполнялось $f(M) \subset M$, т. е. M должно быть инвариантно относительно f. Частный случай такой ситуации, когда в качестве M берется замкнутый шар, рассмотрен в следующей теореме.

Теорема 2 (локальный принцип сжимающих отображений). *Пусть X — полное метрическое пространство, на некотором шаре $B[x_0, r]$ отображение f является сжимающим с константой $\alpha < 1$ и выполнено неравенство $\rho(x_0, f(x_0)) \leqslant (1-\alpha)r$. Тогда в шаре $B[x_0, r]$ существует и притом только одна неподвижная точка отображения f.*

$\triangleright$ Шар $B[x_0, r]$ будем рассматривать как самостоятельное метрическое пространство. Так как шар замкнут, то это пространство полное. Покажем, что f отображает шар в себя. Пусть $x \in B[x_0, r]$, т. е. $\rho(x, x_0) \leqslant r$. Тогда

$$\rho(x_0, f(x)) \leqslant \rho(x_0, f(x_0)) + \rho(f(x_0), f(x)) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha)r + \alpha\rho(x_0, x) \leqslant (1-\alpha)r + \alpha r = r.$$

Значит, $f(x) \in B[x_0, r]$ и к отображению f в шаре $B[x_0, r]$ применима теорема 1. $\triangleleft$

Теорема 3. *Пусть X — полное метрическое пространство и отображение $f\colon X \to X$ таково, что его некоторая итерация, определяемая равенством $f^N(x) = f(f^{N-1}(x))$, $f^1 = f$, является сжимающим отображением. Тогда отображение f имеет и притом единственную неподвижную точку в X.*

$\triangleright$ Пусть a — неподвижная точка отображения f^N. Тогда $f(a)$ также является неподвижной точкой отображения f^N:

$$f^N(f(a)) = f(f^N(a)) = f(a).$$

Так как неподвижная точка у отображения f^N единственная, то $a = f(a)$. Неподвижная точка отображения f является неподвижной точкой отображения f^N и, значит, не может быть двух различных неподвижных точек. $\triangleleft$

Отметим, что в теореме 3 не требуется даже непрерывность отображения f.

П р и м е р 1. Отображение, не являющееся сжимающим, а его некоторая степень является сжимающим отображением: пусть $X = \mathbf{R}^2$ и $f(x) = Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 10 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

У п р а ж н е н и е 1. Построить разрывное отображение $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такое, что отображение $f^2(x) = f(f(x))$ является сжимающим.

Еще один способ применения теоремы Банаха в случае, когда отображение $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$ не является сжимающим, заключается в следующем. Иногда на множестве X можно задать другую метрику ρ_1, порождающую ту же топологию, что и исходная метрика ρ, относительно которой отображение f оказывается сжимающим и применима теорема Банаха. Такой прием используется ниже при доказательстве разрешимости интегрального уравнения Вольтерра.

Известны теоремы о существовании неподвижной точки, основанные на других идеях. Возьмем, например, непрерывное отображение f отрезка $[0,1]$ в себя. Тогда $f(0) \geqslant 0$, $f(1) \leqslant 1$. Эти неравенства означают, что функция $x - f(x)$ имеет разные знаки на концах отрезка. Тогда по теореме Коши эта функция обращается в нуль в некоторой точке отрезка, т. е. существует точка a такая, что $a = f(a)$. Таким образом, неподвижная точка существует без каких-либо предположений о сжимаемости отображения f.

Это утверждение является простейшим частным случаем следующей общей нетривиальной теоремы.

Теорема 4 (Боль — Брауэр). *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *непрерывное отображение замкнутого шара в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство см., например, в [35].

§ 22. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Интегральные уравнения

Интегральными уравнениями обычно называют уравнения относительно неизвестной функции, в которые эта функция входит под знаком интеграла. Такое описание не является точным определением, так как не указано, какие еще операции допустимы в записи уравнения.

Ограничимся рассмотрением интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t) - \int\limits_T K(t, s, x(s))\, d\mu(s) = y(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

где T — некоторое пространство с мерой; $a(t), y(t)$ — заданные на T функции; $K(t, s, z)$ — заданная на $T \times T \times \mathbf{R}$ функция; $x(t)$ — неизвестная функция. Чаще всего в качестве T рассматривается некоторое подмножество в $\mathbf{R}^n$ с мерой Лебега, например, отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Решение x разыскивается в различных пространствах функций, определенных на T, в зависимости от свойств функций $K(t, s, z)$ и y. В случае, когда рассматриваются непрерывные функции, интеграл можно понимать в смысле Римана. Заметим, что пространства выбираются так, чтобы для функций из этого пространства интеграл в (1) существовал.

Решением интегрального уравнения (1) называется функция x, при подстановке которой в уравнение выполняется равенство для всех $t \in T$ или почти всех t.

Укажем некоторые примеры задач, приводящие к исследованию интегральных уравнений.

1. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = y_0. \tag{2}$$

Проинтегрировав уравнение (2) с учетом начального условия на отрезке $[0, t]$, получаем интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau + y_0,$$

которому удовлетворяет решение задачи Коши (2).

2. Рассмотрим следующую физическую задачу (о восстановлении изображений). Пусть в трехмерном пространстве с координатами x, y, z вдоль оси z распространяется поток частиц (например, световое излучение), интенсивность которого есть функция от координат x, y: $\varphi = \varphi(x, y)$. Требуется измерить эту функцию. Для этого на плоскости (x, y) устанавливается экран, который регистрирует поступающие на него частицы. Это может быть обычная фотобумага, рентгеновский экран и т. д. в зависимости от вида потока. Изображение на экране позволяет восстановить интенсивность поступающего на него потока как функцию от x, y.

Однако на пути потока обычно имеются препятствия, искажающие отображение. Такими препятствиями может быть, например, атмосфера Земли при космической и астрономической съемке. Рассмотрим случай, когда на пути потока расположено полупрозрачное препятствие, которое пропускает часть излучения, а остальную часть рассеивает. В результате на экране фиксируется не искомая интенсивность $\varphi(x, y)$, а некоторая иная величина $\psi(x, y)$.

Подсчитаем интенсивность $\psi(x, y)$ потока, поступающего на экран в точке (x, y). Часть $\psi_1(x, y)$ потока, которая проходит через препятствие без рассеяния, пропорциональна φ, т. е. $\psi_1(x, y) = \mu\varphi(x, y)$, где $0 \le \mu \le 1$ есть коэффициент пропускания.

Интенсивность $\psi_2(x, y)$ потока частиц, поступающего в точку (x, y) из других точек препятствия в результате рассеяния, найдем следующим образом. От элементарной площадки $\Delta S = \Delta x' \Delta y'$, расположенной в окрестности точки (x', y'), в окрестность точки (x, y) поступает в результате рассеяния некоторое количество частиц $\Delta\psi_2(x, y)$. Это количество пропорционально площади $\Delta x' \Delta y'$ этой площадки и интенсивности той части потока, поступающего в точку (x', y'), которая рассеивается, т. е. пропорциональное величине $(1 - \mu)\phi(x', y')$.

Коэффициент пропорциональности K зависит от расположения точек (x, y) и (x', y'), т. е. $K = K(x, y; x', y')$. Если среда однородная, то коэффициент K зависит только от взаимного расположения точек (x, y) и (x', y'), т. е. от разностей $x - x'$ и $y - y'$. Например, если поток в точке (x', y') рассеивается равномерно во всех направлениях, этот коэффициент пропорционален телесному углу, под которым видна элементарная площадка $\Delta S'$ из точки (x, y). Условия, отражающие тот факт, что поток рассеивается, но новых частиц не возникает, выражаются неравенством $0 \leq K \leq 1$ и неравенством

$$\int_D K(x, y, ; x'y')dxdy \leq 1.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$\Delta\psi_2(x, y) = K(x, y; x'y')\varphi(x', y')\Delta x'\Delta y'.$$

Суммируя по всем элементарным площадкам и переходя к пределу при $\Delta x'$, $\Delta y' \to 0$, имеем

$$\psi_2(x, y) = (1 - \mu)\int_D K(x, y; x'y')\varphi(x', y')\, dx'dy',$$

где интегрирование ведется по области D в $\mathbf{R}^2$. Получаем соотношение

$$\mu\varphi(x, y) + (1 - \mu)\int_D K(x, y; x'y')\varphi(x', y')\, dx'dy' = \psi(x, y), \qquad (3)$$

которое представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции φ с заданными функциями ψ и K. Таким образом, задача восстановления истинного изображения φ по искаженному изображению ψ эквивалентна решению интегрального уравнения (3).

Естественно ожидать, что чем больше (ближе к значению 1) коэффициент пропускания μ, тем проще восстановить исходное изображение. Свойства уравнения (3) действительно существенно зависят от величины μ. Из физических соображений ясно, что случай непрозрачного препятствия, когда $\mu = 0$, качественно более сложный, чем случай полупрозрачного препятствия, когда $0 < \mu < 1$. Это различие проявляется и в свойствах интегрального уравнения. Задача решения интегрального уравнения (3) в случае $\mu = 0$ есть так называемая “некорректная” задача. Исследование таких задач требует более сложных методов.

Выделим некоторые классы интегральных уравнений. Интегральное уравнение (1) будем называть *линейным*, если функция $K(t, s, z)$

линейна по z, т. е. имеет вид $K(t,s,z) = K(t,s)z$. Линейное интегральное уравнение имеет вид

$$a(t)x(t) - \int\limits_T K(t,s)x(s)\,d\mu(s) = y(t). \tag{4}$$

Функция двух переменных $K(t,s)$ называется *ядром интегрального уравнения* (4). Говорят, что интегральное уравнение (4) есть *уравнение 1-го рода*, если $a(t) \equiv 0$, и есть интегральное *уравнение 2-го рода*, если $a(t) \equiv 1$. При произвольном $a(t)$ уравнение (4) обычно называют *уравнением 3-го рода*. Таким образом, уравнение 1-го рода имеет вид

$$\int\limits_T K(t,s)x(s)\,d\mu(s) = y(t),$$

уравнение 2-го рода —

$$x(t) - \int\limits_T K(t,s)x(s)\,d\mu(s) = y(t).$$

При $y = 0$ уравнение (4) называют *однородным*, при $y \neq 0$ — *неоднородным*. Однородное линейное уравнение всегда имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Если $T = [a,b]$, где $b \leqslant +\infty$, то выделяется класс уравнений вида

$$a(t)x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)\,ds + y(t), \tag{5}$$

включающих интеграл с переменным верхним пределом. Такие уравнения называют *уравнениями Вольтерра*. В случае, когда переменная t есть время, специальный вид уравнения (5) имеет простой физический смысл: состояние $x(t)$ некоторой системы в момент времени t зависит от ее состояния в предыдущие моменты времени $s < t$, но не зависит от состояния в будущем. Такой вид имеют, в частности, интегральные уравнения, возникающие при исследовании задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегральное уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения вида (4), так как, определив новое ядро

$$K_1(t,s,z) = \begin{cases} 0, & s > t, \\ K(t,s,z), & s \leqslant t, \end{cases}$$

уравнение (5) можно записать в виде

$$a(t)x(t) = \int_a^b K_1(t, s, x(s))\, ds + y(t).$$

Однако специальный вид уравнения Вольтерра приводит к дополнительным свойствам этого класса уравнений.

2. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям

Идея применения принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям заключается в следующем. Рассмотрим интегральное уравнение 2-го рода вида

$$x(t) = \int_T K(t, s, x(s))\, d\mu(s) + y(t). \tag{6}$$

Соответствие $x \to \int_T K(t, s, x(s))\, d\mu(s) + y(t)$ определяет отображение F множества функций на T в себя. Образ $F(x)$ функции x есть функция от t, заданная как интеграл, зависящий от параметра t, т. е.

$$(F(x))(t) := \int_T K(t, s, x(s))\, d\mu(s) + y(t). \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) записывается в виде $x = F(x)$, т. е. искомое решение есть неподвижная точка отображения F. Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

а) выбрать некоторое полное метрическое пространство X, состоящее из функций, заданных на T;

б) найти условия на $K(t, s, z)$ и y, при выполнении которых формула (7) определяет отображение F пространства X в себя (или, если $K(t, s, z)$ задано, выбрать пространство X так, чтобы F отображало X в себя);

в) найти условия, при которых отображение F удовлетворяет условию Липшица, и найти условия, при которых это отображение является сжимающим в пространстве X.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. *Пусть $T = [a, b]$ и $K(t, s, z)$ — непрерывная функция переменных t, s, z, удовлетворяющая условию Липшица по z, т. е. для которой существует постоянная C такая, что*

$$|K(t, s, z_1) - K(t, s, z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|.$$

Если выполнено условие $C(b - a) < 1$, то интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))\, ds + y(t) \tag{8}$$

имеет и притом единственное непрерывное решение для любой непрерывной функции $y(t)$.

$\triangleright$ Зафиксируем пространство $C[a, b]$. Это пространство полное. Проверим, что формула

$$(F(x))(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))\, ds + y(t)$$

определяет отображение пространства $C[a, b]$ в себя. Так как по условию $y \in C[a, b]$, достаточно проверить, что $z(t) = \int\limits_a^b K(t, s, x(s))\, ds$ есть непрерывная функция от t. Действительно, при фиксированной непрерывной функции x подынтегральная функция $\varphi(t, s) = K(t, s, x(s))$ есть непрерывная функция переменных t и s и по теореме об непрерывности интеграла, зависящего от параметра, непрерывна.

Проверим, что отображение F удовлетворяет условию Липшица. Используя условие Липшица для функции K, получаем

$$|(F(x_1))(t) - (F(x_2))(t)| \leqslant \int_a^b |K(t, s, x_1(s)) - K(t, s, x_2(s))|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C \int_a^b |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \leqslant C(b - a)\rho(x_1, x_2).$$

Поэтому, обозначив $\alpha = C(b - a)$, получим выполнение условия Липшица для отображения F:

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |(F(x_1))(t) - (F(x_2))(t)| \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2).$$

Таким образом, условие $\alpha = C(b-a) < 1$ гарантирует, что отображение F сжимающее. Теперь, согласно теореме Банаха, существует, и притом единственная, неподвижная точка отображения F, т.е. существует, и притом единственное, непрерывное решение x интегрального уравнения (8). $\lhd$

Условия теоремы 1 являются только достаточными условиями, в конкретных ситуациях они могут быть ослаблены и могут быть получены более точные оценки константы Липшица. Рассмотрим в качестве примера случай линейных интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций. Если $K(t,s,x(s)) = K(t,s)x(s)$, т.е. если уравнение линейное, и $K(t,s)$ — непрерывная функция, то $|K(t,s,z_1) - K(t,s,z_2)| \leqslant \max\limits_{t,s} |K(t,s)|\,|z_1 - z_2|$, т.е. выполнено условие Липшица с постоянной $L = \max\limits_{t,s} |K(t,s)|$. Тогда из доказательства теоремы 1 следует, что отображение F удовлетворяет условию Липшица с константой $L(b-a)$. Более точная оценка дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть функция $K(t,s)$, определенная при $t,s \in [a,b]$, непрерывна. Если*

$$\alpha := \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)| ds < 1,$$

то линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds + y(t)$$

имеет, и притом единственное, решение $x \in C[a,b]$ для любой функции $y \in C[a,b]$.

$\rhd$ Поскольку данное уравнение является частным случаем уравнений, рассмотренных в теореме 1, достаточно проверить, что соответствующее отображение F удовлетворяет условию Липшица с константой α. Действительно, имеем

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)|\,ds\ \rho(x_1,x_2) = \alpha\ \rho(x_1,x_2).\ \lhd$$

Условие непрерывности функции $K(t,s)$ в теореме не является необходимым. Утверждение, аналогичное теореме 2, при более слабых условиях на K содержится в § 37.

Если функция y не является непрерывной или ядро K имеет особенности, то отображение F не действует в пространстве непрерывных функций и приходится рассматривать такие интегральные уравнения в других пространствах. Для исследования интегральных уравнений хорошо приспособлены пространства $L_p(T,\mu)$. Наиболее просто соответствующие вычисления проводятся в случае пространств $L_2(T,\mu)$.

Теорема 3. *Пусть (T,μ) — пространство с σ-конечной мерой, функция K определенна и измерима на $T\times T$ и*

$$\alpha^2 := \int\limits_T \int\limits_T |K(t,s)|^2\,d\mu(t)\ d\mu(s) < 1.$$

Тогда линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)\,d\mu(s) + y(t)$$

имеет, и притом единственное, решение $x \in L_2(T,\mu)$ для любой функции $y \in L_2(T,\mu)$.

$\rhd$ Согласно неравенству Коши — Буняковского имеем

$$|\int\limits_T K(t,s)x(s)\,d\mu(s)| \leqslant \int\limits_T |K(t,s)|\ |x(s)|\,d\mu(s) \leqslant$$

$$\leqslant (\int\limits_T |K(t,s)|^2 d\mu(s))^{1/2}\ (\int\limits_T |x(s)|^2\,d\mu(s))^{1/2}.$$

Если функция $z(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)\,d\mu(s)$ измерима, то из полученного неравенства следует, что

$$\int\limits_T |z(t)|^2\,d\mu(t) \leqslant \alpha^2 \int\limits_T |x(s)|^2\,d\mu(s),$$

откуда, полагая $x = x_1 - x_2$, получаем

$$\rho(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2),$$

что и требовалось.

Покажем, что функция z действительно является измеримой. Для любого множества $T_0 \subset T$ конечной меры получаем

$$\int\limits_{T_0}\int\limits_{T} |K(t,s)|\ |x(s)|\, d\mu(s) d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{T_0} [\int\limits_{T} |K(t,s)|^2 d\mu(s)]^{1/2} d\mu(t)\ [\int\limits_{T} |x(s)|^2\, d\mu(s)]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant [\int\limits_{T_0}\int\limits_{T} |K(t,s)|^2 d\mu(s) d\mu(t)]^{1/2}\ \mu(T_0)^{1/2} [\int\limits_{T} |x(s)|^2\, d\mu(s)]^{1/2} < +\infty.$$

Так как функция $K(t,s)x(s)$ измерима как функция двух переменных, то в силу последнего неравенства применима теорема Тонелли и эта функция интегрируема на $T_0 \times T$. Поэтому применима теорема Фубини на произведении $T_0 \times T$ и функция z, как внутренний интеграл в теореме Фубини, измерима на любом множестве конечной меры. Отсюда следует, что z является измеримой функцией на T. $\lhd$

Условия на функцию K в теоремах 1—3 содержат требование, чтобы выполнялось некоторое условие малости этой функции, поэтому эти теоремы называют теоремами о разрешимости интегральных уравнений с *достаточно малыми ядрами.* Например, если уравнение (3) из примера 2 записать в виде уравнения второго рода, получаем перед интегралом множитель $(1 - \mu)/\mu$. Поэтому, если число μ близко к 1, ядро уравнения будет достаточно малым и уравнение имеет решение.

Специальный вид уравнения Вольтерра позволяет получить для этого уравнения теорему существования и единственности решения без требования малости ядра — функции $K(t,s,z)$.

Теорема 4. *Пусть функция $K(t,s,z)$ непрерывна как функция трех переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной z:*

$$|K(t,s,z_1) - K(t,s,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|.$$

Тогда интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = \int_a^t K(t, s, x(s))\, ds + y(t) \tag{9}$$

имеет единственное непрерывное решение $x \in C[a, b]$ ***для любой функции*** $y \in C[a, b]$.

$\triangleright$ Правая часть уравнения (9) задает отображение F в пространстве $C[a, b]$:

$$(Fx)(t) = \int_a^t K(t, s, x(s))\, ds + y(t).$$

Воспользуемся специальным видом уравнения (9). Оно имеет смысл на любом отрезке $[a, t_1] \subset [a, b]$ (для общего уравнения вида (6) такое рассмотрение невозможно, ибо для вычисления правой части нужно, чтобы x было задано на всем отрезке $[a, b]$). Если выбрать t_1 так, что $L(t_1 - a) < 1$, то на отрезке $[a, t_1]$ длины $t_1 - a = h$ к уравнению (9) применимы рассуждения теоремы 1 и на этом отрезке существует единственное решение $x(t)$. Рассмотрим далее отрезок $[t_1, t_2]$, где $t_2 = t_1 + h$. Уравнение (9) перепишем в виде

$$x(t) = \int_{t_1}^t K(t, s, x(s))\, ds + y(t) + \int_a^{t_1} K(t, s, x(s))\, ds. \tag{10}$$

Так как на отрезке $[a, t_1]$ функция $x(s)$ однозначно определена, последний интеграл можно считать известной функцией и уравнение (10) переписывается в виде

$$x(t) = \int_{t_1}^t K(t, s, x(s))\, ds + y_1(t),$$

где $y_1(t) = y(t) + \int_a^{t_1} K(t, s, x(s))\, ds$ — известная функция. Повторяем те же рассуждения на отрезке $[t_1, t_1 + h]$ и получаем решение на отрезке $[t_1, t_1 + h]$. Затем берем следующий отрезок и т. д., пока не получим решения на всем отрезке $[a, b]$. $\triangleleft$

§ 23. КОМПАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие компактного пространства появилось в результате обобщения свойств отрезка, описываемых классическими леммами математического анализа.

Лемма Больцано — Вейерштрасса. *У любой ограниченной последовательности вещественных чисел существует сходящаяся подпоследовательность.*

Лемма Бореля. *У любого покрытия отрезка числовой прямой интервалами существует конечное подпокрытие.*

Указанные леммы являются основой доказательства ряда теорем из математического анализа (теоремы Вейерштрасса о максимуме непрерывной функции на отрезке, теоремы Кантора о равномерной непрерывности). Поэтому класс пространств или множеств, обладающих аналогичными свойствами, требует отдельного изучения. В частности, один из основных вопросов заключается в том, чтобы выяснить, какие множества в рассмотренных ранее пространствах функций и пространствах последовательностей обладают такими свойствами.

Определение 1. Метрическое пространство (X, ρ) называется *компактным*, если у любой последовательности точек этого пространства существует сходящаяся подпоследовательность.

Другое свойство пространства X возникает как обобщение свойства из леммы Бореля о покрытиях.

Определение 2. Пусть $\{U_\lambda\}_{\lambda\in A}$ — семейство открытых подмножеств метрического (или топологического) пространства X. Семейство $\{U_\lambda\}_{\lambda\in A}$ называется *открытым покрытием* X, если $X = \bigcup\limits_{\lambda\in A} U_\lambda$.

Часть семейства $\{U_\lambda\}_{\lambda\in B\subset A}$, которая сама является покрытием, называется *подпокрытием*.

Справедлива следующая теорема (ее доказательство будет дано в конце параграфа).

Теорема 1. *Для метрических пространств следующие свойства эквивалентны:*

1) у любой последовательности точек существует сходящаяся подпоследовательность;

2) у любого открытого покрытия пространства существует конечное подпокрытие.

Отметим, что для произвольных топологических пространств свойства 1) и 2) не эквивалентны и за определение компактности принимается свойство из определения 2, а свойство из определения 1 называется секвенциальной компактностью (см. приложение).

Свойство компактности метрического пространства является более сильным свойством, чем полнота.

Лемма 1. *Компактное метрическое пространство полно.*

$\triangleright$ Пусть (x_n) — последовательность Коши в компактном пространстве (X, ρ). У нее существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}, т. е. существует такая точка $x_0 \in X$, что $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$. Тогда $\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$, т. е. $x_n \to x_0$, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Обратное утверждение неверно; например, пространство $\mathbf{R}$ полно, но не компактно.

Проверку существования у последовательности (x_n) сходящейся подпоследовательности можно проводить в два шага: 1) выделение подпоследовательности Коши; 2) доказательство сходимости этой последовательности. Так как второй шаг есть фактически проверка полноты пространства, то наиболее существенным является первый шаг — выделение из произвольной последовательности подпоследовательности Коши. Такой подход приводит к определению еще одного класса метрических пространств.

Определение 3. Метрическое пространство (X, ρ) называется *предкомпактным*, если у любой последовательности в X существует подпоследовательность Коши.

Результат предыдущих рассуждений можно сформулировать следующим образом.

Предложение 1. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и полно.*

Так как каждое множество в метрическом пространстве само является метрическим пространством, определения компактности и предкомпактности имеют смысл для множеств. Множество $M \subset X$ в метрическом пространстве X называется *компактным*, если у любой последовательности точек этого множества существует сходящаяся в M последовательность.

Отметим, что в определении компактного множества M требуется, чтобы выделенная подпоследовательность сходилась к элементу из множества M. Пусть, например, M — ограниченный интервал на числовой прямой. Любая последовательность чисел из M ограничена, по лемме Больцано — Вейерштрасса у нее существует сходящаяся подпоследовательность. Но эта подпоследовательность может сходиться к точке, не принадлежащей M, т. е. не сходится в M. Поэтому M является в этом случае не компактным, а только предкомпактным множеством. Из леммы Больцано — Вейерштрасса вытекает, что любое ограниченное множество в $\mathbf{R}$ предкомпактно.

Понятие ограниченного множества можно ввести в произвольном метрическом пространстве.

Определение 4. Множество M в метрическом пространстве называется *ограниченным*, если множество чисел $\rho(x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 принадлежат M, ограничено.

Очевидно, что множество ограничено тогда и только тогда, когда оно является подмножеством некоторого шара.

Лемма 2. *Предкомпактное множество ограничено.*

$\triangleright$ Предположим противное, т. е. пусть существует последовательность $x_n \in M$ такая, что $\rho(x_1, x_n) \to \infty$. Так как существует подпоследовательность Коши x_{n_k}, то числовая последовательность $\rho(x_1, x_{n_k})$ имеет конечный предел, но вместе с тем $\rho(x_1, x_{n_k}) \to \infty$. Получаем противоречие. $\triangleleft$

Покажем на примере, что ограниченное множество в произвольном метрическом пространстве может не быть предкомпактным.

Пример 1. В пространстве l_1 рассмотрим шар радиуса 1 с центром в точке $x = 0$, т. е. рассмотрим множество

$$M = \Big\{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1,\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leqslant 1\Big\}.$$

В этом множестве выберем последовательность элементов e_n, где $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (число 1 стоит в последовательности e_n на месте с номером n). Тогда $\rho(e_n, e_m) = 2$ при $n \neq m$ и, значит, у последовательности e_n не может существовать подпоследовательности e_{n_k} такой, что $\rho(e_{n_k}, e_{n_i}) \to 0$.

Удобный для приложений критерий предкомпактности множества дает теорема Хаусдорфа, приведенная ниже.

Определение 5. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное число. Множество S в метрическом пространстве (X, ρ) называется *ε-сетью* для множества $M \subset X$, если для любой точки $x \in M$ существует точка $x' \in S$ такая, что $\rho(x, x') \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, множество S является ε-сетью, если любой элемент из M может быть с точностью ε приближен элементом из S. Другая трактовка этого понятия: шары радиуса ε с центрами в точках из S образуют покрытие пространства X.

Определение 6. Множество M в метрическом пространстве (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для M.

Другими словами, свойство вполне ограниченности означает, что элементы из такого множества могут быть с заданной точностью приближены элементами из некоторого конечного множества. Отличие этого определения от определения ограниченного множества заключается в том, что ограниченное множество может быть покрыто одним шаром некоторого радиуса, а вполне ограниченное может быть покрыто конечным числом шаров с произвольным заданным радиусом $\varepsilon > 0$.

Теорема 2 (Хаусдорф). *Метрическое пространство предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть X — предкомпактное метрическое пространство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ будем строить ε-сеть. Возьмем произвольную точку $x_1 \in X$ и выберем x_2 так, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$, затем x_3 так, что $\rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$; аналогично выбираем x_{n+1} так, что $\rho(x_k, x_{k+1}) \geqslant \varepsilon$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Возможны два случая: описанный процесс построения точек x_n будет продолжаться бесконечно либо он оборвется после конечного числа шагов.

Покажем, что первый случай невозможен. Предположим, что процесс продолжается бесконечно, т. е. построена последовательность точек $x_n \in X$ такая, что $\rho(x_n, x_k) \geqslant \varepsilon$ при $n \neq k$. Так как пространство предкомпактно, то у последовательности (x_n) существует подпоследовательность Коши (x_{n_k}). Значит, $\rho(x_{n_k}, x_{n_i}) \to 0$ при $k, i \to \infty$, но по построению $\rho(x_{n_k}, x_{n_i}) \geqslant \varepsilon > 0$. Получаем противоречие. Значит, процесс построения окончится после конечного числа n шагов. Это означает: не существует точки x_{n+1} такой, что $\rho(x_k, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$, $k = 1, \ldots, n$. Но это свойство совпадает с тем, что для любого $x \in X$ существует точка x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, такая, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Последнее в точности означает, что множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ образует ε-сеть.

Достаточность. Пусть пространство X вполне ограничено, (x_n) — произвольная последовательность из X. Покажем, что у нее существует подпоследовательность Коши. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Для ε_1 построим конечную ε_1-сеть, т. е. покроем пространство конечным числом шаров радиуса ε_1. В один из этих шаров попадает бесконечная подпоследовательность M_1 последовательности (x_n). Из членов этой подпоследовательности выберем x_{n_1} с наименьшим номером. Затем повторяем процедуру выбора при $\varepsilon = \varepsilon_2$. Построим конечную ε_2-сеть, т. е. покрытие пространства X конечным числом шаров радиуса ε_2. В один из этих шаров попадает бесконечная подпоследовательность M_2 из M_1. Выберем $n_2 > n_1$ так, что $x_{n_2} \in M_2$. Продолжая указанный процесс бесконечно, построим подпоследовательность (x_{n_k}). Так как при $m > k$ точки x_{n_k} и x_{n_m} принадлежат одному шару радиуса ε_k, получаем, что $\rho(x_{n_k}, x_{n_m}) < 2\varepsilon_k \to 0$ $k, m \to \infty$, т. е. (x_{n_k}) — последовательность Коши. $\triangleleft$

При проверке предкомпактности конкретных множеств бывает удобно использовать

Следствие. *Множество $M \subset X$ является предкомпактным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует предкомпактная ε-сеть.*

$\triangleright$ Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ и пусть S — предкомпактная ε_1-сеть для множества M. По теореме Хаусдорфа для S существует конечная ε_1-сеть S_1. Возьмем $x \in M$. Существует такая точка $x' \in S$, что $\rho(x, x') < \varepsilon_1$, и для x' существует точка $x'' \in S_1$ такая , что $\rho(x', x'') < \varepsilon_1$. Тогда $\rho(x, x'') < \varepsilon$ и, значит, множество S_1 является конечной ε-сетью для множества M. $\triangleleft$

Доказательство теоремы 1.

$\triangleright$ 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть (x_n) — последовательность и пусть X_n — замыкание множества $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Покажем, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$. Действительно, предположим $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Тогда $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, где множества $U_n = X \setminus X_n$ открыты. Ввиду предположения 2) существует такой номер N, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{N} U_n$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{N} X_n = \emptyset$, но этого не может быть, ибо $\emptyset \neq X_{N+1} \subset \bigcap\limits_{n=1}^{N} X_n$. Таким образом, существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, т. е. x_0 является точкой прикосновения каждой последовательности $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Возьмем последовательность шаров $B(x_0, 1/k)$ и в каждом шаре выберем входящую в него точку x_{n_k} так, чтобы выполнялось $n_k > n_{k-1}$. Выделенная последовательность сходится к x_0. Таким образом, у любой последовательности точек из пространства X существует сходящаяся подпоследовательность.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполнено 1). Тогда в силу теоремы Хаусдорфа X

вполне ограничено и полно. Предположим, что 2) не выполняется, т. е. существует открытое покрытие $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ пространства X, никакое конечное подсемейство которого не покрывает X. Так как пространство X вполне ограничено, построим его покрытие конечным числом шаров радиуса $1/2$. Тогда хотя бы один шар $B_1 = B(x_1, 1/2)$ из этих шаров не может быть покрыт конечным подсемейством из $\{U_\lambda\}$. Поскольку B_1 — также вполне ограниченное множество, покрывая его конечным числом шаров радиуса $1/2^2$, найдем шар $B_2 = B(x_2, 1/2^2)$, пересекающийся с B_1, который не может быть покрыт конечным подсемейством из $\{U_\lambda\}$.

Рассуждая далее аналогичным образом, построим последовательность шаров $B_n = B(x_n, 2^{-n})$, ни один из которых не может быть покрыт конечным подсемейством из $\{U_\lambda\}$ и таких, что пересечения $B_n \cap B_{n+1}$ непусты. Применяя неравенство треугольника, получаем, что $\rho(x_n, x_m) \leqslant 2\sum\limits_{k=n}^{m} 1/2^k \to 0$, т. е. центры шаров образуют последовательность Коши. Так как пространство X полно, последовательность x_n сходится к некоторой точке $a \in X$. Для некоторого индекса λ_0 выполнено $a \in U_{\lambda_0}$ и, поскольку множество U_{λ_0} открытое, существует число $r > 0$ такое, что $B(a, r) \subset U_{\lambda_0}$. Выберем номер N так, чтобы выполнялось $\rho(a, x_N) < r/2$ и $2^{-N} < r/2$. Тогда $B_N \subset B(a, r) \subset U_{\lambda_0}$, а по построению множество B_N не может быть покрыто конечным числом множеств U_λ. Получаем противоречие. $\lhd$

§ 24. СВОЙСТВА КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Теорема 1. *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

$\rhd$ Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, A — компактное множество в X. Возьмем последовательность $y_n \in f(A)$. Тогда существует последовательность $x_n \in A$ такая, что $y_n = f(x_n)$. Из последовательности x_n выбираем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$. Тогда $y_{n_k} \to f(x_0)$. $\lhd$

Следствие 1. *Образ компактного множества при непрерывном отображении ограничен и замкнут.*

Следствие 2. *Пусть X — компактное метрическое пространство и $f\colon X \to \mathbf{R}$ — непрерывная числовая функция. Тогда f ограничена и достигает своей точной верхней и точной нижней грани.*

$\triangleright$ Числовое множество $f(X)$ компактно, следовательно, ограниченно и замкнуто. Из замкнутости $f(X)$ следует, что точная верхняя и точная нижняя грани принадлежат множеству значений. $\triangleleft$

Замечание 1. Образ предкомпактного множества при непрерывном отображении может не быть предкомпактным. Если отображение f равномерно непрерывно, то образ предкомпактного множества A является предкомпактным (образ конечной δ-сети в A — конечная ε-сеть в $f(A)$).

Теорема 2. *Если X — компактное метрическое пространство, Y — метрическое пространство, то любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ равномерно непрерывно.*

$\triangleright$ Предположим, что f не является равномерно непрерывным, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $x \in X$ и $x' \in X$ такие, что $\rho_X(x, x') < \delta$, $\rho_Y(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем последовательность $\delta_n \to 0$ и для каждого n выберем соответствующие x_n и x'_n, т. е. такие, что $\rho_X(x_n, x'_n) < \delta_n$, $\rho_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon_0$. Выберем из x_n сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$. Тогда $\rho_X(x_0, x'_{n_k}) \leqslant \rho_X(x_0, x_{n_k}) + \rho_X(x_{n_k}, x'_{n_k}) \to 0$, т. е. $x'_{n_k} \to x_0$. Таким образом получаем, что $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$ и, значит, $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \to 0$, что противоречит свойствам выбранной подпоследовательности x_{n_k}. $\triangleleft$

В частном случае, когда $X = [a, b]$ и $Y = \mathbf{R}$, следствие 2 совпадает с классической теоремой Вейерштрасса, а из теоремы 2 получаем теорему Кантора.

Заметим, что описанные свойства компактных пространств являются характеристическими — из выполнения этих свойств следует, что пространство компактно.

Упражнение 1. Показать, что если метрическое пространство X не является компактным, то существует неограниченная непрерывная числовая функция на X и существует ограниченная непрерывная функция, не достигающая своей точной верхней грани.

Рассмотрим признаки компактности и предкомпактности множеств в конкретных метрических пространствах.

1. *Пространство $C[0, 1]$.*

Определение 1. Будем говорить, что множество $M \subset C[0, 1]$ *равностепенно непрерывно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $t_1, t_2 \in [0, 1]$, для которых $|t_1 - t_2| < \delta$, и любой функции $x \in M$ выполнено $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

Любая непрерывная функция на отрезке обладает свойством равномерной непрерывности: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$, для которых $|t_1 - t_2| < \delta$, выполнено $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$. Условие равностепенной непрерывности множества M заключается в том, что указанное δ можно выбрать одно и то же для всех функций из M.

Пример 1. Конечный набор непрерывных функций равностепенно непрерывен.

Определение 2. Множество $M \subset C[0,1]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная C такая, что $|x(t)| \leqslant C$ для всех $x \in M$ и $t \in [0,1]$, т.е. если множество M ограничено в метрическом пространстве $C[0,1]$.

Теорема 3 (Арцела — Асколи). *Для того, чтобы множество функций M в пространстве $C[0,1]$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

$\triangleright$ *Необходимость.* Так как M — предкомпактно в $C[0,1]$, то оно ограничено в $C[0,1]$, т.е. M равномерно ограничено. Проверим равностепенную непрерывность. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим конечную $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$. В силу теоремы Кантора каждая из функций x_i, $i = 1, \ldots, n$, равномерно непрерывна. Тогда для каждой x_i выберем δ_i так, чтобы при $|t_1 - t_2| < \delta_i$ для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ выполнялось $|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \varepsilon/3$, $i = 1, \ldots, n$. Выберем $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$. Тогда для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и всех $x \in M$ будем иметь неравенство

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| +$$

$$+ |x_i(t_2) - x(t_2)| \leqslant 2\rho(x, x_i) + |x_i(t_1) - x_i(t_2)|.$$

Ввиду того, что $\{x_1, \ldots, x_n\}$ является $\varepsilon/3$-сетью для M, для любого $x \in M$ можно найти такой номер i, чтобы $\rho(x, x_i) < \varepsilon/3$. Тогда при $t_1, t_2 \in [0,1]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, будем иметь $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для всех $x \in M$.

Достаточность. Пусть M — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций из $C[0,1]$. В силу теоремы Хаусдорфа достаточно показать, что M вполне ограничено. Пусть $|x(t)| \leqslant C$ для всех $x \in M$. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ так, чтобы $|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \varepsilon/5$ при $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$ для всех $x \in M$. Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ на интервалы длины меньше δ, а отрезок $[-C, C]$ — точками $-C = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m = C$ на интервалы длины меньше $\varepsilon/5$. Пусть S — семейство непрерывных функций, принимающих в точках t_k значения ξ_i и линейных на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$. Это семейство конечно.

Покажем, что S является ε-сетью для множества M. По функции $x \in M$ выберем функцию $y \in S$ так, чтобы выполнялось неравенство $|x(t_k) - y(t_k)| < \varepsilon/5$. Такая функция существует, так как по определению множества S функции из этого множества принимают в точках t_k значения ξ_i и $|\xi_i - \xi_{i-1}| < \varepsilon/5$. По выбору δ и точек t_k имеем неравенство $|x(t_k) - x(t_{k+1})| < \delta/5$ и, значит,

$$|y(t_k) - y(t_{k+1})| \leqslant |y(t_k) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(t_{k+1})| +$$

$$+ |x(t_{k+1}) - y(t_{k+1})| \leqslant 3\varepsilon/5.$$

Так как на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ функция $y(t)$ линейна, то $|y(t_k) - y(t)| < < 3\varepsilon/5$ для всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Пусть теперь t — произвольная точка отрезка $[0, 1]$. Тогда найдется k такое, что $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Отсюда

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - x(t_k)| + |x(t_k) - y(t_k)| +$$

$$+ |y(t_k) - y(t)| \leqslant \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + 3\varepsilon/5 = \varepsilon,$$

т. е. $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$. $\lhd$

В приведенном доказательстве специфические свойства отрезка использовались в двух местах. Можно немного изменить доказательство и получить аналогичное утверждение в пространстве непрерывных функций на произвольном компактном метрическом пространстве.

Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство, $C(T)$ — множество непрерывных числовых функций на T с метрикой $\rho_0(x, y) = = \max\limits_{t \in T} |x(t) - y(t)|$. Множество $M \subset C(T)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции x из M и любых $t_1, t_2 \in T$ из неравенства $\rho(t_1, t_2) < \delta$ следует, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

Теорема 4. *Если T — компактное метрическое пространство, то множество $M \subset C(T)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство этой теоремы повторяет основные моменты приведенного выше доказательства для случая $T = [0, 1]$. Первое отличие заключается в том, что вместо конкретного набора точек отрезка

$\{t_k,\ k=1,...,m\}$ следует рассмотреть произвольную конечную δ-сеть для T. Второе отличие связано с построением множества S. Так как на произвольном пространстве нет понятия линейной функции, конечное множество S строится из функций, принадлежащих M, следующим образом. Для каждого набора пар $\{(t_k,\xi_{i_k}),\ k=1,...,m\}$ выберем одну функцию $y\in M$ такую, что $|y(t_k)-\xi_{i_k}|<\varepsilon/5$, если такая функция существует. Получаем конечное множество S, состоящее из таких функций y, и это множество является ε-сетью.

2. *Пространство* $\mathbf{R}^n$.

Теорема 5. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

$\triangleright$ *Необходимость* тривиальна, ибо всякое вполне ограниченное множество ограничено.

Достаточность. Если $M\subset\mathbf{R}^n$ ограничено, то его можно поместить внутрь некоторого достаточно большого куба. Если такой куб разбить на кубики с ребром меньше ε, то вершины этих кубиков будут образовывать конечную $\sqrt{n}\cdot\varepsilon/2$-сеть для исходного куба и, значит, для любого множества, лежащего в этом кубе. $\triangleleft$

3. *Пространство* l_p.

Теорема 6. *Множество* $M\subset l_p$, $1\leqslant p<\infty$, *предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) существует число C *такое, что* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\leqslant C$ *для любого* $x\in M$, *т. е. множество* M *ограничено;*

2) для любого $\varepsilon>0$ *существует номер* $n_0(\varepsilon)$ *такой, что для всех* x *из* M *выполнено неравенство* $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty}|x_i|^p<\varepsilon^p$.

$\triangleright$ *Необходимость.* Ограниченность M вытекает из теоремы Хаусдорфа (§ 23) и ограниченности вполне ограниченного множества. Докажем необходимость второго условия. Обозначим

$$S_nx=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots),\quad R_nx=(0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots).$$

Тогда $x=S_nx+R_nx$ и $\big(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\big)^{1/p}=\rho(R_nx,0)=\rho(x,S_nx)$. Очевидно, что $R_nx\to 0$ при $n\to\infty$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\rho(S_nx,S_ny)\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} = \rho(x,y)$$

для любых $x, y \in l_p$. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем $\varepsilon/3$-сеть для M: $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset M$. Тогда для любого $x \in M$ найдется z_{i_0} такой, что $\rho(x, z_{i_0}) < \varepsilon/3$, и будем иметь

$$\rho(R_n x, 0) = \rho(x, S_n x) \leqslant \rho(x, z_{i_0}) + \rho(z_{i_0}, S_n x) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x, z_{i_0}) + \rho(z_{i_0}, S_n z_{i_0}) + \rho(S_n z_{i_0}, S_n x) =$$

$$= \rho(x, z_{i_0}) + \rho(S_n z_{i_0}, S_n x) + \rho(R_n z_{i_0}, 0) \leqslant$$

$$\leqslant 2\rho(x, z_{i_0}) + \rho(R_n z_{i_0}, 0) < (2/3)\varepsilon + \rho(R_n z_{i_0}, 0).$$

Поскольку $\rho(R_n z_{i_0}, 0) \to 0$ при $n \to \infty$, то найдется n_0 такое, что $\rho(R_n z_{i_0}, 0) < \varepsilon/3$ при $n > n_0$ и всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $\rho(R_n x, 0) < \varepsilon$ для всех $x \in M$.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Докажем для заданного $\varepsilon > 0$ существование конечной ε-сети для M. Выберем n_0 так, что

$$\rho(R_{n_0} x, 0) = \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon/2$$

для всех $x \in M$. Рассмотрим конечное множество $M_1 \subset l_p$:

$$M_1 = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots);\ y_i = k\delta,\ \delta = \frac{\varepsilon}{2n_0^{1/p}},\ k \in \mathbf{Z},\ |k| \leqslant \frac{C}{\delta} \right\}.$$

Покажем, что M_1 является ε-сетью для M. Для $x \in M$ выберем $y = \big([x_1/\delta]\delta, \ldots, [x_n/\delta]\delta, 0, \ldots \big) \in M_1$, где $[x]$ — целая часть числа x. Тогда

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} \left| \left[\frac{x_k}{\delta} \right] \delta - x_k \right|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (n_0 \delta^p)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По теореме Хаусдорфа M предкомпактно. $\lhd$

4. *Пространство* $L_p[0,1]$.

Определение 3. Множество $M \subset L_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, называется *равностепенно непрерывным в среднем*, если для любого $\varepsilon > 0$

существует $\delta > 0$ такое, что для $|s| < \delta$ и для любой функции $x \in M$ выполняется

$$\int\limits_0^1 |x(t+s) - x(t)|^p dt < \varepsilon.$$

Теорема 7 (М. Рисс). *Множество $M \subset L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < +\infty$, является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно в среднем, т. е. выполнены условия:*

1) существует постоянная C такая, что $\int\limits_0^1 |x(t)|^p dt \leqslant C^p$ для каждого $x \in M$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < s < \delta$

$$\int\limits_0^1 |x(t+s) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$$

для всех функций x семейства M.

$\triangleright$ *Достаточность.* Пусть множество $M \subset L_p[0,1]$ равностепенно непрерывно в среднем и ограничено в $L_p[0,1]$. Рассмотрим средние по Стеклову $x_h(t)$ для всех $x \in M$. Имеем

$$|x_h(t)| = \frac{1}{2h}\Bigg|\int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau\Bigg| \leqslant \frac{1}{2h}\Bigg(\int\limits_{t-h}^{t+h} d\tau\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p d\tau\Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p}\Bigg(\int\limits_0^1 |x(\tau)|^p d\tau\Bigg)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p} C|x_h(t+s) - x_h(t)| =$$

$$= \frac{1}{2h}\Bigg|\int\limits_{t+s-h}^{t+s+h} x(\tau)\,d\tau - \int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau\Bigg| = \frac{1}{2h}\Bigg|\int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau+s)\,d\tau - \int\limits_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(\tau+s) - x(\tau)|\,d\tau \leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p}\Bigg(\int\limits_{t-h}^{t+h} |x(\tau+s) - x(\tau)|^p\,d\tau\Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p}\Bigg(\int\limits_0^1 |x(\tau+s) - x(\tau)|^p\,d\tau\Bigg)^{1/p}.$$

Значит, $|x_h(t)| \leqslant C(1/2h)^{1/p}$ и при $|s| < \delta |x_h(t+s) - x_h(t)| \leqslant \varepsilon(1/2h)^{1/p}$, т. е. семейство (x_h) при фиксированном h равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По теореме Арцела — Асколи у любой последовательности функций этого семейства существует равномерно сходящаяся подпоследовательность. Эта подпоследовательность сходится также в $L_p[0,1]$, т. е. семейство (x_h) предкомпактно в $L_p[0,1]$. В силу оценки (5) из § 20 получаем, что если $0 < h < \delta$, то $\|x - x_h\|_p < \varepsilon$. Это значит, что предкомпактное семейство (x_h) является ε-сетью для множества M. Согласно следствию теоремы Хаусдорфа (§ 23), множество M предкомпактно.

Необходимость. Пусть M — предкомпактное множество в $L_p[0,1]$. Всякое предкомпактное множество ограничено и, следовательно, выполнено условие 1). Возьмем $\varepsilon > 0$ и построим конечную $\varepsilon/3$-сеть $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ для множества M. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы для $|s| < \delta$ выполнялось $\|y_k(t+s) - y_k(t)\|_p < \varepsilon/3$. Возьмем произвольную функцию $x \in M$. Пусть y_{k_0} — такая функция, что $\|x - y_{k_0}\| \leqslant \varepsilon/3$. Тогда, если $|s| < \delta$, то получаем

$$\|x(t+s) - x(t)\|_p \leqslant \|x(t+s) - y_{k_0}(t+s)\|_p + \|y_{k_0}(t+s) - y_{k_0}(t)\|_p +$$

$$+\|x(t) - y_{k_0}(t)\|_p \leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

что означает выполнение условия 2) для множества M. $\lhd$

Замечание. Аналогичная теорема справедлива в пространстве $L_p(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$.

ГЛАВА IV

НОРМИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 25. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

С этой главы мы начинаем изучение пространств, одновременно являющихся векторными и топологическими, и тем самым переходим к рассмотрению одного из основных объектов функционального анализа.

Естественность такого рассмотрения можно продемонстрировать на примере основных понятий математического анализа. Производная функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ в точке t определяется как предел выражения $1/h[f(t+h) - f(t)]$ при $h \to 0$. Проанализируем, какие структуры должны быть заданы на множестве X, чтобы определение производной имело смысл для отображения $f : \mathbf{R} \to X$? Во-первых, должно быть определено понятие разности элементов из X и определено умножение на число — эти операции определены в векторном пространстве и естественно считать, что X — векторное пространство. Во-вторых, должно быть определено понятие предела, а предел определен в топологических пространствах.

Таким образом, X должно быть одновременно векторным и топологическим пространством. Кроме того, чтобы определенная таким образом производная имела обычные свойства, например производная суммы была равна сумме производных, нужно, чтобы структура топологического пространства была согласована со структурой векторного пространства.

Топология, согласованная со структурой векторного пространства, наиболее просто определяется с помощью нормы. Напомним сначала основные понятия теории векторных пространств, а затем рассмотрим понятие нормы и нормированного пространства.

1. *В е к т о р н ы е   п р о с т р а н с т в а*

Определение 1. *Векторным (линейным) пространством над полем* K называется множество X, для которого заданы два отображения:

а) $X \times X \ni (x, y) \to x + y \in X$ (сложение);

б) $K \times X \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in X$ (умножение на число),
причем выполняются следующие аксиомы:

X является *абелевой группой* относительно сложения, т. е.

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
2) $x + y = y + x$,
3) существует элемент $0 \in X$ такой, что $x + 0 = x$ для любого x,
4) для любого $x \in X$ существует элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$.

Для любых $\lambda, \mu \in K$ и $x, y \in X$ справедливы равенства:

5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
6) $1 \cdot x = x$,
7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Точки векторного пространства называются *векторами*. В дальнейшем будем рассматривать векторные пространства только над полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. Любое векторное пространство над полем $\mathbf{C}$ можно рассматривать как векторное пространство над полем $\mathbf{R}$.

Большинство утверждений, полученных ниже, справедливы для векторных пространств над полем $\mathbf{R}$ и над полем $\mathbf{C}$, хотя доказательства будем проводить в основном для случая $\mathbf{R}$.

Примеры.

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ с покоординатными операциями сложения и умножения на число — векторное пространство над полем $\mathbf{R}$.

2. Пространство $\mathbf{C}^n$ с покоординатными операциями — векторное пространство над полем $\mathbf{C}$. Заметим, что $\mathbf{C}^n$ можно рассматривать и как векторное пространство над полем $\mathbf{R}$.

3. Пусть T — произвольное множество. Множество $F(T)$ всех функций, определенных на T, со значениями в $\mathbf{R}$ является векторным пространством над $\mathbf{R}$ с естественными операциями сложения и умножения на число: $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$.

Определение 2. Подмножество L векторного пространства называется *векторным подпространством*, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр, т. е. если $x, y \in L$, $\lambda \in K$, то $x + y \in L$, $\lambda x \in L$.

Векторное подпространство само является векторным пространством. Рассматриваемые в дальнейшем в качестве примеров векторные пространства обычно заданы как подмножества пространства всех функций на каком-нибудь множестве. Поэтому для проверки аксиом векторного пространства достаточно проверить замкнутость этих множеств относительно алгебраических операций.

Примеры.

1. $C[0,1]$ — пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$ со значением в $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$), — векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$).

2. $L_p(T,\mu)$ — пространство функций на T, измеримых и интегрируемых в степени p со значением в $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$), — векторное пространство над $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$).

3. Множество всех периодических функций (с разными периодами) на $\mathbf{R}$ и со значением в $\mathbf{R}$ не является векторным пространством над $\mathbf{R}$, так как, например, сумма двух периодических функций $\sin t$ и $\sin \pi t$ не является периодической функцией.

Определение 3. Множество B в векторном пространстве X называется *линейно независимым*, если для любого конечного набора $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементов из B равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ возможно только при $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 4. Множество $B \subset X$ называется *алгебраическим базисом векторного пространства* X, если B линейно независимо и для любого $x \in X$ существует конечный набор $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементов из B такой, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Предложение 1. *В любом векторном пространстве X существует алгебраический базис.*

$\triangleright$ Рассмотрим множество M всех линейно независимых подмножеств из X. На M зададим отношение порядка по включению. Пусть M_0 — линейно упорядоченное подмножество в M. Тогда множество в X вида $B_0 = \bigcup\limits_{B \in M_0} B$ является также линейно независимым и мажорирует каждый элемент из M_0, т.е. является мажорантой M_0. Значит, в упорядоченном множестве M выполнены условия леммы Цорна и в M существует максимальное линейно независимое множество, которое и является базисом в X. $\triangleleft$

Определение 5. Пространство X называется *конечномерным* (*n-мерным*), если в нем существует конечный базис (базис из n элементов), и называется *бесконечномерным* в противном случае. Размерность пространства X будем обозначать $\dim X$.

Типичные для функционального анализа векторные пространства, такие, например, как $C[0,1]$, $L_p[0,1]$, l_p, бесконечномерны. Примером бесконечной линейно независимой системы векторов в пространствах

$C[0,1]$ и $L_p[0,1]$ является система функций $\{t^k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, а в пространствах l_p — система векторов $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где e_k есть последовательность, в которой число 1 стоит на месте с номером k, а остальные члены последовательности — нули.

Определение 6. Пусть X_1 и X_2 — векторные пространства. Их *прямой суммой* называется пространство

$$X_1 \oplus X_2 = \{(x_1, x_2) |\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

с покоординатными операциями сложения и умножения на число.

Определение 7. Пусть X — векторное пространство, X_1 и X_2 — его подпространства. Говорят, что пространство X *разлагается в прямую сумму своих подпространств* X_1 и X_2, если каждый элемент $x \in X$ представляется, и притом единственным образом, в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. В этом случае определен естественный изоморфизм пространства X с пространством $X_1 \oplus X_2$ и обычно в такой ситуации пишут $X = X_1 \oplus X_2$.

Пусть L — векторное подпространство векторного пространства X. Введем в X отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in L$. Множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов. В множестве классов эквивалентности, которое обозначается X/L, вводятся операции сложения и умножения на число: $[x] + [y] = [x + y]$, $\lambda[x] = [\lambda x]$. Здесь $[x]$ — класс, содержащий элемент x.

Упражнение 1. Проверить, что операции введены корректно и множество X/L удовлетворяет аксиомам векторного пространства.

Построенное векторное пространство X/L называется *фактор–пространством* пространства X по подпространству L.

Пример 7. Пространство $L_p(T, \mu)$. Пусть $\mathbf{L}_p(T, \mu)$ — множество измеримых функций, p-е степени которых суммируемы. В нем функции, почти всюду равные нулю, образуют векторное подпространство N. Фактор-пространство $\mathbf{L}_p(T, \mu)/N$ есть пространство $L_p(T, \mu)$.

Определение 8. Пусть A — подмножество векторного пространства X. Наименьшее векторное подпространство в X, содержащее A, называется *векторным пространством, порожденным множеством* A, и обозначается $L(A)$, т. е. $L(A) \supset A$, и, если X_1 — векторное подпространство в X такое, что $X_1 \supset A$, то $X_1 \supset L(A)$.

Очевидно, что $L(A)$ есть пересечение всех векторных подпространств в X, содержащих A.

Упражнение 2. Показать, что $L(A)$ есть множество всех конечных линейных комбинаций элементов из A.

2. *Нормированные пространства*

Перейдем теперь к рассмотрению понятия нормы и основного понятия — нормированного пространства.

Определение 9. *Нормой* на векторном пространстве X называется отображение из X в $\mathbf{R}$ $(X \ni x \to \|x\| \in \mathbf{R})$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Нормированным векторным пространством называется векторное пространство с заданной на нем нормой.

Как видно из определения, норма является естественным обобщением понятия длины вектора.

В нормированном пространстве формула $\rho(x, y) = \|x - y\|$ определяет метрику. Действительно:

1) если $\rho(x, y) = 0$, т.е. $\|x - y\| = 0$, то $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant$
$\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Введенная по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$ метрика обладает двумя дополнительными свойствами:

4) $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$ — инвариантность относительно сдвига;
5) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$ — положительная однородность.

Упражнение 3. Проверить, что любая метрика на векторном пространстве, обладающая свойствами 4) и 5), порождена некоторой нормой.

Примеры.

8. $C[0, 1]$ — нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|.$$

9. $L_p(T, \mu)$ — нормированное пространство с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_T |x(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

10. l_p — нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Метрики, заданные в этих пространствах (см. § 14), обладают свойствами 1), 2) и порождаются указанными нормами.

11. В векторном пространстве **s** (см. § 14) метрика обладает свойством 1), но не обладает свойством 2) и, значит, не порождается нормой.

12. Пусть $C^\infty[0,1]$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых функций на $[0,1]$. Метрика, заданная формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|}{1 + \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|},$$

также не обладает свойством 2) и поэтому не порождается никакой нормой.

Поскольку всякая норма задает метрику, то в нормированном пространстве имеют смысл все понятия, введенные для метрических пространств, в частности топология, предел, непрерывность, полнота.

Алгебраические операции являются отображениями $X \times X$ в X и $K \times X$ в X. Поэтому естественно выяснить вопрос об их непрерывности относительно заданной нормы.

Теорема 1. *В нормированном пространстве операции сложения и умножения на число непрерывны.*

$\triangleright$ Пусть $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ в X и $\lambda_n \to \lambda_0$ в K. Тогда

$$\|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \to 0,$$

т. е. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$.

Аналогично

$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_n|\,\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\,\|x_0\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

т. е. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$. $\triangleleft$

На доказанные в теореме 1 свойства можно посмотреть с более общей точки зрения.

Определение 10. *Топологическим векторным пространством* называется множество, на котором

1) задана структура векторного пространства;

2) задана топология;

3) структура топологического пространства согласована со структурой векторного пространства. т. е. операция сложения и операция умножения на число непрерывны в заданной топологии.

Таким образом, теорема 1 утверждает, что нормированное пространство является топологическим векторным пространством.

Заметим, что встречаются векторные пространства и достаточно естественные метрики на них такие, что топологическая структура не согласована со структурой векторного пространства.

Пример 13. В пространстве $F(\mathbf{R})$ всех функций на прямой $\mathbf{R}$ зададим метрику $\rho(x,y) = \min\{\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |x(t) - y(t)|, 1\}$. Сходимость в заданной метрике есть равномерная сходимость на $\mathbf{R}$. Операция сложения функций непрерывна в заданной топологии, но операция умножения на число разрывна. Действительно, числовая последовательность $1/n \to 0$ в $\mathbf{R}$, но последовательность произведений $(1/n)t$ не сходится в $F(\mathbf{R})$, ибо $\rho(t/n, 0) = \min\{\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |t/n|, 1\} = 1$.

Отметим, что отображение сдвига $X \ni x \to x + x_0 \in X$ в нормированном пространстве X изометрично, удовлетворяет условию Липшица с константой 1 и, в частности, равномерно непрерывно.

§ 26. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Банаховым пространством* называется полное нормированное векторное пространство.

Примеры банаховых пространств.

1. Пространство $C[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$.

2. Пространство $C(T)$ непрерывных функций на компактном метрическом пространстве T с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in T} |x(t)|$.

3. $\mathbf{R}^n$ с любой из следующих норм:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty; \qquad \|x\|_\infty = \max_k |x_k|.$$

4. $L_p(T,\mu)$ с нормой $\|x\|_p = \Big(\int\limits_T |x(t)|^p\,d\mu\Big)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty.$

$L_\infty(T,\mu)$ с нормой $\|x\| = ess\ sup_T |x(t)|$.

5. l_p с нормой $\|x\| = \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\Big)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty;$

l_∞ с нормой $\|x\| = \sup\limits_k |x(k)|$.

6. $C^m[0,1]$ с нормой $\|x\| = \sum\limits_{k=0}^{m} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(k)}(t)|$.

Полнота этих пространств уже проверялась.

Укажем одно свойство, характеризующее банаховы пространства в классе нормированных.

В нормированном пространстве X имеет смысл обычное понятие суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in X$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ сходится. Элемент $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой ряда* и обозначается $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. Заметим, что в векторном пространстве определение суммы ряда не имеет смысла, так как это определение использует, кроме операции сложения, операцию перехода к пределу, т.е. топологию на X.

Вместе с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ можем рассмотреть числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, составленный из норм элементов. Если ряд, составленный из норм, сходится, то исходный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называют *абсолютно сходящимся.*

Для числовых рядов в математическом анализе доказывается, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, т.е. абсолютно сходящийся числовой ряд сходится.

Следующая теорема показывает, что аналогичное свойство эквивалентно полноте нормированного пространства.

Теорема 1. *Нормированное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть X — банахово пространство и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$ сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Проверим, что частичные суммы этого ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ образуют последовательность Коши. Действительно, если $m > n$, то

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Так как пространство X полно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Кроме того, выполняется неравенство $\left\| \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \right\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$, которое является обобщением неравенства треугольника для норм.

Достаточность. Пусть в нормированном пространстве X любой абсолютно сходящийся ряд сходится. Возьмем произвольную последовательность Коши x_n в X. Выберем подпоследовательность x_{n_k} так, что $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1/2^k$. Тогда для ряда $x_{n_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})$ ряд, составленный из норм, сходится и, значит, сходится исходный ряд. Но для этого ряда частичная сумма есть x_{n_k} и, таким образом, выделенная подпоследовательность x_{n_k} сходится. Если у последовательности Коши сходится подпоследовательность, то сходится и сама последовательность. $\lhd$

Напомним, что ***пополнением метрического пространства*** X_0 называется полное метрическое пространство X такое, что $X_0 \subset X$ и $\overline{X}_0 = X$. В определении пополнения для нормированных пространств дополнительно требуется, чтобы X было векторным пространством, а X_0 — его векторным подпространством.

Если X_0 — неполное нормированное пространство, то по теореме 1 § 17 для него, как метрического пространства, существует пополнение X. Однако X еще не будет банаховым пространством, так как пополнение (по конструкции теоремы о пополнении) является метрическим, но не векторным пространством. Его легко превратить в векторное, задав операции следующим образом: пусть $x, y \in X$. Возьмем последовательности $x_n \in X_0$, $x_n \to x$, и $y_n \in X_0$, $y_n \to y$. Положим по определению

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n), \quad \lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n.$$

Корректность введения операций и выполнения аксиом нормированного пространства можно либо проверить непосредственно, либо воспользоваться теоремами о продолжении из § 18, в которых такая конструкция применялась ранее. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для любого нормированного пространства X_0 существует банахово пространство X, являющееся пополнением X_0, причем X_0 является векторным подпространством в X.*

Примеры.

7. Пространство $L_p[0,1]$ является при $1 \leq p < \infty$ пополнением $C[0,1]$ по норме

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

8. В векторном пространстве $C^1[0,1]$, состоящем из непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$, зададим норму

$$\|x\|_1^1 = \int_0^1 |x(t)| \, dt + \int_0^1 |x'(t)| \, dt.$$

Относительно этой нормы пространство неполно. Покажем, что его пополнение можно естественно реализовать как некоторое векторное подпространство в $L_1[0,1]$.

Пусть $x_n \in C^1[0,1]$ — последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|_1^1$. Так как $\|x\|_1^1 = \|x\|_1 + \|x'\|_1$, то x_n является последовательностью Коши в $L_1[0,1]$ и производные x_n' также образуют последовательность Коши в $L_1[0,1]$. Так как $L_1[0,1]$ полно, то существуют функции $x_0, y_0 \in L_1[0,1]$ такие, что $x_n \xrightarrow{L_1} x_0$, $x_n' \xrightarrow{L_1} y_0$.

Определение 2. Функция $y_0 \in L_1[0,1]$ называется *сильной обобщенной производной* функции $x_0 \in L_1[0,1]$, если существует последовательность $x_n \in C^1[0,1]$ такая, что $x_n \xrightarrow{L_1} x_0$, $x_n' \xrightarrow{L_1} y_0$. Обобщенную производную будем обозначать, как и обычную, через x_0'.

Множество функций, имеющих обобщенную производную, обозначим через $W_1^1[0,1]$. Это векторное пространство. Норму введем по формуле $\|x\|_1^1 = \|x\|_1 + \|x'\|_1$, где x' — обобщенная производная.

Множество $C^1[0,1]$ входит в $W_1^1[0,1]$ и является в нем всюду плотным векторным подпространством. По построению любая последовательность Коши, состоящая из элементов $C^1[0,1]$, сходится в $W_1^1[0,1]$. В силу леммы 2 § 17 пространство $W_1^1[0,1]$ полно и, следовательно, является пополнением подпространства $C^1[0,1]$ (с рассматриваемой нормой).

Исследуем, какие функции принадлежат $W_1^1[0,1]$. Пусть функция x непрерывно дифференцируема. Для произвольной точки $s \in [0,1]$ из формулы Ньютона — Лейбница получаем неравенство

$$|x(s)| = \left| x(t) - \int\limits_s^t x'(\tau)\,d\tau \right| \leqslant |x(t)| + \int\limits_0^1 |x'(\tau)|\,d\tau$$

и, интегрируя по t, — неравенство

$$|x(s)| \leqslant \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt + \int\limits_0^1 |x'(\tau)|\,d\tau. \tag{1}$$

Пусть $x_0 \in W_1^1[0,1]$. Возьмем последовательность $x_n \in C^1[0,1]$ такую, что $\|x_0 - x_n\|_1^1 \leqslant 1/2^n \to 0$. Применяя неравенство (1), получаем

$$\max_{0\leqslant a\leqslant 1} |x_n(s) - x_m(s)| \leqslant \int\limits_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\,dt + \int\limits_0^1 |x_n'(\tau) - x_m'(\tau)|\,d\tau,$$

откуда следует, что последовательность x_n сходится равномерно. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$x_n(t) - x_n(0) = \int\limits_0^t x_n'(\tau)\,d\tau,$$

получаем равенство

$$x_0(t) - x_0(0) = \int\limits_0^t x_0'(\tau)\,d\tau,$$

откуда следует, что x_0 — абсолютно непрерывна (см. § 12) и для нее существует обобщенная производная в смысле определения из § 12.

Верно и обратное утверждение. Пусть x_0 — произвольная абсолютно непрерывная функция. Тогда в силу теоремы Радона — Никодима существует обобщенная производная — такая функция $y \in L_1[0,1]$, что $x(t) = \int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau + x(0)$. Для функции y существует последовательность

$y_n \in C[0,1]$ такая, что $y_n \to y$ в $L_1[0,1]$. Тогда для последовательности $x_n(t) = \int\limits_0^t y_n(\tau)\,d\tau + x(0)$ выполняется условие $x_n \to x_0$, $x'_n \to y(t)$, т. е. обобщенная производная функции x_0 является сильной обобщенной производной. Таким образом, пополнение пространства $C^1[0,1]$ по норме $\|x\|_1^1 = \|x\|_1 + \|x'\|_1$ может быть реализовано как множество абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций.

Аналогичным образом определяется целый класс пространств, называемых *пространствами Соболева.*

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. На векторном пространстве $C^m(\overline{\Omega})$, состоящем из функций, имеющих непрерывные на $\overline{\Omega}$ частные производные до порядка m включительно, зададим норму

$$\|x\|_m^p = \left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leqslant m} \int \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} x}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}} \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

Пополнение пространства $C^m(\overline{\Omega})$ по этой норме называется *пространством Соболева* и обозначается $W_m^p(\Omega)$. Рассуждая как и в случае пространства $W_1^1[0,1]$, можно $W_m^p(\Omega)$ реализовать как множество функций из $L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные из пространства $L_p(\Omega)$ до порядка m включительно. Заметим, что, в отличие от рассмотренного выше случая пространства $W_1^1[0,1]$, при $n > 1$ функции, имеющие обобщенные производные, могут быть разрывными.

Примеры.

9. Пусть Ω есть куб в $\mathbf{R}^3$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \Omega$, $t = (t_1, t_2, t_3) \in \Omega$ и пусть $\varphi(t) = 1/\|t - \tau\|$, где $\|t - \tau\|$ — евклидова норма.

Функция $\varphi(t)$ разрывна в точке τ. Покажем, что она имеет обобщенные производные по всем переменным, которые почти всюду совпадают с обычными производными. Пусть χ_n — такая последовательность непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$, что $\chi_n(\xi) = 1/\xi$, если $|\xi| > 1/n$ и $|\chi'_n(\xi)| \leqslant 1/\xi^2$, например,

$$\chi_n(\xi) = \begin{cases} 1/\xi, & |\xi| > 1/n, \\ -n^3/2\xi^2 + (3/2)n, & |\xi| \leqslant 1/n. \end{cases}$$

Тогда $\varphi_n(t) = \chi_n(\|t - \tau\|) \to \varphi(t)$ в $L_1(\Omega)$ и $\partial\varphi_n/\partial t_k \to \partial\varphi/\partial t_k$ в $L_1(\Omega)$ в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости, т. е. функция φ имеет обобщенную производную.

10. Пусть $\Omega =]0,1[\times]0,1[\times]0,1[\subset \mathbf{R}^3$ и $\{r_k\}$ — счетное всюду плотное множество в Ω (например, $\{r_k\}$ — множество точек с рациональными координатами). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{||t - r_k||} .$$

Этот ряд абсолютно сходится в $L_1(\Omega)$. Более того, согласно теореме Б. Леви, этот ряд сходится почти всюду в Ω к некоторой интегрируемой функции f. Как показано в примере 1, каждое слагаемое имеет обобщенную производную. Так как ряд, составленный из производных, также абсолютно сходится в $L_1(\Omega)$, то f имеет обобщенную производную

$$\frac{\partial f}{\partial t_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\partial}{\partial t_m}\Big(\frac{1}{\|t - r_k\|}\Big).$$

Однако функция f разрывна в каждой точке множества Ω.

Векторное подпространство нормированного пространства само является нормированным. Но векторное подпространство банахова пространства может не быть замкнутым и тогда не является полным. Например, векторное подпространство $P(0,1)$ в $C[0,1]$, состоящее из многочленов, не замкнуто в $C[0,1]$.

Определение 3. *Подпространством банахова пространства X* называется замкнутое векторное подпространство в X.

Пример 11. Множество функций

$$C_0[0,1] = \{x|\ x \in C[0,1],\ x(0) = x(1) = 0\}$$

является подпространством банахова пространства $C[0,1]$.

Заметим, что, если L — векторное подпространство нормированного пространства X и $L \neq X$, то L не содержит внутренних точек. Действительно, пусть $x_0 \in L$ и $x_1 \notin L$, тогда точки вида $y_n = x_0 + x_1/n$ попадают в любую окрестность точки x_0, но $y_n \notin L$. Значит, x_0 не является внутренней точкой для L. В частности, векторное подпространство, отличное от всего пространства, не может быть открытым множеством.

Если X — нормированное пространство и L — его замкнутое векторное подпространство, то на фактор-пространстве X/L задается норма $\|[x]\| = \inf\limits_{l\in L} \|x + l\|$.

У п р а ж н е н и е 1. Проверить, что для определенной выше $\|[x]\|$ на фактор-пространстве действительно выполнены аксиомы нормы.

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что если пространство X банахово, то фактор-пространство со введенной нормой банахово.

Прямой суммой нормированных пространств X_1 и X_2 называется векторное пространство $X_1 \oplus X_2$ с нормой $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, где $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Пусть X — нормированное пространство и X_1 — его замкнутое векторное подпространство. Замкнутое векторное подпространство X_2 называется *дополнением* к X_1, если пространство X разлагается в прямую сумму подпространств X_1 и X_2, т. е. любой элемент $x \in X$ представляется, и притом единственным образом, в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Несколько неожиданным при первом знакомстве является тот факт, что не для любого подпространства в банаховом пространстве существует дополнение. Например, в пространстве l_∞ подпространство $\mathbf{c}_0$, состоящее из последовательностей, стремящихся к нулю, не имеет дополнения. Доказательство этого утверждения довольно сложно, и мы его не приводим.

Базисом Шаудера в банаховом пространстве X называется последовательность элементов $e_1, e_2, \dots$ из X такая, что любой вектор $x \in X$ разлагается, и притом единственным образом, в ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k e_k$, сходящийся по норме: $\Big\| \sum\limits_{k=1}^{n} C_k e_k - x \Big\| \to 0$, и при этом коэффициенты разложения непрерывно зависят от x.

Если в банаховом пространстве X существует базис Шаудера, то это пространство сепарабельно, так как конечные линейные комбинации $\sum C_k e_k$ с рациональными коэффициентами образуют счетное всюду плотное множество. Примером базиса Шаудера служит полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве. В пространствах $L_p[0,1]$, $C[0,1]$ и многих других построены базисы Шаудера.

Рассмотрим, например, пространство $C[0,1]$. Такие “хорошие” системы функций, как степенная $1, t, t^2, t^3, \dots$ или тригонометрическая $1,\ \sin 2\pi kt,\ \cos 2\pi kt,\ k = 1, 2, \dots$, не являются базисами в $C[0,1]$, так как не любая непрерывная функция разлагается в степенной ряд и не для любой непрерывной функции ряд Фурье сходится равномерно.

Однако базисы в пространстве $C[0,1]$ существуют. Один из таких базисов, построеный Ю. Шаудером, имеет следующий вид. Пусть $e_{-1}(t) = 1$, $e_0(t) = t$. Для записи остальных функций базиса более удобна двойная нумерация: индексом $n = 1, 2, \ldots$, и индексом k, принимающим значения $1, \ldots, 2^{n-1}$,

$$e_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 - 2^n|t - (2k-1)/2^n|, & (2k-2)/2^n \leqslant t \leqslant (2k)/2^n, \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

При разложении по этому базису частичные суммы ряда являются естественными аппроксимациями функции x кусочно-линейными непрерывными функциями: на промежутке вида $[k/2^n, (k+1)/2^n]$ график функции приближается секущей. Разложение непрерывной функции в ряд по этому базису имеет вид

$$x(t) = C_{-1}e_{-1}(t) + C_0e_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} C_{n,k}e_{n,k}(t),$$

где $C_{-1} = x(0), C_0 = x(1) - x(0)$,

$$C_{n,k} = x((2k-1)/2^n) - 1/2[x(2k/2^n) - x((2k-2)/2^n)].$$

Известная проблема базиса, поставленная С. Банахом, заключалась в том, чтобы выяснить, существует ли базис Шаудера в произвольном сепарабельном банаховом пространстве. Только в 1972 году был впервые построен пример сепарабельного банахова пространства, в котором нет базиса (П. Энфло).

§ 27. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Среди отображений нормированных пространств в первую очередь выделяются линейные отображения — отображения, которые сохраняют структуру векторного пространства.

Определение 1. Пусть X и Y — векторные пространства над одним и тем же полем K. Отображение $A\colon X \to Y$ называется *линейным отображением* или *линейным оператором*, если

1. $A(x + y) = Ax + Ay$, $x, y \in X$ (аддитивность);
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$, $x \in X$, $\lambda \in K$ (однородность).

Определение 2. Линейный оператор $A\colon X \to Y$, где X и Y — нормированные пространства, называется *ограниченным*, если существует постоянная C такая, что для всех $x \in X$ выполняется *неравенство ограниченности*

$$\|Ax\|_Y \leqslant C\|x\|_X.$$

Для $x = 0$ это неравенство всегда выполняется, поэтому при его проверке и исследовании будем считать, что $x \neq 0$. В дальнейшем иногда будем опускать указание на то, в каком пространстве вычисляется норма, так как это обычно понятно из контекста и норма элемента всегда вычисляется в том пространстве, которому данный элемент принадлежит.

Пример 1. Пусть $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — линейный оператор. В $\mathbf{R}^n$ зададим норму $\|x\|_\infty = \max\limits_k |x_k|$. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, $x_k \in \mathbf{R}$, тогда $Ax = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k A e_k$. Оценим норму

$$\|Ax\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k A e_k\| \leqslant \max_l |x_l| \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|\,\|x\|_\infty.$$

Таким образом, любой линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ ограничен. Как будет показано ниже, линейные операторы в бесконечномерных нормированных пространствах могут быть неограниченными. Однако и в бесконечномерных нормированных пространствах линейные операторы обладают дополнительными свойствами по сравнению с произвольными отображениями.

Для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ нормированных или метрических пространств следующие свойства различны и каждое последующее влечет предыдущее:

1) f непрерывно в точке x_0;
2) f непрерывно в каждой точке x;
3) f равномерно непрерывно;
4) f удовлетворяет условию Липшица.

Заметим, что для линейного оператора в нормированных пространствах неравенство ограниченности есть фактически другая запись условия Липшица.

Теорема 1. *Пусть X и Y — нормированные пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Следующие свойства оператора эквивалентны:*

1) A непрерывен в точке 0;

2) A непрерывен в любой точке;

3) A равномерно непрерывен;

4) A ограничен.

$\triangleright$ Так как импликации 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) справедливы для любого отображения, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что из 1) следует 4). Пусть оператор A непрерывен в точке 0. Тогда для $\varepsilon = 1$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|x\| \leqslant \delta$ следует $\|Ax\| \leqslant 1$. Возьмем произвольное x, $x \neq 0$, и построим $x' = (\delta/\|x\|)x$. Так как $\|x'\| \leqslant \delta$, то имеем $\|Ax'\| \leqslant 1$, т. е. $(\delta/\|x\|)\|Ax\| \leqslant 1$, откуда $\|Ax\| \leqslant (1/\delta)\|x\|$. Таким образом, неравенство ограниченности выполнено с постоянной $1/\delta$. $\triangleleft$

Выделяется частный случай линейных операторов, когда в качестве пространства Y берется поле K.

Определение 3. *Линейным функционалом* на векторном пространстве над полем K называется линейное отображение $f : X \to K$.

Отметим, что как частный случай понятия ограниченного оператора возникает понятие ограниченного линейного функционала.

Неравенство ограниченности для оператора A запишем в виде

$$\Big\|A\frac{x}{\|x\|}\Big\| \leqslant C$$

или, обозначив $x_0 = x/\|x\|$, получаем

$$\|Ax_0\| \leqslant C, \ \text{где} \|x_0\| = 1.$$

Таким образом, константа C в неравенстве ограниченности есть, по определению, верхняя грань множества чисел $\big\{\|Ax\|\big\}$, где $\|x\| = 1$. Существует наименьшая из верхних граней, это, по определению, точная верхняя грань — $\sup\big\{\|Ax\| : \|x\| = 1\big\}$. Эта константа является важной характеристикой ограниченного линейного оператора.

Определение 4. *Нормой ограниченного линейного оператора A* называется число

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|,$$

т. е. наименьшая из постоянных C, при которых справедливо неравенство ограниченности.

Для вычисления нормы конкретного оператора нужно найти точную верхнюю грань числовой функции $\|Ax\|$ на единичном шаре рассматриваемого нормированного пространства. Отметим, что бывают случаи, когда эта точная верхняя грань достигается, т. е. когда числовая функция $\|Ax\|$ имеет максимум на единичном шаре, и случаи, когда максимум не существует. В общем случае вычисление нормы является трудной задачей и норма не вычисляется явно даже для линейных операторов в произвольных конечномерных пространствах. Вместе с тем имеется ряд примеров, когда удается найти явно норму оператора в бесконечномерном пространстве или получить оценку нормы. Несколько таких примеров рассмотрено ниже.

Отображение A может оказаться заданным не на всем пространстве X, а на некотором векторном подпространстве $D(A)$ — области определения оператора A. В этом случае определение линейного оператора и определение ограниченного линейного оператора также имеют смысл.

Если действие оператора задается с помощью формулы, то обычно возникает естественная область определения. Например, рассмотрим оператор в пространстве $C[0,1]$, заданный формулой

$$Ax(t) = \frac{1}{t}x(t),\ 0 < t \leqslant 1;\ Ax(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}x(t).$$

Естественная область определения $D(A)$ этого оператора состоит из функций, для которых существует указанный предел.

Если линейный оператор задан на всюду плотном векторном подпространстве пространства X, действует в банахово пространство Y и ограничен, то по теореме о продолжении (§ 18) существует единственное его продолжение на все X, причем продолжение является линейным ограниченным оператором с той же нормой.

Среди линейных операторов выделяется еще один класс, в который могут попадать и неограниченные операторы.

Определение 5. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор A, отображающий векторное подпространство $D(A) \subset X$ в Y, называется *замкнутым*, если из того, что $x_n \to x_0$, $x_n \in D(A)$, и $Ax_n \to y_0$, следует, что $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$.

Требование замкнутости оператора эквивалентно тому, что его график $GrA := \{(x,y) \in X \oplus Y|\ y = Ax,\ x \in D(A)\ \}$ является замкнутым множеством в $X \times Y$.

Свойство замкнутости оператора можно рассматривать как некоторое ослабление свойства непрерывности. В обоих случаях в основу определения положена возможность предельного перехода под знаком оператора, т. е. выполнение равенства

$$A(\lim x_n) = \lim Ax_n.$$

В случае непрерывности оператора A из существования предела в левой части следует существование предела в правой части и их равенство. В случае замкнутости оператора A данное равенство выполняется, если существуют оба предела.

З а м е ч а н и е 1. В топологии используется понятие замкнутого отображения. Это отображение, при котором образ замкнутого множества является замкнутым. Замкнутый оператор в смысле приведенного выше определения может не быть замкнутым отображением в указанном смысле.

П р и м е р ы.

1. Если A — ограниченный оператор, то A замкнут тогда и только тогда, когда замкнуто векторное подпространство, на котором он определен.

2. Пусть $X = Y = C[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$ и A есть оператор дифференцирования: $Ax(t) = x'(t)$. Свойство линейности оператора дифференцирования хорошо известно. Данный оператор неограничен. Действительно, для последовательности $x_n(t)=\sin nt$ имеем $\|x_n\|\leqslant 1$, $\left\|(x_n)'\right\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|n\cos nt|=n$ и, значит, $\sup\limits_n\left\|(x_n)'\right\| = +\infty$.

Однако известная из математического анализа теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности утверждает, что если последовательность x_n состоит из дифференцируемых функций, равномерно сходится к функции x и последовательность производных x_n' равномерно сходится к функции y, то функция x непрерывно дифференцируема и $x' = y$. Это утверждение в точности означает, что оператор дифференцирования A замкнут.

Приведенный пример показывает, что в бесконечномерных пространствах существуют неограниченные линейные операторы и что замкнутый оператор может быть неограниченным.

Рассмотрим примеры типичных операторов в пространствах функций.

1. **Интегральные операторы**

В пространстве $C[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ рассмотрим интегральные операторы вида

$$Ax(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds. \tag{1}$$

З а м е ч а н и е. Запись $Ax(t)$ следует понимать только следующим образом: к функции x применен оператор A и вычисляется значение новой функции Ax в точке t, что соответствует расстановке скобок по правилу $(Ax)(t)$. Вариант прочтения $A[x(t)]$ не имеет смысла, ибо $x(t)$ — число, а оператор применяется к функции и его образ может зависеть не только от значения x в точке t, но и от значений в других точках.

Теорема 2. *Если функция $K(t,s)$ непрерывна, то формула* (1) *определяет линейный ограниченный оператор в пространстве $C[a,b]$, причем*

$$\|A\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

▷ Для любой непрерывной функции x образ $Ax(t)$ есть непрерывная функция от t (как интеграл, зависящий от параметра с непрерывной подынтегральной функцией). Проверим линейность оператора A:

$$A(x_1+x_2)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)[x_1(s)+x_2(s)]\,ds = \int\limits_a^b K(t,s)x_1(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_a^b K(t,s)x_2(s)\,ds = Ax_1(t) + Ax_2(t),$$

т. е. $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2$. Аналогично проверяется однородность. Проверим ограниченность оператора A:

$$\|Ax\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |Ax(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left| \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(s)| = C\|x\|,$$

где

$$C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

Заметим, что для данного оператора в теореме 2 § 22 уже доказывалось выполнение условия Липшица, т. е. фактически неравенство ограниченности было доказано ранее.

Покажем, что найденная постоянная C в неравенстве ограниченности наименьшая, т. е. является нормой оператора. Для этого нужно, согласно определению точной верхней грани, для произвольного $\varepsilon > 0$ указать функцию $x \in C[a, b]$ такую, что $\|x\| = 1$ и $\|Ax\| > C - \varepsilon$. По теореме Вейерштрасса существует точка $t_0 \in [a, b]$ такая, что $C = \int\limits_a^b |K(t_0, s)|\, ds$. Если взять $x_0(s) = \operatorname{sign} K(t_0, s)$, то получим

$$\int\limits_a^b K(t_0, s) x_0(s)\, ds = \int\limits_a^b |K(t_0, s)|\, ds = C.$$

Если $K(t_0, s)$ не меняет знака, то $x_0(s)$ — непрерывная функция и $\|Ax_0\| = C$, т. е. C — наименьшая константа. Если $x_0(s)$ — разрывная функция, то, вообще говоря, может не существовать функции $x \in C[a, b]$ такой, что $\|Ax\| = C$, $\|x\| = 1$ (точная верхняя грань не достигается).

Пусть $x_h(s)$ — средние по Стеклову функции $x_0(s)$ (§ 19). Тогда $\|x_h\|_{C[a,b]} \leqslant 1$ и

$$\|A\| \geqslant \lim_{h \to 0} \left| \int\limits_a^b K(t_0, s) x_h(s)\, ds \right| = \int\limits_a^b |K(t_0, s)|\, ds = C. \ \triangleleft$$

В следующей теореме условие непрерывности функции $K(t, s)$ заменено более слабым условием.

Теорема 3. *Пусть функция $K(t, s)$ задана для всех (t, s) из $[a, b] \times [a, b]$, измерима как функция переменной s при каждом t и удовлетворяет условиям:*

1) $\int\limits_a^b |K(t, s)|\, ds$ существует для любого t;

2) $\int\limits_a^b |K(t, s) - K(t_1, s)|\, ds \to 0$ при $t \to t_1$ для любого $t_1 \in [a, b]$.

Тогда интегральный оператор A вида (1) *ограничен в пространстве $C[a, b]$ и $\|A\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |K(t, s)|\, ds$.*

▷ Прежде всего заметим, что интеграл в (1) будем понимать в смысле Лебега. Значение $Ax(t)$ определено для любого t, так как интеграл в (1) существует. Проверим, что для любой непрерывной функции x образ Ax есть непрерывная функция в произвольной точке t_1. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему в силу условия 2) теоремы найдем $\delta > 0$ такое, что если $|t_1 - t| < \delta$, то

$$\int_a^b |K(t,s) - K(t_1,s)|\, ds \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для таких t и t_1 справедливо неравенство

$$|Ax(t) - Ax(t_1)| = \left| \int_a^b [K(t,s) - K(t_1,s)] x(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t,s) - K(t_1,s)|\, ds\, \|x\| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

из которого следует непрерывность функции Ax. Отметим также, что функция

$$g(t) = \int_a^b |K(t,s)|\ ds$$

непрерывна, так как, если $|t_1 - t| < \delta$, то

$$|g(t) - g(t_1)| = |\int_a^b |K(t,s)| - |K(t_1,s)|\, ds| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t,s) - K(t_1,s)|\, ds \leqslant \varepsilon.$$

Проверим ограниченность оператора A:

$$\|Ax\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_a^b K(t,s) x(s)\, ds \right| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} g(t)\, \|x\|.$$

Проверка того, что найденная константа в неравенстве ограниченности наименьшая, аналогична доказательству в теореме 2. $\lhd$

Важным примером интегральных операторов являются операторы со слабополярным ядром.

Определение 6. Ядро $K(t, s)$, $t, s \in [a, b]$, называется *полярным*, если оно может быть записано в виде

$$K(t, s) = K_0(t, s)/|t - s|^\gamma,$$

где $K_0(t, s)$ — непрерывная (следовательно, ограниченная) функция. Ядро называется *слабополярным*, если $0 < \gamma < 1$.

Такие ядра часто возникают при исследовании дифференциальных уравнений. В физических приложениях специальный вид полярного ядра возникает как отражение того, что, согласно ряду физических законов, сила взаимодействия частиц обратно пропорциональна некоторой степени расстояния между частицами.

Полярное ядро имеет разрыв (особенность) на диагонали $t = s$. Покажем, что интегральный оператор со слабополярным ядром удовлетворяет условиям теоремы 3 и, следовательно, является ограниченным оператором в пространстве непрерывных функций:

Заметим, что функция

$$g(t) = \int\limits_a^b |t - s|^{-\gamma}\, ds = \frac{1}{1 - \gamma}[(t - a)^{1-\gamma} + (b - t)^{1-\gamma}]$$

непрерывна и ограничена в силу условия $\gamma < 1$. Через эту функцию оцениваются интегралы, входящие в условия теоремы 3. Пусть

$$C = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |K_0(t, s)|.$$

Имеем

1) $\int\limits_a^b \big|K_0(t, s)\big||t - s|^{-\gamma}\, ds \leqslant Cg(t);$

2) $\int\limits_a^b \big|[K_0(t, s)|t - s|^{-\gamma} - K_0(t_1, s)|t_1 - s|^{1-\gamma}]\big|\, ds \leqslant I_1 + I_2,$

где $$I_1 = \int\limits_a^b |K_0(t, s) - K_0(t_1, s)|\, |t - s|^{-\gamma}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b} |K_0(t,s) - K_0(t_1,s)| g(t) \to 0, \quad t \to t_1;$$

$$I_2 = \int_a^b |K_0(t_1,s)| \Big| \frac{1}{|t-s|^\gamma} - \frac{1}{|t_1-s|^\gamma} \Big| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant C \int_a^b \Big| \frac{1}{|t-s|^\gamma} - \frac{1}{|t_1-s|^\gamma} \Big| \, ds.$$

Последний интеграл вычисляется явно, и из явного вида этого интеграла видно, что он стремится к нулю при $t \to t_1$. Это утверждение можно также получить из общих соображений: фактически это утверждение о непрерывности в среднем функции $|s - t_1|^{-\gamma}$, а, согласно лемме 1 § 19, любая функция из пространства $L_1[a,b]$ непрерывна в среднем.

Рассмотрим теперь интегральные операторы в пространстве $L_2(T,\mu)$.

Теорема 4. *Пусть (T,μ) — пространство с мерой, $K(t,s)$ — измеримая функция на $T \times T$ и существует интеграл*

$$\int_{T\times T} |K(t,s)|^2 \, d\mu_s d\mu_t = M^2 < +\infty.$$

Интегральный оператор A с ядром $K(t,s)$ вида

$$Ax(t) = \int_T K(t,s) x(s) \, d\mu_s \tag{2}$$

определен на пространстве $L_2(T,\mu)$, ограничен и $\|A\| \leqslant M$.

$\triangleright$ Это утверждение фактически уже доказано при доказательстве теоремы 3 из § 22. Повторим здесь только вывод неравенства ограниченности. В силу неравенства Коши — Буняковского интеграл (2) существует для почти всех t. Пусть $y(t) = Ax(t)$. Тогда

$$|y(t)|^2 \leqslant \int_T |K(t,s)|^2 \, d\mu_s \int_T |x(s)|^2 \, d\mu_s.$$

Интегрируя по t, получаем

$$\int_T |y(t)|^2 \, d\mu_t \leqslant M^2 \int_T |x(s)|^2 \, d\mu_s,$$

т. е. $y \in L_2(T, \mu)$ и выполнено требуемое неравенство ограниченности $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$ с постоянной M. $\lhd$

Для интегральных операторов в пространстве $L_2(T, \mu)$ найденное число M дает только оценку нормы и совпадает с нормой лишь в некоторых вырожденных случаях.

2. **Операторы умножения на функцию**

Пусть $a \in C[0,1]$, рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ оператор умножения $Ax(t) = a(t)x(t)$.

Теорема 5. *Оператор A умножения на непрерывную функцию является линейным ограниченным оператором в пространстве $C[0,1]$ и $\|A\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)|$.*

$\rhd$ Так как произведение непрерывных функций является непрерывной функцией, оператор A действует в пространстве $C[0,1]$. Проверим линейность и ограниченность оператора A:

$$A(x_1 + x_2)(t) = a(t)[x_1(t) + x_2(t)] = Ax_1(t) + Ax_2(t);$$

$$A(\lambda x)(t) = a(t)[\lambda x(t)] = \lambda Ax(t);$$

$$\|Ax\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)x(t)| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)| \, \|x\|.$$

Для $x(t) \equiv 1$ получаем $\|Ax\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)|$, т. е. полученная оценка наилучшая и $\|A\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)| = \|a\|_{C[0,1]}$. $\lhd$

Пусть a — измеримая функция; рассмотрим в пространстве $L_p(T, \mu)$ оператор умножения $Ax(t) = a(t)x(t)$.

Теорема 6. *Оператор A умножения на функцию a является линейным ограниченным оператором в $L_p(T, \mu)$ тогда и только тогда, когда $a \in L_\infty(T, \mu)$ и при этом $\|A\| = ess\ sup|a(t)| = \|a\|_\infty$.*

$\rhd$ Пусть $a \in L_\infty(T, \mu)$. Проверим линейность и ограниченность оператора A:

$$A(x_1 + x_2)(t) = a(t)[x_1(t) + x_2(t)] = Ax_1(t) + Ax_2(t);$$

$$A(\lambda x)(t) = a(t)[\lambda x(t)] = \lambda Ax(t);$$

$$\|Ax\| = \left(\int_T |a(t)x(t)|^p \right)^{1/p} \leqslant ess\ sup|a(t)| \left(\int_T |x(t)|^p \right)^{1/p}.$$

Покажем, что найденная константа в неравенстве ограниченности наименьшая. По определению числа $C = ess\ sup|a(t)|$ для любого

$\varepsilon > 0$ множество $M_\varepsilon = \{t \in T|\ |a(t)| > C - \varepsilon\}$ имеет ненулевую меру. Зададим функцию $u_\varepsilon(t) = [\mu(M_\varepsilon)]^{-1/p}$, если $t \in M_\varepsilon$ и $u_\varepsilon(t) = 0$, если $t \notin M_\varepsilon$. Тогда $\|u_\varepsilon\| = 1$ и $\|Au_\varepsilon\| > C - \varepsilon$, откуда $\|A\| = C$. Заметим, что, если множество M_ε имеет бесконечную меру, то можно выбрать его подмножество конечной положительной меры и рассмотреть аналогичную функцию.

Если $a \notin L_\infty(T, \mu)$, то множество $M := \{t \in T : |a(t)| > c\}$ имеет положительную меру при любом $c > 0$. Тогда для функции u, определенной равенствами: $u(t) = [\mu(M)]^{-1/p}$, если $t \in M$, и $u(t) = 0$, если $t \notin M$, получаем оценку $\|Au\| > c\|u\|$, из которой следует, что оператор неограничен. $\lhd$

3. **Операторы замены переменной (подстановки)**

Пусть f — непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя. Рассмотрим отображение T_f пространства $C[0, 1]$ в себя, заданное формулой

$$T_f x(t) = x(f(t)). \tag{3}$$

Теорема 7. *Оператор T_f является линейным ограниченным оператором в пространстве $C[0, 1]$ и $\|T_f\| = 1$.*

$\rhd$ Проверим линейность:

$$T_f(x_1 + x_2)(t) = (x_1 + x_2)(f(t)) =$$

$$= x_1(f(t)) + x_2(f(t)) = T_f x_1(t) + T_f x_2(t);$$

$$T_f(\lambda x)(t) = (\lambda x)(f(t)) = \lambda x(f(t)) = \lambda T_f x(t).$$

Теперь докажем ограниченность:

$$\|T_f x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(f(t))| = [\tau = f(t)] =$$

$$= \max_{\tau \in f([0,1])} |x(\tau)| \leqslant \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} |x(\tau)| = \|x\|.$$

Таким образом, неравенство ограниченности выполнено с постоянной $C = 1$, причем для $x(t) \equiv 1$ имеем точное равенство. Следовательно, $\|T_f\| = 1$. $\lhd$

В пространствах $L_p[0, 1]$ непрерывность отображения f не гарантирует ограниченность оператора замены переменной и непрерывность отображения f не является необходимой для ограниченности такого оператора.

Рассмотрим для примера оператор T_f, заданный той же формулой $T_f x(t) = x(f(t))$, в пространстве $L_p[0,1]$ в одном специальном случае.

Теорема 8. *Пусть f есть непрерывно дифференцируемое инъективное отображение отрезка $[0,1]$ в себя. Оператор T_f является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_p[0,1]$ тогда и только тогда, когда $f'(t) \neq 0$, и при этом $\|T_f\| = \max |f'(t)|^{-1/p}$.*

$\triangleright$ Свойство линейности проверено в теореме 7 (это свойство не зависит от рассматриваемого пространства функций).

Пусть $f'(t) \neq 0$. Покажем, что оператор действует в пространстве $L_p[0,1]$, т. е. из того, что $x \in L_p[0,1]$ следует, что $T_f x \in L_p[0,1]$. Пусть $g : [f(0), f(1)] \to [0,1]$ – обратное к f отображение. Имеем

$$\int\limits_0^1 |x(f(t))|^p dt = [\tau = f(t),\ t = g(\tau)] = \int\limits_{f(0)}^{f(1)} |x(\tau)|^p g'(\tau) d\tau.$$

Так как $g'(\tau) = 1/f'(t)$, эта функция ограничена в силу условия теоремы и последний интеграл существует. Поскольку этот интеграл имеет тот же вид, что и рассмотренный в доказательстве теоремы 6 (при $a(\tau) = g'(\tau)^{1/p}$), то из рассуждений теоремы 6 получаем неравенство ограниченности

$$\|T_f(x)\|_p = (\int\limits_{f(0)}^{f(1)} |x(\tau)|^p g'(\tau) d\tau)^{1/p} \leqslant \max |g'(\tau)|^{1/p} \|x\|_p$$

и что найденная константа $C = \max |g'(\tau)|^{1/p} = \max |f'(t)|^{-1/p}$ наименьшая.

Если функция g' неограничена, то, используя рассуждения из последней части доказательства теоремы 6, получаем, что оператор T_f неограничен. $\triangleleft$

Заметим, что во всех рассмотренных примерах условие ограниченности оператора совпадает с условием, что естественная область определения оператора совпадает со всем пространством. Это не является общей закономерностью. Например, для оператора, заданного в пространстве $C[0,1]$ формулой

$$Ax(t) = x(0) + \int\limits_0^t x'(s) ds,$$

естественная область определения состоит из абсолютно непрерывных функций и не совпадает со всем пространством. Но этот оператор ограничен, так как $Ax = x$ для $x \in D(A)$. Его продолжением по непрерывности на все пространство является тождественный оператор $Ix \equiv x$.

§ 28. КРИТЕРИЙ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ

Определение 1. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторном пространстве X называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что для любого $x \in X$ справедливы неравенства

$$c_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2\|x\|_1. \tag{1}$$

Выделение эквивалентных норм вызвано тем, что эквивалентные нормы порождают одинаковые топологии, одинаковые сходящиеся последовательности, одинаковые последовательности Коши, одинаковые классы ограниченных операторов, одинаковые ограниченные множества, замкнутые множества, компактные и предкомпактные множества. Вместе с тем может оказаться, что после введения эквивалентной нормы появляются дополнительные хорошие свойства или вычисления проводятся более просто.

Упражнение 1. Доказать, что норма $\|x\|_p = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)e^{-pt}|$ на пространстве $C[0,1]$ эквивалентна норме $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$.

Упражнение 2. Доказать, что при достаточно большом p интегральный оператор Вольтерра с непрерывным ядром

$$Ax(t) = \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds$$

является сжимающим отображением относительно нормы $\|x\|_p$ из упражнения 1.

Пример. В пространстве $\mathbf{R}^n$ все нормы $\|x\|_p$ из примера 3 § 26 эквивалентны между собой.

Действительно,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p.$$

Таким образом, любая из норм $\|x\|_p$ эквивалентна $\|x\|_\infty$ и, значит, $\|x\|_p$ и $\|x\|_{p_1}$ эквивалентны.

Справедливо более сильное утверждение:

Теорема 1. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *любые две нормы эквивалентны.*

$\triangleright$ Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Каждый элемент x представляется в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, где $x_k \in \mathbf{R}$. Пусть на $\mathbf{R}^n$ задана некоторая норма $\|x\|$. Докажем, что эта норма эквивалентна норме $\|x\|_\infty = \max\limits_k |x_k|$.

Действительно,

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, \|e_k\| \leqslant \max_k |x_k| \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| = c_1 \|x\|_\infty.$$

Из этой оценки получаем неравенство $\big|(\|x\| - \|x'\|)\big| \leqslant \|x - x'\| \leqslant \leqslant c_1 \|x - x'\|_\infty$, из которого вытекает, что $\|x\|$, как функция на $\mathbf{R}^n$ с нормой $\|x\|_\infty$, непрерывна.

Непрерывная функция $f(x) = \|x\|$ на компактном множестве $\{x | \ \|x\|_\infty = 1\}$ достигает минимума, который обозначим d. Так как $d = f(x_0) = \|x_0\|$, где $\|x_0\| = 1$, то $d > 0$. Таким образом $f(x) \geqslant d > 0$ для x таких, что $\|x\|_\infty = 1$. Тогда для произвольного $x \neq 0$ возьмем $x' := x / \|x\|_\infty$. Так как $\|x'\|_\infty = 1$, то имеем $\|x'\| \geqslant d$, $\|x\| \geqslant d \|x\|_\infty$, т. е. справедливо неравенство $\|x\|_\infty \leqslant 1/d \|x\|$. $\triangleleft$

Прежде чем переходить к следствиям теоремы 1, введем новые понятия.

Определение 2. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный биективный оператор $f \colon X \to Y$ такой, что f и f^{-1} — ограничены, называется *изоморфизмом.* Два пространства X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f \colon X \to Y$.

Изоморфизм нормированных пространств, сохраняющий норму, т. е. для которого дополнительно выполнено $\|f(x)\|_Y \equiv \|x\|_X$, называется *изометрическим изоморфизмом* , а соответствующие пространства называются *изометрически изоморфными.*

Если пространства X и Y изометрически изоморфны, то все их свойства как нормированных пространств полностью совпадают. Если пространства изоморфны, то они одинаковы как топологические векторные пространства, они одновременно обладают свойством полноты и т. д., но некоторые свойства могут различаться.

По определению линейный биективный оператор f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существуют две константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $\|f(x)\|_Y \leqslant c_2\|x\|_X$ для всех $x \in X$ и $\|f^{-1}(y)\|_X \leqslant c_1\|y\|_Y$ для всех $y \in Y$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $\|x\|_X \leqslant c_1\|f(x)\|_Y$ для всех $x \in X$. Таким образом, линейное биективное отображение является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$\frac{1}{c_2}\|f(x)\|_Y \leqslant \|x\|_X \leqslant c_1\|f(x)\|_Y. \tag{2}$$

Сопоставив неравенства (1) и (2), видим, что линейное биективное отображение f есть изоморфизм пространств X и Y тогда и только тогда, когда нормы $\|x\|_X$ и $\|x\|_1 := \|f(x)\|_Y$ на X эквивалентны.

Перейдем к следствиям теоремы 1.

Следствие 1. *Все конечномерные нормированные пространства одинаковой размерности изоморфны между собой.*

$\triangleright$ Пусть X — n-мерное пространство над $\mathbf{R}$ с нормой $\|x\|_X$ и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X. Достаточно показать, что пространство X изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$ с какой-нибудь из стандартных норм, например $\|x\|_\infty$. Линейный оператор $J\colon \mathbf{R}^n \to X$, определенный формулой $Jx = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, является биективным. Поэтому $\|Jx\|_X$, как функция на $\mathbf{R}^n$, является нормой. Из эквивалентности этой нормы с нормой $\|x\|_\infty$ следует непрерывность оператора J и оператора J^{-1}. $\triangleleft$

Следствие 2. *Любое конечномерное нормированное пространство полно.*

$\triangleright$ Пусть X — n-мерное нормированное пространство. В силу следствия 1 пространство X изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$, которое полно. Следовательно, X полно. $\triangleleft$

Следствие 3. *Конечномерное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Доказательство вытекает из следствия 2 и общего факта, что полное подпространство метрического пространства замкнуто.

Аналогичные утверждения справедливы для конечномерных пространств над полем $\mathbf{C}$.

В качестве примера приложений доказанных утверждений получим ответ на один естественно возникающий вопрос. На векторном пространстве P, состоящем из многочленов одной переменной t, существует много различных норм. Для всех примеров таких норм, рассмотренных выше, пространство P оказывалось неполным. Спрашивается: можно ли задать норму на P так, чтобы построенное нормированное пространство оказалось полным? Отрицательный ответ может быть получен из следующего общего утверждения.

Теорема 2. *В бесконечномерном банаховом пространстве не может существовать счетного алгебраического базиса.*

$\rhd$ Предположим, что в бесконечномерном банаховом пространстве X существует счетный алгебраический базис (e_k), т. е. каждый элемент представляется в виде конечной суммы $x = \sum\limits_{k=1}^{n(x)} x_k e_k$. Рассмотрим последовательность конечномерных подпространств

$$L_n = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \,|\, \lambda_k \in \mathbf{R} \Big\}.$$

По определению алгебраического базиса $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, причем в силу следствия 2 подпространства L_n замкнуты. Тогда по следствию теоремы Бэра хотя бы одно из подпространств L_n имеет внутреннюю точку. Но мы уже отмечали (§ 26), что векторное подпространство, отличное от всего пространства, не имеет внутренних точек. Получаем противоречие. $\lhd$

Пространство многочленов по самому определению имеет счетный базис и, согласно доказанной теореме, не может быть полным относительно какой-нибудь нормы.

Прежде чем перейти к рассмотрению критерия конечномерности нормированного пространства, докажем лемму, имеющую самостоятельное значение.

Лемма (о почти перпендикуляре). *Пусть X — нормированное пространство, L — его замкнутое векторное подпространство, отличное от всего X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $u \in X \setminus L$, такая, что $\|u\| = 1$ и $\|u - l\| \geqslant 1 - \varepsilon$ для любого $l \in L$.*

$\triangleright$ Обозначим $\rho(u, L) = \inf\limits_{l \in L} \|u - l\|$. Пусть $u_0 \in X$, $u_0 \notin L$. Тогда $\rho(u_0, L) = d > 0$. Действительно, если $d = 0$, то существует последовательность $l_n \in L$ такая, что $\|u_0 - l_n\| \to 0$, т. е. $l_n \to u_0$. В силу замкнутости L получаем $u_0 \in L$, что противоречит выбору u_0. В общем случае может оказаться, что не существует такой точки $l \in L$, для которой выполнено $\|u_0 - l\| = d$, т. е. в которой точная нижняя грань в определении $\rho(u_0, L)$ достигается.

Возьмем $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $d + \varepsilon_1 = d/(1 - \varepsilon)$, и выберем $l_0 \in L$ так, чтобы выполнялось $d \leqslant \|u_0 - l_0\| \leqslant d + \varepsilon_1 = d/(1 - \varepsilon)$. Положим $u = (u_0 - l_0)/\|u_0 - l_0\|$. Тогда $\|u\| = 1$ и для любого $l \in L$ имеем

$$\|u - l\| = \left\| \frac{u_0 - l_0}{\|u_0 - l_0\|} - l \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|u_0 - l_0\|} \big\| u_0 - \{l_0 + l\|u_0 - l_0\|\} \big\|.$$

Так как $l_0 + l\|u_0 - l_0\| \in L$, то по определению d получаем неравенство

$$\|u - l\| = \frac{1}{\|u_0 - l_0\|} \big\| u_0 - [l_0 + l\|u_0 - l_0\|] \big\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d}{\|u_0 - l_0\|} \geqslant d : \frac{d}{1 - \varepsilon} = 1 - \varepsilon. \triangleleft$$

Лемма имеет геометрическую интерпретацию, поясняющую ее название. В случае, когда $X = \mathbf{R}^2$ — плоскость с евклидовой нормой $\|\cdot\|_2$ и L — прямая, проходящая через начало координат, существует вектор u_0 такой, что $\|u_0\| = 1$ и $\|u_0 - l\| \geqslant 1$. Это перпендикуляр единичной длины к прямой L. В произвольных нормированных пространствах элемента с такими свойствами ("перпендикуляра") может не существовать, но есть элемент с близким свойством: $\|u_0 - l\| \geqslant 1 - \varepsilon$ (почти перпендикуляр).

Понятие конечномерности или бесконечномерности векторного пространства есть алгебраическое понятие. Покажем, что в нормированных пространствах эти алгебраические свойства тесно связаны с топологическим свойством — свойством предкомпактности.

Теорема 3 (критерий конечномерности нормированного пространства, Ф. Рисс). *Нормированное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда в нем единичный шар предкомпактен.*

$\triangleright$ *Достаточность.* Докажем, что в бесконечномерном нормированном пространстве X единичный шар B не является предкомпактным множеством. Возьмем произвольную точку $x_1 \in X$, $\|x_1\| = 1$. Построим одномерное подпространство $L_1 = \{\lambda x_1 | \ \lambda \in K\}$. Для $\varepsilon = 1/2$ по лемме о почти перпендикуляре существует точка $x_2 \in X \setminus L_1$, $\|x_2\| = 1$, такая, что $\|x_2 - x\| \geqslant 1 - 1/2 = 1/2$ для любого $x \in L_1$. Построим двумерное пространство $L_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 | \ \lambda_1, \lambda_2 \in K\}$. Это тоже замкнутое подпространство и по той же лемме для $\varepsilon = 1/2$ существует точка $x_3 \in X \setminus L_2$, $\|x_3\| = 1$, такая, что $\|x_3 - x\| \geqslant 1/2$ для любого $x \in L_2$. В частности, $\|x_3 - x_2\| \geqslant 1/2$, $\|x_3 - x_1\| \geqslant 1/2$.

Продолжая далее этот процесс, на n-м шаге строим подпространство L_n, порожденное точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и точку x_{n+1} такую, что $\|x_{n+1}\| = 1$. Так как пространство бесконечномерно, то $L_n \neq X$ и процесс продолжается бесконечно. Получаем последовательность (x_n) точек единичного шара B такую, что $\|x_n - x_m\| \geqslant 1/2$ при $n \neq m$. Из такой последовательности нельзя выделить подпоследовательность Коши, и, значит, шар B не является предкомпактным множеством.

Необходимость. Пусть X — n-мерное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Согласно следствию 1 теоремы 1, X изоморфно $\mathbf{R}^n$ нормой $\|\cdot\|_2$. При изоморфизме нормированных пространств ограниченные множества переходят в ограниченные, предкомпактные — в предкомпактные. Поскольку в $\mathbf{R}^n$ множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено, такое же утверждение справедливо в произвольном конечномерном пространстве. В частности, шар является ограниченным множеством и, следовательно, он предкомпактен. Аналогичное рассуждение справедливо в случае пространств над полем $\mathbf{C}$. $\triangleleft$

§ 29. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

При введении понятия метрического пространства аксиоматизируются свойства расстояния между точками, при введении понятия нормы аксиоматизируются свойства длины вектора. Но при изучении конечномерных евклидовых пространств вместе с длиной вектора широко используется понятие угла между векторами. При этом вместо задания двух объектов — длины вектора и угла между векторами — удобнее задавать скалярное произведение, через которое выражается и длина вектора, и угол между векторами. Напомним, что косинус угла

α между векторами x и y в конечномерном вещественном евклидовом пространстве определяется с помощью скалярного произведения по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\ .$$

Естественно рассмотреть бесконечномерные пространства с аналогичной структурой.

Определение 1. Будем говорить, что на векторном пространстве X (над полем K) задано *скалярное произведение*, если каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие число $(x,y) \in K$ так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y),\ \ (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ (линейность по первой переменной);

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (эрмитовость);

3) $(x,x) \geqslant 0,$ причем из $(x,x) = 0$ следует, что $x = 0$.

В случае векторного пространства над полем $\mathbf{R}$ аксиома 2) имеет вид $(x,y) = (y,x)$.

Из 1) и 2) получаем свойство антилинейности по второй переменной:

$$(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \bar{\lambda}_1(x, y_1) + \bar{\lambda}_2(x, y_2).$$

Примеры.

1. В пространстве $\mathbf{C}^n$ стандартное скалярное произведение имеет вид

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n),\ \ y = (y_1, \ldots, y_n)$.

2. В пространстве $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение имеет вид

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Любое скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$ имеет вид

$$(x,y) = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki} x_k y_i,$$

где $\{a_{ki}\}$ — положительно определенная матрица.

3. В пространстве l_2 зададим скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k. \tag{1}$$

Из неравенства $|x_k \bar{y}_k| \leqslant (|x_k|^2 + |y_k|^2)/2$ получаем, что ряд (1) сходится абсолютно. Выполнение аксиом скалярного произведения очевидно.

4. В пространстве $L_2[0, 1]$ зададим скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{y(t)}\, dt. \tag{2}$$

Существование интеграла доказано в § 20. Выполнение аксиом скалярного произведения вытекает из свойств интеграла.

5. Формула (2) задает скалярное произведение на векторном пространстве $C[0, 1]$.

Определение 2. Векторное пространство со скалярным произведением называется *предгильбертовым* пространством. Конечномерное вещественное предгильбертово пространство называют *евклидовым* , а конечномерное комплексное предгильбертово пространство называют *унитарным.*

Нормой элемента x *в предгильбертовом пространстве* (порожденной скалярным произведением) называется число, заданное формулой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

Лемма 1. *В предгильбертовом пространстве справедливо неравенство Коши — Буняковского*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\|. \tag{3}$$

$\rhd$ Если $x = 0$, либо $y = 0$, то неравенство очевидно. Предположим, что $y \neq 0$, и построим элемент $z \in X$ так, чтобы $z = \lambda y$ и $(x - z, y) = 0$, т. е. $(x - \lambda y, y) = 0$. Для этого возьмем $\lambda = \overline{(x, y)}/(y, y)$. Получим

$$0 \leqslant (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x - \lambda y, x) - \bar{\lambda}(x - \lambda y, y) =$$

$$= (x - \lambda y, x) = \|x\|^2 - \lambda(y, x) = \|x\|^2 - |(x, y)|^2/\|y\|^2,$$

откуда $|(x, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\|$. $\lhd$

Предложение 1. *Функция* $x \to \|x\| = (x,x)^{1/2}$ *на предгильбертовом пространстве (формально уже названная нормой) является нормой в смысле определения 9 § 25.*

$\triangleright$ Проверим выполнение аксиом нормы:

1) $(x,x)^{1/2} \geqslant 0$. Если $(x,x)^{1/2} = 0$, то $x = 0$;

2) $(\lambda x, \lambda x)^{1/2} = (\lambda \cdot \bar{\lambda})^{1/2}(x,x)^{1/2} = |\lambda|\,\|x\|$;

3)$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,x) = \|x\|^2 + {}$ $+2\mathbf{Re}\,(x,y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ (здесь $\mathbf{Re}\, z$ — действительная часть числа z). $\triangleleft$

Таким образом, предгильбертово пространство является частным случаем нормированного пространства и для него справедливы все теоремы, доказанные для нормированных пространств.

Предложение 2. *В предгильбертовом пространстве справедливо тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

и поляризационное тождество

$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big).$$

$\triangleright$ Доказательство проводим непосредственным вычислением.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \\ &= (x,x) + (y,x) + (x,y) + (y,y) + \\ &+ (x,x) - (y,x) - (x,y) + (y,y) = \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\mathbf{Re}(x,y),$$
$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4\mathbf{Im}(x,y),$$

откуда следует поляризационное тождество. $\triangleleft$

Следствие. *Скалярное произведение однозначно определяется порожденной им нормой.*

Тождество параллелограмма является характеристическим свойством нормы, порожденной скалярным произведением.

Предложение 3. *Если норма в нормированном пространстве X удовлетворяет тождеству параллелограмма, то формула*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big)$$

определяет на X скалярное произведение, порождающее исходную норму по формуле $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

Это предложение мы не будем использовать и не приводим его доказательства. Несмотря на кажущуюся простоту формулировки, утверждение не очевидно. Например, нужно проверить линейность указанного выражения по x. Но в правой части все слагаемые не являются линейными и проверка линейности является наиболее деликатной частью доказательства.

Определение 3. Векторное пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы $(x,x)^{1/2}$, называется *гильбертовым* пространством.

Для обозначения гильбертовых пространств обычно используется буква H — первая буква фамилии Hilbert.

Пространства $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, l_2, $L_2[0,1]$ являются гильбертовыми пространствами.

Пространство $C[0,1]$ полно и на нем можно задать скалярное произведение $(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt$. Однако это не гильбертово пространство — в определении гильбертова пространства требуется полнота относительно нормы, порожденной скалярным произведением, в данном случае это норма

$$\|x\| = \Big(\int\limits_0^1 |x(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}$$

и свойства полноты нет. Полнота пространства $C[0,1]$ относительно нормы $\max|x(t)|$ к обсуждаемому вопросу отношения не имеет и мы упоминаем здесь это свойство для того, чтобы предостеречь читателя от часто встречающейся ошибки.

Теорема 1. *Для любого предгильбертова пространства существует пополнение, являющееся гильбертовым пространством.*

$\triangleright$ Пусть H_0 — предгильбертово пространство. Для него существует пополнение H как нормированного пространства. Поскольку скалярное произведение в силу неравенства Коши — Буняковского есть непрерывная функция и H_0 плотно в H, то скалярное произведение продолжается на все $H \times H$ по непрерывности (см. § 18). Другими словами, если $x, y \in H$, то найдутся $(x_n), (y_n) \in H_0$ такие, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Тогда $(x, y) := \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n)$. $\lhd$

§ 30. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 1. Два вектора $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Отношение ортогональности обозначается $x \perp y$.

Определение 2. Вектор $x \in H$ называется *ортогональным к множеству* $M \subset H$ (обозначается $x \perp M$), если $(x, z) = 0$ для любого $z \in M$. Множество векторов, ортогональных множеству M, называется его *ортогональным дополнением* и обозначается $M^\perp$.

Лемма 1. *Ортогональное дополнение к любому множеству является замкнутым векторным подпространством в H.*

$\rhd$ Для любого $x \in H$ обозначим через L_x его ортогональное дополнение

$$L_x = \{y \in H |\ (x, y) = 0\}.$$

Если $y_1, y_2 \in L_x$, то $(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0$, т. е. L_x — векторное подпространство. Если $y_n \in L_x$ и $y_n \to y$, то, переходя к пределу в равенстве $(x, y_n) = 0$, получаем $(x, y) = 0$, т. е. $y \in L_x$. Так как $M^\perp = \bigcap\limits_{x \in M} L_x$, то $M^\perp$ есть пересечение замкнутых векторных подпространств и поэтому само является замкнутым векторным подпространством. $\lhd$

Определение 3. Система (т. е. произвольное множество) векторов (b_i) называется *ортогональной*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны.

Определение 4. Система векторов (e_i) называется *ортонормированной*, если она ортогональна и норма каждого из векторов системы есть 1, т. е. если

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Понятие ортогональности векторов лежит в основе одной из древнейших теорем.

Теорема 1 (абстрактная теорема Пифагора). *Пусть* $x_1, \ldots, x_n$ — *ортогональный набор векторов из* H *и* $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. *Тогда*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

$\triangleright$ Непосредственным вычислением получаем

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{k,i=1}^{n} (x_k, x_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k, x_k) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \ \triangleleft$$

С понятием ортогональности связано также понятие проекции вектора на подпространство.

Определение 5. Пусть L — векторное подпространство в предгильбертовом пространстве H. *Проекцией* вектора x на L называется вектор $y \in L$ такой, что $(x - y) \perp L$.

В отличие от конечномерного случая в бесконечномерном пространстве со скалярным произведением может не существовать проекции вектора на векторное подпространство.

Например, в пространстве $H = L_2[0, 1]$ множество $P[0, 1]$ функций, являющихся многочленами, является векторным подпространством. Возьмем функцию $x(t) = e^t$. Покажем, что не существует проекции этой функции на векторное подпространство $P[0, 1]$. Предположим, что такая проекция есть. Другими словами, пусть существует многочлен $y(t)$ такой, что разность $x - y$ ортогональна любому многочлену. Тогда, положив $x_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k/k!$, имеем $(x - y, x_n - y) = 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем $\|x - y\|^2 = 0$, т. е. $x = y$. Так как e^t не является многочленом, то такое равенство невозможно. Значит, такого многочлена $y(t)$ не существует.

Дополнительные требования полноты пространства H и замкнутости подпространства L обеспечивают существование проекции.

В случае плоскости $\mathbf{R}^2$ утверждение из элементарной геометрии о том, что перпендикуляр короче наклонной, описывает одно из важнейших свойств проекции. Аналогичное свойство получаем в общем случае: если y проекция элемента x на L, то $\|x-y\| \leqslant \|x-l\|$ для любого $l \in L$, т. е. проекция y является ближайшей к x точкой подпространства L. Технически проще доказать сначала существование ближайшего элемента, а потом проверить, что он является проекцией.

Лемма 2. *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого $x \in H$ существует в L ближайший к x элемент $y \in L$, т. е. такой, что*

$$\|x-y\| = \inf_{l\in L} \|x-l\| \leqslant \|x-l\| \quad \forall l \in L.$$

$\triangleright$ Пусть $d = \inf\limits_{l\in L} \|x-l\|$. Если $x \in L$, то $d = 0$ и $x = y$. Если $x \notin L$, то $d > 0$ (ибо L замкнуто в H). По определению точной нижней грани существует минимизирующая последовательность $y_n \in L$, т. е. такая последовательность, что $\|x-y_n\| \to d$. Покажем, что последовательность y_n сходится к искомой точке. Используя равенство параллелограмма, получаем

$$0 \leqslant \|y_n - y_m\|^2 = \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2 =$$
$$= -\|(x-y_m)+(x-y_n)\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 =$$
$$= 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2.$$

Так как $(y_n+y_m)/2 \in L$, имеем $\|x-(y_n+y_m)/2\| \geqslant d$ и, значит,

$$0 \leqslant \|y_n-y_m\|^2 \leqslant 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4d^2 \to$$
$$\to 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

Таким образом, y_n — последовательность Коши в пространстве H, пространство полно и, следовательно, она сходится к некоторой точке $y \in H$. Тогда $\|x-y\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d$. $\triangleleft$

Теорема 2 (о проекции). *Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое векторное подпространство. Для любого $x \in H$ существует, и притом единственная, его проекция на L.*

$\triangleright$ Пусть $x \in H$. Если $x \in L$, то $y = x$ является его проекцией. Пусть $x \notin L$. Согласно лемме 2, существует ближайший вектор $y \in L$ такой, что $\|x-y\| = \inf\limits_{l\in L} \|x-l\| := d$. Проверим, что вектор y является проекцией. Возьмем произвольный элемент $l \in L$ и покажем, что

$(x-y,l)=0$. По построению элемента y имеем для любого $t \in \mathbf{R}$ и любого $l \in L$ $\|x-(y+tl)\|^2 \geqslant \|x-y\|^2 = d^2$. Обозначив $x-y=z$, получим

$$\|x-y-tl)\|^2 = \|z-tl\|^2 = d^2 - 2t\mathbf{Re}(z,l) + t^2\|l\|^2 \geqslant d^2.$$

Значит, для $t \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство $t^2\|l\|^2 - 2t\mathbf{Re}(z,l) \geqslant 0$, что невозможно, если $\mathbf{Re}(z,l) \neq 0$. Аналогичное рассуждение с заменой t на it приводит к тому, что число (z,l) имеет нулевую мнимую часть. Таким образом, $(z,l)=0$.

Докажем единственность проекции. Пусть y_1 — другая проекция, т. е. $x=y+z$ и $x=y_1+z_1$, где $y, y_1 \in L$, $z, z_1 \in L^{\perp}$. Тогда $y-y_1 = z_1 - z \in L^{\perp}$. Поскольку $y-y_1 \in L$, то $(y-y_1, y-y_1)=0$, откуда $y=y_1$. $\lhd$

Заметим, что из единственности проекции вытекает единственность ближайшего элемента.

Следствие 1. *Пусть L — замкнутое подпространство гильбертова пространства H, $L^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Тогда H разлагается в прямую сумму $H = L \oplus L^{\perp}$, т. е. любой вектор $x \in H$ представляется, и притом единственным образом, в виде $x=y+z$, где $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. В частности, в гильбертовом пространстве любое замкнутое подпространство имеет дополнение.*

В силу теоремы о проекции каждому $x \in H$ ставится в соответствие однозначно определенная его проекция $y \in L$. Возникает отображение $P_L \colon H \ni x \to y \in L$, которое называется *ортогональным проектором* на подпространство L.

Отметим некоторые свойства проектора P_L.

Следствие 2. 1) *P_L — линейный ограниченный оператор и $\|P_L\|=1$, если $L \neq \{0\}$;*

2) *$P_L x = x$ при $x \in L$ и $P_L x = 0$ при $x \in L^{\perp}$;*

3) *$P_L^2 = P_L$;*

4) *$(P_L x, z) = (x, P_L z)$, $x, z \in H$.*

$\rhd$ Свойство 1) непосредственно следует из определения проекции. Поскольку $x = P_L x + (x - P_L x)$ и $P_L x \perp (x - P_L x)$, по теореме Пифагора $\|P_L x\|^2 + \|x - P_L x\|^2 = \|x\|^2$. Отсюда $\|P_L x\| \leqslant \|x\|$, т. е. P_L — ограниченный оператор и $\|P_L\| \leqslant 1$. Если же $x \in L$, $x \neq 0$, то $\|P_L x\| = \|x\|$ и, значит, постоянную 1 нельзя уменьшить, т. е. норма $\|P_L\| = 1$, и получаем свойство 1). Свойство 2) непосредственно следует из определения проекции, свойство 3) вытекает из свойства 2).

Осталось доказать свойство 4). Для любых $x, z \in H$ справедливы разложения $x = P_L x + x_1$, $z = P_L z + z_1$, где $x_1, z_1 \in L^{\perp}$. Тогда имеем

$$(P_L x, z) = (P_L x, P_L z + z_1) = (P_L x, P_L z);$$

$$(x, P_L z) = (P_L x + x_1, P_L z) = (P_L x, P_L z),$$

откуда получаем требуемое равенство 4). $\triangleleft$

Следствие 3. *Для любого замкнутого векторного подпространства L гильбертова пространства H существует ортогональный проектор на это подпространство, т. е. оператор, обладающий свойствами* 1) — 4).

Замечание. В произвольном банаховом пространстве утверждение о существовании и единственности ближайшего к x элемента из замкнутого подпространства, аналогичное доказанной выше лемме 2, вообще говоря, не справедливо, т. е. для точки пространства может существовать много ближайших элементов в замкнутом подпространстве, а может их вообще не оказаться. Приведем соответствующие примеры.

Примеры.

1. Возьмем пространство $\mathbf{R}^2$ с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, и выберем подпространство $L = \{(y_1, 0)\}$ и точку $a = (1, 1)$. Тогда имеем $\|a - y\| = \max\{|1 - y_1|, 1\} \geqslant 1$ и $\inf\limits_{y \in L} \|a - y\| = 1$. Множество точек, для которых $\|x - y\| = 1$, есть отрезок вида $\{y = (t, 0)| \ -1 \leqslant t \leqslant 1\} \subset L$.

2. В пространстве $C[a, b]$ возьмем точку $x_0(t) \equiv 1$ и подпространство $L = \{x| \ x(0) = 0\}$. Тогда $\inf\limits_{y \in L} \|x_0 - y\| = 1$ и существует много функций $y \in L$ таких, что $\|x_0 - y\| = 1$. Это все функции $y \in L$, для которых выполнено неравенство $0 \leqslant y(t) \leqslant 2$.

3. Пусть $X = \mathbf{c}_0$ — пространство сходящихся к нулю последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$ и пусть L — замкнутое подпространство вида

$$L = \Big\{x| \ x \in \ \mathbf{c}_0 : f(x) := \ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k} = 0\Big\}.$$

Покажем, что для любого $x \notin L$ не существует $y \in L$ такого, что $\rho(x, y) = \rho(x, L)$. Пусть $x \notin L$ и пусть y есть произвольный элемент из L. Покажем, что в L существует элемент, более близкий к x, т. е. такой $\bar{y} \in L$, что $\|x - \bar{y}\| < \|x - y\| = \max\limits_k |x_k - y_k| := d$. Без ограничения общности можем считать, что $f(x) > 0$.

Воспользовавшись тем, что $x_k - y_k \to 0$, выберем номер m таким, что $|x_m - y_m| < d/2$. Пусть $e_m = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \mathbf{c}_0$ есть последовательность, в которой число 1 стоит на месте с номером m. Рассмотрим элемент $z = x - y + (d/2)\, e_m$. Тогда $\|z\| = d$ и при этом $f(z) = f(x) + 2^{-m-1}d > f(x)$. Построим теперь требуемый элемент

$$\bar{y} := x - \frac{f(x)}{f(z)} z.$$

Получаем, что $\bar{y}$ принадлежит L и при этом

$$\|x - \bar{y}\| = \frac{f(x)}{f(z)} d < d,$$

что и требовалось.

§ 31. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

Если (e_k), $k = 1, \ldots, n$, есть набор линейно независимых элементов в n-мерном пространстве, то любой элемент представляется в виде суммы $x = \sum c_k e_k$. Для нахождения коэффициентов разложения нужно решить систему из n линейных алгебраических уравнений, что является достаточно сложной вычислительной задачей при больших n. Если же система (e_k), $k = 1, \ldots, n$, ортонормированная, то имеем очень простую формулу для вычисления коэффициентов разложения: $c_k = (x, e_k)$. Аналогичную картину имеем в бесконечномерном пространстве — ортонормированные системы наиболее удобны для построения разложений.

Задача, которую мы рассмотрим в этом параграфе, заключается в том, чтобы выяснить, когда элемент x в гильбертовом пространстве H можно представить в виде суммы ряда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ в случае, когда (e_k) — счетная ортонормированная система в H. Предположим, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k. \tag{1}$$

Умножив скалярно равенство (1) на e_n, получаем

$$(x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_n) = c_n.$$

Определение 1. Число $c_n = (x, e_n)$ называется *коэффициентом Фурье* элемента x по ортонормированной системе (e_n). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ называется *рядом Фурье* элемента x.

Таким образом, если для x возможно представление в виде ряда (1), то это ряд Фурье элемента x. В частности, если $\sum c_k e_k = 0$, то $c_k = 0$, т. е. векторы e_k из ортонормированной системы линейно независимы.

Ряд Фурье был определен формально, поэтому требуется выяснить, сходится ли ряд Фурье, чему равна сумма ряда Фурье и при каких условиях сумма ряда Фурье для элемента x совпадает с x.

Теорема 1. *Пусть (e_k) — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, x — произвольный элемент, $c_k = (x, e_k)$. Тогда:*

1) *числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, причем справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2;$$

2) *для любой числовой последовательности a_k такой, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ сходится в H. В частности, для любого элемента x сходится ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$;*

3) *сумма ряда Фурье есть проекция элемента x на подпространство L, порожденное системой (e_k);*

4) *элемент $x \in H$ равен сумме своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда справедливо равенство Парсеваля — Стеклова:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

$\triangleright$ 1). Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Проверим, что разность $x - S_n$ ортогональна e_j, $j = 1, \ldots, n$. Действительно,

$$(x - S_n, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0.$$

Значит, в разложении элемента x в сумму

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k + (x - S_n)$$

все слагаемые ортогональны. По теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|x - S_n\|^2, \tag{2}$$

отсюда $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2$. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, причем справедливо неравенство Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2$.

2). Покажем, что последовательность частичных сумм ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ является последовательностью Коши. Для $n > m$ имеем

$$\|S_n - S_m\|^2 = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Так как пространство H полно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ сходится к некоторому элементу S, причем S принадлежит подпространству L.

3). Пусть $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, тогда

$$(x - S, e_j) = (x, e_j) - (S, e_j) = c_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0,$$

т. е. вектор $x - S$ ортогонален подпространству L, порожденному системой (e_k).

4). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (2), получаем $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + \|x - S\|^2$, откуда видно, что равенство Парсеваля — Стеклова $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ эквивалентно тому, что $\|x - S\| = 0$, т. е. равенству $x = S$. $\triangleleft$

Следствие. *Отрезок ряда Фурье обладает экстремальным свойством:* $\left\|x - \sum\limits_1^n c_k e_k\right\| = \inf\limits_{l \in L} \|x - l\|$, *где L — подпространство, порожденное* $e_1, \ldots, e_n$.

$\rhd$ Так как отрезок ряда Фурье $\sum\limits_1^n c_k e_k$ является проекцией на подпространство L, то он обладает этим экстремальным свойством (см. лемму 2 § 30). $\lhd$

Основной вопрос заключается в том, чтобы выяснить, когда для данной системы любой элемент из H является суммой своего ряда Фурье, т. е. когда данная система является базисом.

Выделим некоторые свойства ортонормированных систем.

Определение 2. Ортонормированная система (e_k) называется *максимальной*, если из того, что $(x, e_k) = 0$ для любого k, следует, что $x = 0$.

Из определения сразу вытекает, что к максимальной системе (e_k) нельзя присоединить элемент так, чтобы она осталась ортонормированной. Это означает, что такая система является максимальным элементом в множестве всех ортонормированных систем, как упорядоченном по включению множестве.

Определение 3. Система векторов (e_k) называется *полной*, если множество конечных линейных комбинаций элементов системы всюду плотно в H (другими словами, если замкнутое векторное подпространство L, порожденное системой, совпадает с H).

Теорема 2. *Следующие свойства ортонормированной системы (e_k) в гильбертовом пространстве H эквивалентны:*

1) *система является базисом;*

2) *система (e_k) — максимальная;*

3) *для любого $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля — Стеклова:* $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$;

4) *система полная.*

$\rhd$ 1) $\Rightarrow$ 2). Условие $(x, e_k) = 0$ означает, что все коэффициенты Фурье элемента x нулевые. Тогда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Элемент $y = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ по теореме 1 ортогонален всем e_k, значит, $y = 0$, т. е. $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

1) $\Leftrightarrow$ 3) следует из утверждения 4) теоремы 1.

1) $\Leftrightarrow$ 4) следует из утверждения 3) теоремы 1. $\lhd$

Замечание 1. Определение полной системы (определение 3) имеет смысл для систем, не являющихся ортонормированными, и для систем в нормированных пространствах. Отметим, что, в отличие от случая ортонормированных систем, для произвольных линейно независимых систем из полноты не следует, что система является базисом Шаудера.

Например, система функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_2[0,1]$ линейно независима и полна. Но она не является базисом в этом пространстве. Действительно, если функция x разлагается в ряд по этой системе, то функция x аналитическая. Но в пространстве $L_2[0,1]$ есть функции, не являющиеся аналитическими.

Из четырех свойств ортонормированных систем, рассмотренных в теореме 2, для конкретных систем чаще всего удается проверить именно свойство полноты.

Замечание 2. Поскольку указанные в теореме 2 свойства ортнонормированной системы эквивалентны, иногда используется другая терминология. В частности, в некоторых книгах свойство максимальности называют свойством полноты.

В евклидовом пространстве существование ортонормированного базиса доказывается с помощью процесса ортонормализации произвольного базиса. В случае бесконечномерных пространств возможны аналогичные построения.

Теорема 3. *Для того, чтобы в гильбертовом пространстве H существовала полная счетная ортонормированная система, необходимо и достаточно, чтобы пространство H было сепарабельным и бесконечномерным.*

$\rhd$ *Необходимость.* Пусть (e_k) — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Пространство H бесконечномерно, так как (e_k) — бесконечная линейно независимая система. Для проверки сепарабельности покажем, что множестов конечных сумм вида $\Big\{ \sum\limits_{k=1}^{n} q_k e_k \colon q_k \in \mathbf{Q} \Big\}$ является счетным и всюду плотным множеством. Действительно, множество конечных наборов $(q_1, \ldots, q_n)$ рациональных чисел счетно и объединение по n счетного числа счетных множеств счетно. Возьмем $\varepsilon > 0$ и покажем, что в ε-окрестности произвольной точки x имеются точки вида $\sum\limits_{1}^{n} q_k e_k$. По определению полноты системы (e_k) для $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k e_k$ такая, что $\Big\| x - \sum\limits_{k=1}^{N} c_k e_k \Big\| < \varepsilon/2$. Далее можно для каждого из чисел c_k выбрать рациональное число r_k так, чтобы $|r_k - c_k| < \varepsilon/2N$. Тогда

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{N} r_k e_k\Big\| \leqslant \Big\|x - \sum_{k=1}^{N} r_k e_k\Big\| +$$

$$+\Big\|\sum_{k=1}^{N}(r_k - c_k)e_k\Big\| < \varepsilon/2 + N\cdot\varepsilon/2N = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть H сепарабельно и бесконечномерно. Возьмем в H счетное всюду плотное множество $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Выберем подпоследовательность $y_1, y_2, \ldots$, полученную из последовательности z_n выбрасыванием элементов, которые линейно зависят от предыдущих. Построенная система (y_k) линейно независима, бесконечна и полна в H, так как всюду плотное множество (z_n) состоит из линейных комбинаций элементов y_k.

Опишем теперь *процесс ортогонализации Грамма — Шмидта*: укажем, как по полной линейно независимой системе (y_k) построить полную ортонормированную систему.

Положим $e_1 = y_1/\|y_1\|$. Затем выберем e_2' в виде $e_2' = y_2 - ae_1$, где постоянную a найдем из условия $(e_2', e_1) = 0$. Отсюда $(y_2 - ae_1, e_1) = 0$ и $a = (y_1, e_1)$. Далее $e_2 = e_2'/\|e_2'\|$. Продолжая построение по индукции, полагаем $e_n' = y_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k e_k$, где $c_k = (y_n, e_k)$ и $e_n = e_n'/\|e_n'\|$. Построенная система ортонормирована по построению. Так как $y_n = e_n\|e_n'\| + \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k e_k$, то линейные комбинации элементов из (e_n) образуют всюду плотное множество. Значит, подпространство, порожденное (e_n), совпадает со всем H и по теореме 2 (e_n) — полная ортонормированная система. $\lhd$

Из доказанной теоремы получаем следующий фундаментальный результат.

Теорема 4. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изометрически изоморфны между собой.*

$\rhd$ Достаточно показать, что произвольное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2. Выберем в пространстве H базис (e_k). Каждому элементу $x \in H$ поставим в соответствие последовательность чисел $\hat{x} = (\hat{x_k})$ — коэффициентов Фурье элемента x по базису (e_k). В силу теоремы 1 имеем

$\sum\limits_{1}^{\infty} |\hat{x_k}|^2 < +\infty$, т.е. последовательность $\hat{x} \in l_2$. Таким образом, построено отображение $J\colon H \to l_2$, $Jx = \hat{x}$. Очевидно, что J линейно. Равенство Парсеваля — Стеклова в указанных обозначениях имеет вид $\|Jx\| = \|x\|$, т.е. оператор J изометрический. Из утверждения 2) теоремы 1 получаем сюръективность J. Таким образом, оператор J является изометрическим изоморфизмом между H и l_2 . $\triangleleft$

Пример. Пространство $L_2[0,1]$ изоморфно пространству l_2, так как они оба бесконечномерны и сепарабельны. По конструкции пространство l_2 является непосредственным обобщением конечномерного евклидова пространства и в нем по аналогии с конечномерным случаем можно сформулировать и доказать ряд свойств.

В силу изоморфизма такие же свойства имеются и у пространства $L_2[0,1]$. Таким образом, пространство функций $L_2[0,1]$ можно рассматривать как бесконечномерное евклидово пространство и использовать при его изучении геометрические представления и геометрическую интуицию.

В качестве второго следствия из теоремы 4 можно получить новое доказательство теоремы о проекции для сепарабельных пространств. Для этого в подпространстве L сепарабельного пространства H выберем ортонормированную систему (e_k). Тогда, согласно теореме 1, сумма ряда Фурье элемента x есть проекция x на подпространство L. Отметим, что в доказательствах теорем 1 — 3 теорема о проекции не использовалась.

§ 32. ПОЛНЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ В КОНКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. В пространстве l_2 рассмотрим систему элементов e_k вида $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что система ортонормированная. Проверим ее максимальность. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ и $(x, e_k) = 0$. Так как $(x, e_k) = x_k$, получаем, что $x = 0$. Это простейший пример полной ортонормированной системы в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

2. В пространстве $L_2[-1,1]$ классическим примером ортонормированной системы является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos \pi t,\ \sin \pi t,\ \cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t, \ldots .$$

Ортонормированность системы проверяется непосредственным вычислением. Например,

$$\int_{-1}^{1} \sin k\pi t\,\overline{\sin n\pi t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [\cos(k-n)\pi t - \cos(k+n)\pi t]\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

Проверим полноту этой системы, т. е. покажем, что подпространство L, порожденное тригонометрической системой, совпадает со всем пространством $L_2[-1,1]$. Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о том, что любую непрерывную периодическую функцию можно равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т. е. линейной комбинацией функций из рассматриваемой системы. По теореме Вейерштрасса непрерывные функции, удовлетворяющие условию $u(-1) = u(1)$, принадлежат замкнутому подпространству L. Но такие непрерывные функции образуют всюду плотное множество в $L_2[-1,1]$, откуда следует, что $L = L_2[-1,1]$.

Коэффициенты при разложении функции x по системе $1/\sqrt{2}$, $\cos\pi t$, $\sin\pi t$, $\cos 2\pi t, \ldots$ обозначаются соответственно $a_0, a_1, b_1, a_2, \ldots$. Применяя теорему 2 § 31, получаем, что любая функция из $L_2[-1,1]$ разлагается в классический тригонометрический ряд Фурье, который сходится по норме пространства $L_2[-1,1]$:

$$x(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1\cos\pi t + b_1\sin\pi t + a_2\cos 2\pi t + b_2\sin 2\pi t + \ldots,$$

где

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x(t)}{\sqrt{2}}\,dt,$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x(t)\,\cos n\pi t\,dt, \quad b_n = \int_{-1}^{1} x(t)\,\sin n\pi t\,dt, n = 1, 2, \ldots\ .$$

Таким образом, вопрос о сходимости ряда Фурье по норме пространства $L_2[-1,1]$ решается достаточно элементарно. В классической теории рядов Фурье основные вопросы связаны с выяснением условий на функцию, при которых ряд Фурье сходится в других смыслах, например сходится точечно или равномерно.

3. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим систему функций $\{e^{i2\pi kt}\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Вычисляя попарные скалярные произведения, получаем

$$\int_0^1 e^{i2\pi kt}\,\overline{e^{i2\pi nt}}\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

что означает ортонормированность этой системы функций. Так как по формулам Эйлера

$$\cos 2\pi kt = \frac{e^{i2\pi kt} + e^{-i2\pi kt}}{2}, \quad \sin 2\pi kt = \frac{e^{i2\pi kt} - e^{-i2\pi kt}}{2i},$$

то линейные комбинации функций рассматриваемой системы содержат синусы и косинусы и они образуют всюду плотное в $L_2[0,1]$ множество. Значит, рассматриваемая ортонормированная система полна и любая функция $x \in L_2[0,1]$ разлагается в ряд

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi kt}, \tag{1}$$

где $c_k = \int\limits_0^1 x(t)\,e^{-i2\pi kt}\,dt$, причем ряд сходится по норме пространства $L_2[0,1]$. Ряд (1) называется *тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме.*

Если ввести комплексную переменную $z = e^{i2\pi t}$, то функция x, как функция переменной z, принадлежит пространству $L_2(S^1)$ на единичной окружности S^1. При этом ряд (1) записывается в виде

$$x(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$$

и по форме совпадает с рассматриваемым в теории функций комплексной переменной рядом Лорана. Это замечание позволяет установить интересные связи теории рядов Фурье с теорией аналитических функций. Например, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ сходится при $|z| < 1$ к некоторой аналитической функции $\phi^+(z)$, ряд $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k$ сходится при $|z| > 1$ к аналитической функции $\phi^-(z)$. Возникает представление функции из пространства $L_2(S^1)$ в виде разности граничных значений аналитических функций: $x(z) = \phi^+(z) + \phi^-(z)$.

4. Система функций $1, t, t^2, \dots$ линейно независима, но не ортогональна в $L_2[-1,1]$. Используя процесс ортонормализации, описанный в теореме 3, получаем ортонормированную последовательность многочленов $P_0(t), P_1(t), \dots$. Эта система полная, так как порожденное ею замкнутое подпространство совпадает с $L_2[-1,1]$.

Действительно, непрерывные функции образуют в пространстве $L_2[0,1]$ всюду плотное множество. Согласно теореме Вейерштрасса, любая непрерывная функция на отрезке $[-1,1]$ может быть равномерно приближена многочленом, а любой многочлен является линейной комбинацией построенных многочленов $P_n(t)$.

Для многочленов $P_n(t)$ можно получить формулу Родриго

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n!2^n\sqrt{2}}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Эти многочлены лишь постоянными множителями отличаются от многочленов Лежандра, имеющих вид

$$L_n(t) = \frac{1}{n!2^n}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

В приложениях чаще используются многочлены Лежандра. Таким образом, любая функция $x \in L_2[-1,1]$ разлагается в ряд

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(t),$$

где

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x(t)\, L_k(t)\, dt,$$

и ряд сходится по норме $L_2[-1,1]$.

Если рассмотреть пространство $L_2([-1,1],\mu)$ с другой конечной мерой, то в результате ортогонализации последовательности степенных функций получим другую последовательность многочленов, ортогональных относительно соответствующего скалярного произведения. Выбирая меру специальным образом, таким способом можно построить различные типы других т. н. “классических ортогональных многочленов”.

5. В пространствах функций двух переменных полные ортонормированные системы можно строить с помощью следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть* (X, μ_X) *и* (Y, μ_Y) *— пространства с мерами,* φ_n *— полная ортонормированная последовательность в* $L_2(X, \mu_X)$ *и* ψ_n *— полная ортонормированная последовательность в* $L_2(Y, \mu_Y)$. *На произведении* $Z = X \times Y$ *рассмотрим меру* $\mu_Z = \mu_X \times \mu_Y$ *и соответствующее пространство* $L_2(Z, \mu_Z)$. *Тогда функции вида* $e_{nk}(x, y) = \varphi_n(x)\psi_k(y)$, $k, n = 1, 2, \ldots$, *образуют полную ортонормированную систему в* $L_2(Z, \mu_Z)$.

▷ Проверим ортонормированность системы $\{e_{nk}\}$:

$$\int\limits_Z e_{nk}(x, y)\,\overline{e_{ml}(x, y)}\,d\mu_Z = \int\limits_X \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\,d\mu_X \times$$

$$\times \int\limits_Y \psi_k(y)\,\overline{\psi_l(y)}\,d\mu_Y = \delta_{nm}\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & n = m,\ k = l, \\ 0, & n \neq m \ \text{ или } k \neq l. \end{cases}$$

Проверим максимальность системы $\{e_{nk}\}$. Пусть $f \in L_2[Z, \mu_Z]$ и функция f ортогональна всем e_{nk}, т. е. для любых n и k

$$\int\limits_Z f(x, y)\,\overline{\varphi_n(x)\psi_k(y)}\,d\mu_Z = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y)\overline{\varphi_n(x)}\,d\mu_X \right) \overline{\psi_k(y)}\,d\mu_Y = 0.$$

Так как система ψ_k полна в $L_2(Y, \mu_Y)$, то получаем при фиксированном n, что функция $f_n(y) = \int\limits_X f(x, y)\overline{\varphi_n(x)}\,d\mu_X = 0$ почти для всех y. Поскольку система φ_n полна в $L_2(X, \mu_X)$, почти для всех x имеем $f(x, y) = 0$. Поэтому $\int\limits_X |f(x, y)|^2\,d\mu_X = 0$ почти для всех y и по теореме Фубини

$$\int\limits_Z |f(x, y)|^2\,d\mu_Z = \int\limits_Y \left(\int\limits_X |f(x, y)|^2\,d\mu_X \right) d\mu_Y = 0.$$

Значит, $f = 0$ и система $\{e_{nk}\}$ максимальна. ◁

ГЛАВА V
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 33. ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть X и Y — нормированные пространства. Рассмотрим множество $LB(X, Y)$, состоящее из всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

Если $A, B \in LB(X, Y)$, то *суммой* $A + B$ операторов A и B называется оператор, действующий по формуле $(A + B)(x) = Ax + Bx$. *Произведением* оператора A на число λ называется оператор λA, действующий по формуле $(\lambda A)(x) = \lambda Ax$.

Напомним, что для ограниченного линейного оператора норма $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ была введена формально и вопрос о том, что она является нормой в смысле определения нормы на векторном пространстве, не обсуждался.

Теорема 1. *Множество $LB(X, Y)$ с введенными операциями сложения, умножения на число и нормой оператора образует нормированное векторное пространство.*

Пространство $LB(X, Y)$ полно, если полно пространство Y.

$\triangleright$ То, что введенные операции не выводят из множества линейных отображений, является общим фактом. Действительно,

$$(A + B)(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) + B(x_1 + x_2) =$$
$$= Ax_1 + Ax_2 + Bx_1 + Bx_2 = (A + B)(x_1) + (A + B)(x_2)$$

и, значит, $A + B$ — аддитивный оператор. Аналогично $(\lambda A)(\mu x) = \lambda\mu A(x) = \mu[(\lambda A)(x)]$.

Проверим, что $A + B$ — ограниченный оператор. Действительно,

$$\|(A + B)(x)\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|\,\|x\| + \|B\|\,\|x\| = \big(\|A\| + \|B\|\big)\|x\|.$$

Следовательно, оператор $A + B$ ограничен и $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, т. е. для нормы оператора справедливо неравенство треугольника.

Нулевой оператор ($0x \equiv 0$) является нулевым элементом в векторном пространстве $LB(X,Y)$. Проверим остальные аксиомы нормы.

Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| \leqslant 0 \cdot \|x\|$, т. е. $\|Ax\| = 0$ и, значит, $A = 0$;

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda| \cdot \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

Таким образом, $LB(X,Y)$ — нормированное пространство.

Пусть Y — банахово пространство. Докажем, что любая последовательность Коши A_n в пространстве $LB(X,Y)$ сходится. Возьмем $x \in X$ и рассмотрим последовательность образов $y_n = A_n x$. Так как $\|y_n - y_m\| = \|(A_n - A_m)x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \, \|x\| \to 0$, то y_n — последовательность Коши в пространстве Y и, значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Определим оператор A, положив $Ax = y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Проверим, что построенный оператор линейный и ограниченный и что $\|A_n - A\| \to 0$.

Из равенства $A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A_n x_1 + \lambda_2 A_n x_2$, переходя к пределу, получаем $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$, т. е. A — линейный оператор. Так как последовательность Коши всегда ограничена, то существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|A_n\| \leqslant c$. Поэтому, переходя к пределу в неравенстве $\|A_n x\| \leqslant c\|x\|$, получаем $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, т. е. A — ограниченный оператор. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем по нему n_0 так, чтобы при $n, m \geqslant n_0$ выполнялось неравенство $\|A_n - A_m\| \leqslant \varepsilon$. Тогда $\|A_n x - A_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем $\|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon\|x\|$, т. е. для $n \geqslant n_0$ имеем $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$. $\lhd$

Говорят, что последовательность операторов $A_n \in LB(X,Y)$ *сходится к оператору* $A \in LB(X,Y)$ *по норме*, если $\|A_n - A\| \to 0$.

Если $A : X \to Y$ и $B : Y \to Z$ — линейные операторы, то их *произведением* называется их композиция как отображений, т. е. оператор BA, определенный равенством $(BA)(x) = B(Ax)$. Это произведение является оператором из X в Z. Если $Z = X$, то определено и произведение операторов в обратном порядке AB.

Теорема 2. *Пусть $A \in LB(X,Y)$, $B \in LB(Y,Z)$, где X, Y, Z — нормированные пространства. Оператор BA является ограниченным линейным оператором из X в Z и $\|BA\| \leqslant \|B\| \, \|A\|$.*

Операция умножения операторов непрерывна относительно нормы, т. е. если $A_n \to A$ и $B_n \to B$ по норме, то $B_n A_n \to BA$ по норме.

$\rhd$ Линейность произведения линейных отображений очевидна.

Для $x \in X$ получаем

$$\|(BA)(x)\| = \|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \, \|Ax\| \leqslant \|B\| \, \|A\| \, \|x\|,$$

т. е. для оператора BA выполнено неравенство ограниченности с постоянной $\|B\| \, \|A\|$. Значит, $\|BA\| \leqslant \|B\| \, \|A\|$.

Оценим норму разности

$$\|B_n A_n - BA\| = \|B_n(A_n - A) + (B_n - B)A\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B_n\| \, \|A_n - A\| + \|B_n - B\| \, \|A\|.$$

Так как $\|A_n - A\| \to 0$ и $\|B_n - B\| \to 0$ и последовательность $\|B_n\|$ ограничена, получаем $\|B_n A_n - BA\| \to 0$. $\lhd$

Рассмотрим несколько примеров сходящихся последовательностей операторов.

П р и м е р ы.

1. Пусть последовательность функций $K_n(t,s)$, определенных и непрерывных на квадрате $[0,1] \times [0,1]$, равномерно сходится к функции $K(t,s)$. Тогда последовательность интегральных операторов в $C[0,1]$

$$A_n x(t) = \int\limits_0^1 K_n(t,s) x(s) \, ds$$

по норме сходится к интегральному оператору

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t,s) x(s) \, ds.$$

Действительно, разность $A_n - A$ есть интегральный оператор с ядром $K_n(t,s) - K(t,s)$. По теореме 2 § 27

$$\|A_n - A\| \leqslant \max_{t,s} |K_n(t,s) - K(t,s)| \to 0.$$

2. Пусть $K(t,s) \in L_2(I \times I)$, т. е. измеримая функция такая, что $\int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 |K(t,s)|^2 \, dtds < +\infty$. Выберем в пространстве $L_2[0,1]$ базис $e_j(t)$. Тогда, согласно п. 5 § 32, функции $e_{ij}(t,s) = e_i(t) e_j(s)$ образуют базис

в пространстве $L_2(I \times I)$. Разложим функцию $K(t,s)$ в ряд по этой системе:

$$K(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} e_i(t) e_j(t).$$

Пусть $K_n(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} e_i(t) e_j(t)$. Покажем, что последовательность интегральных операторов

$$A_n x(t) = \int_0^1 K_n(t,s) x(s)\, ds$$

в пространстве $L_2(I)$ сходится по норме к интегральному оператору

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s) x(s)\, ds.$$

Как и в примере 1, оператор $A_n - A$ является интегральным оператором с ядром $K_n(t,s) - K(t,s)$. Согласно теореме 4 § 27 имеем

$$\|A_n - A\| \leqslant \left(\int_0^1 \int_0^1 |K_n(t,s) - K(t,s)|^2\, dtds \right)^{1/2} = \|K_n - K\|_{L_2(I \times I)},$$

но, так как K_n — частичные суммы ряда Фурье для функции K, по теореме 2 § 31 имеем $\|K_n - K\| \to 0$, и, значит, $\|A_n - A\| \to 0$. Заметим, что здесь операторы K_n являются операторами конечного ранга, т. е. множество их значений — конечномерное пространство.

3. Пусть операторы A_n в $C[0,1]$ имеют вид $A_n x(t) = a_n(t) x(t)$, где $a_n(t)$ — непрерывная функция, и пусть последовательность функций $a_n(t)$ равномерно на $[0,1]$ сходится к функции $a(t)$. Тогда последовательность операторов $A_n x(t) = a_n(t) x(t)$ сходится по норме к оператору $Ax(t) = a(t)x(t)$. Действительно,

$$\|A_n - A\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a_n(t) - a(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Аналогичное утверждение справедливо в пространстве $L_2[0,1]$. Заметим, что если последовательность функций a_n ограничена и сходится к a почти всюду, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе имеем $A_n x \to Ax$ в смысле сходимости в $L_2[0,1]$. Однако, если последовательность a_n не сходится равномерно, то $\|A_n - A\| \not\to 0$.

4. Пусть функция $K(t,s)$ определена для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ и имеет вид

$$K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\gamma},$$

где $0 < \gamma < 1$, а функция $K_0(t,s)$ непрерывна, т. е. $K(t,s)$ — слабополярное ядро.

Покажем, что в пространстве $C[0,1]$ интегральный оператор A со слабополярным ядром $K(t,s)$ является пределом последовательности интегральных операторов A_n с непрерывными ядрами. Для этого построим непрерывные функции

$$K_n(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{если} |t-s| \geqslant 1/n, \\ n^\gamma K_0(t,s), & \text{если} |t-s| \leqslant 1/n, \end{cases}$$

и пусть A_n — интегральный оператор с ядром $K_n(t,s)$. Из теоремы 3 § 27 имеем

$$\|A_n - A\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |K_n(t,s) - K(t,s)|\, ds.$$

Функция $K_0(t,s)$ непрерывна на компактном множестве и, следовательно, ограничена некоторой постоянной C.

Оценим интеграл

$$\int_0^1 |K_n(t,s) - K(t,s)|\, ds = \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \left| \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\gamma} - n^\gamma K_0(t,s) \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \frac{ds}{|t-s|^\gamma} + n^\gamma \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} ds \right) = \frac{2C}{1-\gamma}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\gamma} + \frac{2C}{n} n^\gamma = \frac{C_1}{n^{1-\gamma}}.$$

Так как $\gamma < 1$, показатель $1-\gamma$ положительный и получаем, что

$$\|A_n - A\| \leqslant C_1/n^{1-\gamma} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

§ 34. СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ. ТЕОРЕМА БАНАХА – ШТЕЙНГАУЗА

В пространстве линейных ограниченных операторов, кроме сходимости по норме, существуют другие естественные типы сходимости. Например, при доказательстве полноты пространства операторов в теореме 1 из § 33 была сначала проверена сходимость последовательности операторов не по норме, а в некотором другом смысле — сильная сходимость в смысле следующего определения.

Определение 1. Пусть X и Y — нормированные пространства. Последовательность линейных операторов A_n *сходится к оператору* A *сильно*, если для любого $x \in X$ последовательность $A_n x$ сходится к Ax по норме пространства Y, т. е. $\|A_n x - Ax\| \to 0$.

Лемма 1. *Если последовательность* $A_n \in L(X,Y)$ *сходится по норме к оператору* A, *то* A_n *сходится к* A *сильно.*

$\rhd$ Возьмем $x \in X$. Тогда $\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\|\,\|x\| \to 0$ при $n \to \infty$. $\lhd$

Обратное утверждение неверно и часто естественно возникают последовательности операторов, которые сходятся сильно, но не сходятся по норме.

Примеры

1. Пусть H — гильбертово пространство, (e_k) — ортонормированный базис в H. Любой элемент $x \in H$ представляется в виде ряда Фурье $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Построим оператор P_n: $\quad P_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Этот оператор по теореме 1 § 31 является проектором на подпространство L_n, порожденное элементами $(e_1, \dots, e_n)$. Равенство $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ по определению означает, что $P_n x \to x$, т. е. последовательность операторов сильно сходится к единичному оператору. Оператор $I - P_n$ есть проектор на подпространство $L_n^{\perp}$ и поэтому $\|I - P_n\| = 1$, т. е. P_n по норме не сходится к единичному оператору. Аналогичные примеры можно построить в других пространствах.

2. В пространстве $L_p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим последовательность операторов $A_{h_k}x(t) = x(t + h_k)$. Покажем, что, если $h_k \to h$, то последовательность A_{h_k} сильно сходится к A_h, но не сходится по норме. Действительно, для любого $x \in L_p(\mathbf{R})$, аналогично теореме 2 § 20

о равномерной непрерывности в среднем, для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t+h) - x(t+h_k)|^p \, dt \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |h - h_k| < \delta.$$

Это и означает сильную сходимость последовательности A_{h_k}.

Оценим $\|A_{h_k} - A_h\|$ при $h_k \neq h$. Пусть $|h_k - h| = d > 0$. Возьмем функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} d^{-1/p}, & 0 < t < d, \\ \quad 0, & t \leqslant 0 \text{ и при } \ t \geqslant d. \end{cases}$$

Тогда $\|x_0\|_p = 1$ и

$$\|(A_{h_k} - A_h) x_0\|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x_0(t+h_k) - x_0(t+h)|^p \, dt \right)^{1/p} = 2^{1/p} > 1.$$

Значит, $\|A_{h_k} - A_h\|$ не сходится к 0 при $h_k \to h$.

В определении предела сильно сходящейся последовательности операторов не требуется, чтобы предельный оператор был линейным ограниченным. Если $A_n \to A$ сильно и A_n линейные, то, переходя к пределу в равенствах $A_n(x_1 + x_2) = A_n x_1 + A_n x_2$, $A_n(\lambda x) = \lambda A_n x$, убеждаемся, что оператор A линейный. Однако в неполных пространствах оператор A может не быть ограниченным.

Имеется аналогия между двумя типами сходимости в пространствах функций — равномерной и точечной — и двумя типами сходимости в пространстве линейных ограниченных операторов — равномерной и сильной. Отметим, что предел точечно сходящейся последовательности непрерывных функций может не быть непрерывной функцией. Аналогично предел сильно сходящейся последовательности ограниченных (непрерывных) линейных операторов может не быть непрерывным.

Пример 3. На векторном пространстве $C^1[0,1]$ зададим норму $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$. Оператор дифференцирования $A := d/dt$ рассмотрим как оператор из $C^1[0,1]$ в $C[0,1]$. Этот оператор неограничен (пример 2 § 27). Пусть разностный оператор A_n задан формулой

$$A_n x(t) = \frac{x(t) - x(t - 1/n)}{1/n}.$$

Тогда для любого $x \in C^1[0,1]$ последовательность $A_n x$ равномерно сходится к Ax, т. е. $A_n \to A$ сильно. Таким образом, последовательность ограниченных линейных операторов сильно сходится к неограниченному оператору A. Однако если пространство, на котором определены операторы, полно, то построить аналогичный пример невозможно. Это утверждение является одним из следствий следующей фундаментальной теоремы.

Теорема 1 (принцип равномерной ограниченности; Банах — Штейнгауз). *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и пусть M — множество ограниченных линейных операторов $M \subset LB(X,Y)$ такое, что для любого $x \in X$ существует постоянная $C(x) > 0$ такая, что $\|Ax\| \leqslant C(x)$ для любого $A \in M$. Тогда M — ограниченное множество, т. е. существует постоянная C такая, что $\|A\| \leqslant C$ для любого $A \in M$.*

$\triangleright$ Так как $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$, то условие $\|A\| \leqslant C$ эквивалентно тому, что $\|Ax\| \leqslant C$ при $\|x\| \leqslant 1$. Таким образом, нужно доказать, что множество чисел $\{\|Ax\| \colon \|x\| \leqslant 1;\ A \in M\}$ ограничено, т. е. нормы $\|Ax\|$ ограничены в совокупности на единичном шаре. Заметим, что, если нормы $\|Ax\|$ ограничены постоянной C на каком-нибудь шаре $B[x_0, r]$, $r > 0$, то $\|Ax\|$ ограничены на единичном шаре. Действительно, если $\|x\| \leqslant 1$, то $x = (z - x_0)/r$, где $z = rx + x_0 \in B[x_0, r]$. Тогда $\|Ax\| \leqslant (1/r)\big(\|Az\| + \|Ax_0\|\big) \leqslant (1/r)(C + C(x_0))$.

Рассмотрим множества

$$X_n = \{x \in X : \|Ax\| \leqslant n \ \text{ для любого } A \in M\ \}.$$

Из непрерывности операторов A получаем, что эти множества замкнуты. По условию теоремы каждый x принадлежит некоторому множеству X_n. Это значит, что $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. Так как пространство X полно, применима теорема Бэра, из которой получаем, что хотя бы одно из множеств X_n содержит шар $B[x_0, r]$. Тогда для всех x из этого шара и всех $A \in M$ для данного n выполнено неравенство $\|Ax\| \leqslant n$. Как показано в начале доказательства, из этого следует утверждение теоремы. $\triangleleft$

Замечание 1. $\|Ax\|$ можем рассматривать как функцию двух переменных A ($A \in M$) и x ($\|x\| \leqslant 1$). В теореме дана ограниченность этой функции по каждой из переменных при фиксированной второй переменной (при фиксированном A имеем $\|Ax\| \leqslant \|A\|$ по определению ограниченности оператора, при фиксированном x — по условию теоремы) и утверждается ограниченность этой функции по совокупности переменных. Пример функции $f(x, y) = xy/(x+y)$, определенной при $x > 0,\ y > 0$, показывает, что для произвольных функций такое утверждение не имеет места.

Замечание 2. Множество $M \subset LB(X, Y)$ называется *ограниченным в смысле сильной топологии*, если для каждого $x \in X$ существует постоянная $C(x)$ такая, что $\|Ax\| \leqslant C(x)$ для любого $A \in M$. В такой терминологии теорема Банаха — Штейнгауза утверждает, что ограниченность в сильной топологии эквивалентна ограниченности по норме.

Следствие 1. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное. Если последовательность $A_n \in LB(X, Y)$ сильно сходится к оператору A, то*

1) последовательность A_n ограничена по норме;

2) оператор A ограничен.

$\triangleright$ Проверим, что множество (A_n) удовлетворяет условиям теоремы Банаха – Штейнгауза. Действительно, $(A_n x)$ — сходящаяся последовательность и, значит, $\|A_n x\| \leqslant C(x)$. По теореме Банаха — Штейнгауза имеем $\|A_n\| \leqslant C$. Тогда справедливо неравенство $\|A_n x\| \leqslant C\|x\|$. Переходя к пределу, получаем неравенство ограниченности для оператора A. $\triangleleft$

Определение 2. Последовательность $(A_n) \in L(X, Y)$ называется *последовательностью Коши в смысле сильной сходимости*, если последовательность $A_n x$ является последовательностью Коши в Y для любого $x \in X$.

Следствие 2. *Если X и Y — банаховы пространства, то пространство $LB(X, Y)$ полно в смысле сильной сходимости.*

$\triangleright$ Пусть (A_n) — последовательность Коши в смысле сильной сходимости. Так как пространство Y полное, то $A_n x \to y$ и мы получаем оператор $A\colon x \to y$. Этот оператор линейный и по следствию 1 ограниченный. По построению $A_n \to A$ сильно. $\triangleleft$

§ 35. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Многие задачи, встречающиеся в теории дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и других приложениях, могут быть записаны в виде уравнений

$$Ax = y, \tag{1}$$

где x — неизвестная функция из некоторого пространства X, y — известная функция из некоторого пространства Y, A — заданный линейный оператор из пространства X в пространство Y. При исследовании уравнений вида (1) необходимо по возможности дать ответы на следующие вопросы: существует ли решение уравнения (1) для произвольного y? Единственно ли это решение? Если не единственно, то сколько решений существует? Если не для любого y существует решение, то какие условия нужно наложить на y для существования решения? Как найти x точно или приближенно?

Рассмотрим, с какими свойствами оператора A связаны перечисленные свойства уравнения (1).

Определение 1. Пусть $A\colon X \to Y$. Оператор $B\colon Y \to X$ называется *правым обратным* к оператору A, если $AB = I_Y$. Оператор B называется *левым обратным* к оператору A, если $BA = I_X$. Оператор B называется *обратным* к A (обозначается A^{-1}), если $AB = I_Y$, $BA = I_X$, т. е. является одновременно правым обратным и левым обратным.

Заметим, что в определении не выдвигается требование линейности или ограниченности оператора B.

Множество $\ker A = \{x|\ x \in X, Ax = 0\}$ называется *ядром оператора* A, множество $ImA = \{y|\ \exists x\ \in X, y = Ax\}$ — *образом оператора.*

Обратим внимание на то, что в силу сложившихся традиций термин "ядро интегрального оператора" может иметь два разных смысла: ядро в смысле предыдущего определения и как функция двух переменных $K(t, s)$. Обычно это не приводит к недоразумениям.

Лемма 1. *Для линейного оператора A следующие утверждения эквивалентны:*

1) *решение уравнения* $Ax = y$ *единственно для любого* $y \in ImA$;

2) $\ker A = \{0\}$;

3) *для оператора A существует левый обратный оператор.*

$\triangleright$ 2) $\Rightarrow$ 1). Если $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$, т. е. x_1 и x_2 — два решения, то $A(x_1 - x_2) = 0$ и $x_1 = x_2$.

1) $\Rightarrow$ 2). Достаточно положить $y = 0$.

1) $\Rightarrow$ 3). Для $y \in ImA$ существует и единственно решение уравнения $Ax = y$. Построим оператор B, который $y \in ImA$ ставит в соответствие решение x. Для остальных y оператор B можно определить произвольным образом. Тогда, если $y = Ax$, то по построению $By = BAx = x$, т. е. $BA = I_X$. Построенный оператор B является линейным на ImA.

3) $\Rightarrow$ 1). Если существует левый обратный оператор B к оператору A и если $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$, то $x_1 = By$, $x_2 = By$, т. е. $x_1 = x_2$. $\triangleleft$

Лемма 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *решение уравнения* $Ax = y$ *существует для любого* $y \in Y$;

2) $ImA = Y$;

3) *для оператора* A *существует правый обратный оператор* B.

$\triangleright$ Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) следует из определения множества ImA.

1) $\Rightarrow$ 3). Для каждого $y \in Y$ выберем одно из решений x уравнения $Ax = y$. Тем самым определено отображение $B\colon Y \to X$, $By = x$. По построению, если $By = x$, то x — решение уравнения, т. е. $Ax = y$ или $ABy = y$, т. е. $AB = I_Y$. Заметим, что построенный оператор может оказаться нелинейным.

3) $\Rightarrow$ 1). Если существует правый обратный оператор B к оператору A, то для любого $y \in Y$ точка $x = By$ является решением уравнения $Ax = y$, так как $Ax = A(By) = y$. $\triangleleft$

Пример. Пусть A — оператор дифференцирования, рассматриваемый как оператор из $C^1[0,1]$ в $C[0,1]$. Часто говорят, что обратной к операции дифференцирования является операция интегрирования $B : By(t) = \int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau$.

Вычислим произведения:

$$ABy(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau = y(t),$$

$$BAx(t) = \int\limits_0^t \frac{dx}{d\tau}\,d\tau = x(t) - x(0) \neq x(t).$$

Значит, $AB = I$, $BA \neq I$. Таким образом, точнее говорить, что оператор интегрирования является правым обратным к оператору дифференцирования, но не является левым обратным.

Замечание 1. Существование линейных ограниченных обратных связано с более тонкими свойствами. Для существования линейного ограниченного левого обратного к оператору A необходимо, чтобы образ ImA был дополняемым замкнутым векторным подпространством в Y, для существования линейного ограниченного правого обратного необходимо, чтобы подпространство $\ker A$ имело дополнение в пространстве X.

Упражнение. Доказать, что если для линейного оператора существует обратный, то он также является линейным оператором.

В практических задачах функция y получается в результате измерений и, следовательно, с некоторой погрешностью, т. е. практически вместо точного решения x уравнения $Ax = y$ находим решение $\tilde{x}$ приближенного уравнения $A\tilde{x} = \tilde{y}$. Может оказаться, что, несмотря на то, что $\tilde{y}$ близко к y, решение $\tilde{x}$ сильно отличается от x. Решения приближенного уравнения имеют практический смысл только тогда, когда для близких правых частей y соответствующие решения близки, иначе говоря, решения должны непрерывно зависеть от правой части уравнения. Так как $x = A^{-1}y$, $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y}$, то требование непрерывной зависимости решения от правой части является фактически требованием непрерывности оператора A^{-1}.

Сам оператор A также обычно известен с некоторой погрешностью и аналогично возникает вопрос о непрерывной зависимости решений уравнения вида (1) от оператора A.

Уравнение $Ax = y$ называется *корректно разрешимым*, если

1) решение существует для любой правой части;

2) решение единственно;

3) решение непрерывно зависит от правой части.

Из предыдущих рассуждений следует, что корректная разрешимость уравнения $Ax = y$ эквивалентна существованию ограниченного обратного оператора A^{-1}, а вопрос о непрерывной зависимости решения от оператора A есть вопрос о непрерывности (нелинейного) отображения: $A \to A^{-1}$. Заметим, что свойство корректной разрешимости существенно зависит от рассматриваемых пространств и норм на них.

Оператор A называется *обратимым*, если для него существует линейный ограниченный обратный оператор. Приведем несколько теорем, которые дают условия обратимости оператора.

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство. Ограниченный линейный оператор $A : X \to Y$ обратим тогда и только тогда, когда:*

1) $\overline{ImA} = Y$ *(образ плотен в Y)*;

2) *существует постоянная $C > 0$ такая, что выполнено неравенство* $\|Ax\| \geqslant C\|x\|$.

$\triangleright$ Необходимость условий очевидна. Для обратимого оператора $ImA = Y$ и условие 1) выполнено. Если обозначить $x = A^{-1}y$, то условие 2) совпадает с условием ограниченности обратного оператора.

Достаточность. Из условия 2) получаем, что, если $Ax = 0$, то $x = 0$, т. е. $\ker A = \{0\}$.

Проверим, что в действительности образ ImA замкнут и совпадает с Y. Пусть $y \in Y$ и пусть $y_n \to y$, $y_n \in ImA$, т. е. $y_n = Ax_n$. Покажем, что $y \in ImA$. Используя неравенство 2), получаем

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{C}\|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{C}\|y_n - y_m\| \to 0.$$

Значит, (x_n) — последовательность Коши в X, и в силу полноты пространства X она сходится к некоторому элементу $x \in X$. Тогда ввиду непрерывности A имеем $y = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = A(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = Ax$, т. е. $y \in ImA$. Таким образом, в силу лемм 1 и 2 существует обратный A^{-1}. Проверим, что он ограничен. Действительно, в силу неравенства 2) имеем $\|A^{-1}y\| \leqslant (1/C)\|A(A^{-1}y)\| = (1/C)\|y\|$. $\triangleleft$

Отметим, что в условиях теоремы нет требования полноты пространства Y. Дело в том, что при выполнении условий теоремы оператор A задает изоморфизм между пространствами X и Y и полнота пространства Y вытекает из условий теоремы.

Замечание 2. Несмотря на внешнюю сложность условий 1) и 2), в ряде задач их проверка легко осуществляется. Для проверки условия 1) не требуется иметь полное описание образа, а достаточно показать, что образ содержит всюду плотное множество. Например, если уравнение рассматривается в пространстве функций на отрезке, то часто для правых частей уравнения y, являющихся многочленами, решение строится в явном виде.

Неравенство из условия 2) в некоторых задачах, имеющих физический смысл, удается получить как следствие закона сохранения энергии. В связи с этим такие неравенства иногда называют *энергетическими*.

Теорема 2 (об обратимости оператора, близкого к единичному). *Пусть X — банахово пространство, $A \in LB(X)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $T = I - A$ обратим и*

$$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

$\triangleright$ В случае, если A есть число и $|A| < 1$, то число $(1 - A)^{-1}$ является суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии $(1 - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + \ldots$.

Покажем, что аналогичное равенство имеется и в случае, когда A есть оператор.

Рассмотрим в пространстве $LB(X)$ линейных ограниченных операторов ряд

$$I + A + A^2 + \ldots \ . \tag{2}$$

Докажем, что этот ряд сходится абсолютно и его сумма S есть оператор, обратный к T. Рассмотрим ряд из норм

$$1 + \|A\| + \|A^2\| + \ldots \ . \tag{3}$$

Согласно теореме 2 § 33 имеем $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Поэтому для ряда (3) получаем сходящийся в силу условия $\|A\| < 1$ мажорирующий ряд

$$1 + \|A\| + \|A\|^2 + \ldots = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Так как пространство $LB(X)$ полно, то по теореме 1 § 26 ряд (2) сходится к $S \in LB(X)$ и $\|S\| \le (1 - \|A\|)^{-1}$. Пусть $S_n = I + A + \ldots + A^n$ — частичная сумма ряда (2). Тогда в силу непрерывности умножения $S(I - A) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(I - A) = \lim\limits_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I$. Аналогично

$$(I - A)S = \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I. \ \triangleleft$$

Из доказательства теоремы получаем еще одну полезную оценку

$$\|I - (I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}. \tag{4}$$

Теорема 2 является некоторым усилением принципа сжимающих отображений для линейных операторов в банаховых пространствах. Решение уравнения $x - Ax = y$ при фиксированном y есть неподвижная точка отображения $f(x) := Ax + y$. Отображение f является сжимающим тогда и только тогда, когда $\|A\| < 1$. Если взять нулевое приближение $x_0 = 0$, то последовательные приближения имеют вид $x_n = (I + A + \ldots + A^n)y = S_n y$. Из принципа сжимающих отображений следует, что для любого y последовательность x_n сходится к точному решению x. Последнее свойство означает только сильную сходимость последовательности операторов S_n, а теорема 2 содержит более сильное утверждение о том, что эта последовательность сходится по норме.

Еще более сильное утверждение можно получить, если вместо условия $\|A\| < 1$ записать условие сходимости числового ряда (3) по признаку Коши: $\overline{\lim}(\|A^n\|)^{1/n} < 1$.

Число $\overline{\lim}(\|A^n\|)^{1/n}$ называется *спектральным радиусом оператора* A и обозначается $r(A)$.

Из определения видно, что всегда $r(A) \leq \|A\|$. Из предыдущих рассуждений получаем

Следствие. *Пусть X — банахово пространство и $A \in LB(X)$. Если $r(A) < 1$, то оператор $T = I - A$ обратим.*

Поясним происхождение термина “спектральный радиус”.

В конечномерном случае многие свойства линейного оператора, заданного матрицей A, описываются с помощью характеристических чисел — корней характеристического многочлена $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где I — единичная матрица. В бесконечномерном случае нет понятия определителя матрицы и определение характеристического числа не переносится на случай операторов в бесконечномерных пространствах. Однако можно записать в других терминах свойство, эквивалентное исходному определению. Например, число λ является характеристическим числом матрицы A, если матрица $A - \lambda I$ необратима. Свойство обратимости имеет смысл для операторов в бесконечномерных пространствах. На этом пути возникают следующие понятия.

Определение 2. Пусть $A\colon X \to X$ — ограниченный оператор в банаховом пространстве X над полем $\mathbf{C}$. Число $\lambda \in \mathbf{C}$ называется *регулярной точкой* оператора, если оператор $\lambda I - A$ обратим, т. е. $(\lambda I - A)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем X. Множество регулярных точек обозначается $\rho(A)$ и называется *резольвентным множеством* оператора A.

Определение 3. Комплексное число λ, не являющееся регулярным, называется *спектральной точкой* или спектральным значением оператора. Множество спектральных точек $\sigma(A)$ оператора A называется *спектром* оператора A. Таким образом, $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$.

Применим теорему 2 к исследованию спектра оператора в банаховом пространстве. Так как $\lambda I - A = \lambda(I - 1/\lambda A)$, из теоремы 2 получаем, что этот оператор обратим при выполнении условия $|\lambda| > \|A\|$. Значит, спектральные значения могут лежать только в круге радиуса $\|A\|$ с центром в точке 0 на комплексной плоскости. Аналогично из следствия получаем более точную информацию о спектральных значениях – спектральные значения могут лежать только в круге радиуса $r(A)$. При этом можно показать, что число $r(A)$ есть радиус наименьшего круга с центром в нуле, содержащего спектр оператора. Это свойство поясняет название “спектральный радиус”. Более подробно понятие спектра будет рассмотрено в § 45.

Теорема 3 (об обратимости оператора, близкого к обратимому). *Пусть X и Y — банаховы пространства и пусть оператор $A \in LB(X,Y)$ имеет ограниченный обратный. Если оператор B удовлетворяет условию $\|A-B\| < 1/\|A^{-1}\|$, то оператор B имеет ограниченный обратный.*

$\triangleright$ Рассмотрим произведение

$$A^{-1}B = A^{-1}[A-(A-B)] = I - A^{-1}(A-B).$$

Так как $\|A^{-1}(A-B)\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|A-B\| < 1$ по условию, то для оператора $I - A^{-1}(A-B)$ существует ограниченный обратный в силу теоремы 2. Умножая на этот обратный, получаем равенство

$$\{[I - A^{-1}(A-B)]^{-1}A^{-1}\}B = I,$$

которое означает, что оператор, стоящий в фигурных скобках, является ограниченным левым обратным к оператору B.

Аналогично, рассмотрев $BA^{-1} = I - (A-B)A^{-1}$, получаем

$$B\{A^{-1}[I-(A-B)A^{-1}]^{-1}\} = I,$$

т. е. оператор B имеет ограниченный правый обратный. Тогда левый и правый обратные совпадают и у оператора B существует ограниченный обратный. $\triangleleft$

Следствие 1. *Множество обратимых операторов в $LB(X,Y)$ есть открытое множество.*

$\triangleright$ В теореме 3 утверждается, что у обратимого оператора A существует целая окрестность (шар радиуса $1/\|A^{-1}\|$), состоящая из обратимых операторов. Поэтому утверждение следует из определения открытого множества в метрическом пространстве. $\triangleleft$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы для разности обратных операторов справедлива оценка*

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A-B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A-B\| \cdot \|A^{-1}\|}. \tag{5}$$

$\triangleright$ Из неравенства (4) получаем

$$\|I - [I-(A-B)A^{-1}]^{-1}\| \leqslant \frac{\|A-B\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A-B\| \cdot \|A^{-1}\|},$$

что позволяет оценить норму разности обратных операторов:

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|A^{-1}\{I - [I - (A - B)A^{-1}]^{-1}\}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\frac{\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A - B\| \cdot \|A^{-1}\|}. \ \lhd$$

Следствие 3. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Отображение перехода к обратному оператору: $A \to A^{-1}$, определенное на открытом множестве в $LB(X, Y)$, состоящем из обратимых операторов, непрерывно. В частности, если последовательность операторов $A_n \in LB(X, Y)$ сходится по норме к обратимому оператору $A \in LB(X, Y)$, то все операторы A_n, начиная с некоторого номера, обратимы и $A_n^{-1} \to A^{-1}$ по норме.*

$\rhd$ Непрерывность указанного отображения непосредственно следует из оценки (5). В частности, для последовательности A_n получаем

$$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A - A_n\|\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A - A_n\|\|A^{-1}\|} \to 0. \ \lhd$$

Рассмотрим один случай, когда исследование обратимости оператора и построение обратного может быть проведено более явно.

Теорема 4. *Пусть H — гильбертово пространство, $A \in LB(H)$ и пусть в H существует ортонормированный базис (e_k) такой, что элементы базиса являются собственными векторами оператора A, т. е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, где λ_k — некоторые числа (собственные значения оператора A). Оператор A обратим тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $|\lambda_k| \geqslant d$ при некотором $d > 0$. При этом $\|A^{-1}\| \leqslant d^{-1}$ и обратный оператор задается формулой*

$$A^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} b_k e_k,$$

где $b_k = (y, e_k)$ — коэффициенты Фурье элемента y.

$\rhd$ *Необходимость.* Если оператор A обратим, то (теорема 1) должно выполняться неравенство $\|Ax\| \geqslant d\|x\|$ при некотором $d > 0$. Подставляя в это неравенство $x = e_k$, получаем $|\lambda_k| \geqslant d > 0$.

Достаточность. Если существует базис из собственных векторов, то уравнение $Ax = y$ можно решать следующим образом. Так как любой элемент из H разлагается в ряд Фурье, будем искать решение в виде ряда $x = \sum c_k e_k$ с неопределенными коэффициентами.

Применяя оператор A, получаем $Ax = \sum \lambda_k c_k e_k$. Разложим y в ряд: $y = \sum b_k e_k$. Приравнивая коэффициенты при e_k, получаем $\lambda_k c_k = b_k$, откуда $c_k = 1/\lambda_k b_k$. Таким способом получаем формальное выражение для решения уравнения или, что то же, формулу, задающую обратный оператор:

$$x = A^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} b_k e_k. \tag{6}$$

Эта формула действительно задает решение уравнения, если построенный ряд сходится.

Так как в силу условий теоремы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{\lambda_k} b_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d^2}|b_k|^2 < \infty,$$

то ряд (6) сходится для любого y, формула (6) задает обратный оператор и при этом $\|A^{-1}\| \leqslant d^{-1}$. $\lhd$

В общем случае вопрос о существовании для данного оператора базиса из собственных векторов достаточно сложный. Некоторые результаты в этом направлении получены в § 52. Вместе с тем для некоторых конкретных классов операторов такие базисы могут быть выписаны явно и соответствующие уравнения решаются эффективно. Один класс интегральных уравнений, которые исследуются с помощью такого подхода, рассмотрен в § 37.

§ 36. ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Теоремы, рассмотренные в этом параграфе, относятся к утверждениям об автоматической непрерывности. В этих утверждениях из совокупности алгебраических и топологических свойств следует свойство непрерывности, т. е. новое топологическое свойство. Эти теоремы наглядно демонстрируют плодотворность методов функционального анализа, базирующихся на рассмотрении согласованных алгебраической и топологической структур. Вместе с теоремой Банаха — Штейнгауза и теоремой Хана — Банаха, которая будет рассмотрена в § 41, эти теоремы составляют т. н. принципы (основные теоремы) линейного функционального анализа.

Например, мы подчеркивали, что замкнутый линейный оператор может быть неограниченным, т. е. разрывным. Первая из рассмотренных теорем показывает, что из условия замкнутости оператора и полноты рассматриваемых пространств автоматически может следовать непрерывность оператора. Это далеко не очевидное утверждение.

В доказательстве теоремы будут использованы следующие понятия. *Разностью двух множеств M и N в векторном пространстве* называется множество

$$M - N = \{x - y \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Заметим, что такое понятие разности не совпадает с разностью множеств в смысле теории множеств: $M - N \neq M \setminus N$.

Произведением множества M на число λ называется множество

$$\lambda M = \{\lambda x : x \in M\}.$$

Лемма 1. *Для шара $B[x_0, r]$ в нормированном пространстве имеет место равенство $B[x_0, r] - B[x_0, r] = B[0, 2r]$.*

$\rhd$ Пусть x и $y \in B[x_0, r]$, тогда $\|x - y\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - x_0\| \leqslant 2r$, откуда следует включение $B[x_0, r] - B[x_0, r] \subset B[0, 2r]$.

Пусть $\|z\| \leqslant 2r$. Тогда элемент z можно представить в виде разности: $z = (x_0 + z/2) - (x_0 - z/2)$, где $(x_0 \pm z/2) \in B[x_0, r]$, что означает включение $B[0, 2r] \subset B[x_0, r] - B[x_0, r]$. $\lhd$

Теорема 1 (о замкнутом графике). *Пусть X и Y — банаховы пространства. Если линейный оператор $A\colon X \to Y$ определен на всем пространстве X и замкнут, то он ограничен.*

$\rhd$ Пусть

$$M_k = \{x \in X : \|Ax\| \le k\}.$$

Ограниченность оператора A эквивалентна тому, что множество M_k содержит некоторый шар с центром в точке 0. Это и будем доказывать.

Так как оператор A определен на всем X, для любого x имеем $x \in M_k$ при $k \geq \|Ax\|$. Это означает, что $X = \cup_{k=1}^{\infty} M_k$ и появляется возможность использовать теорему Бэра. Но мы не можем пока утверждать, что множества M_k замкнуты, как требуется в этой теореме.

Поэтому рассмотрим более широкие множества $\overline{M_k}$ — замыкания множеств M_k. Для них также выполнено условие $\cup_{k=1}^{\infty} \overline{M_k} = X$ и, так как пространство X полное, применима теорема Бэра. Согласно этой теореме хотя бы одно из множеств $\overline{M}_k$ содержит некоторый шар. Заметим, что множества получаются друг из друга с помощью растяжения или сжатия (умножения всех элементов на некоторое фиксированное число). Поэтому, если одно из таких множеств содержит шар, то любое другое также содержит шар, полученный растяжением. Значит, без ограничения общности можем считать, что для некоторого $C \in \mathbf{N}$ существует шар $B[x_0, 1]$ радиуса 1 , принадлежащий множеству $\overline{M_C}$.

Рассмотрев разности и используя лемму 1, получаем включения

$$B[0,1] = 1/2B[0,2] = 1/2\{B[x_0,1] - B[x_0,1]\} \subset 1/2(\overline{M_C} - \overline{M_C}) \subset \overline{M_C}.$$

Это включение означает, что в шаре $B[0,1]$ существует всюду плотное подмножество $D = B[0,1] \cap M_c$, для точек z которого выполнено неравенство $\|Az\| \leqslant C$.

В силу свойства однородности нормы получаем, что при $r > 0$ для точек z из множества rD выполнено неравенство $\|Az\| \leqslant rC$ и это множество всюду плотно в шаре $B[0,r]$.

Покажем теперь, что для всех точек шара $B[0,1]$ выполнено неравенство $\|Ax\| \leqslant C$.

Пусть x — произвольный элемент из $B[0,1]$. Тогда для $\varepsilon > 0$ существует элемент $z_0 \in D$ такой, что $\|x - z_0\| < \varepsilon$ и $\|Az_0\| \leqslant C$. Так как разность $x - z_0$ принадлежит шару радиуса ε, в εD существует такой элемент z_1, что $\|x - z_0 - z_1\| < \varepsilon/2$. Продолжая процесс, после n шагов получаем такой элемент $z_n \in 2^{-n}\varepsilon D$, что

$$\|x - z_0 - z_1 - ... - z_n\| < \varepsilon 2^{-n}.$$

Последнее неравенство означает, что ряд $\sum z_k$ сходится по норме к элементу x. Рассмотрим ряд $\sum Az_k$. Утверждение $z_n \in 2^{-n}\varepsilon D$ означает, что выполнено неравенство $\|Az_k\| \leqslant C\varepsilon 2^{-k}$ и, значит, ряд $\sum Az_k$ сходится абсолютно. Так как по условию пространство Y полное, применима теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда и ряд $\sum_0^\infty Az_k$ сходится к некоторому элементу $y \in Y$, причем $\|y\| \leqslant C(1+\varepsilon)$.

Обратим внимание на то, что предыдущие рассуждения использовали только то, что оператор определен на всем пространстве. Теперь воспользуемся замкнутостью оператора A. Так как

$$\sum_{o}^{n} z_k \to x \text{ и } A\sum_{0}^{n} z_k \to y,$$

из замкнутости оператора A получаем, что $y = Ax$ и, значит, для любого $x \in B[0,1]$ выполнено неравенство $\|Ax\| = \|y\| \leqslant C(1+\varepsilon)$. В силу произвольности ε получаем $\|Ax\| \leqslant C$. $\lhd$

В качестве приложения доказанного утверждения получим одну из наиболее известных теорем функционального анализа — теорему Банаха об обратном операторе. Рассматриваемый вопрос связан со следующим. Если $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — биективное отображение, то, согласно известной теореме из математического анализа, из непрерывности f следует непрерывность обратного отображения. Однако это не общая закономерность, а скорее исключение: в случае произвольных топологических пространств из непрерывности исходного отображения не следует непрерывность обратного отображения. Теорема Банаха описывает еще один такой исключительный случай.

Теорема 2 (теорема Банаха об обратном операторе). *Пусть X и Y — банаховы пространства и $A : X \to Y$ — линейный биективный ограниченный оператор. Тогда обратный оператор A^{-1} является ограниченным.*

$\rhd$ Любой ограниченный оператор, заданный на всем нормированном пространстве, замкнут, т. е. его график является замкнутым множеством в сумме $X \oplus Y$. Так как график обратного оператора отличается от графика исходного оператора только способом записи (если пара (x, y) принадлежит графику оператора A, то пара (y, x) принадлежит графику обратного оператора), то график обратного оператора замкнут и по теореме 1 оператор A^{-1} ограничен. $\lhd$

Заметим, что из теоремы об обратном операторе легко получить теорему о замкнутом графике и эти теоремы в таком смысле эквивалентны. Поэтому одни и те же результаты можно получать с помощью любой из этих теорем. В конкретных приложениях используется обычно та из этих теорем, которая сформулирована в терминах, более согласованных с данными рассматриваемой задачи.

Рассмотрим несколько следствий доказанных теорем.

Следствие 1. *Пусть на векторном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, и пространство X полно относительно каждой из норм. Если $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ для всех $x \in X$, то эти нормы эквивалентны, т. е. существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $\|x\|_2 \leqslant C_1\|x\|_1$ для всех $x \in X$.*

$\rhd$ Обозначим через X_k $(k = 1, 2)$ банахово пространство X с нормой $\|\cdot\|_k$. Неравенство $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ означает, что тождественный оператор, действующий по формуле $Jx = x$, рассматриваемый как оператор из X_2 в X_1, ограничен. По теореме 2 оператор $J^{-1}\colon X_1 \to X_2$ также ограничен, т. е. существует постоянная C_1, при которой выполнено неравенство $\|x\|_2 \leqslant C_1\|x\|_1$. $\lhd$

Утверждение следствия 1 можно усилить. В доказательстве следствия неравенство $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ требуется для получения ограниченности оператора J, а для дальнейших рассуждений достаточно иметь только замкнутость этого оператора. Замкнутость оператора J можно получить из некоторого нового отношения между нормами — свойства согласованности норм.

Определение 1. Норма $\|x\|_2$ на векторном пространстве называется *согласованной* с нормой $\|x\|_1$, если из того, что $\|x_n\|_1 \to 0$ и последовательность x_n является последовательностью Коши относительно второй нормы, следует, что $\|x_n\|_2 \to 0$.

Из этого замечания вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть на векторном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, и пространство X полно относительно каждой из норм. Если одна из норм согласована со второй, то эти нормы эквивалентны.*

Пусть банахово пространство X разложено в прямую сумму своих замкнутых векторных подпространств Y и Z, т. е. каждый элемент x представляется в виде $x = y + z$. Это разложение определяет проектор в X на подпространство Y по формуле $P_Y x = y$.

Следствие 3. *Проектор P_Y является ограниченным оператором.*

$\rhd$ В силу теоремы о замкнутом графике достаточно проверить замкнутость оператора P_Y. Пусть $x_n \to x$, $P_Y x_n \to y$. В силу замкнутости Y имеем $y \in Y$. Так как $x_n - P_Y x_n = z_n \in Z$ и $z_n \to z = x - y$, в силу замкнутости подпространства Z получаем, что $z \in Z$ и, значит, $P_Y x = y$. Это и означает, что оператор P_Y замкнут. $\lhd$

Доказанное следствие позволяет получить автоматическую непрерывность коэффициентов разложения по базису.

Теорема 3. *Если система векторов (e_k) является базисом в банаховом пространстве X (каждый элемент x из X разлагается единственным образом в ряд $x = \sum_1^\infty c_k e_k$), то коэффициенты разложения $c_k = c_k(x)$ непрерывно зависят от x.*

$\rhd$ Зафиксируем номер m. Пусть X_m есть одномерное подпространство в X, порожденное элементом e_m, а X^m — (бесконечномерное) замкнутое векторное подпространство, порожденное остальными элементами базиса. Тогда для любого x имеем $x = c_m e_m + \sum_{k\neq m} c_k e_k$.

Это означает, что пространство X разложено в прямую сумму $X = X_m \oplus X^m$. Применимо следствие 3 теоремы 2 и отображение $P_m : x \to c_m(x)e_m$ непрерывно. $\lhd$

С помощью теоремы Банаха об обратном операторе можно получить другое доказательство теоремы Банаха — Штейнгауза. Это доказательство интересно тем, что в нем используется прием введения новой нормы, полезный в ряде других вопросов.

Теорема 4 (Банах — Штейнгауз). *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $A_k \in LB(X,Y)$ — линейные ограниченные операторы. Если $\sup\limits_{k\geqslant 0} \|A_k x\|_Y < +\infty$ для каждого $x \in X$, то $\sup\limits_k \|A_k\| < +\infty$.*

$\rhd$ На банаховом пространстве X зададим еще одну норму

$$\|x\|_1 = \|x\| + \sup_k \|A_k x\|_Y.$$

Очевидно, что $\|x\| \leqslant \|x\|_1$. Покажем, что в новой норме пространство X полно. Действительно, пусть (x_n) — последовательность Коши в норме $\|\cdot\|_1$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что при $n, m \geqslant n_0$

$$\|x_n - x_m\|_X + \sup_k \|A_k x_n - A_k x_m\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Отсюда следует, что (x_n) — последовательность Коши в X в исходной норме. Так как X полно, то существует x такой, что $\|x_n - x\|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку все A_k непрерывны, то $\|A_k x_n - A_k x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого k. Устремляя m к ∞ в неравенстве (1), получаем $\|x_n - x\|_X + \sup\limits_k \|A_k x_n - A_k x\|_Y \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Это означает, что $\|x_n - x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, X полно в норме $\|\cdot\|_1$. В силу следствия эти нормы эквивалентны, т. е. существует постоянная C такая, что $\|x\| + \sup\limits_k \|A_k x\| \equiv \|x\|_1 \leqslant C\|x\|$. Откуда $\|A_k x\| \leqslant C\|x\|$ для любого $x \in X$, т. е. $\|A_k\| \leqslant C$. $\lhd$

§ 37. ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В этом параграфе рассмотрено несколько приложений общих теорем к интегральным уравнениям.

Нашей целью является изучение (в различных пространствах функций) интегральных уравнений вида

$$x(t) - \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds = y(t) \tag{1}$$

и связанных с ними интегральных операторов, действующих по формуле

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds.$$

Отрезок [0,1] взят для определенности, аналогичные результаты имеют место для других подмножеств в $\mathbf{R}^n$ и других пространств с мерой.

Общая схема исследования следующая. Сначала рассмотрены интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Показано, что такое уравнение сводится к (конечной) системе линейных алгебраических уравнений и может быть подробно исследовано. Затем рассмотрены т. н. уравнения с достаточно малыми ядрами, к исследованию которых применимы теоремы об обратных операторах. Далее показано, что при достаточно естественных условиях ядро интегрального оператора может быть представлено как сумма вырожденного и достаточно малого ядра, что позволяет получить некоторые общие утверждения о разрешимости интегральных уравнений.

Ограниченный линейный оператор называется *оператором конечного ранга,* если его образ является конечномерным подпространством.

Определение 1. Ядро $K(t,s)$ интегрального уравнения называется *вырожденным*, если оно может быть представлено в виде

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)b_k(s). \tag{2}$$

Для интегрального оператора A условие вырожденности ядра означает, что это оператор конечного ранга, так как его значениями могут быть только функции вида $\sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t)$.

Покажем сначала, как решение интегрального уравнения (1) с вырожденным ядром сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Будем считать, что в равенстве (2) функции $a_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, линейно независимы и функции $b_k(s)$, $k = 1, \ldots, n$, также линейно независимы. Это не ограничивает общности, так как если функции $a_k(t)$ или $b_k(s)$ линейно зависимы, то, выражая часть из них через остальные, получаем для $K(t,s)$ выражение вида (2) с меньшим числом слагаемых, содержащее только линейно независимые функции.

Подставив ядро в виде (2) в уравнение (1), получаем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \int_0^1 b_k(s)x(s)\,ds + y(t). \tag{3}$$

Если уравнение (1) имеет решение, то из (3) видно, что это решение имеет специальный вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) + y(t), \tag{4}$$

где c_k — некоторые постоянные. Поэтому решение уравнения (1) будем искать в виде (4) с неопределенными коэффициентами c_k. Подставив (4) в левую часть равенства (3), получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) + y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \int_0^1 b_k(s)x(s)\,ds + y(t),$$

которое в силу линейной независимости функций $a_k(t)$ эквивалентно системе

$$c_k = \int_0^1 b_k(s)x(s)\,ds, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Подставив в (5) функцию x в виде (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k

$$c_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}c_j + y_k, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где d_{kj} и y_k — известные величины:

$$d_{kj} = \int_0^1 b_k(s)a_j(s)\,ds, \qquad k, j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$y_k = \int_0^1 b_k(s)y(s)\,ds, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Система (6) эквивалентнна уравнению (1) в следующем смысле: если уравнение (1) имеет решение, то оно представляется в виде (4) и коэффициенты c_k удовлетворяют системе (6); если коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ удовлетворяют системе (6), то функция x, полученная по формуле (4), является решением уравнения (1).

Мы не налагали на функции $a_k(t)$ и $b_k(s)$ условий и не зафиксировали пространство функций, в котором решаем уравнение (1), так как рассуждения одинаковы для всех пространств функций таких, как $C[0,1]$, $L_p[0,1]$, $C^1[0,1]$ и т. д. Все приведенные выше рассуждения справедливы, если функции $a_k(t)$ принадлежат рассматриваемому пространству функций, а функции $b_k(s)$ таковы, что интегралы в (8) существуют для любой функции y из рассматриваемого пространства.

Как известно, необходимым и достаточным условием разрешимости системы линейных алгебраических уравнений при любой правой части является невырожденность (отличие от нуля определителя) матрицы системы. Определитель Δ системы (6) имеет вид

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{11} - 1 & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} - 1 & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} - 1 \end{bmatrix}.$$

Возможны два качественно различных случая.

I. Если $\Delta \neq 0$, то система (6), а следовательно, и уравнение (1) имеют и притом единственное решение при любой правой части.

II. Если $\Delta = 0$, то система (6) разрешима не для всех правых частей, а однородная система, соответствующая (6), имеет $n - r$ линейно независимых решений, где r есть ранг матрицы системы. При этом для разрешимости системы (6) нужно, чтобы правая часть удовлетворяла $n - r$ условиям совместности системы.

Покажем, что интегральное уравнение (1) с вырожденным ядром обладает точно такими свойствами. Для этого используем условие линейной независимости функций $b_k(s)$. Из этого условия следует, что векторы $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, где y_k определены по формуле (8), пробегают n-мерное пространство, если функции y пробегают все пространство функций, т. е. отображение $y \to \vec{y}$ является сюръективным отображением на n-мерное пространство. Следовательно, если система (6) разрешима не для всех правых частей, то уравнение (1) также разрешимо не для всех функций y и каждое условие разрешимости на правую часть системы (6) порождает условие разрешимости на правую часть уравнения (1). При этом однородная система, соответствующая (6), и однородное уравнение, соответствующее (1), имеют одинаковое конечное число $n - r$ линейно независимых решений.

Такая ситуация типична для более широкого класса уравнений. В более общем виде соответствующие результаты будут получены в главе VII.

Второй класс интегральных уравнений, который также легко поддается исследованию, — это т. н. интегральные уравнения с достаточно малыми ядрами.

Ядро $K(t, s)$ будем называть *достаточно малым* в выбранном банаховом пространстве функций, если для интегрального оператора

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t, s)x(s)\, ds \tag{9}$$

выполнено условие $\|A\| < 1$. Такие уравнения уже рассматривались в § 21, но сейчас мы рассматриваем их с другой точки зрения — с точки зрения теории линейных операторов.

По теореме 2 § 35 из условия $\|A\| < 1$ следует, что оператор $I - A$ имеет ограниченный обратный, что эквивалентно однозначной разрешимости уравнения (1) для любой правой части. Как показано в § 27, для интегрального оператора A норма в пространстве $C[0, 1]$ выражается формулой

$$\|A\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int\limits_0^1 |K(t, s)|\, ds.$$

Поэтому получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция $K(t,s)$ определена и непрерывна при $0 \leqslant t,s \leqslant 1$. Если $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_0^1 |K(t,s)|\,ds < 1$, то интегральное уравнение (1) в пространстве $C[0,1]$ имеет, и притом единственное, решение для любой правой части.*

Рассмотрим интегральный оператор (9) в пространстве $L_2[0,1]$. Как показано в § 27, если $K(t,s) \in L_2([0,1]\times[0,1])$, то для интегрального оператора A в пространстве $L_2[0,1]$ имеет место оценка

$$\|A\| \leqslant \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(t,s)|^2\,dsdt\right)^{1/2}.$$

Применяя предыдущие рассуждения в случае пространства $L_2[0,1]$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $K(t,s)$ измерима и*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(t,s)|^2\,dsdt = M^2 < 1.$$

Тогда интегральное уравнение (1) в пространстве $L_2[0,1]$ имеет, и притом единственное, решение для любой правой части.

В общем случае, когда ядро $K(t,s)$ не является достаточно малым и не является вырожденным, интегральное уравнение может быть исследовано следующим образом. Пусть, например, $K(t,s)$ измерима и существует интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(t,s)|^2\,dsdt$. Пусть $e_k(t)$ —произвольныя полная ортонормированная система в $L_2[0,1]$. Тогда функция $K(t,s)$ разлагается в двойной ряд $K(t,s) = \sum\limits_{k,j=1}^{\infty} c_{kj}e_k(t)e_j(s)$, который сходится в $L_2([0,1]\times[0,1])$. Пусть $K_n(t,s) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} c_{kj}e_k(t)e_j(s)$. Если A_n — интегральный оператор с ядром $K_n(t,s)$, то $\|A - A_n\| \leqslant \|K - K_n\|_{L_2}$. Выберем n_0 так, чтобы выполнялось $\|A_{n_0} - A\| < 1$. Уравнение (1) в пространстве $L_2[0,1]$ запишем в операторном виде

$$[I - (A - A_{n_0}) - A_{n_0}]x = y. \tag{10}$$

По теореме 2 § 35 для оператора $I-(A-A_{n_0})$ существует ограниченный обратный, который обозначим B. Тогда уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(I - BA_{n_0})x = By. \tag{11}$$

Но уравнение (11) есть интегральное уравнение с вырожденным ядром, так как

$$BA_{n_0}x(t) = \sum_{k,j=1}^{n} c_{kj}[Be_k](t) \int_0^1 e_j(s)x(s)\,ds.$$

Следовательно, уравнение (1) с произвольным ядром $K(t,s)$ сводится к уравнению с вырожденным ядром и обладает основными свойствами таких уравнений. Таким образом, получаем, например, следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $K(t,s) \in L_2([0,1]\times[0,1])$. *Интегральное уравнение (1) в пространстве* $L_2[0,1]$ *разрешимо для любой правой части тогда и только тогда, когда однородное уравнение имеет только нулевое решение. Однородное уравнение имеет всегда конечное число линейно независимых решений.*

Заметим, что сведение уравнения (1) к уравнению с вырожденным ядром (11) может быть использовано не только для исследования, но и для приближенного решения уравнения (1).

Рассмотрим один класс интегральных уравнений, для которого результаты можно конкретизировать, используя подход, описанный в теореме 4 § 35. Пусть в пространстве $L_2[0,1]$ задано интегральное уравнение вида

$$x(t) - \int_0^1 K(t-s)x(s)ds = y(t). \tag{12}$$

Это т. н. уравнение с разностным ядром — в общем случае ядро $K(t,s)$ есть произвольная функция двух переменных, в рассматриваемом случае это функция, зависящая только от разности $t-s$.

Теорема 4. *Пусть* $K(\cdot)$ *есть измеримая функция (одной переменной), периодическая с периодом* 1 *и интегрируемая на отрезке* $[0,1]$. *Пусть* $\lambda_k = \int_0^1 K(s)exp(-i2\pi ks)ds$ *есть коэффициенты Фурье функции* K *по ортонормированной системе* $e_k(t) = exp(i2\pi kt), k \in \mathbf{Z}$.

Для интегрального уравнения (12) *возможны* **только** *два следующих случая*:

I. $\lambda_k \neq 1$ *для любого* $k \in \mathbf{Z}$. *В этом случае для любого* $y \in L_2[0,1]$ *уравнение* (12) *имеет единственное решение и это решение задается рядом Фурье*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda_k} b_k exp(ikt), \tag{13}$$

где $b_k = \int_0^1 y(s)exp(-i2\pi kt)ds$ *— коэффициенты Фурье функции* y.

II. *Равенство* $\lambda_k = 1$ *выполнено для конечного числа значений* k: $k_1, k_2, ..., k_m$. *В этом случае для существования решения необходимо и достаточно, чтобы функция* y *удовлетворяла* m *условиям* $b_{k_j} = 0$, $j = 1, 2, ..., m$; *решение определено с точностью до* m *произвольных постоянных* $C_1, C_2, ..., C_m$ *и задается рядом*

$$x(t) = \sum_{\lambda_k \neq 1} \frac{1}{1-\lambda_k} b_k exp(ikt) + \sum_{j=1}^{m} C_j exp(ik_j t). \tag{14}$$

$\triangleright$ Проверим, что функция $e_k(t) = exp(i2\pi kt)$ является собственной функцией для интегрального оператора

$$Ax(t) := \int_0^1 K(t-s)x(s)ds,$$

соответствующей собственному значению λ_k. Действительно,

$$(Ae_k)(t) = \int_0^1 K(t-s)exp(i2\pi ks)ds = \int_{t-1}^{t} K(\tau)exp[i2\pi k(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t-1}^{t} K(\tau)exp(-i2\pi k\tau)d\tau exp(i2\pi kt) =$$

$$= \int_0^1 K(s)exp(-i2\pi ks)ds \cdot e_k(t) = \lambda_k e_k(t).$$

Поэтому к интегральному уравнению (12) применимы рассуждения, изложенные в доказательстве теоремы 4 § 35. Для неопределенных коэффициентов c_k получаем систему $(1-\lambda_k)c_k = b_k$.

Если функция K принадлежит $L_2[0,1]$, то $\lambda_k \to 0$ при $|k| \to \infty$ и, значит, последовательность коэффициентов Фурье принадлежит замкнутому подпространству $\mathbf{c}_0$ пространства l_∞. Покажем, что $\lambda_k \to 0$ при $|k| \to \infty$ и в случае, когда функция K принадлежит более широкому пространству $L_1[0,1]$. Действительно, для коэффициентов Фурье очевидна оценка

$$|\lambda_k(K)| = |\int\limits_0^1 K(s)exp(-i2\pi ks)ds| \leqslant \int\limits_0^1 |y(s)|ds = \|K\|_1.$$

Для функции K из L_1 существует последовательность K_n ограниченных (в частности, принадлежащих пространству L_2) функций, сходящаяся по норме пространства L_1 к функции K. Тогда, по доказанному,

$$\sup_k |\lambda_k(K) - \lambda_k(K_n)| \leqslant \|K - K_n\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это означает, что последовательность $\lambda_k(K_n)$ при $n \to \infty$ сходится в пространстве l_∞ к элементу $\lambda_k(K)$. Значит, $\lambda_k(K)$ принадлежит пространству $\mathbf{c}_0$, что и требовалось.

Из того, что $\lambda_k \to 0$, следует, что у множества чисел λ_k существует только одна предельная точка — точка 0. Поэтому число 1 является либо внешней, либо изолированной точкой этого множества.

Если выполнено условие $\lambda_k \neq 1$, то число 1 не принадлежит множеству чисел λ_k и является внешней точкой этого множества, то есть существует положительное d такое, что $|\lambda_k - 1| \geqslant d$. Тогда выполнены условия теоремы 4 § 35 и формула (13) есть частный случай формулы (6) из § 35.

Пусть существуют λ_k такие, что $\lambda_k = 1$. В силу сходимости последовательности λ_k к нулю равенство $\lambda_k = 1$ может выполняться только для конечного числа номеров $\{k_1, ..., k_l\}$. В этом случае число 1 является изолированной точкой множества точек последовательности. Это означает, что существует $d > 0$ такое, что $|\lambda_k - 1| \geqslant d$ для $k \neq k_j$. Для номеров k_j получаем $0 \cdot c_{k_j} = b_{k_j}$, откуда $b_{k_j} = 0$, а коэффициенты $c_{k_j} = C_j$ — произвольны. Для остальных номеров получаем, как в первом случае, $c_k = b_k/(1 - \lambda_k)$ и для x получаем формулу (14), причем ряд сходится. $\lhd$

§ 38. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $L_1(\mathbf{R})$

В конце предыдущего параграфа было показано, как с помощью разложения в ряд Фурье можно исследовать и решать интегральные уравнения с разностными ядрами в пространстве L_2 на отрезке. Ниже будет рассмотрен класс уравнений с разностными ядрами на прямой, которые аналогичным образом решаются в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ с помощью преобразования Фурье. Предварительно нам нужно определить преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbf{R})$. Преобразование Фурье является непрерывным аналогом разложения функций в ряд Фурье по системе функций $exp(ikt)$, оно обладает рядом замечательных свойств и используется при решении многих задач из разных разделов математики.

Начнем с рассмотрения преобразования Фурье в пространстве интегрируемых по Лебегу функций $L_1(\mathbf{R})$.

Преобразованием Фурье функции f, заданной на прямой $\mathbf{R}$, называется функция $\hat{f}$, определенная формулой

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если функция $f \in L_1(\mathbf{R})$, то ее преобразование Фурье определено, удовлетворяет неравенству*

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_{L_1(\mathbf{R})} \tag{2}$$

и является непрерывной функцией на $\mathbf{R}$, причем $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

$\triangleright$ Так как $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$, то из свойств интеграла Лебега получаем

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

т. е. неравенство (2). Значит, преобразование Фурье $F\colon f \to \hat{f}$ можем рассматривать как отображение из пространства $L_1(\mathbf{R})$ в пространство ограниченных функций, и, согласно неравенству (2), это отображение ограничено. Линейность отображения F очевидна.

Пусть $\varphi(x)$ — характеристическая функция отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\xi}, \tag{3}$$

эта функция непрерывна на $\mathbf{R}$ и $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{\varphi}(\xi) = 0$. Аналогично доказательству теоремы 2 § 19 получаем, что линейные комбинации характеристических функций отрезков плотны в пространстве $L_1(\mathbf{R})$, их образы являются линейными комбинациями функций вида (3) и, следовательно, непрерывными функциями, стремящимися к нулю на бесконечности.

Пусть теперь f — произвольная функция из $L_1(\mathbf{R})$. Тогда существует последовательность f_n ступенчатых функций (т. е. линейных комбинаций характеристических функций отрезков) такая, что $\|f_n - f\|_{L_1(\mathbf{R})} \to 0$. Тогда в силу неравенства (2) последовательность $\hat{f}_n$ равномерно сходится к функции $\hat{f}$ и, значит, функция $\hat{f}$, как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, является функцией непрерывной.

Свойство $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}_n(\xi) = 0$ также сохраняется при равномерной сходимости. В самом деле, возьмем $\varepsilon > 0$, выберем номер n_0 так, чтобы выполнялось $|\hat{f}_{n_0}(\xi) - \hat{f}(\xi)| < \varepsilon/2$, и число M так, что при $\varepsilon > M$ будет $|\hat{f}_{n_0}(\xi)| < \varepsilon/2$. Тогда для значений ξ таких, что $|\xi| > M$, получаем $|\hat{f}(\xi)| \leqslant |\hat{f}_{n_0}(\xi)| + |\hat{f}_{n_0}(\xi) - \hat{f}(\xi)| < \varepsilon$. $\lhd$

Замечание. Не любая функция, непрерывная на $\mathbf{R}$ и стремящаяся к нулю на бесконечности, является преобразованием Фурье функции из $L_1(\mathbf{R})$. Можно, например, показать, что функция

$$g(\xi) = \begin{cases} (\ln\xi)^{-1}, & \xi > e, \\ e^{-1}\xi, & 0 \le \xi \le e, \\ -g(-\xi), & \xi < 0, \end{cases}$$

не является преобразованием Фурье функции из $L_1(\mathbf{R})$, хотя она непрерывна и $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} g(\xi) = 0$.

Заметим также, что функция $\hat{f}(\xi)$ может быть неинтегрируемой (например, функция $\hat{\varphi}(\xi)$ из формулы (3)). В общем случае неизвестны явные необходимые и достаточные условия того, когда некоторая функция является преобразованием Фурье функции из пространства $L_1(\mathbf{R})$.

Возникает задача: как по образу $\hat{f}(\xi)$ найти исходную функцию $f(x)$? Поскольку для элементов f из пространства $L_1(\mathbf{R})$ значение в точке, вообще говоря, не определено, то естественно ожидать, что значение $f(x)$ в точке x можно найти лишь для функций, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Определение 1. Говорят, что функция f *удовлетворяет в точке* x_0 *условию Дини*, если функция

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}$$

интегрируема в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Условию Дини удовлетворяет, например, абсолютно непрерывная функция, имеющая ограниченную производную в окрестности точки x_0. Действительно, если $|f'(x)| \leqslant M$, то

$$|\varphi(t)| = \left|\frac{1}{t}\int\limits_{x_0}^{x_0+t} f'(x)\,dx\right| \leqslant M$$

и, значит, условие Дини выполнено.

Теорема 2. *Если функция $f \in L_1(\mathbf{R})$ и в некоторой точке x удовлетворяет условию Дини, то в этой точке справедливо равенство*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi, \tag{4}$$

причем интеграл в (4) есть интеграл в смысле главного значения.

▷ Рассмотрим функцию

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{i(x-y)\xi}\,dyd\xi.$$

Так как существует повторный интеграл

$$\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dyd\xi,$$

то по теореме Фубини можем изменить порядок интегрирования и, учитывая, что

$$\int\limits_{-N}^{N} e^{i(x-y)\xi}\,d\xi = 2\frac{\sin N(x-y)}{x-y},$$

получаем для $f_N(x)$ следующее выражение:

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int\limits_{-N}^{N} e^{i(x-y)\xi}\, d\xi dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\sin N(x-y)}{x-y}\, dy.$$

Сделав замену переменной $t = x - y$, получаем

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt.$$

Из курса математического анализа известно, что при $N > 0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

причем несобственный интеграл сходится условно и равномерно по N при $N \geqslant 1$, хотя подынтегральная функция не интегрируема по Лебегу. Представляя $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin Nt}{t}\, dt,$$

получаем

$$f_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin Nt}{t}\, dt.$$

Покажем, что последний интеграл стремится к нулю при $N \to \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и в силу равномерной сходимости интеграла (5) выберем число $A > 0$ так, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>A} \frac{\sin Nt}{t}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда разность представима в виде

$$|f_N(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant A} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin Nt\, dt + \right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>A}\frac{f(x+t)}{t}\sin Nt\,dt+\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{|t|>A}\frac{\sin Nt}{t}\,dt\Bigg|.$$

При $|t|>1$ имеем $\left|\frac{\sin Nt}{t}\right|<1$. Поэтому, выбрав достаточно большим число A, получим, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>A}f(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

По условию Дини функция

$$\varphi(t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

интегрируема, и по теореме 1 получаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-A}^{+A}\varphi(t)\sin Nt\,dt=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-A}^{+A}\varphi(t)\frac{e^{iNt}-e^{-iNt}}{2i}\,dt\to 0.$$

Значит, существует число N_0 такое, что при $N>N_0$ выполнено

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant A}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\sin Nt\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда при $N>N_0$ будем иметь $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Это означает, что

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Этот предел и называется интегралом в смысле главного значения. Теорема доказана. $\lhd$

Существуют непрерывные функции, для которых условие Дини не выполнено (например, функция $f(x)=(\ln|x|)^{-2}$ непрерывна в точке $x=0$, но не удовлетворяет условию Дини). Условия теоремы являются достаточными и поэтому из того, что условие Дини не выполнено, не следует, вообще говоря, что не выполнено утверждение теоремы.

Рассмотрим свойства преобразования Фурье, наиболее важные при исследовании различных классов уравнений.

1. *Если функция f интегрируема и абсолютно непрерывна, а ее обобщенная производная f' интегрируема, то $\hat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.*

$\triangleright$ Как показано в § 12, для функции f справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^\infty f'(t)\,dt$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, так как функция f интегрируема. Аналогично получаем $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Тогда интегрированием по частям получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ix\xi}dx = [f(x)e^{-ix\xi}]\big|_{-\infty}^{+\infty} + \ i\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = i\xi\hat{f}(\xi). \ \triangleleft$$

2. *Если $f \in L_1(\mathbf{R})$ и $xf(x) \in L_1(\mathbf{R})$, то функция $\hat{f}(\xi)$ непрерывно дифференцируема и*

$$F(xf(x))(\xi) = -\frac{1}{i}\,\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi).$$

$\triangleright$ Рассмотрим приращение

$$\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,\frac{e^{-ihx}-1}{h}\,dx. \qquad (6)$$

Так как $|e^{-ihx}-1| \leqslant |xh|$, подынтегральная функция в (6) мажорируется интегрируемой функцией $|xf(x)|$ и, значит, по теореме Лебега можно перейти к пределу при $h \to 0$. Получаем

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ix\xi}\,dx. \ \lhd$$

3. *Сверткой* функций f и g называется функция $f*g$, определенная формулой

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Теорема 3. *Если функции f и g принадлежат $L_1(\mathbf{R})$, то их свертка $f*g$ определена почти всюду, принадлежит $L_1(\mathbf{R})$ и выполнено неравенство $\|f*g\| \leq \|f\|\cdot\|g\|$. При преобразовании Фурье свертка переходит в обычное произведение функций,* т. е. $\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$.

$\rhd$ Рассмотрим повторный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|\,dx\,|g(y)|\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|f\|_1|g(y)|\,dy = \|f\|_{L_1(\mathbf{R})}\|g\|_{L_1(\mathbf{R})} < +\infty.$$

По теореме Фубини существует двойной интеграл и существует повторный интеграл, полученный переменой порядка интегрирования:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right|dx < +\infty.$$

Существование этого интеграла означает, что свертка $f*g$ определена почти всюду и является интегрируемой функцией. Тогда

$$(\widehat{f*g})(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy\,e^{-ix\xi}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-iy\xi}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\,d(x-y) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi). \lhd$$

4. *Пусть* $f \in L_1(\mathbf{R})$, $h \in \mathbf{R}$, $g(x) = f(x+h)$ *и* $\varphi(x) = e^{ixh}f(x)$. *Тогда* $\hat{g}(\xi) = e^{ih\xi}\hat{f}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{h}(\xi - h)$.

$$\rhd \quad \hat{g}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-ix\xi}\,dx = e^{ih\xi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-i(x+h)\xi}\,dx = e^{ih\xi}\hat{f}(\xi),$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixh}e^{-ix\xi}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix(\xi-h)}\,dx = \hat{f}(\xi - h). \lhd$$

Полученные свойства показывают, что такие важные в приложениях и разные на вид операторы, как оператор дифференцирования, оператор свертки и оператор сдвига, определяемый формулой $T_h(f(x) = f(x+h)$, после преобразования Фурье переходят в операторы простой структуры: в операторы умножения на соответствующие функции. Естественно ожидать, что преобразование Фурье окажется полезным при исследовании уравнений, содержащих указанные операторы. Однако пространство функций, являющихся преобразованиями Фурье функций из $L_1(\mathbf{R})$, не имеет простого описания и свойства оператора умножения на функцию в этом пространстве оказываюся достаточно сложными. Как будет показано ниже, таких трудностей нет в случае пространства $L_2(\mathbf{R})$.

§ 39. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbf{R})$

Если функция f принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$, то интеграл в формуле (1) § 38, задающей преобразование Фурье, может оказаться расходящимся. Поэтому, чтобы определить преобразование Фурье для функций из $L_2(\mathbf{R})$, нужно придать интегралу несколько иной смысл. С операторной точки зрения ситуация здесь следующая. Непосредственно по формуле (1) § 38 преобразование Фурье определено на всюду плотном векторном подпространстве в $L_2(\mathbf{R})$ и является там ограниченным оператором. Поэтому существует его продолжение на все пространство, являющееся ограниченным оператором. Это продолжение и является, по определению, преобразованием Фурье в пространстве $L_2(\mathbf{R})$. Основой для этой конструкции является следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функция f дважды непрерывно дифференцируема и f, f', f'' принадлежат $L_1(\mathbf{R})$, то справедливо равенство Парсеваля*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi. \tag{1}$$

$\triangleright$ Согласно свойству 1 преобразования Фурье в $L_1(\mathbf{R})$, функция $\xi^2 f(\xi)$ является преобразованием Фурье функции $f''(x)$ и по теореме 1 § 38 ограничена некоторой постоянной M. Тогда $|f(\xi)| \leqslant M/\xi^2$, откуда следует, что функция f интегрируема. Функция f удовлетворяет условию Дини, для нее справедлива формула обратного преобразования Фурье, и так как функция f интегрируема, интеграл в формуле (4) § 38 можно рассматривать как обычный несобственный интеграл, а не интеграл в смысле главного значения.

Так как функция f ограничена и интегрируема, то произведение $f(x)\overline{f(x)}$ является интегрируемой функцией и получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}\, d\xi dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\xi)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\, dx d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Изменение порядка интегрирования допустимо в силу теоремы Фубини, так как функция $f(x)f(\xi)$ интегрируема. $\triangleleft$

Функции f, удовлетворяющие условию теоремы 1, образуют всюду плотное множество в $L_2(\mathbf{R})$. Оператор F преобразования Фурье, определенный на этих функциях, является ограниченным в норме $L_2(\mathbf{R})$, и, более того, равенство Парсеваля означает, что

$$\|F(f)\|_{L_2(\mathbf{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_2(\mathbf{R})}.$$

По непрерывности этот оператор может быть продолжен на все пространство $L_2(\mathbf{R})$ до оператора, который будем обозначать той же буквой F. При этом в силу теоремы о продолжении (§ 18) равенство Парсеваля (1) будет выполняться для продолженного оператора, и, в частности, все образы $F(f)$ принадлежат $L_2(\mathbf{R})$. Обратное преобразование Фурье также продолжается на все пространство $L_2(\mathbf{R})$, и это продолжение является обратным к преобразованию F в силу теоремы о продолжении.

Продолжение преобразования Фурье по непрерывности в данном случае может быть описано более явно следующим образом. Пусть $f \in L_2(\mathbf{R})$. Тогда функция

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant n, \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

является интегрируемой и $\|f_n - f\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Для функции f_n существует обычное преобразование Фурье, которое совпадает с преобразованием, определенным как продолжение по непрерывности. В силу равенства Парсеваля получаем

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L_2(\mathbf{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f_m\|_{L_2(\mathbf{R})} \to 0, \qquad m, n \to \infty,$$

т. е. последовательность $\hat{f}_n$ является последовательностью Коши в пространстве $L_2(\mathbf{R})$. В силу полноты этого пространства $\hat{f}_n$ сходится к некоторой функции $\hat{f}$, которая по определению является преобразованием Фурье функции f. Таким образом, для f из $L_2(\mathbf{R})$ получаем

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{-n}^{n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx,$$

причем предел понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathbf{R})$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Определенное выше преобразование Фурье F биективно и непрерывно отображает пространство $L_2(\mathbf{R})$ на $L_2(\mathbf{R})$.*

Мы обращали внимание на то, что трудно ответить на вопрос: является ли заданная функция g преобразованием Фурье некоторой функции f из пространства $L_1(\mathbf{R})$? Теорема 2 показывает, что в случае пространства $L_2(\mathbf{R})$ имеется простой ответ на аналогичный вопрос. Поэтому применение преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ оказывается очень эффективным в многих приложениях. Отметим также, что преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ обладает свойствами, аналогичными свойствам, описанным в предыдущем параграфе.

Рассмотрим в качестве примера приложений интегральные уравнения с разностными ядрами на прямой. Пусть $K(x)$ — интегрируемая функция. Рассмотрим уравнение вида

$$a\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\varphi(y)\,dy = \psi(x), \tag{2}$$

где φ — неизвестная функция, ψ — известная функция, a — число.

Уравнение (2) рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, т.е. будем считать, что $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\psi \in L_2(\mathbf{R})$.

Теорема 3. *Пусть $K \in L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$. Для того, чтобы уравнение (2) имело, и притом единственное, решение $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ для любой функции $\psi \in L_2(\mathbf{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$a \neq 0, \qquad a + \hat{K}(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

$\triangleright$ Применим преобразование Фурье к уравнению (2). Интеграл в уравнении представляет собой свертку функции K с функцией φ. Воспользовавшись тем, что при преобразовании Фурье свертка переходит в произведение, получаем уравнение

$$[a + \hat{K}(\xi)] \cdot \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi) \tag{4}$$

в пространстве $L_2(\mathbf{R})$. Функция $\hat{K}(\xi)$ является непрерывной функцией и $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{K}(\xi) = 0$. Оператор умножения на непрерывную функцию $a + \hat{K}(\xi)$ обратим в $L_2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда $a + \hat{K}(\xi) \neq 0$ и $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} [a + \hat{K}(\xi)] = a \neq 0$. Значит, условия (3) являются необходимыми и достаточными для однозначной и безусловной разрешимости уравнения (4), а следовательно, и уравнения (2). $\triangleleft$

ГЛАВА VI

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 40. ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение 1. *Линейным функционалом* на векторном пространстве X над полем K называется отображение $f\colon X \to K$, удовлетворяющее условиям

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in K$.

Сопоставляя определение 1 с определениями § 27, видим, что линейный функционал является частным случаем линейного оператора, а именно оператором, отображающим X в одномерное пространство $Y = K$. В частности, для линейных функционалов имеют смысл понятия, введенные в § 33. Приведем некоторые из этих понятий применительно к рассматриваемому случаю.

1. Линейный функционал на нормированном пространстве X называется *ограниченным*, если существует постоянная $C \geqslant 0$ такая, что справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant C\|x\|$. Как и для линейных операторов, ограниченность линейного функционала эквивалентна его непрерывности.

2. *Нормой ограниченного линейного функционала* f называется наименьшая из констант C, при которых справедливо неравенство ограниченности, т. е. $\|f\| = \inf C = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$.

Определение 2. Пространство $LB(X, K)$ линейных ограниченных функционалов на X называется *сопряженным* к пространству X и обозначается X'.

Так как пространство K полно (мы рассматриваем только два случая: $K = \mathbf{R}$ и $K = \mathbf{C}$), сопряженное пространство является, согласно теореме 1 § 33, полным нормированным пространством.

П р и м е р ы.

1. Пусть X — конечномерное нормированное пространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда любой элемент из X представляется в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, $x_k \in \mathbf{R}$. Поскольку в X все нормы эквивалентны, будем считать, что $\|x\|_X = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$. Если f — линейный функционал на X, то $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \xi_k$, где $\xi_k = f(e_k)$. Полагая $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, имеем $f(x) = (x, \xi)$. Из неравенства Коши — Буняковского получаем оценку $|f(x)| = |(x,\xi)| \leqslant \|\xi\|\,\|x\|$, которая показывает, что в конечномерном нормированном пространстве любой линейный функционал f ограничен.

2. Пусть $X = C[0,1]$. Функционал f на X определим формулой $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$. Линейность и ограниченность f следуют из свойств интеграла:

$$\int\limits_0^1 [\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)]\,dt = \lambda \int\limits_0^1 x_1(t)\,dt + \mu \int\limits_0^1 x_2(t)\,dt,$$

$$|f(x)| = \left|\int\limits_0^1 x(t)\,dt\right| \leqslant 1 \cdot \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| = \|x\|.$$

3. Пусть a — интегрируемая по Лебегу функция на $[0,1]$. На нормированном пространстве $C[0,1]$ определим функционал формулой $f(x) = \int\limits_0^1 a(t)x(t)\,dt$, где интеграл понимается в смысле Лебега. Линейность этого функционала очевидна. Полученное в п. **6**б § 8 неравенство $|f(x)| \leqslant \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \int\limits_0^1 |a(t)|\,dt$ есть неравенство ограниченности для функционала f, из него следует, что $\|f\| \leqslant \int\limits_0^1 |a(t)|\,dt$. Из этого примера видим, что для изучения линейных ограниченных функционалов на пространстве $C[0,1]$ также необходим интеграл Лебега.

4. На пространстве $C[0,1]$ могут быть функционалы и других видов. Определим линейный функционал δ формулой $\delta(x)=x(0)$. Так как $|\delta(x)| = |x(0)| \leqslant \max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$, то функционал δ ограничен и $\|\delta\| = 1$. Однако не существует функции $a \in L_1[-1,1]$ такой, что $\delta(x) = \int\limits_{-1}^{1} a(t)x(t)\,dt$ для всех $x \in C[-1,1]$. Действительно, предположим противное и выберем последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1/n, \\ 1 - n|t|, & |t| \leqslant 1/n. \end{cases}$$

Тогда $x_n \in C[-1,1]$ и $x_n(0) = 1$ для всех n. Подставляя x_n в формулу, получаем

$$1 = x_n(0) = \delta(x_n) = \int\limits_{-1}^{1} a(t)x_n(t)\,dt. \tag{1}$$

Так как $a(t)x_n(t) \to 0$ почти всюду и $|a(t)x_n(t)| \leqslant |a(t)|$, то по теореме Лебега в равенстве (1) можно перейти к пределу, откуда будем иметь $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} a(t)x_n(t)\,dt = 0$. Получили противоречие.

5. Пусть $X = L_p(T,\mu)$ и $g \in L_q(T,\mu)$, где $1/p + 1/q = 1$. На пространстве $L_p(T,\mu)$ определим функционал формулой

$$f(x) = \int\limits_{T} x(t)g(t)\,d\mu. \tag{2}$$

Интеграл (2) существует (см. § 20) и справедливо неравенство Гельдера

$$|f(x)| \leqslant \|g\|_q \|x\|_p, \tag{3}$$

которое является неравенством ограниченности для функционала f; из (3) получаем, что $\|f\| \leqslant \|g\|_q$.

6. Пусть H — гильбертово пространство и $u \in H$ — произвольный элемент H. Функционал на H определим формулой $f(x) = (x,u)$. Линейность этого функционала следует из аксиом скалярного произведения, а неравенство Коши — Буняковского $|(x,u)| \leqslant \|x\|\,\|u\|$ является неравенством ограниченности для функционала f. При $x = u$ имеем равенство $f(u) = (u,u) = \|u\|\,\|u\|$, поэтому постоянная $\|u\|$ есть наименьшая, при которой справедливо такое неравенство, т. е. $\|f\| = \|u\|$.

Следующая теорема утверждает, что справедливо и обратное.

Теорема 1 (Ф. Рисс). *Для любого ограниченного функционала f на гильбертовом пространстве H существует единственный элемент $u \in H$ такой, что $f(x) = (x, u)$ и при этом $\|f\| = \|u\|$.*

$\triangleright$ *Единственность.* Пусть $f(x) = (x, u_1)$ и $f(x) = (x, u_2)$. Тогда $(x, u_1 - u_2) = 0$ для любого $x \in H$. Положив $x = u_1 - u_2$, имеем $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$, т. е. $u_1 = u_2$.

Существование. Пусть $N = \ker f = \{x | \ x \in H, f(x) = 0\}$. Это векторное подпространство в H. Оно замкнуто в силу непрерывности f. Если $N = H$, то $f(x) = 0 = (x, 0)$. Пусть $N \neq H$. Тогда, согласно теореме о проекции (см. § 30), существует элемент $u_0 \perp N$, $u_0 \neq 0$. Возьмем произвольный элемент $x \in H$ и построим его проекцию на подпространство N. Получаем элемент

$$x_1 = x - \frac{f(x)}{f(u_0)} u_0.$$

Действительно, поскольку

$$f(x_1) = f(x) - \frac{f(x)}{f(u_0)} f(u_0) = 0, \quad \text{то} \quad x_1 \in N,$$

и при этом вектор $x - x_1 = \lambda u_0$ ортогонален N. Тогда из условия

$$(x_1, u_0) = 0, \quad \text{т. е. равенства } (x, u_0) - \frac{f(x)}{f(u_0)} \|u_0\|^2 = 0,$$

получаем $f(x) = (x, u)$, где $u = \overline{f(u_0)} \|u_0\|^{-2} u_0$.

Равенство $\|f\| = \|u\|$ было доказано в примере 6. $\triangleleft$

Доказанная теорема утверждает, что между элементами гильбертова пространства H и его сопряженного H' существует биективное соответствие $H \ni u \to f_u \in H'$, где $f_u(x) = (x, u)$. Очевидно, что это отображение обладает свойствами $u_1 + u_2 \to f_{u_1} + f_{u_2}$, $f_{\lambda u} = \bar{\lambda} f_u$ (такие отображения называются *антилинейными*) и, так как $\|u\| = \|f_u\|$, оно изометрично.

Значения линейных функционалов в $\mathbf{R}^n$ являются координатами точки x в некоторой системе координат. С этой точки зрения можно рассматривать и линейные ограниченные функционалы в нормированном пространстве, т. е. значения линейных ограниченных функционалов в точке x считать координатами этой точки и вместо точки x

рассматривать ее “координаты” — набор чисел $f(x)$. Поэтому использование сопряженного X' к бесконечномерному нормированному пространству X можно считать аналогом введения координат в конечномерном пространстве.

Для пояснения роли линейных функционалов рассмотрим следующую задачу. Пусть в нормированном пространстве Y имеется подпространство L. Для заданной точки $y_0 \in Y$ требуется определить, принадлежит эта точка подпространству L или нет. К таким задачам относится, например, вопрос о разрешимости уравнения $Ax = y$, где $A \in LB(X, Y)$. В этом случае L есть множество значений оператора A и условие $y_0 \in L$ есть условие существования решения рассматриваемого уравнения при конкретной правой части y_0. Таким образом, задача заключается в записи условия $y_0 \in L$ в виде, более удобном для явной проверки.

В случае конечномерного пространства, например пространства $\mathbf{R}^3$ и одномерного подпространства L, т. е. прямой, такая задача решается в аналитической геометрии следующим образом.

Для прямой L строится уравнение, имеющее вид системы равенств $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0$, где f_1 и f_2 — линейные функции, т. е. линейные функционалы. Тогда проверить, принадлежит ли данная точка прямой, очень просто: точка y_0 принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда $f_k(y_0) = 0,\ k = 1, 2$.

Такое задание геометрических объектов является основным приемом аналитической геометрии, позволяющим сводить геометрические задачи к вычислениям с функциями, задающими данные геометрические объекты.

Если бы удалось аналогично для подпространства в бесконечномерном нормированном пространстве построить уравнение, т. е. систему равенств вида $f_\alpha(x) = 0$, где $\{f_\alpha\}$ — некоторое (может быть, бесконечное) множество линейных функционалов, то мы имели бы решение задачи, полностью аналогичное конечномерному случаю: $y_0 \in L$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha(y_0) = 0$ для любого α.

Таким образом, результаты, связанные с использованием функционалов, можно рассматривать как перенесение методов аналитической геометрии на случай бесконечномерных пространств. Само название “функциональный анализ” подчеркивает роль этого метода в данной математической дисциплине — это анализ с помощью функционалов.

Вместе с тем достаточно естественно рассматривать только ограниченные, т. е. непрерывные, линейные функционалы, так как при вычислениях с разрывными функционалами возникают дополнительные сложности.

§ 41. ТЕОРЕМА ХАНА — БАНАХА

Для обоснования правомерности точки зрения, изложенной в конце § 40, нужно прежде всего показать, что линейных ограниченных функционалов на нормированном пространстве достаточно много. Достаточно много можно понимать в том смысле, что по значениям всех линейных ограниченных функционалов на X точка $x \in X$ определяется однозначно.

Строгий смысл этому понятию придается с помощь следующего определения.

Определение 1. Пусть X — множество, (f_α) — семейство отображений $f_\alpha\colon X \to \mathbf{R}$. Говорят, что это семейство отображений *разделяет точки пространства* X, если для любой пары $x_1 \neq x_2$ точек из X существует функция $f \in (f_\alpha)$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Таким образом, нужно выяснить, разделяют ли ограниченные линейные функционалы точки нормированного пространства, т. е. достаточно ли много таких функционалов.

Определение 2. Пусть $L \subset X$ — векторное подпространство нормированного пространства X и пусть на L задан линейный ограниченный функционал f_0. *Продолжением* функционала f_0 называется линейный ограниченный функционал f на X такой, что $f(x) = f_0(x)$ для $x \in L$.

Задача о том, достаточно ли много на нормированном пространстве линейных ограниченных функционалов, сводится к задаче о существовании продолжения линейного функционала с подпространства на все пространство следующим образом. Для пары точек $x_1 \neq x_2 \in X$ разделяющий их функционал строится следующим образом: на одномерном подпространстве $L = \{t(x_1 - x_2) |\, t \in K\}$ зададим функционал $f_0[t(x_1 - x_2)] = t$. Если существует его продолжение f, то оно разделяет точки x_1 и x_2. Теорема Хана — Банаха утверждает существование такого продолжения и дает решение поставленных задач. Эта теорема, как уже отмечалось, относится к числу трех принципов функционального анализа.

Отметим, что если f — продолжение f_0, то

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1,\ x\in X} |f(x)| \geqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1,\ x\in L} |f(x)| = \|f_0\|,$$

т. е. при продолжении норма не может уменьшиться. Представляют интерес такие продолжения, при которых норма не увеличивается.

В случае гильбертова пространства задача о существовании продолжения решается с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала.

1. Если $x_1 \neq x_2$, то для функционала $f(x) = (x, x_1 - x_2)$ имеем $f(x_1) - f(x_2) = \|x_1 - x_2\|^2 \neq 0$, т. е. линейные ограниченные функционалы разделяют точки пространства H.

2. Пусть $L \subset H$ — подпространство в H и f_0 — функционал на L. Согласно теореме Рисса $f_0(x) = (x, u_0)$, где $u_0 \in L$. Тогда формула $f(x) = (x, u_0)$ определяет линейный ограниченный функционал на H, являющийся продолжением f_0, причем $\|f\| = \|f_0\|$. Любое другое продолжение имеет вид $f(x) = (x, u_0 + h)$, где $h \in L^{\perp}$. При этом $\|f\|^2 = \|u_0\|^2 + \|h\|^2$. Поэтому $\|f\| = \|f_0\|$ тогда и только тогда, когда $h = 0$. Таким образом, в случае гильбертова пространства существует, и притом только одно, продолжение линейного функционала с сохранением нормы.

В случае подпространства произвольного банахова пространства доказательство существования продолжения функционала требует более сложных рассуждений.

Определение 3. Пусть X — векторное пространство. *Полунормой* на X называется отображение $p : X \to \mathbf{R}$, удовлетворяющее условиям
1) $p(x) \geqslant 0$;
2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;
3) $p(x + y) = p(x) + p(y)$.

Сравнивая это определение с определением нормы, видим, что норма отличается от полунормы одним дополнительным свойством: если $\|x\| = 0$, то $x = 0$. В ряде задач представляет интерес выполнение для функционала неравенства подчиненности вида $|f(x)| \leq p(x)$, где p — некоторая полунорма, аналогичного неравенству ограниченности. Поэтому основную теорему (теорему Хана — Банаха) докажем в более общей формулировке, поскольку доказательство не использует дополнительного свойства нормы. В частном случае нормы получим теорему Хана — Банаха для нормированных пространств.

Теорема 1 (Хана — Банаха, действительный случай). *Пусть X — векторное пространство над $\mathbf{R}$, p — полунорма на X, $L_0 \subset X$ — векторное подпространство и на L_0 задан линейный функционал f_0, удовлетворяющий условию*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in L_0.$$

Тогда существует продолжение — линейный функционал $F\colon X \to \mathbf{R}$ такой, что $F(x) = f_0(x)$ для $x \in L_0$ и $|F(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

$\triangleright$ Так как из неравенства $F(x) \leqslant p(x)$ следует $|F(x)| \leqslant p(x)$ (если $F(x) < 0$, то $|F(x)| = F(-x) \leqslant p(x)$), докажем существование продолжения, удовлетворяющего условию $F(x) \leqslant p(x)$.

I. Пусть $x_1 \notin L_0$. Множество $L_1 = \{\lambda x_1 + x |\, x \in L_0, \lambda \in \mathbf{R}\}$ является векторным подпространством в X, содержащим L_0.

Будем строить продолжение f_1 функционала f_0 на L_1. В силу линейности должно выполняться $f_1\ (\lambda x_1 + x) = \lambda f_1(x_1) + f_0(x)$. Так как $f_0(x)$ и λ заданы, для определения f_1 достаточно задать только число $f_1(x_1) := c$. Нужно подобрать c так, чтобы выполнялось условие $f_1(\lambda x_1 + x) \leqslant p(\lambda x_1 + x)$, т. е.

$$\lambda c + f_0(x) \leqslant p(\lambda x_1 + x) \quad \forall x \in L_0,\ \lambda \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

При $\lambda > 0$ неравенство (1) перепишем в виде

$$c \leqslant p(x/\lambda + x_1) - f_0(x/\lambda), \tag{2}$$

а при $\lambda < 0$ — в виде

$$-p(-x/\lambda - x_1) + f_0(-x/\lambda) \leqslant c. \tag{3}$$

Покажем, что найдется постоянная $c \in \mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям (2) и (3). Это не является очевидным фактом, так как условия (2) задают ограничения на значения c сверху, а условия (3) — ограничения снизу, а такие ограничения могут противоречить друг другу.

Пусть y', y'' — произвольные элементы из L_0. Тогда

$$f_0(y') + f_0(y'') = f_0(y' + y'') \leqslant p(y' + y'') \leqslant p(y' - x_1) + p(y'' + x_1)$$

или

$$-p(y' - x_1) + f_0(y') \leqslant p(y'' + x_1) - f_0(y''). \tag{4}$$

Рассмотрим следующие величины:

$$c' = \sup_{y' \in L_0} [-p(y' - x_1) + f_0(y')], \qquad c'' = \sup_{y'' \in L_0} [p(y'' + x_1) - f_0(y'')].$$

Из (4) вытекает, что $c' \leqslant c''$. Выбрав c так, чтобы выполнялось $c' \leqslant c \leqslant c''$, получаем, что c удовлетворяет условиям (2) и (3), т.е. функционал f_1, определенный на L_1 формулой $f_1(\lambda x_1 + x) = \lambda c + f_0(x)$, удовлетворяет условию подчинения $f_1(\lambda x_1 + x) \leqslant p(\lambda x_1 + x)$.

II. Теперь можно взять элемент x_2, не принадлежащий L_1, построить подпространство L_2, порожденное L_1 и x_2, аналогично продолжить f_1 на L_2 и далее продолжать такой процесс бесконечное число шагов. Нужно показать, что таким образом в конце концов будет построено продолжение функционала на все пространство. Это не очевидно, так как может потребоваться несчетное число таких шагов. Поэтому для доказательства существования продолжения на все пространство используются другие рассуждения.

Рассмотрим множество M всех продолжений функционала f_0, удовлетворяющих неравенству подчиненности полунорме p. Продолжение f_α функционала f_0 задается парой (L_α, f_α), состоящей из подпространства L_α и функционала f_α, определенного на нем. В множестве M введем отношение порядка: будем говорить, что $(L_\alpha, f_\alpha) \prec (L_\beta, f_\beta)$, если $L_\alpha \subset L_\beta$ и $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ на L_α. Если в M существует максимальный элемент (L_F, F), то $L_F = X$, т.е. это продолжение на все пространство X. Действительно, если $L_F \neq X$, то функционал F, согласно первой части теоремы, может быть продолжен и, значит, (L_F, F) не является максимальным продолжением.

Для доказательства существования максимального элемента проверим выполнение условий леммы Цорна для рассматриваемого упорядоченного множества. Если в множестве M всех продолжений взять линейно упорядоченное подмножество $(L_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in A}$, то, рассмотрев подпространство $L = \bigcup\limits_{\alpha \in A} L_\alpha$ и функционал $f(x) = f_\alpha(x)$ для $x \in L_\alpha$, получаем, что элемент (L, f) ограничивает сверху это линейно упорядоченное подмножество. Значит, согласно лемме Цорна, в множестве всех продолжений существует максимальный элемент $(\widetilde{L}, F)$. $\lhd$

Замечание 1. В доказательстве теоремы не использовалось условие неотрицательности полунормы, поэтому аналогичное утверждение справедливо в более общей ситуации, когда вместо полунормы рассматривается функция, удовлетворяющая аналогичным условиям без требования неотрицательности.

Теорема 2 (Хана — Банаха, комплексный случай). *Пусть X — векторное пространство над $\mathbf{C}$, p — полунорма на X, L — векторное подпространство и на L задан линейный функционал f, удовлетворяющий условию*

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in L.$$

Тогда существует линейный функционал $F\colon X \to \mathbf{C}$ такой, что $F(x) = f(x)$ для всех $x \in L$ и $|F(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

$\triangleright$ Отметим, что, если в комплексном векторном пространстве ограничиться умножением лишь на действительные числа, то это пространство можно рассматривать как вещественное векторное пространство. Запишем $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ — действительная и мнимая части $f(x)$ соответственно. Тогда g и h — вещественные линейные функционалы на L. Так как для каждого $x \in L$ имеем $g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = i[g(x) + ih(x)] = -h(x) + ig(x)$, то $h(x) = -g(ix)$ и $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Так как $|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x)$, то по теореме 1 существует продолжение g до действительного функционала $G\colon X \to \mathbf{R}$, удовлетворяющего условию $G(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X$. Следовательно, $-G(x) = G(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$ и поэтому $|G(x)| \leqslant p(x)$. Определим теперь функционал

$$F(x) = G(x) - iG(ix).$$

Это комплексный аддитивный функционал, определенный на X, однородный относительно умножения на действительные числа (ибо G — действительный линейный функционал). Чтобы доказать, что F — комплексный линейный функционал, достаточно показать, что $F(ix) = iF(x)$ для всех $x \in X$. Действительно,

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = iG(x) + G(ix) = i[G(x) - iG(ix)] = iF(x).$$

Функционал F является продолжением f, так как G является продолжением g. Осталось доказать неравенство $|F(x)| \leqslant p(x)$. Запишем $F(x)$ в виде $F(x) = |F(x)|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg F(x)$. Тогда $|F(x)| = F(e^{-i\varphi}x) \geqslant 0$. Выражение $F(e^{-i\varphi}x)$ является действительным и неотрицательным, поэтому

$$|F(x)| = F(e^{-i\varphi}x) = |G(e^{-i\varphi}x)| \leqslant p(e^{-i\varphi}x) = |e^{-i\varphi}|p(x) = p(x). \ \triangleleft$$

Как следствие доказанных выше теорем получаем теорему Хана — Банаха для нормированных пространств.

Теорема 3. *Пусть X — нормированное пространство (над полем $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$), L — его векторное подпространство. Тогда для любого ограниченного линейного функционала $f\colon L \to \mathbf{C}$ существует определенный на всем пространстве X ограниченный линейный функционал F такой, что F является продолжением f и $\|F\| = \|f\|$.*

$\triangleright$ Условие ограниченности $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$ есть частный случай условия 2) теоремы 2, так как $p(x) = \|f\|\,\|x\|$ есть полунорма. Согласно теореме Хана — Банаха существует продолжение F на все X такое, что $|F(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$. Значит, $\|F\| \leqslant \|f\|$. Так как при продолжении норма не может уменьшиться, то получаем $\|F\| = \|f\|$. $\triangleleft$

Следствие 1. *Пусть $x_0 \neq 0$ — точка нормированного пространства X. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на X такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.*

$\triangleright$ Пусть $L = \{tx_0|\ t \in \mathbf{R}\}$ — одномерное подпространство, порожденное вектором x_0. Определим на L функционал по формуле $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$. Тогда $f_0(x_0) = \|x_0\|$ и, так как $|f_0(tx_0)| = |t|\,\|x_0\| = 1 \cdot \|tx_0\|$, то $\|f_0\| = 1$. Согласно теореме 3 функционал f_0 продолжается на все пространство с сохранением нормы. $\triangleleft$

Следствие 2. *Линейные ограниченные функционалы разделяют точки нормированного пространства X, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то существует функционал $f \in X'$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

$\triangleright$ Согласно следствию 1 для $x_0 = x_1 - x_2$ существует функционал f такой, что $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$, тогда $f(x_1) - f(x_2) = f(x_0) \neq 0$. $\triangleleft$

Следствие 3. *Пусть L — векторное подпространство нормированного пространства X и $x_0 \in X$ — внешняя точка для L. Тогда существует функционал $f \in X'$ такой, что $f(x) = 0$ для $x \in L$ и $f(x_0) \neq 0$.*

$\triangleright$ Пусть L_0 — векторное подпространство, порожденное L и x_0, т. е. $L_0 = \{y|\ y = tx_0 + x, x \in L, t \in \mathbf{R}\}$. Положим $f_0(y) = t$. Тогда $f_0(x) = 0$ для $x \in L$ и $f_0(x_0) = 1 \neq 0$. Покажем, что функционал f_0 ограничен. Для этого воспользуемся условием, что x_0 — внешняя точка для L, т. е. существует $r > 0$ такое, что шар $\{x\colon \|x - x_0\| < r\}$ не содержит точек из L. Значит, для любой точки $x \in L$ выполнено неравенство $\|x - x_0\| \geqslant r > 0$. Тогда имеем

$$\|y\| = \|x + tx_0\| = |t|\,\|-x/t - x_0\| \geqslant |t|r.$$

Последнее неравенство справедливо потому, что $-x/t \in L$. Разделив на r это неравенство (так как $r > 0$), получаем $|f_0(y)| = |t| \leqslant (1/r)\|y\|$, т. е. функционал ограничен. По теореме Хана — Банаха его можно продолжить на все пространство X. $\lhd$

Замечание 2. Если L — замкнутое векторное подпространство в X, то условие, что x_0 является внешней точкой, эквивалентно условию $x_0 \notin L$.

Определение 4. Последовательность линейных ограниченных функционалов $f_1, f_2, \ldots$ на пространстве X называется *биортогональной* к последовательности $x_1, x_2, \ldots \in X$, если

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

Пример. Если $(e_k)_1^\infty$ — базис Шаудера в банаховом пространстве X, то коэффициенты $c_k = c_k(x)$ разложения элемента x в ряд по данному базису являются ограниченными линейными функционалами на X и образуют биортогональную последовательность к последовательности (e_k).

Следствие 4. *Для любой конечной последовательности линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в нормированном пространстве существует биортогональная последовательность ограниченных функционалов.*

$\rhd$ На подпространстве $L = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \,\middle|\, c_k \in \mathbf{R} \right\}$ функционал f_i зададим формулой $f_i(x) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. По теореме Хана — Банаха для нормированных пространств каждый функционал f_i можно продолжить на все пространство X. $\lhd$

Следствие 5. *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — бесконечная последовательность точек нормированного пространства X и точка x_n не принадлежит замкнутому подпространству L_n, порожденному всеми остальными элементами последовательности. Тогда существует последовательность $f_1, f_2, \ldots \in X'$, биортогональная к исходной.*

$\rhd$ Зафиксируем номер n. Пусть L_n — подпространство, порожденное x_k при $k \neq n$. Точка x_n по условию не принадлежит L_n. Согласно следствию 4, существует функционал f_n такой, что $f_n(L_n) = 0$ и $f_n(x_n) = 1$. $\lhd$

Замечание 3. В случае сепарабельного нормированного пространства теорема Хана — Банаха (теорема 3) может быть получена без использования теоремы Цорна.

$\rhd$ Пусть $y_1, y_2, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в X, состоящее из линейно независимых векторов. Все элементы y_k, не принадлежащие L, занумеруем в последовательность $x_1, x_2, \ldots$ Пусть L_n — подпространство, порожденное L и элементами $x_1, \ldots, x_n$. Согласно первой части теоремы Хана — Банаха функционал f последовательно продолжаем с сохранением нормы на $L_1, L_2, \ldots$. Получаем функционал, определенный на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ — всюду плотном векторном подпространстве в X. По теореме о продолжении (см. § 18) функционал можно продолжить на все пространство с сохранением нормы. $\lhd$

Пусть $M \subset X'$. Множество $M^{\perp} = \{x|\ f(x) = 0\ \forall f \in M\}$ называется по аналогии со случаем гильбертова пространства *ортогональным дополнением* к M. Для множества $N \subset X$ аналогично вводится ортогональное дополнение $N^{\perp} = \{f|\ f \in X',\ f(x) = 0\ \forall x \in N\}$.

Как уже отмечалось в § 26, замкнутое векторное подпространство в нормированном пространстве может не иметь дополнения. В качестве примера применения теоремы Хана — Банаха покажем, что конечномерное пространство всегда имеет дополнение.

Теорема 4 (о дополнениях).

1. *Если L — n- мерное подпространство банахова пространства X, то для L существует замкнутое дополнение, которое может быть задано с помощью n линейно независимых функционалов.*

2. *Если M — замкнутое подпространство в банаховом пространстве X, заданное конечным набором из n линейно независимых функционалов, т.е. $M = \{x|\ f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, n\}$, то для M существует дополнение размерности n.*

$\rhd$ 1. В пространстве L выбираем базис $e_1, \ldots, e_n$. По следствию 4 теоремы Хана — Банаха существуют такие линейные ограниченные функционалы f_i, $i = 1, \ldots, n$, что

$$f_i(e_k) = \delta_{ik}.$$

Тогда множество $M = \{x|\ f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ является замкнутым дополнением к подпространству L. Действительно, M — замкнутое векторное подпространство и имеем разложение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) e_i \in L$, $\ x_2 = x - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) e_i \in M$. Докажем единственность разложения. Если $0 = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $\ x_2 \in M$, то $x_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$. Тогда $c_k = f_k(x_2)$, $k = 1, \ldots, n$, т.е. $x_1 = 0$, $\ x_2 = 0$. Таким образом, $X = L \oplus M$ и утверждение 1 доказано.

2. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — набор линейно независимых функционалов. Покажем, что отображение $\Phi\colon X \to \mathbf{R}^n$, определенное формулой

$$\Phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

сюръективно. Если предположим, что $\operatorname{Im}\Phi \neq \mathbf{R}^n$, то существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \neq 0$, такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$ для любого x, т. е. функционалы f_i линейно зависимы. Получаем противоречие с условием.

В силу сюръективности Φ существуют такие $e_1, \ldots, e_n \in X$, что $f_i(e_k) = \delta_{ik}$. Как показано в первой части теоремы, n-мерное подпространство $L = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \middle| \, c_k \in \mathbf{R} \right\}$ является дополнением к M. $\lhd$

Рассмотрим одно из геометрических приложений теоремы Хана — Банаха. Множество L в нормированном пространстве называется *гиперплоскостью*, если существует линейный ограниченный функционал f и постоянная c такие, что $L = \{x \in X : f(x) = c\}$. Например, в случае пространства $\mathbf{R}^3$ гиперплоскость есть обычная плоскость. В случае вещественного пространства X гиперплоскость разбивает пространство на два полупространства: $X^+ := \{x \in X : f(x) > c\}$, $X^- := = \{x \in X : f(x) \leqslant c\}$. Гиперплоскость L называется *опорной гиперплоскостью* к множеству M в точке $x_0 \in M$, если $x_0 \in L$ и $M \subset X^-$.

В такой геометрической терминологии следствие 1 превращается в следующее утверждение о существовании опорной гиперплоскости к шару.

Следствие 6. *Пусть X — вещественное нормированное пространство, M — единичный шар в X, S — единичная сфера. Для любой точки $x_0 \in S$ существует опорная гиперплоскость к шару в этой точке.*

$\rhd$ Согласно следствию 1 существует ограниченный линейный функционал f такой, что $f(x_0) = 1$ и $\|f\| = 1$. Этот функционал определяет искомую гиперплоскость $L = \{x : f(x) = 1\}$. Действительно, из условия $\|f\| = 1$ получаем, что для точек шара выполнено $f(x) \leqslant \|x\| \leqslant 1$. Последнее неравенство означает, что весь шар лежит в полупространстве X^-. $\lhd$

Аналогично из теоремы Хана — Банаха можно получить утверждение о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству в банаховом пространстве.

§ 42. ОБЩИЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КОНКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Для ряда банаховых пространств сопряженное пространство может быть описано явно. Такое описание дается с помощью теорем об общем виде линейного ограниченного функционала. Напомним два результата в этом направлении, полученных в § 40.

1. *Пространство* $\mathbf{R}^n$. Любой ограниченный линейный функционал f на пространстве $\mathbf{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, где $y_1, \ldots, y_n$ — заданные постоянные. Получаем, что пространство $(\mathbf{R}^n)'$ изоморфно $\mathbf{R}^n$ как векторное пространство. Однако норма на $\mathbf{R}^n$ как сопряженном пространстве в общем случае не совпадает с исходной нормой.

2. *Гильбертово пространство.* Согласно теореме Рисса, любой линейный ограниченный функционал единственным образом представляется в виде $f(x) = (x, u)$, причем $\|f\| = \|u\|$.

Рассмотрим теперь некоторые другие классические банаховы пространства.

3. *Пространство* $\mathbf{c}_0$. Рассмотрим последовательность элементов из $\mathbf{c}_0$ вида $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность является базисом — любой элемент $x \in \mathbf{c}_0$ представляется в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, где ряд сходится по норме $\mathbf{c}_0$. Действительно, имеем $\Big\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \Big\|_{\mathbf{c}_0} = \max\limits_{k>n} |x_k| \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть f — произвольный линейный ограниченный на $\mathbf{c}_0$ функционал. Тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Таким образом, функционал f задается последовательностью чисел $y = (y_k)$. Покажем, что $y \in l_1$. Рассмотрим последовательность элементов из $\mathbf{c}_0$ вида $x^{(n)} = (\operatorname{sign} y_1, \ldots, \operatorname{sign} y_n, 0, \ldots)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| = |f(x^{(n)})| \leqslant \|f\| \, \|x^{(n)}\| = \|f\|.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k| \leqslant \|f\|$.

Покажем, что для любой последовательности $y = (y_k) \in l_1$ формула $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ определяет линейный ограниченный функционал на $\mathbf{c}_0$. Действительно, имеем

$$|f(x)| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\Big) \max_k |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \, \|x\|_{\mathbf{c}_0}.$$

Отсюда следует, что функционал f определен (ряд сходится) и ограничен, причем $\|f\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|$. Линейность очевидна. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пространство* $(\mathbf{c}_0)'$ *изометрически изоморфно пространству* l_1. *Этот изоморфизм задается формулой*

$$l_1 \ni y = (y_k) \to f \in (\mathbf{c}_0)', \text{ где } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

4. *Пространство* l_1. Как и в случае пространства $\mathbf{c}_0$, получаем, что любой элемент $x \in l_1$ представляется в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ (так как $\Big\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k\Big\|_{l_1} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0$ при $n \to \infty$), ограниченный линейный функционал f — в виде $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, где $y_k = f(e_k)$. Положим $x = e_k$. Тогда $|y_k| = |f(e_k)| \leqslant \|f\| \, \|e_k\|_{l_1} = \|f\|$, т. е. последовательность $y = (y_k)$ ограничена числом $\|f\|$. Таким образом, ограниченный линейный функционал f определяется ограниченной числовой последовательностью $y = (y_k)$.

Покажем, что верно и обратное, т. е. любая ограниченная числовая последовательность (y_k) по формуле $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ определяет ограниченный линейный функционал на пространстве l_1. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sup_k |y_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sup_k |y_k| \cdot \|x\|_{l_1},$$

откуда следует, что функционал ограничен, причем $\|f\| \leqslant \sup\limits_k |y_k|$. Учитывая, что выше было получено обратное неравенство, получаем $\|f\| = \sup\limits_k |y_k| = \|y\|_\infty$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пространство $(l_1)'$ изометрически изоморфно пространству l_∞. Этот изоморфизм задается формулой*

$$l_\infty \ni y = (y_k) \ \to f \in (l_1)', \quad \text{где } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

5. *Пространство l_p.*

Теорема 3. *Пространство $(l_p)'$ при $1 < p < +\infty$ изометрически изоморфно пространству l_q, где $1/p + 1/q = 1$. Этот изоморфизм задается формулой*

$$l_q \ni y = (y_k) \to f \in (l_p)', \text{ где } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

$\triangleright$ Пусть $y = (y_k) \in l_q$. Согласно неравенству Гельдера $|f(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$, т. е. функционал f ограничен и $\|f\| \leqslant \|y\|_q$.

Любой элемент $x \in l_p$ представляется в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, так как $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|_p = \Bigl(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\Bigr)^{1/p} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда любой ограниченный функционал f на пространстве l_p представляется в виде $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Положим

$$x^{(n)} = \bigl(|y_1|^{q-1} \operatorname{sign} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{sign} y_2, \dots\bigr) \in l_p.$$

Тогда

$$\|x^{(n)}\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p},$$

$$f(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q, \qquad |f(x^{(n)})| \leqslant \|f\| \, \|x^{(n)}\|_p.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \leqslant \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p}$$

или, разделив на $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/p}$, получим $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q} \leqslant \|f\|$. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|y_k|^q$ сходится и $\|y\|_q \leqslant \|f\|$. $\lhd$

Замечание. Ограничение $p < +\infty$ в теореме существенно, так как пространство $(l_\infty)'$ устроено значительно сложнее и не допускает простого явного описания. В частности, не все функционалы на l_∞ представляются в виде $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Рассуждения, аналогичные доказательствам предыдущих утверждений, в рассматриваемом случае не корректны, так как система $\{e_k\}$ не является базисом в пространстве l_∞.

6. *Пространство* $L_p(T,\mu)$, $1 < p < +\infty$.

Теорема 4 (Ф. Рисс). *Пусть T — пространство с полной σ-конечной мерой. Пространство $(L_p(T,\mu))'$ при $1 < p < +\infty$ изометрически изоморфно пространству $L_q(T,\mu)$, где $1/p + 1/q = 1$. Изоморфизм задается формулой*

$$L_q(T,\mu) \ni u \to f \in (L_p(T,\mu))', \quad \textit{где } f(x) = \int\limits_T x(t)u(t)\,d\mu.$$

$\rhd$ Согласно неравенству Гельдера, если $u \in L_q(T,\mu)$ и $x \in L_p(T,\mu)$, то $xu \in L_1(T,\mu)$ и $\left|\int\limits_T x(t)u(t)\,d\mu\right| \leqslant \|u\|_q\|x\|_p$. Значит, функционал f задан для любого $x \in L_p(T,\mu)$, линеен, ограничен и $\|f\| \leqslant \|u\|_q$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что любой ограниченный линейный функционал f представляется в указанном виде и справедливо неравенство $\|u\|_q \leqslant \|f\|$.

Сначала рассмотрим случай $\mu(T) < +\infty$. Пусть f — ограниченный линейный функционал на $L_p(T,\mu)$. Для любого измеримого множества A его характеристическая функция χ_A принадлежит $L_p(T,\mu)$, и, значит, определено значение $f(\chi_A)$. Получаем отображение $\nu\colon A \to f(\chi_A)$. Покажем, что ν есть заряд на алгебре измеримых множеств (в смысле определения 1 § 11), т. е. обладает свойством σ-аддитивности. Если $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\chi_A = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}$, причем ряд сходится в $L_p(T,\mu)$. В силу линейности и непрерывности f получаем

$$\nu(A) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k).$$

Если $\mu(A) = 0$, то χ_A есть нулевой элемент пространства $L_p(T,\mu)$ и $\nu(A) = 0$. Это значит, что заряд ν абсолютно непрерывен относительно меры μ. По теореме Радона — Никодима (§ 12) существует такая функция $u \in L_1(T,\mu)$, что $\nu(A) = \int\limits_A u(t)\,d\mu$.

Покажем, что $u \in L_q(T,\mu)$ и что

$$f(x) = \int\limits_T x(t)u(t)\,d\mu. \tag{1}$$

Представление (1) справедливо для характеристических функций, так как

$$f(\chi_A) = \nu(A) = \int\limits_A u(t)\,d\mu = \int\limits_T \chi_A(t)u(t)\,d\mu.$$

В силу линейности представление (1) справедливо для линейных комбинаций характеристических функций, т.е. для простых функций с конечным числом значений. Для ограниченной измеримой функции x построим последовательность x_n простых функций с конечным числом значений, равномерно сходящуюся к x. Переходя к пределу в представлении $f(x_n) = \int\limits_T x_n(t)u(t)\,d\mu$, что допустимо в силу теоремы Лебега, получаем представление (1) для ограниченных функций.

Пусть теперь

$$u_n(t) = \begin{cases} |u(t)|, & \text{если } |u(t)| \leqslant n,\\ 0, & \text{если } |u(t)| > n. \end{cases}$$

Функция $x_n(t) = u_n(t)^{q-1}\operatorname{sign} u(t)$ — ограниченная, измеримая,

$$\|x_n\|_p = \Big(\int\limits_T |u_n(t)|^{(q-1)p}\,d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_T |u_n(t)|^q\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

В силу представления (1) получаем

$$f(x_n) = \int\limits_T u_n(t)^{q-1}\operatorname{sign} u(t)u(t)\,d\mu = \int\limits_T |u_n(t)|^q\,d\mu.$$

Так как $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|_p$, получаем

$$\int\limits_T |u_n(t)|^q\,d\mu \leqslant \|f\|\Big(\int\limits_T |u_n(t)|^q\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

Разделив на $\left(\int_T |u_n(t)|^q\,d\mu\right)^{1/p}$, имеем $\left(\int_T |u_n(t)|^q\,d\mu\right)^{1/q} \leqslant \|f\|$. Последовательность $|u_n(t)|^q$ сходится точечно к $|u(t)|^q$ и справедлива оценка $\|u_n\|_{L_q} \leqslant \|f\|$. По теореме Фату (§ 9) получаем, что $|u(t)|^q$ — интегрируемая функция и

$$\left(\int_T |u(t)|^q\,d\mu\right)^{1/q} \leqslant \|f\|,$$

т. е. $u \in L_q(T,\mu)$ и $\|u\|_q \leqslant \|f\|$.

Ограниченный линейный функционал f совпадает с ограниченным линейным функционалом $\int_T x(t)u(t)\,d\mu$ на плотном множестве ограниченных функций. По теореме о продолжении эти функционалы совпадают на всем $L_p(T,\mu)$, т. е. справедливо представление (1).

Пусть мера σ-конечна, т. е. $T = \coprod_{k=1}^{\infty} T_k$, где $\mu(T_k) < +\infty$. Рассмотрим сужение функционала f на пространство $L_p(T_k,\mu)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль вне множества T_k. По доказанной части теоремы получаем представление $f(x) = \int_{T_k} x(t)u_k(t)\,d\mu$, где $u_k \in L_q(T_k,\mu)$. Аналогично доказательству в примере 5 для пространства $(l_p)'$ получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{T_k} |u_k|^q\,d\mu$ сходится, т. е. $u \in L_q(T,\mu)$. Если $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где $x_k \in L_p(T_k,\mu)$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{T_k} x_k(t)u_k(t)\,d\mu = \int_T x(t)u(t)\,d\mu. \lhd$$

7. *Пространство* $L_1(T,\mu)$.

Теорема 5. *Пространство* $(L_1(T,\mu))'$ *линейно изометрично пространству* $L_\infty(T,\mu)$. *Этот изоморфизм задается формулой*

$$L_\infty(T,\mu) \ni u \ \to\ f \in (L_1(T,\mu))', \quad \text{где } f(x) = \int_T x(t)u(t)\,d\mu.$$

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательству теоремы 4.

8. *Пространство* $C[0,1]$.

Теорема 6 (Ф. Рисс). *Для любого ограниченного линейного функционала f на пространстве $C[0,1]$ существует функция g ограниченной вариации такая, что функционал f представляется с помощью интеграла Римана — Стилтьеса:*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t), \tag{2}$$

причем $\|f\| = \mathbf{Var}_0^1[g]$.

$\triangleright$ Пусть f — ограниченный линейный функционал на $C[0,1]$. Если в интеграл $\int_0^1 x(t)\, dg(t)$ подставить функцию

$$x_\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad t \le \xi, \\ 0, & \text{при} \quad t > \xi, \end{cases}$$

то $\int_0^1 x_\xi(t)\, dg(t) = g(\xi) - g(0)$, т. е. по значениям интеграла на функциях $x_\xi(t)$ функция $g(t)$ может быть записана явно. Но функция $x_\xi(t)$ разрывна и значение функционала f на ней не определено. Поэтому поступаем следующим образом.

Пусть $B[0,1]$ есть пространство всех ограниченных функций на $[0,1]$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$. Пространство $C[0,1]$ является подпространством $B[0,1]$. Согласно теореме Хана — Банаха, функционал f может быть продолжен на все пространство с сохранением нормы. Пусть F — такое продолжение. Тогда определено значение $F(x_\xi)$. Покажем, что функция $g(\xi) = F(x_\xi)$ — искомая. Возьмем произвольное разбиение отрезка $[0,1]$: $\quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [g(t_k) - g(t_{k-1})],$$

где $\varepsilon_k = \operatorname{sign}[g(t_k) - g(t_{k-1})]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [F(x_{t_k}) - F(x_{t_{k-1}})] =$$

$$= F\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})\right) \leqslant \|f\| \, \|\nu\|,$$

где

$$\nu(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [x_{t_k}(t) - x_{t_{k-1}}(t)].$$

Так как в последней сумме в каждой точке t лишь одно слагаемое может быть отличным от нуля и каждое слагаемое удовлетворяет условию $|\varepsilon_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})| \leqslant 1$, получаем $\|\nu\| = 1$. Значит, функция g имеет ограниченную вариацию и $\mathbf{Var}_0^1[g] \leqslant \|f\|$.

Покажем, что справедливо представление (2). Для функций x_ξ равенство $f(x_\xi) = \int\limits_0^1 x_\xi(t)\, dg(t)$ справедливо по построению. По линейности равенство распространяется на кусочно-постоянные и непрерывные справа функции — линейные комбинации функций x_ξ. Если y_n — последовательность кусочно-постоянных непрерывных справа функций, равномерно сходящаяся к непрерывной функции x, то, переходя к пределу в представлении $f(y_n) = \int\limits_0^1 y_n(t)\, dg(t)$, получаем представление (2) для $x \in C[0,1]$. Оценим интегральную сумму интеграла Римана — Стилтьеса $\int\limits_0^1 x(t)\, dg(t)$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]\right| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leqslant \mathbf{Var}_0^1[g] \, \|x\|.$$

Переходя к пределу, получаем неравенство $|f(x)| \leqslant \mathbf{Var}_0^1[g] \, \|x\|$, откуда $\|f\| \leqslant \mathbf{Var}_0^1[g]$. $\lhd$

Полученное в теореме 6 соответствие не является взаимно однозначным. Так, если $g_1(t) = g(t) + \mathrm{const}$, то интеграл в (2) не изменится. Не влияет на интеграл для непрерывной функции x также изменение функции g в счетном числе точек. Так как функция ограниченной вариации может иметь не более счетного числа точек разрыва, то, изменив значения функции в этих точках, можно сделать g непрерывной слева. Поэтому естественно рассмотреть пространство $V[0,1]$ — пространство функций ограниченной вариации, непрерывных слева и удовлетворяющих условию $g(0) = 0$ с нормой $\|g\| = \mathbf{Var}_0^1[g]$.

Теорема 7. *Пространство* $(C[0,1])'$ *изометрически изоморфно пространству* $V[0,1]$. *Изоморфизм устанавливается формулой*

$$V[0,1] \ni g \to f \in (C[0,1])', \text{ где } f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t). \tag{3}$$

$\triangleright$ Если g — функция ограниченной вариации, то функционал $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t)$ определен на $C[0,1]$, причем $\|f\| \leqslant \mathbf{Var}_0^1[g]$. Покажем, что если g непрерывна слева, то $\|f\| = \mathbf{Var}_0^1[g]$. Для $\varepsilon > 0$ построим такое разбиение отрезка $[0,1]$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| > \mathbf{Var}_0^1[g] - \varepsilon$. Построим последовательность непрерывных функций x_n таких, что $|x_n(t)| \leqslant 1$ и $x_n(t) \to x_0(t)$ $\forall t$, где $x_0(t) = \operatorname{sign}[g(t_k) - g(t_{k-1})]$ для $t_{k-1} < t < t_k$. Непрерывной слева функции $g(t)$ соответствует σ-аддитивный заряд ν на $[0,1]$, поэтому $\int_0^1 x_n(t)\,dg(t) = \int_0^1 x_n(t)\,d\nu$. По теореме Лебега возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,dg(t) = \int_0^1 x_0(t)\,d\nu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}[g(t_k) - g(t_{k-1})]\,\nu([t_{k+1}, t_k]) = \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|.$$

Поэтому при достаточно большом n имеем $|f(x_n)| > \mathbf{Var}_0^1[g] - \varepsilon$ и, так как $\|x_n\| \leqslant 1$, получаем $\|f\| \geqslant \mathbf{Var}_0^1[g]$. Значит, $\|f\| = \mathbf{Var}_0^1[g]$, и мы показали, что отображение из $V[0,1]$ в $(C[0,1])'$, определенное формулой (3), изометрично и, в частности, инъективно. Сюръективность этого отображения установлена в теореме 6. Значит, отображение, определенное (3), является изоморфизмом. $\triangleleft$

Обобщением теоремы 7 на случай произвольных компактных пространств является следующая теорема.

Пусть T — компактное метрическое пространство и ν — заряд, определенный на алгебре борелевских множеств в T. Тогда формула

$$f(x) = \int_T x(t) d\,\nu(x) \tag{4}$$

задает ограниченный линейный функционал на пространстве $C(T)$ непрерывных функций на T.

Теорема 8 (Радон). *Для любого компактного метрического пространства T формула (4) устанавливает биективное соответствие между сопряженным пространством $(C(T))'$ и пространством борелевских зарядов на T.*

§ 43. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В случае конечномерного пространства линейный оператор задается матрицей. В курсе линейной алгебры показывается, что свойства матрицы тесно связаны со свойствами транспонированной матрицы. В бесконечномерных пространствах аналогичную роль играет сопряженный оператор, который определяется следующим образом.

Пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Возьмем функционал $f \in Y'$ и по нему построим новый функционал $g(x) = f(Ax)$. Проверим, что g — линейный ограниченный функционал на X. Равенства

$$g(x_1 + x_2) = f(A(x_1 + x_2)) = f(Ax_1) + f(Ax_2) = g(x_1) + g(x_2),$$

$$g(\lambda x) = f(A(\lambda x)) = \lambda f(Ax) = \lambda g(x)$$

вытекают из линейности функционала f и оператора A. Из неравенства

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leqslant \|f\| \, \|Ax\| \leqslant \|f\| \, \|A\| \, \|x\|$$

получаем, что g — ограниченный линейный функционал и что

$$\|g\| \leqslant \|A\| \, \|f\|. \tag{1}$$

Таким образом, возникает отображение

$$A' \colon Y' \ni f \to g \in X'.$$

Определение 1. *Сопряженным оператором* к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор A', действующий по формуле $A'f(x) = f(Ax)$ из пространства Y' в пространство X'.

Замечание 1. В выражении $A'f(x)$ из двух возможных вариантов расположения скобок $(A'f)(x)$ и $A'(f(x))$ второй не имеет смысла ($f(x)$ — число и оператор

A' нельзя применить к числу), поэтому выражение $A'f(x)$ читается по первому варианту (оператор A' применяется к функционалу f и вычисляется значение нового функционала в точке x).

Покажем, что операция сопряжения не выводит из класса ограниченных линейных операторов.

Теорема 1. *Оператор* A', *сопряженный к линейному ограниченному оператору* A, *является линейным ограниченным оператором, причем* $\|A'\| = \|A\|$.

$\triangleright$ Проверим линейность оператора A':

$$A'(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(Ax) = f_1(Ax) + f_2(Ax) = A'f_1(x) + A'f_2(x),$$

$$A'(\lambda f)(x) = \lambda f(Ax) = \lambda A'f(x).$$

Полученное выше неравенство (1)

$$\|A'f\| := \|g\| \leqslant \|A\| \, \|f\|$$

является фактически неравенством ограниченности для оператора A', т. е. оператор A' ограничен и $\|A'\| \leqslant \|A\|$. Покажем, что справедливо обратное неравенство $\|A\| \leqslant \|A'\|$. Возьмем произвольный элемент $x \in X$ и пусть $y = Ax$. Согласно следствию 2 теоремы Хана — Банаха (§ 41), существует такой функционал $f \in Y'$, что $\|f\| = 1$ и $f(y) = \|y\|$. Тогда $f(Ax) = \|Ax\|$ и

$$\|Ax\| = |f(Ax)| = |A'f(x)| \leqslant \|A'\| \, \|f\| \, \|x\| = \|A'\| \, \|x\|.$$

Таким образом, для любого $x \in X$ выполнено $\|Ax\| \leqslant \|A'\| \, \|x\|$, откуда получаем $\|A\| \leqslant \|A'\|$ и, значит, $\|A'\| = \|A\|$. $\triangleleft$

Построив для каждого оператора A его сопряженный A', мы определили отображение, действующее из $LB(X, Y)$ в $LB(Y', X')$, которое оператору A ставит в соответствие его сопряженный A'. Это отображение называют *отображением сопряжения.* Отметим следующие свойства сопряжения:

1) $(A + B)' = A' + B'$;

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$ (линейность);

3) $\|A'\| = \|A\|$ (изометричность);

4) $(AB)' = B'A'$

$\triangleright$ Заметим, что в правой части сомножители берутся в обратном порядке. Имеем $(AB)'f(x) = f(ABx)$, $A'f(x) = f(Ax) = g(x)$, $B'A'f(x) = g(Bx) = f(ABx)$, т. е. $(AB)' = B'A'$ $\triangleleft$;

5) Если $X = Y$, то $(I_X)' = I_{X'}$;

6) Если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, то A' также обратим и $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

$\triangleright$ Так как $AA^{-1} = I$ и $A^{-1}A = I$, то, согласно свойствам 4) и 5), будем иметь $(A^{-1})'A' = I$ и $A'(A^{-1})' = I$, т. е. оператор $(A^{-1})'$ является обратным к оператору A'. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 2. При построении и исследовании сопряженных операторов встречается три типа линейности, которые следует различать: линейность функционала $A'f$, линейность оператора A' и линейность отображения сопряжения $A \to A'$. Например, равенство $A'f(x_1 + x_2) = A'f(x_1) + A'f(x_2)$ означает аддитивность функционала $A'f$, но не оператора A'.

Приведем несколько задач, при решении которых естественно возникают сопряженные операторы.

Пусть $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, X и Y — банаховы пространства. Требуется выяснить, имеет ли уравнение $Ax = y$ решение для заданного $y \in Y$. Иначе говоря, нужно описать образ $\operatorname{Im} A = \{y|\ y = Ax,\ x \in X\}$ оператора A.

Теорема 2. *Пусть X и Y — банаховы пространства и $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Замыкание $\overline{\operatorname{Im} A}$ образа оператора A есть множество векторов y, удовлетворяющих условию: $f(y) = 0$ для любого $f \in Y'$ такого, что $A'f = 0$.*

$\triangleright$ Пусть $L = \bigcap\limits_{A'f=0} \ker f = (\ker A')^{\perp}$ — множество векторов y, удовлетворяющих условию теоремы. Как пересечение замкнутых векторных подпространств, L есть замкнутое подпространство.

Пусть $A'f = 0$ и $y = Ax$. Тогда $f(y) = f(Ax) = A'f(x) = 0$. Это значит, что $\operatorname{Im} A \subset L$. Так как L замкнуто, то $\overline{\operatorname{Im} A} \subset L$.

Предположим теперь, что существует $y_0 \in L$ такой, что $y_0 \notin \overline{\operatorname{Im} A}$. Тогда, согласно следствию 3 теоремы Хана — Банаха (см. § 41), существует такой функционал f_0, что $f_0(y_0) \neq 0$ и $f_0(y) = 0$ для всех $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$. Тогда $A'f_0(x) = f_0(Ax) = 0$ и условие $y_0 \in L$ означает, что $f_0(y_0) = 0$. Полученное противоречие означает, что $\overline{\operatorname{Im} A} = L$. $\triangleleft$

Следствие 1. *Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ имело решение для данного $y \in Y$, необходимо, а если образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то и достаточно, чтобы $f(y) = 0$ для любого функционала f, удовлетворяющего однородному сопряженному уравнению $A'f = 0$.*

Следствие 2. *Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо для любого $y \in Y$, необходимо, чтобы уравнение $A'f = 0$ имело только нулевое решение.*

$\triangleright$ Если $\operatorname{Im} A = Y$, то, согласно теореме 2, для любого y и $f \in \ker A'$ выполнено $f(y) = 0$, т. е. $f = 0$. $\triangleleft$

Следствие 3. *Уравнение $A'f = 0$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\overline{\operatorname{Im} A} = Y$.*

Теорема 3. *Оператор $A : X \to Y$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}\colon Y \to X$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что справедливы неравенства*

$$\|x\| \leqslant C\|Ax\|, \quad x \in X, \tag{2}$$

$$\|f\| \leqslant C\|A'f\|, \quad f \in Y'. \tag{3}$$

$\triangleright$ *Необходимость.* Неравенства ограниченности для операторов A^{-1} и $(A')^{-1}$ совпадают с неравенствами (2) и (3).

Достаточность. Из (3) получаем, что $\ker A' = \{0\}$. Тогда по следствию 3 $\overline{\operatorname{Im} A} = Y$. Применяя теперь теорему 1 § 35 об обратных операторах, получаем существование ограниченного оператора A^{-1}. $\triangleleft$

Замечание 3. Если пространство X конечномерно, то единственность решения уравнения $Ax = y$ эквивалентна существованию решения для любой правой части. В бесконечномерном пространстве разрешимость уравнения $Ax = y$ для любой правой части не связана с единственностью решения. Например, пусть A — оператор одностороннего сдвига влево в пространстве l_2, заданный формулой $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Тогда $\operatorname{Im} A = l_2$, но $\ker A \neq 0$.

Некоторые виды операторов A, для которых свойство единственности решения эквивалентно существованию решения, будут рассмотрены в главе VIII.

§ 44. ПРИМЕРЫ СОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Формула $A'f(x) = f(Ax)$ задает явно действие сопряженного оператора на функционалах, поэтому построение сопряженного оператора сводится к подстановке A в формулу $A'f(x) = f(Ax)$. На практике в тех случаях, когда известны теоремы об общем виде функционала, вместо пространства функционалов рассматривают изоморфное ему другое, более удобное для вычислений пространство. Пусть функционал $f \in Y'$ представляется через элемент u пространства Y_1. Значение функционала $f(x)$ будем обозначать

$$f(x) = \langle u, x \rangle. \tag{1}$$

Тогда $f(Ax) = \langle u, Ax\rangle$. Обозначим через $A'u \in X_1$ элемент, соответствующий функционалу $A'f \in X'$. Тогда равенство $A'f(x) = f(Ax)$ запишется в виде

$$\langle A'u, x\rangle = \langle u, Ax\rangle. \tag{2}$$

Таким образом, сопряженный оператор A' можно определить как оператор $A'\colon Y_1 \to X_1$, удовлетворяющий равенству (2).

С более формальной точки зрения ситуация описывается следующей схемой. В теоремах об общем виде линейного функционала мы имеем изоморфизм $J : X' \to Z$ сопряженного пространства с некоторым банаховым пространством Z. Тогда сопряженный оператор в смысле определения (2) есть оператор $JA'J^{-1}$, где A' есть сопряженный оператор в смысле первоначального определения.

Например, в случае пространства $L_p(T, \mu)$ вместо пространства ограниченных линейных функционалов рассматриваем изоморфное ему пространство $L_q(T, \mu)$, где $1/p + 1/q = 1$. Подчеркнем, что вид сопряженного оператора в указанном смысле зависит от способа реализации сопряженного пространства. Например, изоморфизм J^{-1} между $L_q(T, \mu)$ и $(L_p(T, \mu))'$ можно задать формулой

$$L_q(T, \mu) \ni u \to f(x) = \int\limits_T x(t)u(t)g(t)\,dt,$$

где $g(t)$ есть произвольная фиксированная измеримая функция такая, что $|g(t)| = 1$. При таком представлении сопряженный оператор будет иметь несколько иной вид, чем в рассмотренных ниже примерах.

Примеры.

1. Пусть $X = \mathbf{C}^n$, $Y = \mathbf{C}^m$ и линейный оператор A задается матрицей размерности $n \times m$ с элементами (a_{ij}) обычной формулой умножения матрицы и вектора: $(Ax)_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$. Пространство, сопряженное к $\mathbf{C}^m$, реализуется как пространство $\mathbf{C}^m$ с помощью соответствия

$$\mathbf{C}^m \ni \xi \;\leftrightarrow\; f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i\xi_i = \langle \xi, x\rangle.$$

Поэтому из формулы (2) получаем

$$A'f(x) = f(Ax) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\xi_i = \langle \xi, Ax\rangle.$$

Построенный новый функционал представим в виде

$$\langle A'\xi, x\rangle = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i\right)x_j = \sum_{j=1}^{m} x_j\eta_j,$$

где

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i. \tag{3}$$

Таким образом, функционал, соответствующий вектору ξ, перешел под действием сопряженного оператора в функционал, соответствующий вектору η. В этом смысле будем говорить, что сопряженный оператор отображает вектор ξ в вектор η, т. е. сопряженный оператор действует по формуле (3), из которой видим, что действие оператора задается матрицей (a_{ji}), транспонированной к матрице (a_{ij}).

Обычно в курсе линейной алгебры критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений формулируется в следующем виде: система имеет решение тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы. Сформулируем критерий совместности в другом виде.

Применим к данному случаю теорему 2 § 43. Так как в конечномерном пространстве любое векторное подпространство замкнуто (теорема 1 § 28), из следствия 1 § 43 получаем следующую теорему, дающую условия разрешимости (критерий совместности) системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 1. *Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = y_i, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

имела решение для данного вектора $y = (y_1,\ldots,y_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $\sum\limits_{i=1}^{n} y_iu_i = 0$ *для любого вектора* $u = (u_1,\ldots,u_n)$ *из базиса в пространстве решений однородной транспонированной системы*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i = 0, \qquad j = 1,\ldots,m.$$

Сформулированный выше критерий часто более удобен для применения — проверка совместности сводится к вычислению значений конечного числа линейных функционалов на векторе y.

2. Рассмотрим в пространстве $L_p[0,1]$ интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $K(t,s)$ — ограниченная измеримая функция. Построим оператор, сопряженный к оператору A. Любой функционал $f \in (L_p[0,1])'$ представляется в виде

$$f(x) = \int_0^1 x(t)u(t)\,dt,$$

где $u \in L_q[0,1]$ (см. § 42). Возьмем функцию $u \in L_q[0,1]$ и посмотрим, как действует оператор A' на соответствующий ей функционал:

$$\langle A'u, x\rangle = \langle u, Ax\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds\right)u(t)\,dt.$$

Переставляя порядок интегрирования в последнем интеграле (что законно в силу теоремы Фубини), получим

$$\langle A'u, x\rangle = \int_0^1 x(s)\left[\int_0^1 K(t,s)u(t)\,dt\right]ds = \int_0^1 x(s)v(s)\,ds,$$

где $v(s) = \int\limits_0^1 K(t,s)u(t)\,dt$. Значит, сопряженный оператор A' переводит функционал, соответствующий функции u, в функционал, соответствующий функции v. Записав действие сопряженного оператора в стандартных обозначениях (поменяв местами переменные s и t), получаем, что сопряженный оператор действует по формуле

$$A'u(t) = \int_0^1 K(s,t)u(s)\,ds.$$

Таким образом, оператор, сопряженный к интегральному оператору с ядром $K(t,s)$, является интегральным оператором с ядром $K(s,t)$. Такое ядро называется *транспонированным* к ядру $K(t,s)$. Аналогичный результат справедлив в пространствах $L_p(T,\mu)$ для некоторых классов неограниченных ядер. Заметим, что для произвольного неограниченного ядра $K(t,s)$ может оказаться, что менять порядок интегрирования в предыдущем вычислении нельзя и в таком случае сопряженный оператор имеет другой вид.

Как известно, интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds = y(t) \tag{4}$$

может не иметь решения для некоторых $y(t)$. Получим условия разрешимости этого уравнения, опираясь на теорему 2 § 43.

Теорема 2. *Для того, чтобы уравнение (4) имело решение $x \in L_p[0,1]$ для данного $y \in L_p[0,1]$ необходимо, чтобы $\int\limits_0^1 y(t)u(t)\,dt = 0$ для любой функции $u \in L_q[0,1]$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению*

$$u(t) - \int\limits_0^1 K(s,t)u(s)\,ds = 0.$$

З а м е ч а н и е. Доказательство того, что полученное выше условие разрешимости является для рассматриваемого класса уравнений достаточным, требует более тонких рассуждений и будет проведено в § 50.

Проиллюстрируем, что дает теорема 2 на примере уравнения

$$x(t) - \int\limits_0^1 4t^2 s x(s)\,ds = t - a. \tag{5}$$

Запишем однородное сопряженное уравнение

$$u(t) - \int\limits_0^1 4s^2 t u(s)\,ds = 0. \tag{6}$$

Это уравнение с вырожденным ядром. Его решение будем искать в виде $u(t) = ct$. Подставляем u в левую часть уравнения (6), получаем $ct - \int_0^1 4s^2 tcs\,ds = 0$, т. е. для любого c функция ct является решением уравнения (6). Из теоремы 2 получаем, что условие разрешимости уравнения (5) имеет вид $\int_0^1 (t-a)ct\,dt = 0$. Вычисляя интеграл, получаем $c(1/3 - a/2) = 0$, откуда видим, что при $a = 2/3$ условие выполнено, а при $a \neq 2/3$ условие не выполнено и уравнение (5) решения не имеет.

3. Рассмотрим оператор $T_\alpha\colon L_p[0,1] \to L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < +\infty$, вида $T_\alpha x(t) = x(\alpha(t))$, где $\alpha\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывно дифференцируемое обратимое отображение отрезка $[0,1]$ в себя, $\alpha'(t) \neq 0$. Построим сопряженный оператор T'_α:

$$\langle u, T_\alpha x\rangle = \int_0^1 u(t)x(\alpha(t))\,dt = \Big[\tau = \alpha(t),\ t = \beta(\tau),\ dt = \beta'(\tau)\,d\tau\Big] =$$

$$= \int_0^1 u(\beta(\tau))x(\tau)\beta'(\tau)\,d\tau = \int_0^1 \beta'(\tau)u(\beta(\tau))x(\tau)\,d\tau = \langle T'_\alpha u, x\rangle.$$

Получаем, что сопряженный оператор T'_α действует в $L_q[0,1]$ по формуле $T'_\alpha u(t) = \beta'(t)u(\beta(t))$, где $\beta = \alpha^{-1}$.

§ 45. СПЕКТР ОПЕРАТОРА

Понятие спектра оператора было уже введено. Сейчас мы имеем достаточно предварительных сведений, чтобы доказать утверждение о непустоте спектра. В конечномерном случае спектр оператора совпадает с множеством корней характеристического многочлена соответствующей матрицы и существование спектральных значений является следствием теоремы о существовании корня многочлена — основной теоремы алгебры. Поэтому существование спектральных значений у любого линейного ограниченного оператора в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве не является простым фактом, его доказательство должно опираться на утверждения, более сильные, чем основная теорема алгебры. Такими утверждениями оказываются теорема Лиувилля из теории аналитических функций и теорема Хана — Банаха.

Напомним необходимые определения.

Определение 1. Пусть $A : X \to X$ — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X над полем $\mathbf{C}$. Точка $\lambda \in \mathbf{C}$ называется *регулярной точкой* оператора, если оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем X. Множество регулярных точек обозначается $\rho(A)$ и называется *резольвентным множеством* оператора A.

Определение 2. Комплексное число λ, не являющееся регулярным, называется *спектральным*. Множество спектральных точек $\sigma(A)$ оператора A называется *спектром* оператора A. Таким образом, по определению, $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$.

Определенная на $\rho(A)$ функция $(\lambda I - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A и обозначается $R(\lambda; A)$. Это функция комплексной переменной λ, значениями которой являются ограниченные линейные операторы.

Теорема 1. *Резольвентное множество $\rho(A)$ оператора A открыто. Резольвента $R(\lambda; A)$ является аналитической операторнозначной функцией в $\rho(A)$, т. е. эта функция в некоторой окрестности каждой точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ разлагается в ряд по степеням $\lambda - \lambda_0$ с операторными коэффициентами.*

$\triangleright$ Пусть λ_0 — фиксированная точка в $\rho(A)$. Тогда существует оператор $(\lambda_0 I - A)^{-1} := B$. Покажем, что комплексное число λ, для которого выполнено неравенство $|\lambda_0 - \lambda| < \|B\|$, принадлежит $\rho(A)$. Это и означает, что множество $\rho(A)$ открыто. В самом деле,

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)[I - \mu B], \tag{1}$$

где $\mu = \lambda_0 - \lambda$. В силу условия на μ к оператору, стоящему в квадратной скобке, применима теорема 3 § 35, этот оператор обратим и его обратный представляется в виде суммы ряда. Поэтому

$$R(\lambda; A) = [\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B^k](\lambda_0 I - A)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k B^{k+1}. \tag{2}$$

Равенство (2) показывает, что функция $R(\lambda; A)$ в окрестности точки $\lambda_0 \in \rho(A)$ разлагается в степенной ряд с операторными коэффициентами. $\triangleleft$

Теорема 2. *Спектр ограниченного оператора A есть непустое компактное множество в $\mathbf{C}$, принадлежащее кругу $|\lambda| \leqslant \|A\|$.*

$\triangleright$ Покажем, что $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leqslant \|A\|\}$. Если $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $(\lambda I - A) = \lambda(I - A/\lambda)$ обратим (см. теорему 2 § 35) и

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{A}{\lambda}\Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

В частности, имеем оценку

$$\|R(\lambda; A)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{1}{|\lambda|}\,\frac{1}{1 - \|A\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \tag{3}$$

при $|\lambda| > \|A\|$.

Так как резольвентное множество $\rho(A)$ открыто, $\sigma(A)$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{C}$, т. е. компактное множество.

Покажем, что $\sigma(A) \neq \emptyset$. Предположим противное. Тогда $\rho(A) = \mathbf{C}$. Следовательно, согласно теореме 1, $R(\lambda; a)$ есть целая функция, т. е. функция, определенная и аналитическая на всем $\mathbf{C}$. В силу непрерывности она ограничена на множестве $D = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leqslant 2\|A\|\}$. Согласно неравенству (3), она ограничена вне множества D. Значит, эта функция ограничена на всей комплексной плоскости. Причем из (3) следует, что $\|R(\lambda; A)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Таким образом, для любого $x \in X$ и каждого $f \in X'$ функция $\varphi(\lambda) = f(R(\lambda; A)x)$ есть целая (комплекснозначная) аналитическая функция, ограниченная и стремящаяся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля получаем, что $\varphi(\lambda) = 0$ для всех $x \in X$ и всех $f \in X'$. Из следствия 1 теоремы Хана — Банаха (см. § 41) вытекает, что $R(\lambda; A) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbf{C}$, что противоречит обратимости оператора $R(\lambda; A)$. $\triangleleft$

Замечание 1. Аналогичным образом можно ввести понятие спектра оператора в случае пространств над полем вещественных чисел. Однако в этом случае спектр может оказаться пустым.

Сформулируем здесь также теорему о спектре сопряженного оператора, доказательство которой будет проведено в следующем параграфе, так как оно требует некоторых подготовительных фактов.

Теорема 3. *Спектр сопряженного оператора $A' \colon X' \to X'$ совпадает со спектром оператора $A : X \to X$. Кроме того, $R(\lambda; A') = R(\lambda; A)'$ для чисел $\lambda \in \rho(A) = \rho(A')$.*

Классификация точек спектра

В силу теоремы Банаха об обратном операторе существование ограниченного обратного к оператору $\lambda I - A$ эквивалентно тому, что $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$ и $\ker(\lambda I - A) = 0$. Число λ является точкой спектра оператора A, если нарушено хотя бы одно из условий. В зависимости от того, какое из этих условий нарушено, можно провести классификацию точек спектра.

1. Число λ называется *собственным значением* оператора A, если $\ker(\lambda I - A) \neq 0$, т. е. существует $x \neq 0$ такой, что $Ax = \lambda x$. Такой вектор x называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ. Множество собственных значений называется *точечным спектром.*

2. Число λ называется *точкой непрерывного спектра* оператора A, если $\ker(\lambda I - A) = 0$, $\operatorname{Im}(\lambda I - A) \neq X$, $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} = X$.

3. Число λ называется *точкой остаточного спектра* оператора A, если $\ker(\lambda I - A) = 0$ и $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} \neq X$.

Замечание 2. Согласно следствию 3 теоремы 2 § 43 условие $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} \neq X$ эквивалентно тому, что число λ является собственным значением сопряженного оператора.

Таким образом, вся комплексная плоскость разбивается на четыре попарно непересекающихся множества: резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектр. Принципиальным отличием бесконечномерного случая от конечномерного является то, что в конечномерном случае все спектральные значения являются собственными значениями. Покажем на примерах, что в бесконечномерном случае появляются качественно новые возможности — непрерывный и остаточный спектры могут быть непустыми.

Примеры.

1. Пусть $X = \mathbf{C}^n$ и $A\colon X \to X$ — линейный оператор, заданный матрицей M. Оператор $\lambda I - A$ обратим тогда и только тогда, когда невырождена матрица $\lambda E - M$, т. е. $p(\lambda) = \det(\lambda E - M) \neq 0$. Таким образом, спектр оператора A состоит из корней характеристического многочлена $p(\lambda)$. Каждый из этих корней является собственным значением оператора A, и, значит, весь спектр оператора в конечномерном пространстве — точечный, а непрерывный и остаточный спектры пусты.

2. Пусть $X = C[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$. Уравнение $Ax = \lambda x$ в рассматриваемом случае имеет вид $tx(t) = \lambda x(t)$.Отсюда $(t-\lambda)x(t) \equiv 0$ и $x(t) = 0$. Значит, у оператора A нет собственных значений и точечный

спектр пуст. Если $\lambda \notin [0,1]$, то функция $1/(\lambda - t)$ непрерывна на $[0,1]$ и для любой функции $y \in C[0,1]$ функция $x(t) = y(t)/(\lambda - t)$ непрерывна и является решением уравнения $(\lambda I - A)x = y$. Значит, все точки λ, лежащие вне отрезка $[0,1]$, являются регулярными для оператора A.

Пусть теперь λ — точка отрезка $[0,1]$. Если $y(t) = (\lambda - t)x(t)$, где $x \in C[0,1]$, то $y(\lambda) = 0$. Для $y_0(t) \equiv 1$ получаем $\|y - y_0\| \geqslant 1$. Это значит, что образ оператора $\lambda I - A$, состоящий из таких функций y, имеет внешние точки и, следовательно, не является всюду плотным в $C[0,1]$. Значит, все точки отрезка $[0,1]$ являются точками остаточного спектра.

3. Пусть $X = L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < +\infty$, и $Ax(t) = tx(t)$. Как и в примере 2, получаем, что у оператора A нет собственных значений и если $\lambda \notin [0,1]$, то λ является регулярным значением. Если при некотором y уравнение $(\lambda I - A)x = y$ имеет решение, то $x(t) = y(t)/(\lambda - t)$. При $y_0(t) \equiv 1$ получаем, что $x(t) = 1/(\lambda - t)$ и не принадлежит пространству $L_p[0,1]$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Значит, функция y_0 не принадлежит $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и весь отрезок состоит из спектральных значений.

Покажем, что образ $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$ всюду плотен в пространстве $L_p[0,1]$. Если функция $y(t) = 0$ в окрестности точки $\lambda \in [0,1]$, то она является образом функции $x(t) = y(t)/(\lambda - t)$, принадлежащей $L_p[0,1]$. Для функции $y \in L_p[0,1]$ построим последовательность функций следующего вида: $y_n(t) = y(t)$, если $|t - \lambda| \geqslant 1/n$, и $y_n(t) = 0$, если $|t - \lambda| < 1/n$. Тогда $\|y - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Функции y_n принадлежат образу $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$, и, значит, $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} = L_p[0,1]$. Таким образом, все точки отрезка $[0,1]$ являются точками непрерывного спектра.

4. Пусть $X = l_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и оператор A задан формулой $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$ (оператор сдвига). Так как $\|A\| = 1$, спектр оператора A лежит в круге радиуса 1. Если $Ax = \lambda x$, то $x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots)$. При $|\lambda| < 1$ построенная последовательность принадлежит пространству l_p при всех p. При $|\lambda| = 1$ построенная последовательность принадлежит l_∞, но не принадлежит l_p при $p < \infty$. Таким образом, при $p = \infty$ спектр оператора A есть единичный круг $D = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$, причем все точки спектра являются собственными значениями. При $p < \infty$ все внутренние точки круга D есть собственные значения оператора A. В силу замкнутости спектра спектром оператора является весь единичный круг D.

Покажем, что при $p < \infty$ все точки окружности $|\lambda| = 1$ являются точками непрерывного спектра, т. е. покажем, что при таких λ образ $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$ всюду плотен в l_p. Согласно следствию 3 теоремы 2 § 43, для этого достаточно показать, что $\ker(\lambda I - A') = 0$. Для оператора A сопряженный A' действует в пространстве l_q, где $1/p + 1/q = 1$ при $1 < p < \infty$ и $q = \infty$ при $p = 1$, и имеет вид $A'u = (0, u_1, u_2, \ldots)$. Если $A'u = \lambda u$ для некоторой последовательности $u = (u_1, u_2, \ldots)$, то $0 = \lambda u_1$, $u_1 = \lambda u_2, \ldots$ и, следовательно, $u = 0$. Значит, $\ker(\lambda I - A') = 0$, и при $1 \leqslant p < +\infty$ окружность $|\lambda| = 1$ состоит из точек непрерывного спектра.

§ 46. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ

С помощью ограниченных линейных функционалов в нормированном пространстве вводится новый тип сходящихся последовательностей.

Определение 1. Последовательность x_n точек банахова пространства X *слабо сходится* к точке $x_0 \in X$ (обозначается $x_n \rightharpoonup x_0$), если для любого $f \in X'$ выполнено $f(x_n) \to f(x_0)$.

Очевидно, что если последовательность x_n сходится к x_0 по норме, то она сходится слабо. Действительно, $|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leqslant \leqslant \|f\| \, \|x_n - x_0\| \to 0$.

Покажем на примерах, что слабо сходящаяся последовательность может не сходиться по норме.

П р и м е р ы.

1. В пространстве $\mathbf{c}_0$ последовательность $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ по норме не сходится, так как $\|e_i - e_j\| = 1$ при $i \neq j$. Покажем, что она сходится слабо. Действительно, любой функционал $f \in (\mathbf{c}_0)'$ представляется в виде $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k$, где $\sum\limits_{k+1}^{\infty} |\xi_k| < +\infty$. Тогда $f(e_k) = \xi_k \to 0$.

2. В пространстве l_1 последовательность $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ не сходится по норме и не сходится слабо. Для функционалов вида, рассмотренного в примере 1, получаем $f(e_k) \to 0$, поэтому слабым пределом может быть только точка 0. Рассмотрим на l_1 ограниченный линейный функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. Тогда $f(e_k) = 1 \not\to 0$. Значит, рассматриваемая последовательность не сходится слабо.

Использование слабой сходимости позволяет получить ряд утверждений при более слабых предположениях. Например, при исследовании уравнений часто удается построить последовательность, слабо сходящуюся к решению, в то время как построить последовательность, сходящуюся к решению по норме, значительно сложнее.

Если значения функционалов на элементе x трактовать как "координаты" точки x, то слабую сходимость можно рассматривать как аналог покоординатной сходимости в пространствах последовательностей.

Пусть X — банахово пространство, X' — его сопряженное. Зафиксируем точку $x \in X$ и величину $f(x)$ будем рассматривать как функционал от переменной f. Получаем функционал $g_x(f) = f(x)$, определенный на пространстве X'. Из соотношений

$$g_x(f_1 + f_2) = g_x(f_1) + g_x(f_2), \qquad g_x(\lambda f) = \lambda g_x(f),$$

$$|g_x(f)| = |f(x| \leqslant \|f\| \, \|x\|$$

видно, что функционал g_x линеен и ограничен, т. е. $g_x \in (X')'$, причем $\|g_x\| \leqslant \|x\|$. Согласно следствию 1 теоремы Хана — Банаха (§ 41), существует функционал f_0 такой, что $f_0(x) = \|x\|$ и $\|f_0\| = 1$. Поэтому

$$\|g_x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geqslant f_0(x) = \|x\|.$$

Значит, $\|g_x\| = \|x\|$. В результате получаем т. н. каноническое вложение J пространства X в X'' — изометрическое отображение $J\colon X \to (X')' := X''$, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие функционал g_x из пространства, сопряженного к X', т. е. второго сопряженного пространства.

При таком вложении слабой сходимости в X соответствует поточечная сходимость в множестве $J(X)$, состоящем из функций (функционалов) на X'.

Как будет показано ниже, возможен случай $J(X) = X''$ и случай $J(X) \neq X''$. По такому свойству банаховы пространства делятся на два класса.

Определение 2. Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если $J(X) = X''$.

Поскольку J — инъективное отображение, то в случае рефлексивного пространства X отображение J является биекцией между X и

X''. Поэтому свойство рефлексивности можно перефразировать следующим образом.

Пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда справедлива следующая теорема об общем виде линейного ограниченного функционала на сопряженном пространстве: для любого ограниченного линейного функционала Φ на пространстве X' существует точка $x_0 \in X$ такая, что Φ представляется в виде $\Phi(f) = f(x_0)$.

Примеры.

3. Пусть $X = L_p[0,1]$, $1 < p < +\infty$, тогда, согласно теореме Рисса, $(L_p[0,1])' \cong L_q[0,1]$ и $\big((L_p[0,1])'\big)' \cong L_p[0,1]$, причем последний изоморфизм, построенный с помощью теоремы Рисса, совпадает с отображением J, построенным выше. Таким образом, пространство $L_p[0,1]$ при $1 < p < +\infty$ является рефлексивным.

4. Пусть $\mathbf{c}_0$ — пространство последовательностей $x = (x_k)$ таких, что $x_k \to 0$ с нормой $\|x\| = \max\limits_k |x_k|$. Как показано в § 42, $(\mathbf{c}_0)' \cong l_1$ и $(l_1)' \cong l_\infty$, причем отображение $J\colon \mathbf{c}_0 \to l_\infty$ является естественным вложением, но $\mathbf{c}_0 \neq l_\infty$. Значит, пространство $\mathbf{c}_0$ нерефлексивно.

5. Сопряженное пространство к $C[0,1]$ есть пространство функций ограниченной вариации, полунепрерывных слева и таких, что $g(0) = 0$. Можно показать, что определенный на пространстве $(C[0,1])'$ линейный ограниченный функционал вида $\Phi(g) = \int\limits_0^{1/2} dg(t) = g(1/2)$ не может быть представлен в виде $\Phi(g) = \int\limits_0^1 x(t)\, dg(t)$ с непрерывной функцией x. Значит, пространство $C[0,1]$ также не является рефлексивным.

В случае рефлексивных банаховых пространств справедлив ряд теорем, которые для произвольных банаховых пространств могут оказаться неверными. Часто доказательства в случае рефлексивных пространств упрощаются. Сформулируем несколько результатов такого типа.

Пусть X — рефлексивное банахово пространство и $A \in LB(X)$. Тогда, отождествляя пространство X'' с пространством X с помощью канонического отображения J, получаем, что $(A')' = A$. Действительно, для функционала $\Phi \in X''$ найдется точка $x_0 \in X$ такая, что $\Phi(f) = f(x_0)$ для всех $f \in X'$ и

$$A''\Phi_{x_0}(f) = \Phi(A'f) = A'f(x_0) = f(Ax_0) = \Phi_{Ax_0}(f).$$

Последняя запись означает, что A'' переводит функционал, соответствующий точке x_0, в функционал, соответствующий точке Ax_0, т. е. A'' действует так же, как A. В этом смысле можно считать, что $A'' = A$. Отсюда получаем, например, что в теореме 2 § 43 и ее следствиях можно поменять местами операторы A и A'. Получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство и $A \in LB(X, X)$. Тогда $\overline{\operatorname{Im} A'}$ совпадает с $(\ker A)^{\perp}$ — множеством функционалов f таких, что $f(x) = 0$, если $Ax = 0$.*

Отметим, что в нерефлексивных банаховых пространствах такое утверждение неверно.

Пример 6. Пусть $X = L_1[0,1]$ и оператор $A\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ задан формулой $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$. Тогда $\ker A = \{0\}$ и, следовательно, $(\ker A)^{\perp} = L_1'[0,1] = L_{\infty}[0,1]$. Вычислим действующий в $L_{\infty}[0,1]$ сопряженный оператор A':

$$\langle g, Ax\rangle = \int\limits_0^1\int\limits_0^t x(s)g(t)\,dsdt = \int\limits_0^1 x(s)\int\limits_s^1 g(t)\,dtds = \langle A'g, x\rangle,$$

т. е. $A'g(s) = \int\limits_s^1 g(t)\,dt$.

Функции, принадлежащие образу $\operatorname{Im} A'$, удовлетворяют условию Липшица и обращаются в нуль в точке $s = 1$. Это множество не является всюду плотным в $L_{\infty}[0,1]$, так как, например, в окрестности функции $f_0(s) \equiv 1$ нет функций указанного вида. Можно показать, что замыкание образа данного оператора состоит из непрерывных функций, обращающихся в нуль в точке 1, и это замыкание существенно меньше всего пространства $L_{\infty}[0,1]$.

Приведем здесь доказательство теоремы 3 из § 45 о спектре сопряженного оператора, так как это доказательство использует каноническое вложение $J : X \to X''$. Напомним формулировку.

Теорема. *Спектр сопряженного оператора $A'\colon X' \to X'$ совпадает со спектром исходного оператора $A : X \to X$. Кроме того, $R(\lambda; A') = R(\lambda; A)'$ для чисел $\lambda \in \rho(A) = \rho(A')$.*

$\triangleright$ Если оператор $\lambda I - A$ обратим, то, согласно свойству 6 § 43 , обратим оператор $\lambda I - A'$. Это означает, что $\rho(A) \subset \rho(A')$ и $\sigma(A') \subset \sigma(A)$. В случае рефлексивного пространства обратное включение является следствием доказанного: $\rho(A') \subset \rho(A'') = \rho(A)$.

В случае нерефлексивного пространства X требуются дополнительные рассуждения. Пусть оператор $A'-\lambda I$ обратим. Тогда, согласно теореме 3 § 43, выполнены неравенства

$$\|(\lambda I - A')f\| \geqslant C\|f\| \quad \forall f \in X',$$

$$\|(\lambda I - A'')g\| \geqslant C\|g\| \quad \forall g \in X'',$$

Подставляя в последнее неравенство функционалы вида $g_x = Jx$, получаем

$$\|(\lambda I - A'')g_x\| = \|(\lambda I - A)x\| \geqslant C\|g_x\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Из полученных неравенств, согласно теореме 3 § 43, следует обратимость оператора $\lambda I - A$ и включение $\rho(A') \subset \rho(A)$. $\lhd$

Сопряженное пространство является банаховым пространством и в нем имеет смысл понятие слабой сходимости. А именно, последовательность $f_n \in X'$ сходится слабо к f_0, если $g(f_n) \to g(f_0)$ для любого элемента g из X''. Но в ряде задач более естественна другая сходимость в пространстве X', совпадающая с точечной сходимостью функционалов, как функций на X.

Определение 3. Последовательность $f_n \in X'$ *сходится* $*$*-слабо* к f_0, если $f_n(x) \to f_0(x)$ для любого $x \in X$.

В случае рефлексивного пространства функционал $g \in X''$ представляется в виде $g(f) = f(x)$, где $x \in X$ и слабая сходимость совпадает со $*$-слабой сходимостью. В случае нерефлексивных пространств эти виды сходимости различны; из слабой сходимости следует $*$-слабая сходимость, но обратное неверно.

П р и м е р 7. Рассмотрим на пространстве $\mathbf{c}_0$ последовательность функционалов $f_k(x) = x_k,\ x \in \mathbf{c}_0$. Тогда для любого $x \in \mathbf{c}_0$ имеем $f_k(x) \to 0$, т. е. эта последовательность сходится $*$-слабо к нулю. Но слабой сходимости к нулю нет. Сопряженное пространство $(\mathbf{c}_0)'$ изоморфно пространству l_1, при этом изоморфизме функционалу f_k соответствует последовательность $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in l_1$. Но эта последовательность, как показано в примере 2, не сходится слабо к точке 0. Действительно, рассмотрим на l_1 функционал $\Phi(u) = \sum u_j$. Тогда имеем $\Phi(f_k) = \Phi(e_k) = 1 \not\to 0$.

Введенной $*$-слабой сходимости соответствует $*$-слабая топология на сопряженном пространстве, в которой база окрестностей функционала f_0 задается множествами вида

$$V(f_0; x_1, ..., x_n,\ r) = \{f \in X' \ :\ |f(x_k) - f_0(x_k)| < r\ \},$$

где $r > 0$, $x_1, ..., x_n$ — произвольный конечный набор элементов из X. Фактически это топология поточечной сходимости в пространстве функций на X. Одно из замечательных свойств этой топологии сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2 (Банах — Алаоглу). *Замкнутый шар в пространстве, сопряженном к нормированному, является компактным множеством в $*$-слабой топологии.*

$\triangleright$ Пусть K — единичный отрезок в случае вещественного пространства или единичный круг в случае комплексного пространства. Рассмотрим произведение $Z = \prod_{x \in X} Z_x$, где все $Z_x = K$. По теореме Тихонова (см. приложение, § 7) это произведение компактно в тихоновской топологии. По определению произведения пространство Z есть множество числовых функций на X со значениями в K. Но единичный шар в сопряженном пространстве также состоит из таких функций. Поэтому шар является подмножеством в Z. Это подмножество замкнуто и, следовательно, компактно в топологии произведения. Для окончания доказательства осталось заметить, что $*$-слабая топология на шаре совпадает с топологией произведения.$\triangleleft$

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

§ 47. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Как уже было отмечено, операторы в конечномерном пространстве обладают рядом свойств, которые не переносятся на произвольные ограниченные операторы в бесконечномерных пространствах. Например, утверждение, что, если $Ker\, A = \{0\}$, то $Im\, A = X$, справедливо для линейного оператора $A : X \to X$ в случае конечномерного пространства X и может быть неверным в бесконечномерном случае. В этом и последующих параграфах будет изучен класс операторов, обладающих некоторыми свойствами операторов в конечномерных пространствах. Особый интерес к этому классу операторов связан также с тем, что в него входят многие интегральные операторы, и это позволяет получить более детальную информацию о интегральных уравнениях.

Определение 1. Пусть X и Y — банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным* (или *вполне непрерывным*), если он любое ограниченное множество из X переводит в множество, предкомпактное в Y.

Напомним, что оператор A является ограниченным (непрерывным), если он ограниченное множество переводит в ограниченное. Отличие класса компактных операторов от произвольных ограниченных операторов основано на том, что ограниченные множества в бесконечномерных пространствах могут не быть предкомпактными.

Примеры.

1. Если пространства X и Y конечномерны, то любой линейный оператор ограничен, значит, он переводит ограниченное множество в ограниченное, но в конечномерном пространстве любое ограниченное множество предкомпактно. Таким образом, в конечномерных пространствах все линейные операторы компактны.

2. Пусть X и Y — произвольные нормированные пространства. Напомним, что линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ называется *оператором конечного ранга*, если его образ $Im\, A$ является конечномерным пространством.

Покажем, что операторы конечного ранга являются компактными. Если множество $M \subset X$ ограниченное, то множество $A(M) \subset Y$ ограничено и в силу конечномерности $Im\, A$ множество $A(M)$ предкомпактно. В частности, если Y конечномерно, то любой ограниченный линейный оператор компактен. Заметим, что без условия ограниченности оператора из того, что образ оператора является конечномерным подпространством, не следует, что оператор является компактным.

3. Интегральный оператор с вырожденным ядром.

В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор с вырожденным ядром, т. е. оператор вида

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $K(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)b_k(s)$, где $a_k(t), b_k(s)$ — непрерывные функции. Тогда

$$Ax(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \int_0^1 b_k(s)x(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t),$$

т. е. образ $Im\, A$ принадлежит конечномерному пространству L, порожденному функциями $a_k(t)$. Как показано выше, интегральный оператор A является ограниченным, следовательно, это оператор конечного ранга и он компактен.

4. Для нулевого оператора образом является одна точка, значит, он компактен.

5. Тождественный оператор I в конечномерных пространствах является компактным (см. пример 1). Если пространство X бесконечномерно, то единичный шар в нем, согласно теореме Рисса (§ 28), не предкомпактен. Оператор I переводит шар в себя, т. е. ограниченное множество в множество, не являющееся предкомпактным, значит, в любом бесконечномерном пространстве I не является компактным оператором. Аналогично не является компактным любой обратимый оператор в бесконечномерном пространстве.

6. Оператор вложения $J : C^1[0,1] \to C[0,1]$ действует по формуле $Jx = x$. Покажем, что J — компактный оператор. Пусть M — ограниченное множество в $C^1[0,1]$, т. е. $\|x\|_1 \leqslant C$. Покажем, что множество M предкомпактно в $C[0,1]$. Согласно теореме Арцела — Асколи (см. § 24), нужно проверить, что множество M равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Для $x \in M$ из условия $\|x\|_1 \leqslant C$ получаем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \leqslant C, \tag{1}$$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x'(t)| \leqslant C. \tag{2}$$

Неравенство (1) означает равномерную ограниченность множества M. Из неравенства (2) и оценки

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |x'(\xi)|\,|t_1 - t_2| \leqslant C|t_1 - t_2|$$

получаем, что при $\delta < \varepsilon/C$ для любых $x \in M$ и любых $|t_1 - t_2| < \delta$ имеем $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$, что означает равностепенную непрерывность множества M в $C[0,1]$. Таким образом, множество M предкомпактно в $C[0,1]$ и оператор J компактен.

7. Оператор умножения на функцию a в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$ не является компактым, за исключением случая $a = 0$.

Рассмотрим сначала случай пространства $L_p[0,1]$. Если $a \neq 0$, то существует такое число $d > 0$, что $|a(t)| \geqslant d$ на некотором измеримом множестве $T_0 \subset [0,1]$ положительной меры.Тогда на бесконечномерном подпространстве $L_p(T_0) \subset L_p[0,1]$, состоящем из функций, равных нулю вне множества T_0, оператор A имеет ограниченный обратный. Как будет показано ниже (см. замечание 6 § 48), это невозможно, если A компактен.

Требуемое свойство можно получить и непосредственно по определению. Для этого следует построить такую ограниченную последовательность u_k из $L_p(T_0)$, что $\|A(u_k - u_n)\| \geqslant C > 0$.

Рассмотрим случай пространства $C[0,1]$. Пусть $a \in C[0,1]$ и $a(t_0) \neq 0$. Последовательность функций $\sin n(t - t_0)$ ограничена, ее образ при умножении на заданную функцию $a(t)$ есть множество функций вида $a(t) \sin n(t - t_0)$, которое не является равностепенно непрерывным и, значит, не является предкомпактным.

Множество компактных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, обозначим $K(X, Y)$.

Свойства компактных операторов

1. ***Если A и B — компактные операторы, то оператор $A+B$ компактен.***

$\triangleright$ Пусть M — ограниченное множество. В образе $(A+B)(M)$ возьмем последовательность $y_n = (A+B)x_n$. В силу компактности оператора A из последовательности Ax_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность Ax_{n_k}, а из подпоследовательности Bx_{n_k} в силу компактности B — сходящуюся подпоследовательность $Bx_{n_{k_i}}$. Подпоследовательность $(A+B)x_{n_{k_i}}$ сходится, значит, множество $(A+B)(M)$ предкомпактно и оператор $A+B$ компактен. $\triangleleft$

2. ***Пусть X, X_1, Y, Y_1 — банаховы пространства. Если A — компактный оператор из X в Y, $B \in LB(Y, Y_1)$ и $C \in LB(X_1, X)$, то операторы BA и AC компактны.***

$\triangleright$ Если M — ограниченное множество в X, то $A(M)$ предкомпактно, и, так как равномерно непрерывное отображение переводит предкомпактное множество в предкомпактное (см. § 24), то множество $B(A(M))$ предкомпактно в Y_1.

Если M — ограниченное множество в X_1, то $C(M)$ — ограниченное множество в X, и, поскольку оператор A компактен, $A(C(M))$ есть предкомпактное множество.

В частности, оператор умножения на число λ ограничен, и, значит, λA — компактный оператор. $\triangleleft$

3. Теорема 1. *Если последовательность компактных операторов $A_n \in K(X,Y)$ сходится по норме к оператору $A \in LB(X,Y)$, то A — компактный оператор.*

$\triangleright$ Пусть M — ограниченное множество в X и $\|x\| \leqslant C$ для $x \in M$. Для доказательства предкомпактности множества $A(M)$ воспользуемся теоремой Хаусдорфа (см. § 23) и для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим конечную ε-сеть для множества $A(M)$. Выберем номер n_0 так, чтобы выполнялось $\|A_{n_0} - A\| \leqslant \varepsilon/2C$. Так как множество $A_{n_0}(M)$ предкомпактно, для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть $S = (s_1, \ldots, s_m)$. Покажем, что S является ε-сетью для $A(M)$. Пусть $y \in A(M)$, т. е. $y = Ax$, $x \in M$. Существует s_i такое, что $\|s_i - A_{n_0}x\| \leqslant \varepsilon/2$. Тогда

$$\|y - s_i\| \leqslant \|y - A_{n_0}x\| + \|A_{n_0}x - s_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A - A_{n_0}\| \, \|x\| + \varepsilon/2 \leqslant (\varepsilon/2C)C + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. $\triangleleft$

4. Теорема 2 (Ю. Шаудер). *Оператор компактен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор компактен.*

$\triangleright$ Если $A \in K(X,Y)$, тогда $A' \in L(Y',X')$. Пусть M — ограниченное множество в Y' и $\|f\| \leqslant c$ для $f \in M$. Тогда для $g = A'f$ имеем

$$\|g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(Ax)| =$$

$$= \sup_{y\in A(S)} |f(y)| = \sup_{y\in \overline{A(S)}} |f(y)| = \|f\|_{C(T)}, \tag{3}$$

где S — единичный шар в X, $T = \overline{A(S)}$. Множество $A(S)$ предкомпактно, а $\overline{A(S)}$ компактно в Y.

Функционалу g поставим в соответствие сужение функционала f на множество T, т. е. элемент пространства $C(T)$ непрерывных функций на T. Формула (3) показывает, что это соответствие изометрично. Поэтому достаточно доказать предкомпактность в $C(T)$ множества M функционалов f, для чего проверим выполнение условий теоремы 3 § 24. Действительно, для $y \in T$ имеем

$$|f(y)| \leqslant \|f\|\,\|y\| \leqslant c\|A\|\,\|x\| \leqslant c\|A\|,$$

т. е. множество M равномерно ограничено.

Если при $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/c$, то из неравенства $\|y_1 - y_2\| < \delta$ следует, что $|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant \|f\|\,\|y_1 - y_2\| \leqslant c\cdot\varepsilon/c = \varepsilon$, т. е. множество M равностепенно непрерывно в $C(T)$.

Докажем теперь, что из компактности A' следует компактность A. По доказанному из компактности A' следует компактность A''. Если пространство X рефлексивно, то $A = A''$ и утверждение доказано. В случае нерефлексивного пространства оператор A'' определен на пространстве X'', содержащем X, причем его действие на X совпадает с действием A. Поэтому из компактности A'' следует компактность оператора A. $\triangleleft$

Из свойств 1 и 3 следует, что множество $K(X,Y)$ компактных операторов является замкнутым векторным подпространством в пространстве $LB(X,Y)$ линейных ограниченных операторов. В случае $X = Y$ в пространстве $LB(X)$ определена также операция умножения и это пространство является алгеброй. Свойства 1 — 3 означают, что множество $K(X)$ является замкнутым идеалом в алгебре операторов $LB(X)$.

Из примера 2 и свойства 3 следует, что предел последовательности операторов конечного ранга является компактным оператором.

Для гильбертовых пространств и банаховых пространств со счетным базисом верно обратное: любой компактный оператор A является пределом сходящейся по норме последовательности операторов конечного ранга. Требуемая последовательность операторов конечного ранга может быть построена по формуле $A_n = P_n A P_n$, где P_n — проектор на первые n базисных векторов. Однако это не общий факт: существуют сепарабельные банаховы пространства, в которых есть компактные операторы, не являющиеся пределами последовательностей операторов конечного ранга.

§ 48. КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе получены достаточные условия на функцию $K(t,s)$, при которых интегральный оператор с ядром $K(t,s)$ является компактным в соответствующем пространстве.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и пусть функция $K(t,s)$, определенная на $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существует постоянная C такая, что*

$$\int\limits_{\Omega} |K(t,s)|\, ds < C \quad \forall t \in \overline{\Omega};$$

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$ следует $\int\limits_{\Omega} |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\, ds < \varepsilon$.*

Тогда интегральный оператор, действующий по формуле

$$Ax(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)\, ds,$$

компактен в $C(\overline{\Omega})$.

$\triangleright$ Аналогично доказательству теоремы 3 § 27 проверяем, что оператор A действует из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$ и ограничен. Возьмем ограниченное множество M в $C(\overline{\Omega})$, т. е. пусть $\|x\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_1$ для $x \in M$. Тогда множество $A(M)$ ограничено в $C(\overline{\Omega})$. Для доказательства предкомпактности множества $A(M)$ достаточно показать в силу теоремы 3 § 24, что оно равностепенно непрерывно. Проверим равностепенную непрерывность $A(M)$. Для $\varepsilon/C_1 > 0$ возьмем $\delta > 0$ из условия 2) теоремы 1. Тогда если $|t_1 - t_2| < \delta C_1$, то

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = \left| \int\limits_{\Omega} [K(t_1, s) - K(t_2, s)]x(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{\Omega} |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, ds \leqslant C_1 \frac{\varepsilon}{C_1} = \varepsilon. \lhd$$

Следствие 1. *Если $K(t, s)$ — непрерывная функция двух переменных в ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$, то интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ компактен в $C(\overline{\Omega})$.*

$\rhd$ Проверим выполнение условий 1) и 2) теоремы 1. Условие 1) следует из ограниченности функции $K(t, s)$. В силу равномерной непрерывности функции $K(t, s)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in \overline{\Omega}$ и удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$ выполнено $|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \varepsilon/\mu(\Omega)$. Тогда $\int\limits_{\Omega} |K(t_1, s) - K(t_2, s)| \leqslant \varepsilon$ и условие 2) выполнено. $\lhd$

Теорема 2. *Пусть (T, Σ, μ) — пространство с конечной или σ-конечной мерой, функция $K \in L_2(T \times T)$, т. е. она измерима и*

$$\int\limits_T \int\limits_T |K(t, s)|^2\, d\mu(s) d\mu(t) = M^2 < +\infty.$$

Тогда интегральный оператор A с ядром $K(t, s)$ компактен в пространстве $L_2(T, \mu)$.

$\rhd$ Согласно примеру 2 § 33 интегральный оператор A является пределом (в смысле сходимости по норме) интегральных операторов A_n конечного ранга. Следовательно, A компактен. $\lhd$

Следствие 1. *Если Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и ядро $K(t, s)$ непрерывно на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, то интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ компактен в $L_2(\Omega)$.*

Интегральный оператор, ядро $K(t, s)$ которого удовлетворяет условию теоремы 2, называется *оператором Гильберта — Шмидта*. Заметим, что условие теоремы является достаточным для компактности, но не является необходимым — существуют компактные интегральные операторы, не являющиеся операторами Гильберта — Шмидта (см. замечание 4 в § 50).

Приведем один из результатов для пространств L_p.

Теорема 3. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и пусть ядро $K(t,s)$ непрерывно в $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. Тогда интегральный оператор A с ядром $K(t,s)$ является компактным оператором в $L_p(\Omega)$ при $1 \leqslant p < +\infty$.*

$\rhd$ Пусть M — ограниченное множество в $L_p(\Omega)$. Покажем, что множество $A(M)$ предкомпактно в $L_p(\Omega)$.

Пусть $C_1 = \sup\limits_{t,s} |K(t,s)|$ и $\|x\|_{L_p} \leqslant C_2$ для $x \in M$. Тогда

$$|Ax(t)| = \left| \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)\,ds \right| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |K(t,s)|^q\,ds \right)^{1/q} \|x\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant C_1[\mu(\Omega)]^{1/q} = C_3,$$

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_s |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \mu^{1/q}(\Omega)\|x\|_{L_p}.$$

В силу равномерной непрерывности функции $K(t,s)$ для $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется неравенство $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon[\mu(\Omega)]^{-1/q}$. Тогда имеем $|Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon$. Это означает, что множество $A(M)$ принадлежит $C(\overline{\Omega})$ и предкомпактно в нем. Тогда у любой последовательности (Ax_n), $x_n \in M$, существует равномерно сходящаяся подпоследовательность, а из равномерной сходимости следует сходимость в $L_p(\Omega)$. Следовательно, $A(M)$ предкомпактно в $L_p(\Omega)$. $\lhd$

Замечание 1. Для других классов ядер компактность в $L_p(\Omega)$ интегральных операторов можно проверить с помощью критерия предкомпактности множества в $L_p(\Omega)$ (см. § 24) или с помощью аппроксимации операторами конечного ранга.

Замечание 2. По ходу доказательства теоремы 3 доказано следующее свойство: если ядро $K(t,s)$ непрерывно в $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ и функция $x \in L_p(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, то $Ax(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)\,ds$ является непрерывной функцией.

Теорема 4. *Интегральный оператор $Ax(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ со слабополярным ядром $K(t,s)$ компактен в пространстве $C[a,b]$.*

$\rhd$ В примере 4 § 33 построена последовательность непрерывных функций $K_n(t,s)$ такая, что интегральные операторы A_n с ядрами $K_n(t,s)$ сходятся по норме к оператору A. Операторы A_n компактны в силу следствия теоремы 1 и, значит, оператор A компактен, как предел последовательности компактных операторов. $\triangleleft$

Замечание 3. В случае пространств $\mathbf{R}^n$ ядро интегрального оператора $K(t,s)$ называется *слабополярным*, если оно может быть представлено в виде

$$K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha < n$, $|t-s| = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|t_k - s_k|^2\Big)^{1/2}$ — расстояние между точками t и s в $\mathbf{R}^n$, $K_0(t,s)$ — непрерывная функция. Аналогично теореме 4 получаем, что если Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, то интегральный оператор со слабополярным ядром компактен в пространстве $C(\overline{\Omega})$.

Теорема 5. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и пусть ядро $K(t,s)$ представляется в виде (1), где $\alpha < n/2$ и $K_0(t,s)$ — ограниченная измеримая функция. Тогда интегральный оператор с ядром $K(t,s)$ является оператором Гильберта — Шмидта и, следовательно, компактен в пространстве $L_2(\Omega)$.*

$\triangleright$ Проверим, что

$$\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |K(t,s)|^2\,dsdt < +\infty,$$

откуда, согласно теореме 2, следует компактность оператора.

Пусть $|K_0(t,s)| \leqslant C_1$ и $|t-s| \leqslant R$ для любых t и s из Ω. Тогда

$$\int\limits_\Omega |K(t,s)|^2\,ds \leqslant C_1^2 \int\limits_\Omega |t-s|^{-2\alpha}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C_1^2 \int\limits_{|s|\leqslant R} |s|^{-2\alpha}\,ds = C_1^2\omega_n \int\limits_0^r r^{n-1-2\alpha}\,dr, \tag{2}$$

где ω_n — площадь единичной сферы в пространстве $\mathbf{R}^n$. В силу условия $\alpha < n/2$ последний интеграл в (2) существует и справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega |K(t,s)|^2\,ds \leqslant C_2, \tag{3}$$

из которого после интегрирования по t получаем (1). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 4. Слабополярное ядро при $\alpha < n/2$ удовлетворяет условию (3), более сильному, чем необходимо для компактности оператора A. Это условие будет использовано далее в теореме Гильберта — Шмидта (§ 52).

П р и м е р ы интегральных операторов, которые не являются компактными.

1. Пусть $K \in L_1(\mathbf{R})$ и оператор A действует в $L_2(\mathbf{R})$ по формуле

$$Ax(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)x(s)\,ds.$$

После преобразования Фурье оператор A перейдет в оператор $\hat{A}$ умножения на функцию $\hat{K}(\xi)$, который не является компактным, если $K \neq 0$ (см. пример 7 § 47).

2. Интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_{0}^{t} \frac{1}{t}x(s)\,ds$$

в пространстве $C[0,1]$ ограничен, но не является компактным. Действительно, образ ограниченного множества $M = \{\cos(nt), n = 1, 2, \dots\}$ есть множество $M_1 = \{-1/(nt)\sin(nt)\}$, не являющееся равностепенно непрерывным.

З а м е ч а н и е 5. Условие $\alpha < n$ в замечании 3 теоремы 4 существенно: если $\alpha = n$ и $K_0(t,t) \neq 0$, то интегральный оператор с ядром $K(t,s)$ не является даже ограниченным в пространстве $C(\overline{\Omega})$.

З а м е ч а н и е 6. Если компактный оператор $A : X \to X$ имеет ограниченный обратный A^{-1}, то тождественный оператор $I = AA^{-1}$ по свойству 2 § 47 является компактным, и, значит, пространство X конечномерно. Поэтому для уравнений $Ax = y$ с компактным оператором A в бесконечномерных пространствах всегда неверна теорема существования и единственности решения. Это относится, в частности, к интегральным уравнениям первого рода $\int_T K(t,s)x(s)\,ds = y(t)$ в случае, если $K(t,s)$ обеспечивает компактность оператора A. Заметим, что физические соображения, приводящие к указанному качественному отличию интегральных уравнений 1-го и 2-го рода, содержатся в § 22. Задача о разрешимости уравнений 1-го рода относится к числу так называемых некорректных задач, для решения которых разработана теория, выходящая за рамки настоящей книги.

§ 49. ТЕОРИЯ РИССА — ШАУДЕРА УРАВНЕНИЙ С КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ. ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

При исследовании интегральных уравнений 2-го рода Э. Фредгольм получил ряд теорем, заведомо не имеющих места для произвольных уравнений. В дальнейшем Ф. Рисс и Ю. Шаудер показали, что особые свойства этого класса уравнений вытекают из компактности интегральных операторов, и построили общую теорию уравнений с компактными операторами.

Пусть X — банахово пространство, $K\colon X \to X$ — компактный линейный оператор. Основным объектом исследования является уравнение вида

$$x - Kx = y. \tag{1}$$

Вместе с (1) рассматривается однородное уравнение

$$x - Kx = 0 \tag{2}$$

и два уравнения в сопряженном пространстве X' : сопряженное уравнение и однородное сопряженное уравнение

$$f - K'f = g, \tag{3}$$

$$f - K'f = 0. \tag{4}$$

Напомним, что через $ker\,(I-K)$ обозначаем пространство решений уравнения (2), $Im\,(I-K)$ — множество y, для которых уравнение (1) имеет решение. Следующие теоремы устанавливают связи между свойствами уравнений (1) — (4).

Теорема 1. *Если K — компактный оператор в банаховом пространстве, то подпространства $ker\,(I-K)$ и $ker\,(I-K')$ конечномерны, а подпространства $Im\,(I-K)$ и $Im\,(I-K')$ замкнуты.*

$\triangleright$ На подпространстве $ker\,(I-K)$ имеем $Kx = x$, т. е. оператор K действует как тождественный. Но тождественный оператор является компактным только в случае конечномерного пространства. Значит, $ker\,(I-K)$ конечномерно.

Так как K' — компактный оператор, то приведенное выше рассуждение относится и к $ker\,(I-K')$.

Обозначим $L = ker\,(I-K)$. Согласно теореме 4 § 41, существует разложение в прямую сумму $X = L \oplus M$. Обозначим через B сужение оператора $A = I - K$ на M. Если $Bx = 0$, то $x \in M \cap L$ и, значит, $x = 0$. Таким образом, $ker\, B = \{0\}$, т. е. B — инъективный оператор; по построению $Im\, B = Im\, A$. Значит, существует обратный оператор $B^{-1}\colon Im\, A \to M$. Покажем, что оператор B^{-1} ограничен.

Предположим противное. Тогда существует последовательность $x_n \in M$ такая, что $\|Ax_n\| \to 0$ и $\|x_n\| = 1$. Так как последовательность (x_n) ограничена, то (Kx_n) — предкомпактное множество, и, значит, существует подпоследовательность (Kx_{n_k}), которая сходится в M к точке x_0. Но тогда $x_{n_k} = Ax_{n_k} + Kx_{n_k} \to x_0 \in M$. В силу непрерывности A имеем $Ax_{n_k} \to Ax_0$, и так как $Ax_{n_k} \to 0$ по построению, то $Ax_0 = 0$. Значит, $x_0 \in L \cap M$, т. е. $x_0 = 0$. Но так как $\|x_{n_k}\| = 1$, имеем $\|x_0\| = 1$ и получаем противоречие. Таким образом, оператор B^{-1} ограничен, т. е. справедлива оценка

$$\|x\| \leqslant c\|Bx\| \quad \forall x \in M. \tag{5}$$

Из оценки (5) получаем замкнутость образа $Im\, A$. Пусть $y_n = Ax_n$ — последовательность элементов из $Im\, A$ и $y_n \to y_0$. Покажем, что $y_0 \in Im\, A$. Из неравенства (5) получим $\|x_n - x_m\| \leqslant c\|Ax_n - Ax_m\| = c\|y_n - y_m\| \to 0$, $n, m \to \infty$, т. е. (x_n) — последовательность Коши. Так как пространство X полное, последовательность x_n сходится к некоторому элементу x_0. Тогда, переходя к пределу, получаем $y_0 = Ax_0$, т. е. $y_0 \in Im\, A$. Так как K' — компактный оператор, то предыдущее рассуждение справедливо для оператора $I - K'$. $\lhd$

Следствие 1. *Уравнение* (1) *разрешимо для данного $y \in X$ тогда и только тогда, когда $f(y) = 0$ для любого функционала f, удовлетворяющего уравнению* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из утверждения о замкнутости образа $Im\, A$ и теоремы 2 § 43.

Определение 1. Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $A \in LB(X, Y)$ называется *фредгольмовым*, если

1) $\dim \ker A < +\infty$;

2) $\dim \ker A' < +\infty$;

3) образ $Im\, A$ замкнут.

Таким образом, теорема 1 утверждает, что оператор $A = I - K$, где K — компактный оператор в банаховом пространстве, является фредгольмовым.

Важной характеристикой фредгольмова оператора A является его *индекс*

$$\operatorname{ind} A = \dim \ker A - \dim \ker A'.$$

Обратим внимание на то, что при малом изменении оператора величины $\dim\ker A$ и $\dim\ker A'$ могут сильно измениться. Особый интерес к индексу фредгольмова оператора связан с тем, что индекс не меняется при малых возмущениях оператора (см. теорему 3), т. е. является топологическим инвариантом. Это позволяет применять топологические методы для вычисления индекса.

В случае конечномерных пространств X и Y имеем $\dim\ker A = \dim X - r$, $\dim\ker A' = \dim Y - r$, где r — ранг матрицы, задающей оператор A. Тогда $\operatorname{ind} A = \dim X - \dim Y$. В частности, если оператор A действует в конечномерном пространстве X, то $\operatorname{ind} A = 0$. Если фредгольмов оператор A действует в бесконечномерном пространстве X, то его индекс может быть ненулевым.

Пример. Для оператора левого сдвига $V : l_2 \to l_2$, действующего по формуле $V(x) = (x_2, x_3, \ldots)$, имеем $\ker V = \{(x_1, 0, \ldots)\}$ и $\dim\ker V = 1$. Но $Im V = l_2$ и, по следствию 3 теоремы 2 § 43, имеем $\ker V' = \{0\}$. Значит, $\operatorname{ind} V = 1$.

Теорема 2. *Если K — компактный оператор в банаховом пространстве X, то* $\operatorname{ind}(I - K) = 0$.

Эта теорема будет получена ниже как простое следствие общей теоремы 3 об устойчивости индекса.

Рассмотрим сначала некоторые свойства фредгольмовых операторов, которые будут использованы в доказательстве теоремы 3.

1. *Если оператор A фредгольмов, а оператор B имеет ограниченный обратный, то оператор BA и оператор AB фредгольмовы и*

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} BA = \operatorname{ind} AB.$$

В силу обратимости оператора B (и его сопряженного B') имеем $\ker BA = KerA$, $\ker(BA)' = B'(\ker A')$, $\dim\ker(BA)' = \dim\ker A'$, при этом подпространство $\operatorname{Im}(BA) = B(\operatorname{Im} A)$ замкнуто. Аналогично рассматривается оператор AB.

Для получения других свойств используем представление оператора в виде операторной матрицы.

Пусть банаховы пространства X и Y разложены в прямые суммы своих замкнутых подпространств: $X = X_1 \oplus X_2$ и $Y = Y_1 \oplus Y_2$, и пусть $P_i\colon X \to X_i$, $Q_i\colon Y \to Y_i$, $i = 1, 2$, — соответствующие проекторы (см. пример 3 § 36). Ограниченному линейному оператору $A : X \to Y$

можно поставить в соответствие операторную матрицу

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} \in L(X_i, Y_j)$, $A_{ij} = Q_i A$, $i, j = 1, 2$. При этом оператор A действует на пару (x_1, x_2), где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, как обычное умножение матрицы на вектор:

$$A(x_1, x_2) = (A_{11}x_1 + A_{12}x_2, A_{21}x_1 + A_{22}x_2)$$

и произведению операторов соответствует произведение матриц, определенное по тому же правилу, что и для числовых матриц.

2. *Пусть оператор A задается с помощью диагональной матрицы*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовы операторы A_{11} и A_{22}.

Действительно,

$$\ker A = \ker A_{11} \oplus \ker A_{22},\ \ker A' = \ker A'_{11} \oplus \ker A'_{22},$$

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_{11} \oplus \operatorname{Im} A_{22},$$

откуда следует утверждение и равенство $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A_{11} + \operatorname{ind} A_{22}$.

3. Пусть оператор $A : X \to Y$ фредгольмов. Пусть $X_1 = \ker A$, а X_2 — дополнение к X_1, которое существует в силу теоремы 4 § 41. Подпространство $\operatorname{Im} A$ замкнуто и по теореме 2 § 43 $\operatorname{Im} A = (\ker A')^{\perp}$. Так как ядро $\ker A'$ конечномерно, подпространство $Y_2 = \operatorname{Im} A$ может быть задано с помощью конечного числа линейно независимых функционалов, то по теореме 4 § 41 существует конечномерное дополнение Y_1 для пространства Y_2 и $\dim Y_1 = \ker A'$.

При указанном разложении пространства $X = X_1 \oplus X_2$ и пространства $Y = Y_1 \oplus Y_2$ фредгольмов оператор A задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

причем оператор A_{22} обратим и $\operatorname{ind} A = \dim X_1 - \dim Y_1$.

4. *Пусть при том же разложении пространств, что и в п.3, некоторый ограниченный оператор $C\colon X \to Y$ записывается в виде*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix},$$

где C_{22} — обратимый оператор. Тогда C — фредгольмов оператор и $\operatorname{ind} C = \operatorname{ind} C_{11} + \operatorname{ind} C_{22} = \operatorname{ind} C_{11} = \dim X_1 - \dim Y_1 = \operatorname{ind} A$.

5. **Лемма 1.** *Если при некотором разложении пространств X и Y оператор B задан операторной матрицей*

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор B_{22} обратим, то он может быть представлен в виде произведения $B = T_1 C T_2$, где оператор C задается диагональной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

а операторы T_1 и T_2 обратимы.

$\triangleright$ Заметим, что любой оператор, заданный треугольной матрицей вида

$$D = \begin{pmatrix} I & D_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

обратим. Умножая оператор B на произвольный оператор D указанного вида, имеем

$$DB = \begin{pmatrix} B_{11} + D_{12}B_{21} & B_{12} + D_{12}B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы это произведение было нижне-треугольной матрицей, нужно выбрать D_{12} так, чтобы выполнялось $B_{12} + D_{12}B_{22} = 0$. Это возможно: в силу обратимости B_{22} положим $D_{12} = -B_{12}B_{22}^{-1}$.

Аналогично, умножая нижне-треугольную матрицу DB на обратимую треугольную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B_{22}^{-1}B_{21} & I \end{pmatrix},$$

получаем диагональную матрицу C указанного вида. При $T_1 = D^{-1}$ и $T_2 = M^{-1}$, получаем требуемое представление. $\triangleleft$

Теорема 3 (об устойчивости индекса). *Если A — фредгольмов оператор, то существует число $\delta > 0$ такое, что любой оператор B, удовлетворяющий условию $\|A - B\| < \delta$, фредгольмов и* $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$.

$\triangleright$ Пусть по фредгольмову оператору A построено разложение пространств X и Y, описанное выше в п.3, при котором оператору A соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{22} — обратимый оператор. При том же разложении пространств оператору B соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Если $\|A_{22} - B_{22}\| < 1/\|A_{22}^{-1}\| = \varepsilon$, то, согласно теореме 3 § 35, оператор B_{22} обратим. Так как $\|A_{22} - B_{22}\| \leqslant \|Q_2(A - B)\| \leqslant \|Q_2\|\,\|A - B\|$, получаем, что, если $\delta = \varepsilon/\|Q_2\|$, то из условия $\|A - B\| < \delta$ следует обратимость оператора B_{22}. Согласно лемме 1, матрица B представляется в виде произведения $B = T_1 C T_2$. Согласно свойству 4, матрица C задает фредгольмов оператор, согласно свойству 1, оператор B фредгольмов и $\operatorname{ind} B = \operatorname{ind} C = \operatorname{ind} A$. $\triangleleft$

Доказательство теоремы 2.

$\triangleright$ Рассмотрим семейство операторов $A_t = I - tK$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. По теореме 1 все эти операторы фредгольмовы. Согласно теореме 3, функция $\varphi(t) = \operatorname{ind}(I - tK)$ непрерывна. Но $\varphi(0) = \operatorname{ind} I = 0$. Если $\varphi(1) = \operatorname{ind}(I - K) \neq 0$, то функция $\varphi(t)$ должна принимать все промежуточные значения между $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$, что невозможно, так как $\varphi(t)$ принимает только целые значения. Значит, $\varphi(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Следствие 1. *Уравнения* (2) *и* (4) *имеют одинаковое число линейно независимых решений.*

Это другая формулировка утверждения о том, что $\operatorname{ind} A = 0$.

Следствие 2. *Уравнение* (1) *разрешимо для любой правой части тогда и только тогда, когда однородное уравнение* (2) *имеет только нулевое решение.*

$\triangleright$ Пусть уравнение (2) имеет только нулевое решение. По следствию 1 уравнение (4) имеет только нулевое решение. Тогда условие разрешимости из следствия теоремы 1 выполнено для любого $y \in X$, т.е. уравнение (1) разрешимо для любого y.

Если уравнение (1) разрешимо для любого $y \in X$, то, согласно следствию 3 теоремы 2 (§ 43), $\ker A' = \{0\}$. Тогда по теореме 2 имеем $\ker A = \{0\}$. $\lhd$

З а м е ч а н и е. Из следствия 2 получаем, в частности, информацию о спектре компактного оператора K — каждое ненулевое спектральное значение компактного оператора K является собственным значением. Действительно, имеем $\lambda I - K = \lambda(I - \lambda^{-1}K)$. Если $\ker(I - \lambda^{-1}K) = 0$, то, по следствию 2, $Im(I - \lambda^{-1}K) = X$, оператор $\lambda I - K$ обратим и λ не является спектральным значением.

Следствие 3. *Сопряженное уравнение (3) разрешимо для данного $g \in X'$ тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$ для любого x, являющегося решением однородного уравнения (2).*

$\rhd$ Уравнение $f - K'f = g$ есть уравнение с компактным оператором, и поэтому применимы теоремы 1 и 2. Условие разрешимости уравнения (3) есть $\Phi(g) = 0$ для любого $\Phi \in X''$, удовлетворяющего уравнению $\Phi - K''\Phi = 0$. Если X — рефлексивное банахово пространство, то это уравнение совпадает (с точностью до канонического изоморфизма $J\colon X \to X''$) с уравнением (2).

Если пространство X нерефлексивно, то уравнение $\Phi - K''\Phi = 0$ рассматривается в пространстве X'', более широком, чем X. Вообще говоря, в более широком пространстве уравнение может иметь больше решений. Но в данном случае это не так. Согласно теореме 2, имеем

$$\dim \ker(I - K) = \dim \ker(I - K') = \dim \ker(I - K'').$$

Поскольку $\ker(I - K) \subset \ker(I - K'')$, то из совпадения размерностей имеем $\ker(I - K) = \ker(I - K'')$. $\lhd$

Результаты, полученные в теоремах 1 и 2, легко распространить на несколько более широкий класс уравнений и получить общий результат в этом направлении.

Теорема 4 (С. М. Никольский). *Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $A \in LB(X,Y)$ является фредгольмовым оператором с нулевым индексом тогда и только тогда, когда он имеет вид $A = A_1 + K$, где $A_1 \in LB(X,Y)$ — обратимый оператор, K — компактный оператор.*

$\rhd$ Достаточность. Если $A = A_1 + K$, то оператор A можем представить в виде $A = A_1(I - A_1^{-1}K)$. Оператор $A_1^{-1}K$ — компактный, оператор $I - A_1^{-1}K$ — фредгольмов и $\operatorname{ind}(I - A_1^{-1}K) = 0$. Как уже отмечалось, при умножении фредгольмова оператора на обратимый получается фредгольмов оператор с тем же индексом. Значит, A — фредгольмов оператор и $\operatorname{ind} A = 0$.

Необходимость. Пусть $X = X_1 \oplus X_2$ и $Y = Y_1 \oplus Y_2$ есть разложения пространств, при которых фредгольмов оператор A задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

причем оператор A_{22} обратим. Так как условие $ind\, A = 0$ означает, что $\dim X_1 = \dim Y_1$, существует обратимый оператор $R : X_1 \to Y_1$. Тогда $A = A_1 + K$, где оператор

$$A_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

обратим, его обратный есть

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

а оператор

$$K = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оператором конечного ранга. $\lhd$

§ 50. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$. В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим интегральное уравнение 2-го рода

$$x(t) - \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)\, ds = y(t). \tag{1}$$

Предположим, что $\iint\limits_{\Omega\Omega} |K(t,s)|^2\, dtds < +\infty$. Тогда интегральный оператор K с ядром $K(t,s)$ является компактным и к уравнению (1) применимы теоремы 1 и 2 § 49 и их следствия. Эти теоремы для интегральных уравнений часто формулируют в терминах разрешимости уравнений, без использования операторной терминологии. Интегральные уравнения, в которых интегральный оператор является компактным, обычно называют *интегральными уравнениями Фредгольма.*

Напомним, что сопряженным к пространству $L_2(\Omega)$ является $L_2(\Omega)$. Для данного случая соответствующие уравнению (1) однородное, сопряженное и сопряженное однородное уравнения имеют вид:

$$x(t) - \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)\,ds = 0; \tag{2}$$

$$u(t) - \int\limits_{\Omega} K(s,t)u(s)\,ds = g(t); \tag{3}$$

$$u(t) - \int\limits_{\Omega} K(s,t)u(s)\,ds = 0. \tag{4}$$

Для данного случая можно также конкретизировать вид условий разрешимости, так как функционал, соответствующий функции u — решению уравнения (4), задается формулой

$$f(x) = \int\limits_{\Omega} x(t)u(t)\,dt.$$

.

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений). *Пусть ядро $K(t,s)$ измеримо, как функция двух переменных, и удовлетворяет условию $\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K(t,s)|^2\,dtds < +\infty$. Тогда для уравнений* (1) — (4) *в пространстве $L_2(\Omega)$ возможны* **только** *два следующих случая:*

I. Однородные уравнения (2) *и* (4) *имеют только нулевые решения; уравнения* (1) *и* (3) *разрешимы для любой правой части.*

II. Уравнение (2) *имеет конечное число n линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$; уравнение* (4) *имеет также n линейно независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$; уравнение* (1) *разрешимо для данной функции $y \in L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено n условий разрешимости:*

$$\int\limits_{\Omega} y(t)u_k(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

При выполнении условий (5) *общее решение уравнения* (1) *имеет вид* $x = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$, *где* x_0 *— частное решение уравнения* (2), c_k *— произвольные постоянные.*

Обратим внимание на то, что в формулировке теоремы основная информация содержится в слове "только" — для других типов уравнений могут быть как указанные в теореме, так и другие ситуации.

Альтернатива Фредгольма (теорема 1) справедлива для интегральных уравнений вида (1) в пространстве $L_2(\Omega, \mu)$ в случае, когда (Ω, μ) есть произвольное пространство с мерой.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае пространства $L_p(\Omega)$ с тем изменением, что решение сопряженного однородного уравнения нужно искать в этом случае в пространстве $L_q(\Omega)$ и на ядро интегрального оператора нужно наложить условия, обеспечивающие компактность оператора.

Теперь перейдем к изучению интегральных уравнений (1) в пространстве $C[0,1]$.

В этом случае сопряженный оператор действует в сопряженном пространстве $(C[0,1])'$. Но пространство $(C[0,1])'$ есть пространство функций ограниченной вариации или пространство зарядов, и оно менее удобно для вычислений. Оказывается, что в ряде случаев исследование уравнения (1) в пространстве $C[0,1]$ можно провести с помощью формально сопряженного уравнения

$$u(t) - \int\limits_0^1 K(s,t)u(s)\,ds = 0$$

в том же пространстве $C[0,1]$.

Теорема 2. *Если ядро* $K(t,s)$ *непрерывно, то для уравнения (1) в пространстве* $C[0,1]$ *справедлива альтернатива Фредгольма, т.е. утверждение теоремы 1 (с заменой пространства* $L_2(\Omega)$ *на* $C[0,1]$*).*

$\triangleright$ Обратим внимание на то, что сформулированное утверждение не является частным случаем общей теоремы, так как в общей теореме используется сопряженное пространство. Дополнительному исследованию подлежат в первую очередь условия разрешимости.

Рассмотрим уравнение (1) в пространстве $L_2[0,1]$. Тогда для него справедлива альтернатива Фредгольма. Значит, если

$$\int_0^1 y(t)u_k(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где u_k — максимальный линейно независимый набор решений уравнения

$$u(t) - \int_0^1 K(t,s)u(s)\,ds = 0$$

в пространстве $L_2[0,1]$, то уравнение (1) имеет решение $x \in L_2[0,1]$. Покажем, что если $y \in C[0,1]$, то и $x \in C[0,1]$, т. е. справедлива теорема существования решения в пространстве $C[0,1]$. Имеем

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds + y(t).$$

Воспользуемся тем, что из условия, что $x \in L_2[0,1]$, следует, что интеграл $\int_0^1 K(t,s)\ x(s)\,ds$ есть непрерывная функция от t. Поэтому $x \in C[0,1]$. Из этих же соображений получаем, что если решения уравнений (2) и (4) принадлежат пространству $L_2[0,1]$, то они принадлежат $C[0,1]$. Значит, решая уравнения (2), (4) в $L_2[0,1]$ и в $C[0,1]$, получаем один и тот же набор решений, и все утверждения теоремы для уравнений (1) — (4) справедливы в $C[0,1]$. $\triangleleft$

Замечание 1. Аналогичный результат имеет место в случае, если ядро $K(t,s)$ имеет вид $K(t,s) = K_0(t,s)/|t-s|^\alpha$, где $K_0(t,s)$ — непрерывная функция и $\alpha < 1/2$. Для доказательства достаточно проверить лишь свойство, которым мы воспользовались в случае непрерывного ядра: если $x \in L_2[0,1]$, то $\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$ есть непрерывная функция от t на $[0,1]$.

Замечание 2. В теореме 2 дополнительные условия на ядро, более сильные, чем условия, нужные для компактности, существенны для справедливости теоремы в $C[0,1]$. Например, уравнение

$$x(t) = \frac{3}{2}\int_0^1 ts^{-1/2}x(s)\,ds + y(t)$$

есть интегральное уравнение с компактным оператором (с оператором конечного ранга). Решая это уравнение как уравнение с вырожденным ядром, получаем условие разрешимости:

$$\int_0^1 y(t)t^{-1/2}\,dt = 0.$$

Если же решать однородное формально сопряженное уравнение в $C[0,1]$ или даже в $L_2[0,1]$, получаем только нулевое решение. Таким образом, для данного уравнения в $C[0,1]$ утверждение теоремы 2 не выполнено.

Замечание 3. В некоторых приложениях рассматривают в пространстве $C[0,1]$ т.н. *нагруженные интегральные уравнения* вида

$$x(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)x(t_k) + \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad t_k \in [0,1].$$

Здесь формально сопряженный оператор уже не имеет смысла и для исследования уравнения приходится строить (настоящий) сопряженный оператор.

Уравнения типа свертки. Если ядро $K(t,s)$ не удовлетворяет условиям теоремы 1, то может оказаться, что альтернатива Фредгольма не справедлива. Поэтому для таких ядер возникает задача получения дополнительных условий, гарантирующих выполнение альтернативы Фредгольма. Рассмотрим с этой точки зрения т. н. уравнения типа свертки в пространстве $L_2(\mathbf{R})$.

Пусть ядро $K(t,s)$, определенное на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, допускает представление вида

$$K(t,s) = K_1(t,s) + K_2(t,s),$$

где $K_1(t,s) = \varphi(t-s)$, причем $\varphi \in L_1(\mathbf{R})$, а интегральный оператор с ядром $K_2(t,s)$ компактен в пространстве $L_2(\mathbf{R})$.

Интегральное уравнение с ядром $K(t,s)$, т. е. уравнение вида

$$ax(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)x(s)\,ds + \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(t,s)x(s)\,ds = y(t), \tag{6}$$

будем называть *уравнением типа свертки.* Интегральный оператор A_2 с ядром $K_2(t,s)$ является компактным оператором, а интегральный оператор A_1 с ядром $\varphi(t-s)$ не является компактным. Поэтому для уравнения (6) альтернатива Фредгольма справедлива не всегда. Оказывается, можно указать простые условия на функцию φ, при выполнении которых справедлива альтернатива Фредгольма.

Теорема 3. *Если $a \neq 0$ и $a + \hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ для $\xi \in \mathbf{R}$, где $\hat{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ, то оператор $A = aI + A_1 + A_2$ фредгольмов и* $\operatorname{ind} A = 0$.

$\triangleright$ Согласно теореме 2 § 39 при выполнении условий настоящей теоремы оператор $aI + A_1$ обратим и применима теорема 4 § 49, согласно которой оператор A фредгольмов. $\triangleleft$

Можно показать, что сформулированные в теореме 3 условия на функцию φ являются не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы для уравнения (6) была справедлива альтернатива Фредгольма.

Применим доказанную теорему к конкретному классу уравнений в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ — интегральным уравнениям вида

$$ax(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} a_k(t)\Phi_k(t-s)b_k(s)x(s)\,ds = y(t), \tag{7}$$

где $a_k(t), b_k(t)$ — непрерывные функции такие, что существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} a_k(t) = a_k(\infty)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} b_k(t) = b_k(\infty)$, а функции Φ_k принадлежат пространству $L_1(\mathbf{R})$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема 4. *Если выполнены условия $a \neq 0$ и*

$$a + \sum_{k=1}^{m} a_k(\infty)b_k(\infty)\hat{\Phi}_k(\xi) \neq 0 \ \text{для} \ \ \xi \in \mathbf{R},$$

то оператор A, определенный левой частью уравнения (7), фредгольмов, $\operatorname{ind} A = 0$ и, значит, для уравнения (7) справедлива альтернатива Фредгольма.

Лемма 1. *Если $a(t)$ — непрерывная на $\mathbf{R}$ функция такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 0$, и $K \in L_1(\mathbf{R})$, то интегральные операторы*

$$Ax(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)K(t-s)x(s)\,ds, \quad Bx(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)a(s)x(s)\,ds$$

компактны в $L_2(\mathbf{R})$.

$\triangleright$ Пусть

$$a_n(t) = \begin{cases} a(t), & |t| \leqslant n, \\ 0, & |t| > n, \end{cases}$$

и M_a — оператор умножения на функцию a. Тогда $\|M_{a_n} - M_a\| = \sup_t |a_n(t) - a(t)| = \sup_{|t|>n} |a(t)| \to 0$.

Пусть

$$K_n(\tau) = \begin{cases} K(\tau), & \text{если} |\tau| \leqslant n \text{ и } |K(\tau)| \leqslant n, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

K_n — интегральный оператор с ядром $K_n(t-s)$ и K — интегральный оператор с ядром $K(t-s)$. Тогда $\|K_n - K\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K_n(\tau) - K(\tau)|\, d\tau \to 0$. Операторы $M_{a_n}K_n$ и $K_n M_{a_n}$ компактны по теореме 2 § 48 ($M_{a_n}K_n$ и $K_n M_{a_n}$ — интегральные операторы, ядра которых ограничены и обращаются в нуль при $|t| > 2n$, $|s| > 2n$). Так как $A = \lim\limits_{n\to\infty} M_{a_n}K_n$ и $B = \lim\limits_{n\to\infty} K_n M_{a_n}$, то они компактны. $\lhd$

Замечание 4. Интегральный оператор A, рассмотренный в лемме, дает нам пример компактного интегрального оператора, не являющегося оператором Гильберта — Шмидта.

$\rhd$ Доказательство теоремы 4. Уравнение (7) можем записать в виде

$$ax(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)x(s)\, ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_2(t,s)x(s)\, ds = y(t),$$

где $\varphi(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k(\infty)b_k(\infty)\Phi_k(t)$, причем $\varphi \in L_1(\mathbf{R})$,

$$N_2(t,s) = \sum_{k=1}^{m} \big\{[a_k(t) - a_k(\infty)]\Phi_k(t-s)b_k(s) +$$

$$+ a_k(\infty)\Phi_k(t-s)[b_k(s) - b_k(\infty)]\big\}.$$

Согласно лемме 1, оператор с ядром N_2 компактен. Применяя теорему 3, получаем утверждение теоремы 4. $\lhd$

§ 51. СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Согласно теореме Рисса (§ 40), каждый ограниченный линейный функционал f на гильбертовом пространстве H задается в виде скалярного произведения $f(x) = (x, u)$, т. е. существует изометричное отображение между H и H', что позволяет реализовать сопряженный оператор как оператор в том же пространстве H. Однако в случае комплексного пространства H соответствие $f \to u$ между H' и H антилинейно. Поэтому свойства сопряженного оператора, полученного при такой реализации, несколько отличаются от свойств обычного сопряженного оператора A'. Вследствие этого, как правило, сопряженный оператор в гильбертовом пространстве определяют независимо.

Определение 1. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ соответственно. *Сопряженным оператором* к оператору $A : H_1 \to H_2$ называется оператор $A^*\colon H_2 \to H_1$ такой, что для любых $x \in H_1$, $y \in H_2$ выполняется равенство

$$(Ax, y)_2 = (x, A^*y)_1.$$

Иногда оператор A^* называют *эрмитово сопряженным*, чтобы отличить его от сопряженного оператора A'.

Для эрмитово сопряженного оператора A^* справедливы все теоремы, доказанные для оператора A' (см. § 43). Отличие имеется только в свойстве операции сопряжения: $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ вместо $(\lambda A)' = \lambda A'$.

Так как гильбертово пространство рефлексивно, в случае гильбертовых пространств всегда $A^{**} = A$.

То обстоятельство, что сопряженный оператор в случае гильбертова пространства действует в том же пространстве, позволяет выделить дополнительные свойства и указать специальные классы операторов.

Одним из существенных фактов теории операторов в гильбертовом пространстве является выполнение тождества

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

для ограниченных линейных операторов.

Это тождество вытекает из уже известного неравенства

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$$

и неравенства

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) \le \|A^*A\|\|x\|^2,$$

из которого следует, что $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$.

Определение 2. Линейный ограниченный оператор $A : H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. справедливо тождество $(Ax, y) = (x, Ay)$. Линейный ограниченный оператор A называется *унитарным*, если $A^* = A^{-1}$. Линейный ограниченный оператор A называется *нормальным*, если $AA^* = A^*A$.

Заметим, что в случае банаховых пространств оператор A и его сопряженный действуют в разных пространствах и свойства, входящие в определение 2 и в полученное выше тождество, не имеют смысла.

Примеры.

1. В пространстве $\mathbf{C}^n$ со стандартным скалярным произведением рассмотрим оператор $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$. Пусть оператор A задан матрицей (a_{ij}). Построим к нему сопряженный оператор A^*. Имеем

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}y_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}y_j} = (x, A^*y).$$

Таким образом, оператору A^* соответствует матрица $(\bar{a}_{ji})$ — эрмитово сопряженная к матрице (a_{ij}). Оператор A самосопряжен, если $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, т. е. матрица (a_{ij}) эрмитово симметричная. Матрицы, соответствующие унитарным операторам, есть известные из курса алгебры унитарные матрицы.

2. В пространстве $L_2(T, \mu)$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_T x(t)\overline{y(t)}\, d\mu$$

рассмотрим интегральный оператор $Ax(t) = \int_T K(t, s)x(s)\, d\mu_s$, где ядро $K \in L_2(T \times T)$. Тогда

$$(Ax, y) = \int_T \left(\int_T K(t, s)x(s)\, d\mu_s \right) \overline{y(t)}\, d\mu_t = \int_T x(s) \overline{\int_T \overline{K(t, s)} y(t)\, d\mu_t}\, d\mu_s =$$

$$= \int\limits_T x(t) \overline{\int\limits_T \overline{K(s,t)} y(s)\, d\mu_s}\, d\mu_t = (x, A^* y).$$

Получаем, что сопряженный оператор

$$A^* y(t) = \int\limits_T \overline{K(s,t)} y(s)\, d\mu_s$$

есть интегральный оператор с ядром $\overline{K(s,t)}$. Интегральный оператор является самосопряженным, если $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$.

3. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор умножения на функцию a, т. е. $Ax(t) = a(t)x(t)$. Тогда

$$(Ax, y) = \int\limits_0^1 a(t)x(t)\overline{y(t)}\, dt = \int\limits_0^1 x(t)\overline{\overline{a(t)}y(t)}\, dt = (x, A^* y).$$

Значит, $A^* y(t) = \overline{a(t)} y(t)$. Если $a(t)$ — вещественнозначная функция, то $a(t) = \overline{a(t)}$ и оператор A самосопряжен. Если $|a(t)| = 1$ почти всюду, то $1/a(t) = \overline{a(t)}$ и оператор A унитарный. Так как $a(t)\overline{a(t)} = \overline{a(t)}a(t)$, то любой оператор умножения на функцию нормальный.

Из курса алгебры известны особые свойства эрмитово симметричных матриц. Доказывалось, например, что каждая эрмитово симметричная матрица может быть приведена к диагональному виду с помощью унитарного преобразования или что норма такой матрицы совпадает с наибольшим из модулей собственных значений. Известны также связи эрмитово симметричных матриц с квадратичными формами.

Обсудим, как может выглядеть аналог утверждения о приведении матрицы к диагональному виду в случае самосопряженных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Указанное утверждение можно сформулировать так, чтобы оно имело смысл в бесконечномерном пространстве: если A — самосопряженный оператор в пространстве $H = \mathbf{C}^n$, то в этом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

Понятие базиса, т. е. полной ортонормированной системы, имеется для гильбертовых пространств, и поэтому возникает вопрос, верно ли аналогичное утверждение для операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Напомним, что для произвольных операторов даже в конечномерном пространстве утверждение о существовании базиса из собственных векторов (даже не ортонормированного) не имеет места. Например, оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathbf{C}^2$, имеет только собственные векторы вида $(0, x_2)$, из которых нельзя построить базис в $\mathbf{C}^2$. Поэтому условие самосопряженности матрицы существенно.

Покажем на примере, что для произвольных самосопряженных операторов в бесконечномерном случае утверждение о существовании базиса из собственных векторов не выполнено.

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим самосопряженный оператор — оператор умножения на независимую переменную вида: $Ax(t) = tx(t)$. Как было показано в § 45, оператор A не имеет ни одного собственного вектора и тем более не существует базиса из собственных векторов.

Обычно рассматриваются два варианта обобщения теоремы о приведении матрицы к диагональному виду теоремы на случай бесконечномерного пространства.

1. Выделение более узкого класса операторов, для которых теорема справедлива в приведенной формулировке.

2. Изменение формулировки таким образом, чтобы теорема была верна для произвольного самосопряженного оператора.

В § 52 будет показано, что у любого компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве существует базис из собственных векторов, т. е. будет получен первый вариант обобщения. Второй вариант обобщения называется спектральной теоремой для самосопряженных операторов. Он приведен в конце § 52 без доказательства.

В заключение данного параграфа рассмотрим некоторые свойства произвольных самосопряженных операторов. В частности, будет получено обобщение на бесконечномерный случай утверждения о том, что норма самосопряженной матрицы совпадает с наибольшим из модулей собственных значений.

В случае пространства $\mathbf{C}^n$ приведение эрмитово симметричной матрицы $\{a_{ij}\}$ к диагональному виду эквивалентно приведению квадратичной формы $(Ax, x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j}$ к сумме квадратов.

По аналогии *квадратичной формой* оператора A в гильбертовом пространстве будем называть числовую функцию $\varphi(x) = (Ax, x)$ на пространстве H. С оператором A можно связать также функцию двух переменных (Ax, y) — *билинейную форму* оператора A. Эта функция линейна по переменной x и, если A — самосопряженный оператор, антисимметрична:

$$(Ax, y) = (x, Ay) = \overline{(Ay, x)},$$

т. е. обладает частью свойств скалярного произведения. Поэтому для нее выполнены некоторые тождества, аналогичные тождествам из предложения 2 § 29:

$$(A(x+y), x+y) + (A(x-y), x-y) = 2(Ax, x) + 2(Ay, y), \qquad (1)$$

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4Re\,(Ax, y). \qquad (2)$$

Лемма 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1) квадратичная форма (Ax, x) принимает только вещественные значения, собственные значения оператора A вещественны;

2) собственные векторы оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны;

3) для любого подпространства $L \subset H$, инвариантного относительно A, его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно A.

$\triangleright$ 1. Первое утверждение вытекает из равенства $(Ax, x) = \overline{(Ax, x)}$. Пусть $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$, тогда $\lambda = (Ax, x)$ — вещественное число.

2. Если $Ax = \lambda x$ и $Ay = \mu y$, то $(x, Ay) = \mu(x, y)$, $(Ax, y) = \lambda(x, y)$, откуда после вычитания получаем $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$. Если $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$.

3. Пусть $y \in L^{\perp}$. Для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$. Поэтому $(x, Ay) = (Ax, y) = 0$, что и означает $Ay \in L^{\perp}$, т. е. подпространство $L^{\perp}$ инвариантно относительно оператора A. $\triangleleft$

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда*

1) $\sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|$;

2) существует спектральное значение λ оператора A такое, что $|\lambda| = \|A\|$.

$\triangleright$ 1. Обозначим $N_A = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup\limits_{x \neq 0} |(Ax, x)|/\|x\|^2$, тогда

$$|(Ax, x)| \leqslant N_A \|x\|^2. \tag{3}$$

Из неравенства $|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\| \, \|x\| \leqslant \|A\| \, \|x\|^2$ следует неравенство $N_A \leqslant \|A\|$ для любого ограниченного оператора. Используя тождество (2), неравенство (3), а затем тождество параллелограмма, получаем

$$Re\,(Ax, y) = \frac{1}{4}[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} N_A (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{1}{2} N_A (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Положив $y = \|x\| Ax/\|Ax\|$, будем иметь $\|x\| \, \|Ax\| \leqslant N_A(\|x\|^2 + \|y\|^2)/2$ или $\|Ax\| \leqslant N_A \|x\|$, откуда $\|A\| \leqslant N_A$. Учитывая, что неравенство в обратную сторону справедливо для любого оператора, получаем равенство.

2. По доказанной части теоремы существует последовательность элементов $x_n \in H$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $(Ax_n, x_n) \to \lambda$, где $\lambda = \|A\|$ или $\lambda = -\,\|A\|$. Тогда

$$\|(A - \lambda I)x_n\|^2 = (Ax_n - \lambda x_n, Ax_n - \lambda x_n) = (Ax_n, Ax_n) - 2\lambda(Ax_n, x_n) +$$

$$+ \lambda^2 (x_n, x_n) \leqslant \lambda^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 = 2\lambda(\lambda - (Ax_n, x_n)) \to 0.$$

Предположим, что оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный оператор. Тогда справедливо неравенство $\|x\| \leqslant c\|(A - \lambda I)x\|$, $c > 0$. При подстановке в это неравенство последовательности x_n получаем противоречие, значит, оператор $A - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного и λ есть спектральное значение для оператора A. $\triangleleft$

Замечание 1. Введенное в доказательстве теоремы число N_A называется *числовым радиусом* оператора A. Вспомнив определение спектрального радиуса $r(A)$ оператора A (§ 35), можно сформулировать теорему 2 следующим образом: если A — самосопряженный оператор, то $r(A) = N_A = \|A\|$.

Отметим, что равенство $r(A) = \|A\|$ для самосопряженного оператора может быть получено из доказанного выше тождества $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Действительно, если $A^* = A$, то $\|A^2\| = \|A\|^2$, $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, $r(A) = \lim \|A^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|A\|$.

§ 52. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ КОМПАКТНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного утверждения данного параграфа, рассмотрим некоторые свойства собственных значений и собственных функций. Прежде всего заметим, что ненулевое собственное значение λ компактного самосопряженного оператора имеет конечную кратность, т. е. число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, конечно (см. § 49).

Лемма 1. *Пусть $A : H \to H$ — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Для любого $d > 0$ число различных собственных значений, удовлетворяющих условию $|\lambda| \geqslant d$, конечно.*

$\triangleright$ Предположим противное. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — бесконечная нормированная последовательность, состоящая из собственных векторов с собственными значениями λ_k, где $|\lambda_k| \geqslant d > 0$. Тогда множество векторов $Ae_k = \lambda_k e_k$, как образ ограниченного множества, должно быть предкомпактно. Но по лемме 1 § 51 собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Поэтому $\|Ae_k - Ae_n\| = \|\lambda_k e_k - \lambda_n e_n\| = \sqrt{\lambda_k^2 + \lambda_n^2} \geqslant d\sqrt{2}$. Это означает, что из последовательности Ae_k нельзя выделить подпоследовательность Коши. $\triangleleft$

Следствие 1. *Ненулевые собственные значения самосопряженного компактного оператора могут быть занумерованы с учетом кратности в последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ так, что $|\lambda_k| \geqslant |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Рассмотрим теперь основную теорему о приведении к диагональному виду самосопряженного компактного оператора в гильбертовом пространстве.

Теорема 1 (Гильберт). *Пусть A — самосопряженный компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда в H существует полная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора A.*

$\triangleright$ Для каждого ненулевого собственного значения λ в пространстве $Ker\,(A - \lambda I))$ выберем ортогональный базис. Пусть L — подпространство в H, порожденное объединением всех выбранных базисов. Тогда

L инвариантно относительно A, и, значит, $L^{\perp}$ также инвариантно относительно A. Пусть $B = A\big|_{L^{\perp}} : L^{\perp} \to L^{\perp}$ — сужение оператора A на подпространство $L^{\perp}$. Тогда B является самосопряженным компактным оператором.

Покажем, что $B = 0$. Согласно теореме 2 § 51, существует спектральное значение μ оператора B такое, что $|\mu| = \|B\|$. Предположим, что $\|B\| \neq 0$, т. е. $\mu \neq 0$. Тогда по теореме 2 § 49 оператор $B - \mu I$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(B - \mu I) = 0$. Если $\ker(B - \mu I) = \{0\}$, то $\operatorname{Im}(B - \mu I) = L^{\perp}$, и, значит, $B - \mu I$ имеет ограниченный обратный оператор. Следовательно, μ не является спектральным значением. Значит, $\ker(B - \mu I) \neq \{0\}$, т. е. μ есть собственное значение оператора A с собственным вектором из $L^{\perp}$. Но по построению все собственные векторы с ненулевыми собственными значениями принадлежат L. Получаем противоречие. Значит, $\|B\| = 0$ и все векторы из $L^{\perp}$ являются собственными векторами оператора A с собственным значением $\lambda = 0$.

Выберем в $L^{\perp}$ базис и, объединяя его с построенным ранее базисом в L, получаем базис в пространстве H, состоящий из собственных векторов оператора A. $\lhd$

З а м е ч а н и е 1. Сепарабельность пространства H использована только для построения счетного базиса в $L^{\perp}$. Поэтому для произвольных гильбертовых пространств аналогичная теорема формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Если A — самосопряженный компактный оператор в гильбертовом пространстве H, то существует инвариантное подпространство $L \subset H$ такое, что в L есть счетный базис, состоящий из собственных векторов оператора A с ненулевыми собственными значениями, а на ортогональном дополнении $L^{\perp}$ оператор A нулевой.*

З а м е ч а н и е 2. Если для оператора A в гильбертовом пространстве H существует полная ортонормированная система e_k такая, что $Ae_k = \lambda_k e_k$, причем λ_k вещественны и $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, то A — самосопряженный компактный оператор.

Действительно, обозначая через A_n оператор, действующий по формуле

$$A_n\, x = \sum_{1}^{n} \lambda_k\, (x, e_k)\, e_k,$$

получаем, что A_n — оператор конечного ранга и, следовательно, компактен. Так как $\|A_n - A\| = \sup\limits_{k>n} |\lambda_k| \to 0$, то A компактен. Таким образом, описанные в теореме свойства являются характеристическими для компактных самосопряженных операторов.

З а м е ч а н и е 3. Если оператор A действует в гильбертовом пространстве H, то в произвольном базисе он может быть задан бесконечной матрицей (a_{ij}), его квадратичная форма имеет вид $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}x_i\overline{x_j}$, где x_j — координаты вектора x в указанном базисе. Таким образом, квадратичная форма оператора является квадратичной формой бесконечного числа переменных x_j. Если перейти к новому базису $\{e_k\}$, состоящему из собственных векторов оператора A с собственными значениями λ_k, то квадратичная форма примет вид $(Ax, x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2$, где $c_k = (x, e_k)$ — новые координаты вектора x. Таким образом, из теоремы Гильберта получаем, что квадратичная форма компактного самосопряженного оператора приводится к сумме квадратов.

Приведем другую формулировку этой теоремы, которая поясняет ее название, — теорема о спектральном разложении.

Простейшими операторами в гильбертовом пространстве являются ортогональные проекторы. Это операторы, удовлетворяющие условию $P^2 = P,\ \ P^* = P$. Обозначим через P_k оператор ортогонального проектирования на подпространство, порожденное собственным вектором e_k, соответствующим собственному значению λ_k. Этот оператор задается формулой $P_k x = (x, e_k)e_k$.

Проекторы P_1 и P_2 называются *ортогональными* друг к другу, если $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, т.е. если ортогональны подпространства, на которые они проектируют. Теорему Гильберта можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 3. *Оператор A в гильбертовом пространстве является самосопряженным компактным оператором тогда и только тогда, когда существует последовательность попарно ортогональных одномерных проекторов P_k такая, что $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$, где $\lambda_k \in \mathbf{R},\ \lambda_k \to 0$ и ряд сходится по норме.*

Рассмотрим теорему 1 с еще одной точки зрения. Для компактного самосопряженного оператора A существует $\{e_k\}$ — ортонормированный базис в пространстве H, состоящий из собственных векторов оператора A. Поэтому отображение $U : H \to l_2,\ U(x) = (c_1, c_2, ...)$, где $c_k = (x, e_k)$ — коэффициенты Фурье элемента x, является изометрическим изоморфизмом гильбертовых пространств (теорема 3 § 31) и при этом изоморфизме оператор A переходит в диагональный оператор — оператор умножения на последовательность (λ_k) в пространстве l_2.

Пространство l_2 является частным случаем пространства $L_2(T, \mu)$, когда $T = \mathbf{N}$ и мера μ каждой точки есть 1. Любая последовательность есть, по определению, функция натурального аргумента, т. е. функция на множестве $\mathbf{N}$. Такая формулировка подсказывает, что обобщение теоремы о приведении к диагональному виду может выглядеть как утверждение о подобии оператора A оператору умножения на функцию. Такое утверждение действительно имеет место.

Теорема 4 (о спектральном разложении самосопряженного оператора). *Если A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, то существует пространство с мерой (T, μ) и изометрический изоморфизм $U : H \to L_2(T, \mu)$, при котором оператор A переходит в оператор умножения на некоторую вещественную ограниченную функцию $\lambda(t)$.*

Мы приводим здесь эту теорему без доказательства. Примером такого изоморфизма в случае интегральных операторов свертки, рассмотренных в § 39, является преобразование Фурье: оператор свертки после преобразования Фурье переходит в оператор умножения на функцию.

В случае компактного самосопряженного оператора из теоремы 3 имеем дополнительную информацию: пространство T счетно, занумеровав его точки натуральными числами, получаем, что функция $\lambda(t)$ является в этом случае последовательностью λ_k собственных значений.

Пусть (e_k) — базис в пространстве H, состоящий из собственных векторов оператора A с собственными значениями λ_k. Используя равенство $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ — разложение $x \in H$ в ряд Фурье по этой системе, получаем, что действие оператора A задается очень простой формулой

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k e_k.$$

Эта формула позволяет осуществлять различные вычисления с данным оператором. Например, естественно определить функцию от оператора по формуле

$$f(A)x \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) x_k e_k.$$

Оператор $f(A)$ определен для функций f, заданных и ограниченных на множестве собственных значений $\{\lambda_k\}$, т. е. на спектре оператора A. Например, если λ — регулярное значение для оператора A, то функция

$f(z) = (z-\lambda)^{-1}$ определена и ограничена на спектре. Этой функции соответствует резольвента оператора

$$(A-\lambda I)^{-1}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} x_k e_k. \tag{1}$$

Формула (1) позволяет для регулярного значения λ явно выписать решение уравнения $Ax - \lambda x = y$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} y_k e_k,$$

где $y_k = (y, e_k)$ — коэффициенты Фурье элемента y.

Пример таких вычислений был рассмотрен в теореме 4 § 35.

Интегральные уравнения с симметричными ядрами

Основным примером операторов, для которых выполнены условия предыдущих теорем, являются интегральные операторы с симметричными ядрами. В пространстве $L_2(T, \mu)$ рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_T K(t,s)x(s)\, d\mu_s,$$

ядро которого удовлетворяет условиям

1) $\int_T \int_T |K(t,s)|^2 \, d\mu_t d\mu_s < +\infty$;

2) $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$.

Из условия 1) получаем, что оператор A компактен, из условия 2) имеем, что оператор A самосопряжен. По теореме Гильберта в пространстве $L_2(T, \mu)$ существует полная ортонормированная система $e_k(t)$, состоящая из собственных функций оператора A. Разложение по этой системе позволяет полностью исследовать и решить интегральное уравнение

$$x(t) - \int_T K(t,s)x(s)\, d\mu_s = y(t). \tag{2}$$

Будем искать решение уравнения (2) в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k(t).$$

Подставляя в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при $e_k(t)$ в левой и правой частях, получаем

$$x_k - \lambda_k x_k = y_k, \quad y_k = (y, e_k) = \int\limits_T y(t)\overline{e_k(t)}\, d\mu_t, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Решая полученные уравнения относительно x_k, получаем более детальную, чем в альтернативе Фредгольма, информацию о интегральном уравнении (2).

При сделанных предположениях относительно функции $K(t,s)$ для уравнения (2) возможны **только** *два случая:*

I. $\lambda_k \neq 1, \;\; k = 1, 2, \ldots$ Тогда $x_k = y_k/(1-\lambda_k)$ и для любого $y \in H$ существует решение уравнения (2)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda_k} y_k e_k(t).$$

(Первый случай альтернативы Фредгольма.)

II. $\lambda_k = 1$ для $k = k_1, \ldots, k_n$. Тогда для существования решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$y_k = \int\limits_T y(t)\overline{e_k(t)}\, d\mu_t = 0, \quad k = k_1, \ldots, k_n. \tag{3}$$

При выполнении условий (3) все решения уравнения (2) имеют вид

$$x(t) = \sum_{k \neq k_i} \frac{1}{1-\lambda_k} y_k e_k(t) + \sum_{i=1}^{n} c_{k_i} e_{k_i}(t),$$

где c_{k_i} — произвольные постоянные. (Второй случай альтернативы Фредгольма.)

При решении уравнения 2-го рода $x - Ax = y$ нет необходимости строить разложение функции x, так как $x = y + Ax$, где y — заданный элемент, и значит, достаточно получить разложение элемента Ax :

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} y_k e_k(t). \tag{4}$$

Так как $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, скорость сходимости в разложении (4) для Ax больше, чем в разложении для x, что существенно при практических вычислениях.

Ряд (4) более удобен также тем, что при некоторых дополнительных ограничениях на ядро он сходится равномерно в отличие от ряда для x, где имеет место лишь сходимость в $L_2(T,\mu)$. Кроме того, в (4) слагаемые, соответствующие нулевым собственным значениям, обращаются в 0, и для построения ряда (4) достаточно иметь только собственные функции, соответствующие ненулевым собственным значениям.

Теорема 5 (Гильберт — Шмидт). *Пусть $\mu(T) < \infty$, ядро $K(t,s)$ определено на $T \times T$, измеримо, симметрично $\bigl(K(t,s) = \overline{K(s,t)}\bigr)$ и существует постоянная C такая, что*

$$\int\limits_T |K(t,s)|^2 \, d\mu(s) \leqslant C. \tag{5}$$

Если функция f принадлежит образу интегрального оператора A с ядром $K(t,s)$, т. е. представляется в виде

$$f(t) = \int\limits_T K(t,s)h(s)\, d\mu(s), \quad h \in L_2(T,\mu),$$

то ее ряд Фурье по собственным функциям оператора A сходится к f равномерно и абсолютно.

$\triangleright$ Отметим, что $\int\limits_T \int\limits_T |K(t,s)|^2 \, d\mu(t) d\mu(s) < +\infty$, A — компактный самосопряженный оператор в $L_2(T,\mu)$ и существует полная ортонормированная система, состоящая из собственных функций $e_k(t)$ оператора A. Тогда $h(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k e_k(t)$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 < +\infty$. Тогда имеем $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \lambda_k e_k(t)$. Проверим, что для ряда, составленного из модулей, выполняется критерий Коши равномерной сходимости, т. е.

$$\sup_t \sum_{k=n}^{m} |h_k \lambda_k e_k(t)| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\Bigl(\sum_{k=n}^{m} |h_k \lambda_k e_k(t)|\Bigr)^2 \leqslant \sum_{k=n}^{m} |h_k|^2 \sum_{k=n}^{m} |\lambda_k e_k(t)|^2.$$

Первый сомножитель $\sum\limits_{k=n}^{m} |h_k|^2$ сходится к нулю при $n, m \to \infty$, как отрезок сходящегося ряда. Для доказательства теоремы достаточно показать, что второй сомножитель ограничен. Запишем в явном виде условие $Ae_k = \lambda_k e_k$:

$$\int\limits_T K(t,s) e_k(s)\, d\mu(s) = \lambda_k e_k(t). \tag{6}$$

Из условия (5) получаем, что при фиксированном t функция $\overline{K(t,s)}$, как функция переменной s, принадлежит $L_2(T,\mu)$; равенство (6) означает, в частности, что число $\lambda_k e_k(t)$ есть коэффициент Фурье этой функции. По неравенству Бесселя $\sum\limits_{k=n}^{m} |\lambda_k e_k(t)|^2 \leqslant C$. $\lhd$

З а м е ч а н и е 4. Как было показано в § 48, условие $\int\limits_\Omega |K(t,s)|^2\, ds \leq C$ выполнено в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ для слабополярного ядра при $\alpha < n/2$.

П р и м е р ы.

1. При доказательстве теоремы 4 § 37 было проверено, что ортонормированный базис $\{\exp(i2\pi kt)\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ состоит из собственных функций интегрального оператора

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t-s)x(s)\, ds,$$

а собственные значения $\lambda_k = \int\limits_0^1 K(\tau)\exp(-i2\pi k\tau)\, d\tau$ являются коэффициентами Фурье функции $K(\tau)$. Условие самосопряженности оператора $K(\tau) = \overline{K(-\tau)}$ обеспечивает вещественность собственных значений.

2. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор с ядром $K(t,s) = \min\{t,s\}$. Запишем уравнение $Ax = \lambda x$ для нахождения собственных функций, используя явный вид ядра:

$$\int\limits_0^t sx(s)\, ds + \int\limits_t^1 tx(s)\, ds = \lambda x(t). \tag{7}$$

Левая часть уравнения (7) есть непрерывная функция для любой функции $x \in L_2[0,1]$. При $\lambda \neq 0$ получаем отсюда, что и функция x непрерывна. Но при непрерывной функции x левая часть является непрерывно дифференцируемой функцией, а значит, и x непрерывно дифференцируема. Продифференцировав по t уравнение (7), получаем уравнение

$$tx(t) + \int_t^1 x(s)\,ds - tx(t) = \lambda x'(t),$$

из которого аналогично видно, что функция $x'(t)$ непрерывно дифференцируема. Продифференцировав последнее уравнение, получаем

$$-x(t) = \lambda x''(t).$$

Значит, собственная функция, соответствующая собственному значению λ, является решением обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\lambda x''(t) + x(t) = 0. \tag{8}$$

Для уравнения (8) можно найти общее решение. Например, при $\lambda > 0$ общее решение уравнения (8) есть

$$x(t) = c_1 \cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + c_2 \sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}. \tag{9}$$

Но не всякое решение уравнения (8) является решением интегрального уравнения (7). Можно подставить (9) в (7) и найти те λ, при которых (7) имеет ненулевые решения.

Более удобен другой способ. Положим $t = 0$ в уравнениии (7) и $t = 1$ в уравнении $\int_t^1 x(s)\,ds = \lambda x'(t)$. Получаем, кроме уравнения (8), краевые условия, которым должны удовлетворять собственные функции: $x(0) = 0$, $x'(1) = 0$. Покажем, что если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (8) и краевым условиям

$$x(0) = 0, \tag{10}$$

$$x'(1) = 0, \tag{11}$$

то x является решением интегрального уравнения (7). Действительно, проинтегрировав (8) от t до 1 и используя (11), получим уравнение

$\int\limits_t^1 x(s)\,ds = \lambda x'(t)$. Проинтегрировав его от 0 до t и используя (10), получим исходное уравнение (7).

Значит, уравнение (7) для нахождения собственных функций эквивалентно краевой задаче (8), (10), (11) для дифференциального уравнения, и наша задача сводится к так называемой *задаче Штурма — Лиувилля*: найти значения параметра λ, при которых краевая задача (8), (10), (11) имеет ненулевые решения.

Так как известно общее решение уравнения (8), можем в явном виде выписать решение краевой задачи. При $\lambda = 0$ получаем $x = 0$, и значит, $\lambda = 0$ не есть собственное значение.

При $\lambda > 0$, подставляя общее решение (9) в краевые условия (10), (11), получаем

$$x(0) = c_1 = 0,\ x'(1) = \frac{c_2}{\sqrt{\lambda}} \cos\frac{1}{\sqrt{\lambda} = 0}.$$

Если $\cos(1/\sqrt{\lambda}) \neq 0$, то $c_2 = 0$, $x = 0$ и x не является собственной функцией. Значит, собственные функции существуют только, если $\cos(1/\sqrt{\lambda}) = 0$. Отсюда $1/\sqrt{\lambda} = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и получаем последовательность собственных значений

$$\lambda_k = \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2},\ k = 0, 1, 2, \dots.$$

При $\lambda = \lambda_k$ собственная функция e_k имеет вид $e_k(t) = c_2 \sin(\pi/2 + k\pi)t$, где постоянная c_2 произвольна. Выбираем ее из условий нормировки так, чтобы $\|e_k\| = 1$, для чего полагаем

$$c_2 = \Big(\int\limits_0^1 \sin^2 t(\pi/2 + k\pi)\,dt\Big)^{-1/2} = \sqrt{2}.$$

При $\lambda < 0$, используя общее решение (8), убеждаемся, что задача (8), (10), (11) имеет только нулевые решения.

Итак, интегральный оператор A с ядром $K(t,s) = \min(t,s)$ в пространстве $L_2[0,1]$ имеет полную ортонормированную систему собственных функций $e_k(t) = \sqrt{2}\sin(\pi/2 + k\pi)t$ с собственными значениями $\lambda_k = (\pi/2 + k\pi)^{-2}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Мы получили, в частности, еще один пример полной ортонормированной системы в пространстве $L_2[0,1]$.

Установленная в примере 2 связь интегрального оператора с задачей Штурма — Лиувилля является проявлением общей закономерности. Для широкого класса дифференциальных уравнений задача Штурма — Лиувилля

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = \lambda u(x),\ 0 < x < 1,$$

$$a_0 u(0) - b_0 u'(0) = 0;\quad a_1 u(1) - b_1 u'(1) = 0,$$

где

$$p(x) > 0,\ q(x) \geq 0,$$

$$a_0 \geq 0,\ a_1 \geq 0, b_0 \geq 0,\ b_1 \geq 0,\ a_0 + a_1 > 0,\ b_0 + b_1 > 0,$$

эквивалентна задаче о собственных функциях некоторого компактного самосопряженного интегрального оператора. Для построения собственных функций, как в рассмотренном примере, используется задача Штурма — Лиувилля, а из теоремы 2 следует, что эти собственные функции образуют базис.

Этот факт является основным моментом при обосновании метода Фурье (метода разделения переменных) решения краевых задач для уравнений математической физики.

ГЛАВА VIII
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие обобщенных функций возникло в связи с рядом задач математики и физики, когда обычных функций оказалось недостаточно для описания наблюдаемых явлений. Например, распределение масс в пространстве удобно задавать с помощью функции – плотности распределения. Если есть точки, имеющие ненулевую массу, то не существует обычной функции, которая являлась бы плотностью распределения. Среди других осложнений, заставивших пересмотреть понятие функции, отметим следующее: для разрывной функции нет обычной функции, которая могла бы играть роль производной; последовательность, полученная почленным дифференцированием сходящейся последовательности, может не иметь предела; для таких полезных функций, как многочлены, нет функций, которые являлись бы их преобразованиями Фурье.

Общая задача заключается, таким образом, в построении пространств, более широких, чем пространства обычных функций, в которых определены естественные операции.

Одним из вариантов решения указанной задачи является введение обобщенных функций. Заметим, что понятие обобщенной функции было вызвано не стремлением к обобщениям, а конкретными задачами. Впервые обобщенные задачи начали использоваться в физике П. Дираком. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С. Л. Соболевым и Л. Шварцем. Конструкция обобщенных функций и действий над ними естественно укладывается в общие концепции функционального анализа.

Идею введения обобщенных функций проиллюстрируем на следующем примере. Если на множестве $C^\infty[0,1]$ задать топологию с помощью нормы из $L_2[0,1]$, то сопряженное пространство будет изоморфно $L_2[0,1]$. Если ввести более сильную топологию на $C^\infty[0,1]$, то множество непрерывных линейных функционалов станет шире и оно будет расширением пространства функций $L_2[0,1]$. Если топологию задать, кроме того, таким образом, чтобы оператор дифференцирования был непрерывным, то сопряженный к оператору дифференцирования будет действовать в этом расширенном пространстве и играть роль дифференцирования.

Таким образом, для построения пространств обобщенных функций следует построить такое пространство бесконечно дифференцируемых функций, чтобы в нем топология была достаточно сильной, чтобы оператор дифференцирования был непрерывен и затем в качестве искомого пространства обобщенных функций рассмотреть его сопряженное. Существует много таких пространств и, соответственно, много различных пространств обобщенных функций. Наиболее часто используются пространства Шварца $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, описанные ниже. Все эти пространства не являются нормированными пространствами, но являются топологическими векторными пространствами.

Поэтому сначала рассмотрим общие свойства топологических векторных пространств, из которых в частном случае следуют замечательные свойства обобщенных функций.

§ 53. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Топологическим векторным пространством* (т.в.п.) называется множество X, которое

1) является векторным пространством (над полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$);

2) является топологическим пространством;

3) структуры топологического и векторного пространств согласованы, т. е. операции сложения и умножения на число непрерывны в заданной топологии.

Заметим, что условие 3) существенно, так как встречаются естественные на первый взгляд топологии, не согласованные с векторной структурой (см. пример 13 из § 25).

Примером т.в.п. является нормированное пространство, так как (см. § 25) в нормированном пространстве операции сложения и умножения на число непрерывны. Особенность нормированных пространств заключается в том, что в них топология задается с помощью одной нормы. Однако нам уже встречались различные типы сходимости и связанные с ними топологии в векторных пространствах, согласованные с векторной структурой, которые не могут быть заданы с помощью одной нормы. Таковы, например, точечная сходимость последовательности функций, сильная сходимость последовательности операторов, слабая сходимость в нормированном пространстве и др. Создание теории обобщенных функций также стимулировало развитие теории топологических векторных пространств.

На различные классы т.в.п. переносятся ряд понятий и теорем из теории нормированных пространств. Рассмотрим здесь лишь некоторые вопросы, связанные с сопряженными пространствами и сопряженными операторами, которые будут использованы в этой главе при построении обобщенных функций. Более подробно т.в.п. будут рассмотрены в главе IX.

Определение 2. *Сопряженным пространством к т.в.п.* X называется пространство $X,'$ состоящее из всех линейных непрерывных функционалов на пространстве X.

В сопряженном пространстве можно ввести слабую сходимость: говорят, что последовательность $f_n \in X'$ *сходится слабо* к $f \in X'$, если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$.

Как и в случае нормированных пространств, для непрерывности линейного оператора (или функционала) в т.в.п. достаточно, чтобы он был непрерывен в одной точке (например, в точке 0).

Если A — линейный непрерывный оператор в т.в.п. X, то точно также, как и в случае нормированного пространства, вводится понятие сопряженного оператора.

Значение функционала $f \in X'$ на точке x будем обозначать $\langle f, x\rangle$.

Определение 3. *Сопряженным оператором* для непрерывного линейного оператора $A : X \to X$ называется оператор $A'\colon X' \to X'$, действующий по формуле $A'f(x) = f(Ax)$ или, что то же, удовлетворяющий условию $\langle A'f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle$.

Теорема 1. *Для любого непрерывного линейного оператора A в пространстве X сопряженный оператор A' является непрерывным в смысле слабой сходимости линейным оператором.*

$\triangleright$ Функционал $g(x) = (f \circ A)(x)$, как композиция непрерывных отображений, есть непрерывное отображение, т. е. g есть элемент из X' (тем самым проверена корректность определения оператора A').

Если $f_n \to f$ слабо, то $A'f_n(x) = f_n(Ax) \to f(Ax) = A'f(x)$, т. е. оператор A' переводит слабо сходящуюся последовательность из X' в слабо сходящуюся последовательность из X'. $\triangleleft$

Как мы уже отмечали, использование сопряженного пространства наиболее полезно в том случае, когда сопряженное пространство X' достаточно обширно, т. е. функционалы из X' разделяют точки пространства X. Оказывается, однако, что для произвольных т.в.п. элементы сопряженного пространства могут не разделять точки X.

П р и м е р. В векторном пространстве $KC[0,1]$ кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ зададим топологию с помощью метрики $\rho(x,y) = \int\limits_0^1 \sqrt{|x(t)-y(t)|}\,dt$. Эта топология согласована с векторной структурой. Покажем, что если f — непрерывный линейный функционал на этом пространстве, то $f=0$, т. е. сопряженное пространство тривиально.

Действительно, предположим, что существует функция x_0 такая, что $f(x_0)=\alpha>0$. Из непрерывности f в точке 0 следует, что существует $\delta>0$ такое, что если $\rho(x,0)<\delta$, то $f(x)<\alpha$. Если x_0 представить в виде $x_0 = 1/n(y_1+\ldots+y_n)$, то $f(x_0)=1/n[f(y_1)+\ldots+f(y_n)]$ и хотя бы для одного k имеем $f(y_k)\geqslant\alpha$. Возьмем

$$y_k(t) = \begin{cases} nx_0(t), & \text{если}\, \frac{k-1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{k}{n}, \\ 0 & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

Тогда выполняется равенство $x_0(t) = \frac{1}{n}[y_1(t)+\ldots+y_n(t)]$ и

$$\rho(y_k,0) = \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} \sqrt{n|x_0(t)|}\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_0(t)|}.$$

Если взять n таким, что

$$n > \Big(\frac{\delta}{\sup|x_0(t)|}\Big)^2,$$

то $\rho(y_k,0)<\delta$ и для всех k должно выполняться $f(y_k)<\alpha$. Получаем противоречие. Значит, $f(x)=0$ для любого x.

Локально выпуклые топологические векторные пространства. Выделяется класс топологических векторных пространств, обладающих рядом дополнительных свойств, в частности для которых непрерывные линейные функционалы разделяют точки исходного пространства.

Лемма 1. *Окрестности точки* 0 *т.в.п.* X *однозначно определяют топологию этого пространства.*

$\triangleright$ Для любого $h\in X$ отображение $T_hx = x+h$ является непрерывным (в силу аксиомы 3 из определения 1 т.в.п.), обратное отображение T_{-h} также непрерывно, значит, T_h — гомеоморфизм. При этом гомеоморфизме точка 0 переходит в точку h и окрестности точки 0 взаимно однозначно переходят в окрестности точки h. Значит, по окрестности точки 0 можно построить все окрестности произвольной точки $h \in X$ и тем самым однозначно задать топологию в X. $\triangleleft$

Определение 4. Множество M в векторном пространстве X называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in M$ точки $tx + (1-t)y$ принадлежат M для всех t таких, что $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определение 5. Топологическое векторное пространство (X, τ) называется *локально выпуклым*, если в нем существует база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств. Топология τ называется в этом случае *локально выпуклой*.

Пусть на векторном пространстве X задано семейство полунорм $(p_i)_{i \in I}$ (I — произвольное семейство индексов). Топологию в X задают с помощью системы полунорм следующим образом. Для произвольного конечного набора полунорм $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ и числа $r > 0$ зададим множество

$$V_{i_1,\ldots,i_n,r} = \{x \in X |\, p_{i_k} < r,\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Множества $V_{i_1,\ldots,i_n,r}$ образуют базу окрестностей нуля некоторой топологии, а множества $x_0 + V_{i_1,\ldots,i_n,r}$ — базу окрестностей точки x_0.

Множество $U \subset X$ называется *открытым*, если для любой точки $x_0 \in U$ существует такое множество $V_{i_1,\ldots,i_n,r} := V$, что $x_0 + V \subset U$. Проверим, что это действительно топология. Множества $\emptyset$ и X открыты. Пусть U_i, $i \in I$, — семейство открытых множеств. Рассмотрим множество $u = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Если $x_0 \in U$, то $x_0 \in U_{i_0}$ для некоторого i_0. Так как U_{i_0} открыто, то найдется множество $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,r}$ такое, что $x_0 + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,r} \subset U_{i_0} \subset U$. Следовательно, множество U открыто.

Покажем, что $U_1 \cap U_2$ — открытое множество. Если $x_0 \in U_1 \cap U_2$, то $x_0 \in U_1$ и $x_0 \in U_2$. Тогда найдутся множества $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,r_1}$ и $V_{\beta_1,\ldots,\beta_m,r_2}$ такие, что $x_0 + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,r_1} \subset U_1$ и $x_0 + V_{\beta_1,\ldots,\beta_m,r_2} \subset U_2$. Выберем $r = \min(r_1, r_2)$ и рассмотрим окрестность нуля вида $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m,r}$. Тогда $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m,r} \subset V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,r_1}$ и $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m,r} \subset V_{\beta_1,\ldots,\beta_m,r_2}$. Следовательно,

$$x_0 + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m,r} \subset U_1 \cap U_2,$$

т. е. $U_1 \cap U_2$ открыто.

Предложение 1. *Топология на векторном пространстве X, заданная с помощью системы полунорм, локально выпукла.*

$\triangleright$ Покажем, что множества $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,r}$, образующие базу окрестностей нуля, являются выпуклыми множествами. Пусть $x, y \in V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,r}$. Тогда, если $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $i = 1, \dots, n$, получаем

$$p_{\alpha_i}(tx + (1-t)y) \leqslant tp_{\alpha_i}(x) + (1-t)p_{\alpha_i}(y) \leqslant tr + (1-t)r = r,$$

значит, $tx + (1-t)y \in V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n,r}$. $\triangleleft$

Справедливо и обратное утверждение.

Предложение 2. *На локально выпуклом т.в.п. (X, τ) существует такая система полунорм $(p_i)_{i\in I}$, что топология τ совпадает с топологией, построенной описанным выше способом по этой системе полунорм (см. следствие 4 теоремы 3 § 57.)*

Предложение 3. *Пусть в т.в.п. X топология τ задана системой полунорм $(p_i)_{i\in I}$ и пусть для любого $x \in X$, $x \neq 0$, существует полунорма p_{i_0} такая, что $p_{i_0}(x) \neq 0$. Тогда непрерывные линейные функционалы разделяют точки пространства X.*

$\triangleright$ Пусть $x_1 \neq x_2$. Тогда $x_0 := x_1 - x_2 \neq 0$. Существует такая полунорма p_{i_0} на X из числа задающих топологию, что $p_{i_0}(x_0) \neq 0$. На одномерном подпространстве $L = \{tx_0 | \, t \in \mathbf{R}\} \subset X$ зададим линейный функционал f_0 формулой $f_0(tx_0) = tp_{i_0}(x_0)$. Тогда на L выполнено неравенство $|f_0(x)| \leqslant p_{i_0}(x)$. По теореме Хана — Банаха (см. § 41) для функционала f_0 существует продолжение f на все пространство X такое, что $|f(x)| \leqslant p_{i_0}(x)$.

Покажем, что функционал f непрерывен в точке 0. Действительно, для окрестности V нуля в $\mathbf{R}$ вида $V = \,]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, прообраз $f^{-1}(V)$ содержит множество $V_{i_0,\varepsilon}$, т. е. является окрестностью нуля в (X, τ). В силу линейности f из непрерывности его в точке 0 следует непрерывность в любой точке, и значит, $f \in X'$. По построению имеем $f(x_1) - f(x_2) = f(x_0) \neq 0$. $\triangleleft$

Замечание. Условие на систему полунорм в предложении 3 (для $x \neq 0$ существует полунорма p такая, что $p(x) \neq 0$) эквивалентно требованию отделимости топологии τ. Доказательство см. в § 57 (предложение 2).

Примеры.

1. В пространстве $C(\mathbf{R})$ непрерывных функций на $\mathbf{R}$ счетная система полунорм

$$p_k(x) = \max_{|t|\leqslant n} |x(t)|, \quad k \in \mathbf{N},$$

задает локально выпуклую топологию, в которой сходятся те последовательности, которые равномерно сходятся на компактных подмножествах из $\mathbf{R}$. Например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k/k!$ сходится в этом пространстве к e^t (равномерно и в среднем ряд не сходится).

2. В пространстве $\mathbf{F}[0,1]$ всех функций на отрезке $[0,1]$ система полунорм $p_t(x) = |x(t)|,\ t \in [0,1]$, задает локально выпуклую топологию, сходимость в которой совпадает с точечной сходимостью последовательности функций.

3. В пространстве $LB(X,Y)$ линейных ограниченных операторов, где X, Y — банаховы пространства, система полунорм $p_x(A) = \|Ax\|_Y$, $A \in LB(X,Y),\ x \in X$, задает сильную топологию, сходимость в которой есть сильная сходимость операторов.

4. В нормированном пространстве X система полунорм $p_f(x) = |f(x)|,\ f \in X'$, задает слабую топологию, сходимость в которой есть слабая сходимость в X.

5. В пространстве X', сопряженном к топологическому векторному пространству X (в частности, нормированному пространству X), система полунорм $p_x(f) = |f(x)|,\ x \in X$, задает $*$-слабую топологию, сходимость в которой есть $*$-слабая сходимость в X'.

6. В пространстве $C^\infty[0,1]$, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$, зададим локально выпуклую топологию системой полунорм $p_k(x) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x^{(k)}(t)|$. Последовательность x_n сходится к x в этой топологии, если она сходится равномерно вместе со всеми своими производными. Эта топология может быть задана с помощью метрики (см. теорему 4 § 57), но не может быть задана с помощью нормы.

§ 54. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пространство $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ основных функций. Через $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ будем обозначать множество функций, определенных на $\mathbf{R}$, бесконечно дифференцируемых и *финитных*, т. е. таких, что $\varphi(x) = 0$, если $|x| > c$ (где c зависит от φ). Функции из пространства $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ будем называть *основными.* Множество $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ является векторным пространством с естественными операциями сложения и умножения на число.

Определение 1. *Носителем функции* φ (обозначается $\operatorname{supp}\varphi$) называется наименьшее замкнутое множество, вне которого $\varphi(x) = 0$, т. е. $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbf{R}|\ \varphi(x) \neq 0\}}$.

Используя это понятие, можно сказать, что финитная функция — это функция с компактным носителем.

В пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ зададим сходимость.

Определение 2. Последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ называется *сходящейся* к φ в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, если

1) существует такой компакт $K \subset \mathbf{R}$, что $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ для всех n;

2) для любого $k = 0, 1, \ldots$ последовательность $\varphi_n^{(k)}$ производных порядка k равномерно сходится при $n \to \infty$ к $\varphi^{(k)}$.

Определение 3. Линейный оператор A (функционал f) в пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ будем называть *непрерывным*, если для любой последовательности $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ выполняется $A\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ($f(\varphi_n) \to 0$ в $\mathbf{C}$).

В пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ оператор дифференцирования определен и непрерывен, оператор умножения на бесконечно дифференцируемую функцию также определен и непрерывен.

Замечание. Мы задали в пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ сходимость и непрерывность определили через сходимость. В пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ можно задать такую локально выпуклую топологию, что сходимость в этой топологии совпадает с заданной сходимостью в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ (см. § 61). При этом непрерывные операторы есть именно те, которые сходящуюся последовательность переводят в сходящуюся (см. главу IX). Таким образом, $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ есть локально выпуклое пространство и к нему применимы утверждения, справедливые для локально выпуклых пространств.

Прежде чем перейти к дальнейшим построениям, покажем, что основные функции существуют и их достаточно много. Заметим, что функции из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ обладают очень специальными свойствами: они являются бесконечно дифференцируемыми, но не аналитическими (из аналитичности функции φ и условия $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant C$ сразу следует, что $\varphi(x) \equiv 0$). Поэтому существование таких функций не очевидно. Покажем, что существует достаточно много основных функций.

Классическим примером функции из пространства $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ является “шапочка” :

$$\omega_h(x) = \begin{cases} C_h \exp\Big(-\frac{h^2}{h^2-|x|^2}\Big), & |x| < h, \\ 0, & |x| \geqslant h, \end{cases}$$

где постоянную C_h выбирают так, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \omega_h(x)\, ds = 1.$$

Функция ω_h позволяет построить много других примеров функций из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$: ее сдвиги, растяжения, произведения на функции из $C^\infty(\mathbf{R})$, линейные комбинации построенных функций, пределы последовательностей и т. д.

Определение 4. *Локально интегрируемой функцией* будем называть функцию g, заданную почти всюду на $\mathbf{R}$, измеримую и интегрируемую на каждом ограниченном замкнутом множестве из $\mathbf{R}$.

Как и при построении пространства $L_1(\mathbf{R})$, локально интегрируемые функции отождествляем, если они совпадают почти всюду.

Покажем, что основных функций из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ достаточно много в следующем смысле.

Лемма (Дюбуа – Реймон). *Для любой ненулевой локально интегрируемой функции g существует функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ такая, что*

$$\int\limits_{\mathbf{R}} g(x)\varphi(x)\, dx \neq 0.$$

$\triangleright$ По локально интегрируемой функции g построим для $0 < h < 1$ функцию

$$g_h(x) = \int\limits_{x-h}^{x+h} g(y)\omega_h(x-y)\, dy.$$

Функция g_h бесконечно дифференцируема в силу бесконечной дифференцируемости “шапочки” $\omega_h(x)$. Покажем, что $\int\limits_a^b |g(x) - g_h(x)|\, dx \to 0$ при $h \to 0$ для любого отрезка $[a, b]$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$ на $[a-1, b+1]$ так, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{a-1}^{b+1} |g(x) - v(x)|\, ds < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Такая функция существует, согласно следствию 1 теоремы 2 § 19. Для функции v построим аналогично усредненную функцию v_h. Тогда

$$\int\limits_a^b |v(x) - v_h(x)|\,dx = \int\limits_a^b \left| v(x) \int\limits_{x-h}^{x+h} \omega_h(x-y)\,dy - \int\limits_{x-h}^{x+h} v(y)\omega_h(x-y)\,dy \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \int\limits_{x-h}^{x+h} |v(x) - v(y)|\omega_h(x-y)\,dydx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[a-1,b+1]} |v'(x)| h(b-a) \int\limits_{x-h}^{x+h} \omega_h(x-y)\,dy = \max_{x\in[a-1,b+1]} |v'(x)| h(b-a).$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $0 < h < \delta$ выполнялось

$$\int\limits_a^b |v(x) - v_h(x)|\,dx < \varepsilon/3.$$

Применяя неравенство треугольника в пространстве $L_1[a,b]$, получаем

$$\int\limits_a^b |g(x) - g_h(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b |g(x) - v(x)|\,dx + \int\limits_a^b |v(x) - v_h(x)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_a^b |v_h(x) - g_h(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \int\limits_a^b |v_h(x) - g_h(x)|\,dx.$$

Для усредненной функции получаем

$$\int\limits_a^b |g_h(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b \int\limits_{x-h}^{x+h} |g(y)|\omega_h(x-y)\,dydx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{a-h}^{b+h} |g(y)| \int\limits_{y-h}^{y+h} \omega_h(x-y)\,dxdy \leqslant \int\limits_{a-1}^{b+1} |g(y)\,dy.$$

Откуда

$$\int\limits_a^b |v_h(x) - g_h(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{a-1}^{b+1} |g(x) - v(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, $\|g - g_h\|_{L_1[a,b]} \to 0$ при $h \to 0$.

Пусть теперь локально интегрируемая функция g такова, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ выполнено

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\, dx = 0.$$

Так как функция $\omega_h(x - y)$, как функция y, принадлежит $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ при любом x, усредненная функция $g_h(x) \equiv 0$ и в силу доказанной сходимости к g получаем, что $g = 0$ почти всюду. $\triangleleft$

Определение 5. *Обобщенной функцией* (на вещественной прямой) называется непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, т. е. элемент пространства $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Обобщенные функции называют также *распределениями*, подчеркивая связь с физическими приложениями.

Расшифруем определение 5: обобщенная функция f — это отображение из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ в $\mathbf{C}$ такое, что

1) $f(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda f(\varphi_1) + \mu f(\varphi_2)$;

2) если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, то $f(\varphi_n) \to 0$.

П р и м е р. Локально интегрируемой функции g поставим в соответствие функционал F_g по формуле

$$\langle F_g, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} g(x)\varphi(x)\, dx. \qquad (1)$$

Проверим, что F_g — обобщенная функция. Отметим сначала, что интеграл в (1) существует для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, так как интегрирование ввиду финитности производится по конечному отрезку. Линейность F_g очевидна. Если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, то

$$\langle F_g, \varphi_n\rangle = \int\limits_{-M}^{M} g(x)\varphi_n(x)\, dx,$$

где постоянная M не зависит от n. Тогда

$$|\langle F_g, \varphi_n \rangle| \leqslant \max_{-M \leqslant x \leqslant M} |\varphi_n(x)| \int_{-M}^{M} |g(x)|\, dx \to 0$$

при $n \to \infty$, что и означает непрерывность функционала F_g.

Например, постоянной функции $g(x) \equiv 1$ соответствует функционал $\langle 1, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx$.

Таким образом, локально интегрируемой функции g поставлена в соответствие обобщенная функция F_g, причем если $g \neq g_1$, то, согласно лемме Дюбуа — Реймона, $F_g \neq F_{g_1}$. Это значит, что множество локально интегрируемых функций инъективно отображается (т. е. вкладывается) в множество обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Определение 6. Обобщенная функция F называется *регулярной*, если существует локально интегрируемая функция f такая, что

$$\langle F, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Остальные обобщенные функции называются *сингулярными*. Именно сингулярные обобщенные функции являются теми элементами пространства обобщенных функций, которых не хватает при решении ряда задач в пространствах обычных функций.

Наиболее часто встречающаяся сингулярная обобщенная функция есть так называемая δ-функция Дирака, определенная формулой $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Предположим, что существует локально интегрируемая функция u, для которой

$$\varphi(0) = \int\limits_{\mathbf{R}} u(x)\varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Возьмем последовательность $\varphi_n(x) = \omega_1(nx)$. Тогда $\varphi_n(0) = c \neq 0$, а согласно теореме Лебега,

$$\int\limits_{\mathbf{R}} u(x)\varphi_n(x)\, dx \to 0.$$

Получаем противоречие. Значит, представление (2) невозможно и δ-функция есть сингулярная обобщенная функция.

Приведем еще несколько примеров сингулярных обобщенных функций:

$\langle f_1, \varphi \rangle = \varphi'(0)$,

$\langle f_2, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} |x|^{1/2} \varphi''(x)\, dx$,

$\langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ — сдвинутая δ-функция, сосредоточенная в точке x_0.

Сходимость в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ вводится следующим образом.

Определение 7. Последовательность f_n обобщенных функций *сходится* в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ к обобщенной функции f, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ последовательность $f_n(\varphi)$ сходится к $f(\varphi)$.

Заданная таким образом сходимость является слабой сходимостью в сопряженном пространстве.

Введение обобщенных функций как функционалов на пространстве основных функций является не только удачным математическим приемом, но имеет и физический смысл. Пусть, например, существует функция ρ, описывающая плотность распределения вещества. Ни один физический прибор не измеряет значение этой функции в точке, а измеряет некоторую усредненную величину, которая, как правило, выражается формулой $\int \rho(x)\varphi(x)\, dx$, где φ — т. н. пробная или "приборная" функция, которая характеризует прибор. Таким образом, величины, имеющие физический смысл, являются значениями функционала, соответствующего функции ρ, а не значениям функции $\rho(x)$. Если такой функции ρ нет, то распределение вещества все равно задает функционал на множестве пробных функций, т. е. фактически задает обобщенную функцию.

§ 55. ДЕЙСТВИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Дифференцирование. Пусть u — непрерывно дифференцируемая функция. Проследим связь между функционалом, соответствующим функции u, т. е.

$$\langle u, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} u(x)\varphi(x)\, dx, \tag{1}$$

и функционалом, соответствующим ее производной u' :

$$\langle u', \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} u'(x)\varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Проинтегрируем по частям (2):

$$\int\limits_{\mathbf{R}} u'(x)\varphi(x)\,dx = u(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbf{R}} u(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}} u(x)(-\varphi'(x))\,dx \tag{3}$$

(внеинтегральные члены обращаются в нуль ввиду финитности φ). Получаем, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ выполнено равенство

$$\langle u', \varphi\rangle = \langle u, -\varphi'\rangle. \tag{4}$$

Равенство (4) берется в качестве определения производной для произвольной обобщенной функции.

Определение 1. *Производной обобщенной функции* f называется обобщенная функция Df, заданная формулой

$$\langle Df, \varphi\rangle = \langle f, -D\varphi\rangle. \tag{5}$$

Сравнивая формулу (5) с определением сопряженного оператора (§ 53), видим, что оператор дифференцирования D в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ определяется как оператор, сопряженный к оператору $-D$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Поскольку оператор D непрерывен в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, то, согласно теореме 1 § 53, оператор D' действует из $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ и непрерывен в топологии слабой сходимости. Это простое замечание приводит к неожиданным результатам.

Предложение 1. *Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.*

Предложение 2. *Сходящуюся в* $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ *последовательность (и ряд) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.*

В частности, разрывная локально интегрируемая функция имеет производную, которая является (сингулярной) обобщенной функцией.

Примеры.

1. Если u — обычная непрерывно дифференцируемая функция, то производная соответствующей ей обобщенной функции есть обобщенная функция, соответствующая обычной производной, т.е. производная в смысле обобщенных функций совпадает с обычной производной (это свойство взято в основу определения производной обобщенной функции).

2. Продифференцируем разрывную обычную функцию

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

в смысле обобщенных функций.

Рассмотрим θ как обобщенную функцию, т. е. зададим соответствующий ей функционал:

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \theta(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Тогда

$$\langle D\theta, \varphi \rangle = \langle \theta, -\varphi' \rangle = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Значит, производная от обычной функции θ в смысле обобщенных функций есть δ-функция — сингулярная обобщенная функция.

З а м е ч а н и е 1. Приведенный пример показывает, что если обычная функция u дифференцируема почти всюду, то ее производная в смысле обобщенных функций может не совпадать с обычной производной.

3. Пусть $u(x)$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция и пусть x_k — ее точки разрыва. Продифференцируем функцию u в смысле обобщенных функций. Пусть точки разрыва x_k занумерованы так, что $x_k < x_{k+1}$ и g — обычная производная функции u, определенная при $x \neq x_k$. Обозначим через σ_k скачок функции в точке x_k: $\sigma_k = u(x_k + 0) - u(x_k - 0)$, где $u(x_k \pm 0) = \lim\limits_{x \to x_k \pm 0} u(x)$. Рассмотрим u как обобщенную функцию

$$\langle u, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Тогда

$$\langle Du, \varphi \rangle = \langle u, -\varphi' \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)\varphi'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} [u(x_k + 0)\varphi(x_k) - u(x_{k+1} - 0)\varphi(x_{k+1})] +$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\varphi(x_k) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \Big\langle \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\delta_{x_k}, \varphi \Big\rangle = \langle g, \varphi\rangle.$$

Таким образом, для производной в смысле обобщенных функций получаем

$$Du = \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\delta_{x_k} + g,$$

где g — обычная производная функции u.

4. Функция $\ln|x|$ локально интегрируема и почти всюду дифференцируема. Но ее производная $1/x$ не является локально интегрируемой и формула

$$\langle \frac{1}{x}, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

не ставит ей в соответствие функционал, так как интеграл расходится, если $\varphi(0) \neq 0$. Вычислим производную от $\ln|x|$ в смысле обобщенных функций:

$$\langle \ln|x|, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \ln|x|\varphi(x)\,dx,$$

$$\langle D\ln|x|, \varphi\rangle = -\int\limits_{\mathbf{R}} \ln|x|\varphi'(x)\,dx.$$

Преобразуем полученный функционал к более удобному виду. Заметим, что интегрирование по частям в последнем интеграле неприменимо, так как $\ln|x|$ — разрывная функция. Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon_1\to+0,\varepsilon_2\to+0}\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon_1}\ln|x|\varphi'(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon_2}^{+\infty}\ln x\varphi'(x)\,dx\Bigg] =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0,\varepsilon_2\to+0}\Bigg[\ln(+\varepsilon_1)\varphi(-\varepsilon_1) + \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon_1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \ln\varepsilon_2\varphi(\varepsilon_2) + \int\limits_{\varepsilon_2}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Bigg].$$

В последней сумме ни одно из слагаемых не имеет предела при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$. Но если положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon) - \ln\varepsilon\varphi(\varepsilon)] = 0$. Поэтому

$$-\int\limits_{\mathbf{R}} \ln|x|\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

причем предел в правой части существует. Этот предел называется *интегралом в смысле главного значения*. Таким образом, мы поставили в соответствие функции $1/x$ (не являющейся локально интегрируемой) функционал

$$\left\langle \mathbf{P}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle := \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

и показали, что он является производной от $\ln|x|$.

5. Рассмотрим функцию $f(x) = \pi/2 - x/2$ при $0 \leqslant x < 2\pi$ и продолженную с периодом 2π на всю ось $\mathbf{R}$. Она разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = -i\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{k}e^{ikx},$$

причем ряд сходится в смысле пространства $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Продифференцируем ряд почленно и, как в примере 3, продифференцируем функцию f. Получаем

$$Df(x) = \sum_{k\neq 0}e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x - 2k\pi) - \frac{1}{2}.$$

Мы нашли таким способом сумму ряда $\sum\limits_{k\neq 0}e^{ikx}$, который заведомо расходится во всех пространствах обычных функций (сумма ряда является сингулярной обобщенной функцией).

Покажем теперь, что, несмотря на существенное расширение класса функций, производная в смысле обобщенных функций сохранила одно из важнейших свойств обычной производной.

Теорема 1. *Если* $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ *и* $Du = 0$, *то* $u = \mathrm{const}$.

$\triangleright$ По определению

$$\langle Du, \varphi\rangle = \langle u, -\varphi'\rangle = 0,$$

и значит, функционал u определен и равен нулю на тех функциях ψ из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, которые являются производными функции из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Функция ψ является производной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(\tau)\,d\tau$. Чтобы $\varphi(x)$ была финитна, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)\,d\tau = 0$. Возьмем функцию $\varphi_0(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ такую, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ получаем разложение

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \psi(x),$$

где $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ — производная функции из $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Значит,

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \varphi_0\rangle \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \langle u, \psi\rangle.$$

Обозначив $\langle u, \varphi_0\rangle = c$, получаем

$$\langle u, \varphi\rangle = c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \langle c, \varphi\rangle,$$

т. е. $u = c$. $\lhd$

З а м е ч а н и е 2. В классе обычных функций, дифференцируемых почти всюду, аналогичное свойство не имеет места. Например, функция θ имеет производную, почти всюду равную нулю, но $\theta \neq \mathrm{const}$.

Более того, пусть функция $g(x) = 0$ для $x < 0$, $g(x) = 1$ для $x > 1$ и совпадает на $[0, 1]$ с функцией Кантора (§ 6). Функция g непрерывна, $g'(x) = 0$ почти всюду, но $g(x) \neq \mathrm{const}$. Производная Dg, вычисленная в смысле определения 1, отлична от нуля и является сингулярной обобщенной функцией.

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию

Определение 2. *Произведением бесконечно дифференцируемой функции a на обобщенную функцию f* называется обобщенная функция af, определенная равенством $\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a\varphi\rangle$.

Как видно из определения, оператор умножения на функцию a в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ есть оператор, сопряженный к оператору умножения на функцию a в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Отсюда следует, что произведение на бесконечно дифференцируемую функцию определено для любой обобщенной функции и операция умножения является непрерывной в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Если f — обычная функция, то равенство

$$\int\limits_{\mathbf{R}} [a(x)f(x)]\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)[a(x)\varphi(x)]\,dx$$

показывает, что для регулярных обобщенных функций произведение на бесконечно дифференцируемую функцию совпадает с обычным.

П р и м е р ы.

1. $\langle x\ \mathbf{P}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle \mathbf{P}\frac{1}{x}, x\varphi\rangle = \text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}(x\varphi(x))\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(x)\,dx$, т. е. $x\mathbf{P}\frac{1}{x} = 1$;

2. $\langle x\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = x\varphi(x)\big|_{x=0} = 0$, т. е. $x\delta = 0$;

3. $\langle a(x)\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, a(x)\varphi\rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta, \varphi\rangle$, т. е. $a(x)\delta = a(0)\delta$.

При расширении множества функций до $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ не сохраняются все свойства обычных функций. Например, введенная операция умножения не является ассоциативной, так как

$$0 = (x\delta)\mathbf{P}\frac{1}{x} \neq (\delta x)\mathbf{P}\frac{1}{x} = \delta\Big(x\mathbf{P}\frac{1}{x}\Big) = \delta.$$

Не определено также значение обобщенной функции в точке (значение в точке не определено и для элементов из пространства $L_p[0,1]$). Но сравнить значения двух обобщенных функций на открытом множестве можно следующим образом.

Определение 3. Будем говорить, что *обобщенная функция f равна нулю* на открытом множестве $G \subset \mathbf{R}$, если для любой основной функции φ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset G$, выполнено $\langle f, \varphi\rangle = 0$.

Будем говорить, что $f = g$ на G, если $f - g = 0$ на G.

Определение 4. *Носителем обобщенной функции* f (обозначается $\operatorname{supp} f$) называется наименьшее замкнутое множество, вне которого $f = 0$.

Например, для обобщенной функции δ имеем $\delta = 0$ на $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Следовательно, $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$.

Свертка обобщенных функций

Напомним, что *сверткой* обычных функций f и g называется функция $f * g$, определяемая формулой

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Операция свертки определена не для любых обычных функций, так как интеграл в (6) может оказаться расходящимся. Заметим, что если одна из функций f или g является финитной, а вторая локально интегрируемой, то интеграл (6) существует и свертка определена.

Прежде чем дать определение свертки обобщенных функций, проследим связь функционала, соответствующего функции $f * g$ с функционалами, соответствующими f и g:

$$\langle f * g\rangle \iint f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \iint f(\xi)g(y)\varphi(y+\xi)\,d\xi dy = \big\langle g_y, \langle f_\xi, \varphi(y+\xi)\rangle\big\rangle.$$

В обозначении f_ξ нижний индекс ξ показывает, что функционал f применяется к $\varphi(y+\xi)$, как к функции от ξ, а y служит параметром. Если f — финитная функция, то функция $\psi(y) = \langle f_\xi, \varphi(y+\xi)\rangle$ принадлежит $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Действительно, если $f(x) = 0$ при $|x| > c_1$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| > c_2$, то при $y > c_1 + c_2$ получаем, что $\psi(y) = 0$, т. е. ψ — финитная функция. Переходя к пределу в равенстве

$$\frac{\psi(y+\Delta y) - \psi(y)}{\Delta y} = \Big\langle f_\xi, \frac{\psi(y+\Delta y+\xi) - \psi(y+\xi)}{\Delta y}\Big\rangle,$$

что возможно, так как в правой части предел существует, получаем, что ψ — дифференцируемая функция и $\psi'(y) = \langle f_\xi, \varphi'(y+\xi)\rangle$. Повторяя последнее рассуждение, получаем, что $\psi^{(k)}(y) = \langle f_\xi, \varphi^{(k)}(y+\xi)\rangle$, т. е. $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Таким образом, если f — обобщенная функция с компактным носителем, то имеет смысл выражение $\big\langle g_x, \langle f_y, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle$.

Определение 5. Пусть f и g — обобщенные функции, f имеет компактный носитель. *Сверткой* $f * g$ называется обобщенная функция, определенная равенством $\langle f * g, \varphi\rangle = \big\langle g_x, \langle f_y, \varphi(x+y)\rangle\big\rangle$.

П р и м е р ы.

1. Вычислим свертку $f * \delta$ для $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \big\langle f_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y) \rangle \big\rangle = \langle f_x, \varphi(x) \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Значит, $f * \delta = f$ и δ-функция играет роль единицы при свертке.

2. $\langle f * \delta', \varphi \rangle = \big\langle f_x, \langle \delta'_y, \varphi(x+y) \rangle \big\rangle = \langle f_x, -\varphi'(x) \rangle = \langle f', \varphi \rangle$. Получаем, что $f * \delta' = f'$, т. е. свертка с δ' есть операция дифференцирования.

Аналогично получаем, что

$$\sum a_k f^{(k)} = f * \sum a_k \delta^{(k)},$$

т. е. результат применения дифференциального оператора с постоянными коэффициентами к обобщенной функции f совпадает со сверткой f с линейной комбинацией производных δ-функции.

§ 56. ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Определить преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ тем же способом, что и дифференцирование, как сопряженный оператор, мы не можем, потому что оператор преобразования Фурье не переводит пространство $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ в себя. Поэтому для определения преобразования Фурье нужны дополнительные построения. Обычно поступают следующим образом. Строят другое пространство основных функций так, чтобы преобразование Фурье переводило его в себя. Тогда преобразование Фурье можно определить как сопряженный оператор к обычному преобразованию Фурье.

Определение 1. Отнесем к *пространству* $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ основных функций все бесконечно дифференцируемые функции φ на $\mathbf{R}$, убывающие при $x \to \infty$ вместе со своими производными быстрее любой степени $1/x$, т. е. такие, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^j \varphi^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Топологию в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ зададим набором полунорм

$$p_{k,j}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |(1+|x|)^j \varphi^{(k)}(x)|, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots .$$

Последовательность $\varphi_n \to 0$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, если для любых k, j последовательность $(1+|x|)^j \varphi^{(k)}(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x.

В пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ определена и непрерывна операция дифференцирования.

Определение 2. *Обобщенной функцией медленного роста* называется непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Таким образом, пространство обобщенных функций медленного роста есть пространство $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, сопряженное к пространству $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Любая финитная бесконечно дифференцируемая функция (т. е. элемент $\mathcal{D}(\mathbf{R})$) есть элемент $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ и из сходимости последовательности φ_n в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ следует ее сходимость в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Если f — непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, то его сужение на $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ является непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Таким образом, получаем вложение пространства $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, т. е. обобщенные функции медленного роста образуют часть пространства $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ обобщенных функций. Если $f(x)$ — обычная функция, растущая медленнее степени x, т. е. такая, что существуют константы m и C, что $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^m$, то соответствующий ей функционал $\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ есть обобщенная функция медленного роста. Напротив, функционал, соответствующий быстро растущей функции, например e^x, не является обобщенной функцией медленного роста.

Особый интерес к пространству $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ обусловлен следующей теоремой.

Теорема 1. *Преобразование Фурье отображает пространство* $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ *на себя биективно и непрерывно.*

$\triangleright$ Пусть

$$F(\varphi)(\xi) \equiv \hat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

есть преобразование Фурье функции $\varphi \in \mathcal{S}$. Так как функция φ убывает на бесконечности быстрее любой степени $1/x$, интеграл в (1) существует и его можно дифференцировать по параметру ξ любое число раз:

$$\hat{\varphi}^{(k)}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}} (-ix)^k\varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx = F[(-ix)^k\varphi](\xi).$$

Значит, $\hat{\varphi}$ — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция. Так как

$$F(D^j\varphi)(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\varphi^{(j)}(x)\,dx = (i\xi)^j F[\varphi](\xi)$$

есть ограниченная функция для любого j, получаем, что $F(\varphi)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Обратное преобразование Фурье задается формулой такого же вида и тоже отображает $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Отсюда получаем, что преобразование Фурье биективно отображает пространство $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ на себя.

Проверим непрерывность преобразования Фурье. Пусть $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, т. е. $\sup\limits_x |D^k\varphi_n(x)x^j| \to 0$ для любых k, j. Тогда

$$|\xi^k D^j F(\varphi_n)(\xi)| = |\xi^k F[(-ix)^j\varphi_n](\xi)| = |F[D^k(-ix)^j\varphi_n](\xi)| =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} D^k[(-ix)^j\varphi_n(x)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x |(1+|x|^2)D^k[(-ix)^j\varphi_n(x)]| \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^2} \to 0,$$

т. е. последовательность $F(\varphi_n) \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. $\triangleleft$

Сравним функционал, соответствующий функции $f \in L_1(\mathbf{R})$:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

и функционал, соответствующий ее преобразованию Фурье $\hat{f}$:

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\right)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Изменив порядок интегрирования в (2), что допустимо в силу теоремы Фубини, получаем

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x) \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi dx = \langle f, \hat{\varphi}\rangle.$$

Полученное равенство берется в качестве определения преобразования Фурье обобщенных функций.

Определение 3. *Преобразованием Фурье обобщенной функции* f медленного роста называется обобщенная функция $F(f)$ медленного роста, определенная формулой

$$\langle F(f), \varphi\rangle = \langle f, F(\varphi)\rangle.$$

Из определения видно, что оператор F преобразования Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ есть оператор, сопряженный к оператору F преобразования Фурье в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Из теоремы 1 настоящего параграфа и теоремы § 53 получаем:

1) преобразование Фурье существует для любой обобщенной функции из $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$;

2) преобразование Фурье биективно отображает $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ на $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$;

3) преобразование Фурье непрерывно в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Приведем примеры преобразований Фурье сингулярных обобщенных функций и неинтегрируемых обычных функций.

Примеры.

1. $\langle F(\delta), \varphi\rangle = \langle \delta, F(\varphi)\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx\Big|_{\xi=0} = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$, т. е. $F(\delta) = 1$;

2. $\langle F(\delta'), \varphi\rangle = \langle \delta', F(\varphi)\rangle = \langle \delta, -DF(\varphi)\rangle = -\langle \delta, F[(-ix)\varphi]\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} ix\varphi(x)\,dx = \langle ix, \varphi\rangle$, т. е. $F(\delta') = ix$;

3. $\langle F(1), \varphi\rangle = \langle 1, F(\varphi)\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\varphi(x)\,dx d\xi = 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi\rangle$, т. е. $F(1) = 2\pi\delta$;

4. $\langle F[x], \varphi\rangle = \langle x, F(\varphi)\rangle = \langle 1, xF(\varphi)\rangle = \langle 1, -iF(\varphi')\rangle = -i\langle F(1), \varphi'\rangle = -2\pi i\langle \delta, \varphi'\rangle = \langle 2\pi i\delta', \varphi\rangle$, т. е. $F[x] = 2\pi i\delta'$;

5. $\langle F(e^{ixh}), \varphi\rangle = \langle e^{ixh}, F(\varphi)\rangle = \langle 1, e^{ixh}F(\varphi)(x)\rangle = \langle 1, F(\varphi)(x+h)\rangle = \langle F(1), \varphi(x+h)\rangle = \langle 2\pi\delta, \varphi(x+h)\rangle = \langle 2\pi\delta(x+h), \varphi\rangle$, т. е. $F(e^{ixh}) = 2\pi\delta(x+h)$.

Преобразование Фурье обобщенных функций сохраняет многие свойства обычного преобразования Фурье. Это позволяет, в частности, исследовать широкий класс уравнений, содержащих свертки с обобщенными функциями и, в частности, дифференциальных уравнений.

Пример. Обыкновенное дифференциальное уравнение $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^{(k)} = g$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ можно записать в виде свертки $f * u = g$, где $f = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k a_k \delta^{(k)}$. Применяя преобразование Фурье, получаем $\hat{f}\hat{u} = \hat{g}$. Если $\hat{f}(\xi) \neq 0$ для $\xi \in \mathbf{R}$, то $\hat{u} = [1/\hat{f}]\ \hat{g}$.

ГЛАВА IX

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе изложены основные факты общей теории локально выпуклых топологических векторных пространств. В ней используется больше, чем в предыдущих главах, сведений из топологии. Для удобства читателей такие сведения приведены в приложении.

§ 57. ПОЛУНОРМЫ И ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ТОПОЛОГИИ

Определения топологического векторного пространства и полунормы были уже даны в § 53 и § 41. Рассмотрим подробнее связь этих понятий.

Подмножество A векторного пространства X над полем K называется *выпуклым*, если $\lambda x + \mu y \in A$, каковы бы ни были $x, y \in A$ и $\lambda, \mu \in K$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ и $\lambda + \mu = 1$. Оно называется *уравновешенным*, если $\lambda x \in A$, каковы бы ни были $x \in A$, $\lambda \in K$ и $|\lambda| \leqslant 1$. Множество A называется *абсолютно выпуклым*, если оно одновременно выпукло и уравновешено. Это равносильно следующему требованию: $\lambda x + \mu y \in A$ для любых $x, y \in A$ и $\lambda, \mu \in K$ таких, что $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$.

Множество всех конечных линейных комбинаций вида $\sum\limits_i \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_i \lambda_i = 1$, $x_i \in A$, является выпуклым множеством, содержащим A, и называется *выпуклой оболочкой* множества A. Оно является пересечением всех выпуклых подмножеств из X, содержащих A, и тем самым наименьшим таким подмножеством.

Аналогично наименьшее абсолютно выпуклое (уравновешенное) множество, содержащее A, называется *абсолютно выпуклой (уравновешенной) оболочкой* множества A. Оно состоит из элементов вида $\sum\limits_i \lambda_i x_i$ (λx), в которых $\sum\limits_i |\lambda_i| \leqslant 1$ и $x_i \in A$ $(|\lambda| \leqslant 1,\ x \in A)$.

Говорят, что подмножество A векторного пространства X *поглощает* множество B, если существует такое $\alpha > 0$, что $B \subset \lambda A$ для всех

$\lambda, \ \ |\lambda| \geqslant \alpha$. *Поглощающим множеством* называется множество A, которое поглощает каждую точку из X.

Конечная вещественная функция $p : X \to \mathbf{R}$ на векторном пространстве X называется *полунормой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

P_1) $p(x) \geqslant 0$;

P_2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;

P_3) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

для всех $x, y \in X$ и $\lambda \in K$.

Ясно, что $p(0) = 0$, но может быть, что $p(x) = 0$ и для $x \neq 0$, т. е., вообще говоря, $p^{-1}(0)$ — векторное подпространство в X. Полунорма p, для которой из $p(x) = 0$ следует $x = 0$, является *нормой*.

В векторном пространстве X имеется следующее соответствие между полунормами и абсолютно выпуклыми поглощающими множествами.

Теорема 1. *I. Пусть p — полунорма на X. Тогда множества $B_p(0,\alpha) = \{x \in X |\ p(x) < \alpha\}$ и $B_p[0,\alpha] = \{x \in X |\ p(x) \leqslant \alpha\}$, называемые полушарами, абсолютно выпуклые и поглощающие для любого $\alpha > 0$.*

II. Каждому абсолютно выпуклому поглощающему множеству $A \subset X$ соответствует полунорма p_A, называемая функционалом Минковского множества A, определенная формулой

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 |\ x \in \lambda A\}$$

и обладающая тем свойством, что

$$B_{p_A}(0,1) \subset A \subset B_{p_A}[0,1].$$

$\rhd$ Утверждение I следует из условий P_2, P_3 и конечности p.

II. Из того, что A — поглощающее множество, следует, что $p_A(x)$ конечно для каждого $x \in X$. Выполнение P_1 и P_2 очевидно. Чтобы доказать вполнение условия P_3, возьмем $x \in \lambda A$, $\ y \in \mu A$, $\ \lambda > 0$, $\mu > 0$. Тогда $x + y \in \lambda A + \mu A = (\lambda + \mu) A$ и поэтому $p_A(x+y) \leqslant \lambda + \mu$. Следовательно, $p_A(x+y) \leqslant p_A(x) + p_A(y)$. $\lhd$

Напомним, что векторное пространство X над полем K с заданной на нем топологией τ называется *топологическим векторным пространством*, если операции сложения и умножения на число непрерывны в заданной топологии.

Предложение 1. *Замыкание выпуклого (уравновешенного, абсолютно выпуклого) множества в т.в.п. выпукло (уравновешено, абсолютно выпукло).*

$\triangleright$ Доказательство проведем для выпуклого множества A из т.в.п. X. Пусть $x, y \in \overline{A}$. Тогда существуют направленности $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, x_λ, y_λ такие, что $x = \lim\limits_\Lambda x_\lambda$, $y = \lim\limits_\Lambda y_\lambda$ (теорема 1 § 5 приложения). Поскольку $\alpha x_\lambda + \beta y_\lambda \in A$ для любых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ и X — т.в.п., то $\alpha x_\lambda + \beta y_\lambda \to \alpha x + \beta y \in A$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\triangleleft$

Как показано в лемме 1 § 53, топология т.в.п. X однозначно определяется заданием окрестностей нуля и, следовательно, заданием базиса окрестностей нуля. Для числа $\lambda \neq 0$ из непрерывности отображения $\varphi(x) = \lambda x$ и непрерывности обратного отображения $\varphi^{-1}(x) = (1/\lambda)x$ получаем, что множество U и множество $\lambda U = \{\lambda x |\ x \in U\}$ одновременно являются окрестностями нуля.

Теорема 2. *В т.в.п. X существует базис $\mathcal{B}$ окрестностей нуля такой, что:*

B_1) *каждое множество $V \in \mathcal{B}$ уравновешенное и поглощающее;*

B_2) *если $V \in \mathcal{B}$, то $\lambda V \in \mathcal{B}$ для любого $\lambda \neq 0$;*

B_3) *для каждого $U \in \mathcal{B}$ существует окрестность $V \in \mathcal{B}$ такая, что $V + V \subset U$;*

B_4) *для любых $U, V \in \mathcal{B}$ существует окрестность $W \in \mathcal{B}$ такая, что $W \subset V \cap U$.*

$\triangleright$ B_1. Так как отображение $K \times X \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in X$ непрерывно в точке $(0,0)$, то для любой окрестности U нуля в X существует $\delta > 0$ и W — окрестность нуля в X такие, что $\lambda x \in U$ для всех $|\lambda| \leqslant \delta$ и всех $x \in W$. Обозначим $V = \{\lambda x |\ \lambda \in K, |\lambda| \leqslant \delta, x \in W\}$. V — уравновешенное множество, причем $\delta W \subset V \subset U$. Так как δW — окрестность нуля, то и V — окрестность нуля.

Пусть задано $a \in X$. Поскольку отображение $K \ni \lambda \to \lambda a \in X$ непрерывно в точке $\lambda = 0$, то для любой окрестности нуля U существует $\delta > 0$ такое, что $\lambda a \in U$ при $|\lambda| \leqslant \delta$. Следовательно, $a \in \mu U$ при $|\mu| \geqslant \delta^{-1}$. Это означает, что каждая окрестность нуля в т.в.п. является поглощающим множеством.

Таким образом, в каждой окрестности нуля U содержится уравновешенная поглощающая окрестность V, и значит, множество $\mathcal{B}$ уравновешенных поглощающих окрестностей нуля образует базис окрестностей. Свойство B_2 следует из сделанного перед теоремой замечания. Отображение $X \times X \ni (x, y) \to x + y \in X$ непрерывно в точке $(0,0)$.

Поэтому для любой окрестности нуля U существуют окрестности нуля $V_1 \in \mathcal{B}$ и $V_2 \in \mathcal{B}$ такие, что $V_1 + V_2 \subset U$. Выберем $V = V_1 \cap V_2$ и получим свойство B_3. Свойство B_2 выполнено для любого базиса окрестностей точки. Для рассматриваемого базиса можно положить $W = U \cap V$, так как пересечение уравновешенных поглощающих окрестностей есть уравновешенная поглощающая окрестность. $\lhd$

Замечание. Свойства B_3 и B_4 выполнены для любого базиса окрестностей нуля в т.в.п.

Таким образом, в каждом т.в.п. имеется базис из уравновешенных окрестностей. В наиболее важных и употребительных т.в.п. существует также базис из выпуклых окрестностей нуля. Такие пространства называются *локально выпуклыми пространствами* (л.в.п.)

Следующая теорема характеризует топологию локально выпуклого пространства.

Теорема 3. *В л.в.п. X существует базис $\mathcal{B}$ окрестностей нуля, обладающий следующими свойствами:*

C_1) *каждое $V \in \mathcal{B}$ абсолютно выпуклое и поглощающее;*

C_2) *если $V \in \mathcal{B}$, то $\lambda V \in \mathcal{B}$, $\lambda \neq 0$;*

C_3) *для каждого $U \in \mathcal{B}$ существует окрестность $V \in \mathcal{B}$ такая, что $V + V \subset U$;*

C_4) *для любых $U, V \in \mathcal{B}$ существует окрестность $W \in \mathcal{B}$ такая, что $W \subset V \cap U$.*

Если в векторном пространстве X задано непустое семейство $\mathcal{B}$ подмножеств из X, обладающее свойствами $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_4$, то в X существует, и притом единственная, топология, в которой X является л.в.п. с базисом окрестностей нуля $\mathcal{B}$.

$\rhd$ Если W — выпуклая окрестность нуля, то для любого $\delta > 0$ множество $V = \{\lambda x |\ \lambda \in K,\ |\lambda| \leqslant \delta,\ x \in W\}$ есть абсолютно выпуклая окрестность нуля. Поэтому аналогично доказательству теоремы 2 получаем, что абсолютно выпуклые окрестности образуют базис, обладающий свойствами $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_4$.

Пусть семейство $\mathcal{B}$ обладает свойствами $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_4$. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество всех подмножеств из X, содержащих какое-нибудь множество из $\mathcal{B}$, и примем $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V} + x$ для каждого $x \in X$ за множество окрестностей точки x. Из свойств $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_4$ получаем выполнение аксиом окрестностей из предложения 3 § 1 приложения.

Остается проверить, что определенная таким образом топология согласуется со структурой векторного пространства. Сначала покажем, что операция сложения непрерывна в любой точке (a, b) из $X \times X$.

Действительно, если $U \in \mathcal{B}$, то для любых $x \in \frac{1}{2}U + a$, $y \in \frac{1}{2}U + b$ выполнено $x + y \in U + b + a$. Для доказательства непрерывности умножения в точке (x, α) из $X \times K$ достаточно для $U \in \mathcal{B}$ найти такие η и δ, что $\lambda x - \alpha a \in U$, как только $|\lambda - \alpha| < \eta$ и $x \in \delta U + a$. Существует такое $\mu > 0$, что $a \in \mu U$; выберем η так, чтобы выполнялись неравенства $0 < 2\eta < \mu^{-1}$, и затем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства $0 < 2\delta < (|\alpha| + \eta)^{-1}$. Тогда $\lambda x - \lambda a = \lambda(x - a) + (\lambda - a)a \in (|\alpha| + \eta)\delta U + + \eta\mu U \subset U$. $\lhd$

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное семейство абсолютно выпуклых поглощающих множеств векторного пространства X. Тогда в X существует слабейшая из топологий, согласованных с алгебраической структурой, в которых каждое множество из $\mathcal{V}$ является окрестностью нуля. В этой топологии X — локально выпуклое пространство с базисом окрестностей нуля, образованными множествами вида $\lambda \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$, где $\lambda > 0$, $V_i \in \mathcal{V}$.*

Используя предложение 1, получаем

Следствие 2. *В л.в.п. существует базис замкнутых окрестностей нуля со свойствами* C_1 — C_4.

Поскольку теоремой 1 установлено соответствие между абсолютно выпуклыми поглощающими множествами и полунормами, то из следствия 1 получаем

Следствие 3. *Пусть на векторном пространстве X задано семейство полунорм $\{p_i\}_{i \in I}$. Тогда в X существует слабейшая из топологий, в которых все p_i непрерывны. В этой топологии X — локально выпуклое пространство с базисом окрестностей, образованными абсолютно выпуклыми поглощающими множествами вида*

$$V_{\varepsilon; i_1, \ldots, i_n} \equiv B_{p_{i_1}}(0, \varepsilon) \cap \ldots \cap B_{p_{i_n}}(0, \varepsilon).$$

$\rhd$ Достаточно заметить, что полушар $B_p(0, \varepsilon)$ является окрестностью тогда и только тогда, когда полунорма $p : X \to \mathbf{R}$ непрерывна. $\lhd$

Топологию, описанную в следствии 3, называют топологией, определяемой семейством полунорм $\{p_i\}_{i \in I}$.

Следствие 4. *Для любого локально выпуклого пространства (X, τ) существует семейство полунорм $\{p_i\}_{i \in I}$ такое, что топология, определяемая семейством полунорм $\{p_i\}_{i \in I}$, совпадает с τ.*

$\rhd$ Пусть $\mathcal{B}$ — базис окрестностей нуля, состоящий из всех абсолютно выпуклых окрестностей. Тогда семейство полунорм $\{p_V\}_{V \in \mathcal{B}}$, где p_V —

функционал Минковского для множества V, определяет топологию, совпадающую с исходной топологией τ. $\lhd$

Таким образом, всякая локально выпуклая топология определяется множеством непрерывных полунорм, и обратно, всякое множество полунорм определяет локально выпуклую топологию, в которой эти полунормы непрерывны.

Предложение 2. *Топология, определяемая множеством полунорм* $\{p_i\}_{i\in I}$, *отделима тогда и только тогда, когда из того, что* $p_i(x) = 0$ $\forall i \in I$, *следует, что* $x = 0$.

$\rhd$ *Необходимость.* Если X отделимо и $x \neq 0$, то существует окрестность нуля U такая, что $x \notin U$. По определению базиса окрестностей это значит, что существуют $\varepsilon > 0$ и конечное подмножество $F = \{i_1, \ldots, i_n\}$ такие, что множество $\bigcap\limits_{i\in F} B_{p_i}(0,\varepsilon) \subset U$. Таким образом, найдется некоторая полунорма p_i, $i \in F$, такая, что $x \notin B_{p_i}(0,\varepsilon)$, т. е. $p_i(x) \geqslant \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $x \neq y$. Следовательно, $x - y \neq 0$ и поэтому существует полунорма p_i такая, что $p_i(x-y) = \alpha > 0$. Тогда $B_{p_i}(x,\alpha/2) \cap B_{p_i}(y,\alpha/2) = \emptyset$. $\lhd$

Теорема 4. *Локально выпуклое пространство* (X,τ) *метризуемо тогда и только тогда, когда его топология отделима и может быть задана счетным числом полунорм.*

$\rhd$ *Необходимость.* Если пространство (X,τ) метризуемо, то существует счетный базис окрестностей нуля. Выбирая внутри каждой из окрестности этого базиса абсолютно выпуклую окрестность, получаем базис из счетного числа абсолютно выпуклых окрестностей нуля $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда функционалы Минковского $\{p_{V_i}\}_{i=1}^{\infty}$ образуют требуемую систему полунорм.

Достаточность. Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система полунорм, определяющая топологию τ. Положим

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2_k}\,\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}.$$

Аналогично примеру 5 § 14 получаем, что $\rho(x,y)$ удовлетворяет аксиомам метрики, и нужно лишь проверить, что топология, определяемая метрикой $\rho(x,y)$, совпадает с исходной топологией, т. е. что шары

$$B(0,\varepsilon) = \{x \in X \mid \rho(0,x) < \varepsilon\}$$

образуют базис окрестностей нуля в X.

Согласно следствию 3 теоремы 3 к базис в X состоит из множеств вида
$$V_{\delta;p_{i_1},\ldots,p_{i_n}} = B_{p_{i_1}}(0,\delta) \cap \ldots \cap B_{p_{i_n}}(0,\delta).$$
Покажем, что для заданных n и $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B(0,\varepsilon) \subset V_{\delta;p_1,\ldots,p_n}$. Это означает, что топология, порожденная метрикой, сильнее топологии, порожденной системой полунорм.

Выберем $\varepsilon < 2^{-n}\,\frac{\delta}{\delta+1}$. Тогда при $x \in B(0,\varepsilon)$ имеем
$$\frac{1}{2^k}\,\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} < \varepsilon < \frac{1}{2^n}\,\frac{\delta}{\delta+1} \leqslant \frac{1}{2^k}\,\frac{\delta}{\delta+1}, \quad k = 1,\ldots,n.$$
Из последнего неравенства в силу монотонности функции $t/(1+t)$ получаем, что $p_k(x) < \delta$, $k = 1,\ldots,n$, т. е. $x \in V_{\delta;p_1,\ldots,p_n}$.

Покажем теперь, что топология, порожденная системой полунорм, сильнее топологии, порожденной метрикой. Для этого по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ и n такие, что $V_{\delta;p_1,\ldots,p_n} \subset B(0,\varepsilon)$. Возьмем $\delta < \varepsilon/2$ и выберем число n так, чтобы выполнялось неравенство $1/2^n < \varepsilon/2$. Тогда при $x \in V_{\delta;p_1,\ldots,p_n}$ имеем
$$\rho(0,x) < \frac{\delta}{1+\delta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \delta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \lhd$$

Метризуемое полное локально выпуклое пространство называется *пространством Фреше*. Свойства этого класса топологических векторных пространств наиболее близки к свойствам банаховых пространств.

§ 58. ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ. ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть X и Y — локально выпуклые пространства с топологиями, определенными системами полунорм P и Q соответственно. Будем считать без ограничения общности, что для любого конечного набора $p_1,\ldots,p_n$ полунорм из P полунорма $p(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} p_k(x)$ также принадлежит системе P. Из этого свойства вытекает, что полушары $B_p(0,r)$ образуют базис окрестностей нуля, а не предбазис, как в общем случае. Аналогичное свойство будем считать выполненным у второй системы полунорм — системы Q.

Поскольку окрестности точки в л.в.п. являются сдвигами окрестностей нуля, то всякое линейное отображение $T\colon X\to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле.

Линейные отображения называют обычно *операторами.* Множество линейных непрерывных операторов из X в Y обозначим $L(X,Y)$. Множество $X'=L(X,K)$ линейных функционалов на X называется *пространством, сопряженным к* X.

Теорема 1. *Линейное отображение $T\colon X\to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждой полунормы $q\in Q$ существуют полунорма $p\in P$ и константа $C\geqslant 0$ такие, что справедливо неравенство*

$$q(Tx)\leqslant Cp(x),\quad x\in X. \tag{1}$$

$\triangleright$ *Достаточность.* Для окрестности $U=B_q(0,r)$ точки 0 в Y найдем полунорму p, для которой выполнено неравенство (1), и построим окрестность $V=B(0,r/C)$ точки 0 в X. Тогда $T(V)\subset U$, что и означает непрерывность оператора T.

Необходимость. Если T непрерывно в точке $x=0$, то для всякой полунормы $q\in Q$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся полунорма $p\in P$ и $\delta>0$ такие, что из соотношения $p(x)\leqslant\delta$ следует $q(Tx)\leqslant\varepsilon$. Пусть $x\in X$ — произвольная точка. Выберем такое λ, что $\lambda p(x)\leqslant\delta$. Тогда $p(\lambda x)\leqslant\delta$ и поэтому $q(T(\lambda x))\leqslant\varepsilon$. Следовательно, $q(Tx)\leqslant\varepsilon/\lambda$. Если $p(x)=0$, то λ можем выбрать сколь угодно большим и тогда $q(Tx)=0$; если же $p(x)\neq 0$, то возьмем $\lambda=\delta/p(x)$. Тогда $q(Tx)\leqslant(\varepsilon/\delta)p(x)$ и в любом случае (1) выполняется. $\triangleleft$

Следствие 1. *Пусть X — л.в.п., $f:X\to\mathbf{R}$ — линейный функционал, P — система полунорм, определяющая топологию на X. Функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда существуют полунорма $p\in P$ и константа $C>0$ такие, что*

$$|f(x)|\leqslant Cp(x),\quad x\in X. \tag{2}$$

Вопрос о существовании линейных функционалов, удовлетворяющих неравенствам вида (2), был рассмотрен в § 41. Из теоремы Хана — Банаха (§ 41) следует, что такие функционалы существуют и что непрерывные линейные функционалы разделяют точки отделимого локально выпуклого пространства. Напомним, что для произвольного топологического векторного пространства может оказаться, что $X'=\{0\}$ (см. § 53).

Множество B в л.в.п. X называется *ограниченным*, если оно поглощается каждой окрестностью нуля, или, что то же самое, каждая полунорма p из системы полунорм, определяющих топологию на X, ограничена на B.

Будем обозначать через $\mathbf{B}(X)$ совокупность всех замкнутых абсолютно выпуклых ограниченных множеств из X. Тогда для любого ограниченного множества A из X существует множество $B \in \mathbf{B}(X)$ такое, что $A \subset B$. Всякая подсистема $\mathbf{B}_0$ системы $\mathbf{B}(X)$, обладающая таким свойством, будет называться *фундаментальной системой ограниченных множеств* или *базисом ограниченных множеств* на X. Непосредственно из определения вытекает

Предложение 1. *1. Конечное множество ограничено.*

2. Замыкание, выпуклая оболочка, абсолютно выпуклая оболочка ограниченного множества ограничены.

3. Любое подмножество ограниченного множества A и множество λA ограничены.

4. Объединение конечного числа ограниченных множеств является ограниченым множеством.

5. При непрерывном линейном отображении образ ограниченного множества ограничен.

Предложение 2. *Для того, чтобы множество B в л.в.п. X было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $(x_n) \subset B$ и каждой числовой последовательности λ_n, стремящейся к нулю, имело место $\lambda_n x_n \to 0$.*

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть (x_n) и (λ_n) — последовательности указанного вида и V — произвольная абсолютно выпуклая окрестность нуля в X. Существует $\lambda > 0$ такое, что $B \subset \lambda V$. В частности, $x_n \in \lambda V$, $n = 1, 2, \ldots$. Если n настолько велико, что выполнено неравенство $|\lambda_n| < 1/\lambda$, то $\lambda_n x_n \in \lambda_n \lambda V \subset V$, т. е. $\lambda_n x_n \to 0$.

Достаточность. Если множество B неограниченно, то существует окрестность нуля V, которая не поглощает B, т. е. при любом n множество $B \setminus nV \neq \emptyset$. Выберем $x_n \in B \setminus nV$. Тогда, с одной стороны, $(x_n) \in B$, а с другой — $(1/n)\, x_n \notin V$, что противоречит условию. $\triangleleft$

Понятие ограниченного множества позволяет охарактеризовать нормируемые пространства, т. е. такие л.в.п., топология в которых может быть задана с помощью одной нормы.

Теорема 2 (А. Н. Колмогоров). *Отделимое локально выпуклое пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в нем есть хотя одна ограниченная окрестность нуля.*

$\triangleright$ *Необходимость* очевидна, так как единичный шар в нормированном пространстве является ограниченной окрестностью нуля.

Достаточность. Пусть U — ограниченная окрестность нуля. Без ограничения общности можно считать, что множество U абсолютно выпукло. Тогда для произвольной окрестности нуля V существует $\lambda > 0$ такое, что $U \subset \lambda V$ и, следовательно, $(1/\lambda)\, U \subset V$. Таким образом, множества $\Big\{(1/n)\, U\Big\}$ образуют базис окрестностей. Так как пространство отделимо, то p_U является нормой, определяющей топологию. $\lhd$

Локально выпуклое пространство называется *борнологическим*, если в нем каждое абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества, является окрестностью нуля.

Теорема 3. *Метризуемое л.в.п. является борнологическим пространством.*

$\rhd$ Если X метризуемо, то существует счетный базис окрестностей нуля (V_n) такой, что $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$. Пусть A — абсолютно выпуклое множество, которое поглощает все ограниченные множества. При некотором n мы должны иметь включение $V_n \subset nA$. В противном случае существовали бы $x_n \in V_n$ такие, что $x_n \notin nA$. Так как x_n — сходящаяся к нулю последовательность, то она ограничена и, следовательно, поглощается A, что является противоречием. Значит, A содержит $(1/n)\, V_n$ и является окрестностью нуля. $\lhd$

Линейное отображение $T\colon X \to Y$ одного л.в.п. X в другое Y называют *ограниченным*, если оно ограниченное множество из X переводит в ограниченное множество в Y.

Из теоремы 1 видно, что каждое непрерывное линейное отображение ограничено. Однако в общем случае ограниченные операторы могут быть разрывными. Борнологические пространства характеризуются тем, что в них понятия непрерывного и ограниченного отображения совпадают.

Теорема 4. *Для того, чтобы л.в.п. X было борнологическим, необходимо и достаточно, чтобы каждое линейное ограниченное отображение $T\colon X \to Y$ в любое л.в.п. Y было непрерывным.*

$\rhd$ *Необходимость.* Пусть X — борнологическое пространство, T — ограниченное отображение из X в Y, V — абсолютно выпуклая окрестность нуля в Y и B — ограниченное множество в X. Тогда V поглощает $T(B)$ и, следовательно, $T^{-1}(V)$ поглощает B, а поэтому $T^{-1}(V)$ — окрестность нуля в X. Значит, T непрерывно.

Достаточность. На локально выпуклом пространстве X зададим новую топологию, присоединяя к базису окрестностей нуля все абсолютно выпуклые множества, поглощающие каждое ограниченное (в исходной топологии) множество. Полученное пространство обозначим X_b. Очевидно, что оно является борнологическим л.в.п. и имеет те же ограниченные множества, что и X. Поэтому тождественное отображение $I\colon X \to X_b$ ограничено и, по условию, непрерывно. Значит, топология пространства X мажорирует топологию X_b. С другой стороны, топология X_b сильнее топологии X по построению. Следовательно, они совпадают. Значит, X является борнологическим пространством, что и требовалось. $\lhd$

На борнологические пространства переносится ряд других свойств нормированных пространств.

Теорема 5. *Пусть X — борнологическое, а Y — произвольное л.в.п. и пусть $T\colon X \to Y$ — линейное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) T непрерывно;

б) T ограничено;

в) из $x_n \to 0$ в X следует, что $Tx_n \to 0$ в Y.

$\rhd$ Эквивалентность а) $\Leftrightarrow$ б) установлена теоремой 4. Импликация а) $\Rightarrow$ в) очевидна. Докажем, что из в) следует б). Пусть B — произвольное ограниченное множество в X. Если $Tx_n \in T(B)$, то для любой последовательности $\lambda_n \in K$, $\lambda_n \to 0$, в силу предложения 2 $\lambda_n x_n \to 0$. Тогда $\lambda_n T x_n = T(\lambda_n x_n) \to 0$. По предложению 2 $T(B)$ ограничено в Y. $\lhd$

На пространстве $L(X,Y)$ имеется несколько естественных топологий. Они задаются следующим образом. Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность ограниченных множеств в л.в.п. X, удовлетворяющая следующим условиям:

1A) если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $\exists C \in \mathcal{A}$ такое, что $A \cup B \subset C$,

2A) если $A \in \mathcal{A}$, то $\lambda A \in \mathcal{A}\ \ \forall \lambda \in K$,

3A) $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A$ порождает X.

Пусть топология на л.в.п. Y порождается системой полунорм $\{p_i\}$. На множестве $L(X,Y)$ определим локально выпуклую топологию с помощью полунорм

$$p_{A,i}(T) = \sup_{x\in A} p_i(Tx),$$

где $p_i \in \{p_i\}$, $A \in \mathcal{A}$. Эта топология называется **A**-*топологией* или *топологией равномерной сходимости* на ограниченных множествах из $\mathcal{A}$, а множество $L(X,Y)$ с этой топологией обозначается $L_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Наиболее важными для приложений являются следующие три топологии.

1. $\mathcal{A}$ — семейство конечных подмножеств (т. е. множеств, состоящих из конечного числа элементов). Соответствующая $\mathcal{A}$-топология называется *топологией точечной* или *простой сходимости*.

2. $\mathcal{A}$ — семейство компактных подмножеств из X; соответствующая $\mathcal{A}$-топология называется *топологией компактной сходимости*.

3. $\mathcal{A}$ — семейство всех ограниченных подмножеств в X; соответствующая $\mathcal{A}$-топология называется *топологией равномерной сходимости*.

Из определения ограниченного множества видно, что чем сильнее топология на л.в.п., тем меньше в нем ограниченных множеств. Другими словами, если на одном векторном пространстве задано несколько локально выпуклых топологий, то множество, ограниченное в более сильной топологии, ограничено и в более слабой. Так, например, множество из $L(X, Y)$, ограниченное в топологии равномерной сходимости, ограничено в топологии компактной сходимости и в топологии точечной сходимости. Представляет интерес выяснить, при каких условиях на пространства X и Y ограниченные множества в $L(X, Y)$ в этих трех $\mathcal{A}$-топологиях будут совпадать.

Множество $H \subset L(X, Y)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждой окрестности нуля V в Y существует окрестность нуля U в X такая, что $T(U) \subset V$ для всех $T \in H$.

Пример. Если X и Y — нормированные пространства, то множество $H \subset L(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме.

Очевидно, что равностепенно непрерывное множество $H \subset L(X, Y)$ ограничено в любой $\mathcal{A}$-топологии. Действительно, равностепенная непрерывность H означает, что для любой полунормы p на Y существуют такие полунорма q на X и $C > 0$, что $p(Tx) \leqslant Cq(x) \ \ \forall x \in X, \ \forall T \in H$. Поскольку любое $A \in \mathcal{A}$ ограничено в X, то $q(x) \leqslant M_A$ для всех $x \in A$ и, следовательно,

$$\sup_{x \in A} p(Tx) \leqslant CM_A \quad \forall T \in H,$$

т. е. любая полунорма из $L_A(X, Y)$ ограничена на H.

Бочкой в л.в.п. называют замкнутое абсолютно выпуклое поглощающее множество. Локально выпуклое пространство называется *бочечным*, если в нем каждая бочка является окрестностью нуля.

Теорема 6. *Полное метризуемое л.в.п. (т. е. пространство Фреше) бочечно.*

$\rhd$ Пусть D — бочка в X. Тогда $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nD$. По теореме Бэра существует n_0 такое, что замкнутое множество $n_0 D$ содержит внутреннюю точку. Следовательно, D имеет внутреннюю точку $x \in D$. Так как D абсолютно выпукло, то $-x \in D$ и точка $0 = (1/2)\,x + (1/2)\,(-x)$ принадлежит D вместе с некоторой окрестностью, т. е. D — окрестность нуля. $\lhd$

Следующая теорема является обобщением на случай локально выпуклых пространств теоремы Банаха — Штейнгауза.

Теорема 7. *Если X — бочечное, а Y — произвольное л.в.п., то каждое точечно ограниченное множество $H \subset L(X, Y)$ равностепенно непрерывно.*

$\rhd$ Пусть V — произвольная замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в Y и положим $U = \bigcap\limits_{T \in H} T^{-1}(V)$. Множество U замкнуто и абсолютно выпукло. Проверим, что U — поглощающее. Так как множество $H(x) = \{Tx|\ T \in H\}$ ограничено в Y, то существует $\lambda > 0$ такое, что $H(x) \subset \lambda V$, т. е. $Tx \in \lambda V$ для всех $T \in H$. Это означает, что $x \in \lambda \bigcap\limits_{T \in H} T^{-1}(V) = \lambda U$. Таким образом, U — окрестность нуля в X. Но поскольку $T(U) \subset V$ для всех $T \in H$, то, по определению, H равностепенно непрерывно. $\lhd$

Следствие 2. *Пусть X — бочечное, Y — произвольное л.в.п. Если последовательность операторов $(T_n) \in L(X, Y)$ сходится в каждой точке, то оператор $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ — линейный непрерывный оператор из X в Y.*

$\rhd$ Линейность отображения T очевидна. Так как множество H точек последовательности T_n есть точечно ограниченное множество, то по предыдущей теореме H равностепенно непрерывно. Следовательно, для каждой замкнутой окрестности нуля $V \subset Y$ существует такая окрестность нуля U в X, что $T_n U \subset V$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении $T_n x \in V$, где $x \in U$, и учитывая замкнутость V, получаем $Tx \in V,\ \ x \in U$, т. е. $TU \subset V$, откуда следует непрерывность отображения T. $\lhd$

§ 59. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ТОПОЛОГИИ

Пусть X — отделимое л.в.п., $X' = L(X, K)$ — его сопряженное. Точечную топологию на X' называют *слабой* и обозначают $\sigma(X'; X)$ а пространство X' с $\sigma(X'; X)$ топологией обозначают X'_σ. Пространство X' с топологией компактной сходимости обозначают X'_C. Топологию равномерой ограниченной сходимости в X' называют *сильной* топологией и обозначают $\beta(X'; X)$, а пространство X' с этой топологией обозначают X'_β. Чтобы задавать окрестности в X', удобно пользоваться понятием "поляры множества".

Полярой множества $A \subset X$ называют множество $A^\circ \subset X'$ такое, что

$$A^\circ = \{x' \in X' \big| \, |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1 \quad \forall\, x \in A\}.$$

Из свойств A_1 — A_3 § 58 получаем, что система $\{A^\circ | \; A \in \mathcal{A}\}$ задает в X' базис окрестностей нуля топологии равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из $\mathcal{A}$.

Аналогично, если имеется множество $A' \subset X'$, то его *полярой* называется множество

$$^\circ A' = \{x \in X \big| \, |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1 \quad \forall\, x' \in A'\}.$$

С помощью сопряженного пространства X' определим еще одну топологию на X, которая задается полунормами

$$p(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, x'_i \rangle|.$$

Здесь $x \in X$, $x' \in X'$, а выражение $\langle x, x'_i \rangle$ обозначает значение функционала x'_i на элементе x.

Такую топологию на X называют *слабой* и обозначают $\sigma(X; X')$. Векторное пространство X с топологией $\sigma(X; X')$ обозначают X_σ.

Предложение 1. *Пусть X — отделимое л.в.п. с топологией τ. Тогда: а) топология $\sigma(X; X')$ слабее топологии τ; б) пространство X_σ отделимо; в) $(X_\sigma)' = X'$; г) ограниченные множества в топологиях τ и $\sigma(X; X')$ одни и те же.*

Предложение 2. *Пусть X — отделимое л.в.п. Тогда поляра любого множества $A \subset X$ является абсолютно выпуклым замкнутым множеством в слабой топологии $\sigma(X'; X)$.*

$\rhd$ Линейный функционал $f_x(x') = \langle x, x' \rangle$ непрерывен в топологии $\sigma(X'; X)$ при любом фиксированном $x \in X$. Поэтому множество $\{x\}^\circ = f_x^{-1}[-1, 1]$ слабо замкнуто в X'. Следовательно, $A^\circ = \bigcap\limits_{x \in A} \{x\}^\circ$ замкнуто в топологии $\sigma(X'; X)$. Абсолютная выпуклость A° проверяется непосредственно. $\lhd$

Теорема 1. *Пусть X — отделимое л.в.п., U — абсолютно выпуклая окрестность нуля в X. Тогда поляра U° компактна в топологии $\sigma(X'; X)$.*

$\rhd$ Пусть p_U — функционал Минковского множества U. Для произвольного фиксированного $x \in X$ рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ шары $S_x = \{z \in \mathbf{C} |\ |z| \leqslant p_U(x)\}$ и их произведения $S = \prod\limits_{x \in X} S_x$ с топологией Тихонова. Множество S в этой топологии компактно (см. теорему 4 § 7 приложения).

Докажем, что $U^\circ \subset S$. В самом деле, пусть $x' \in U^\circ$ и $x \in X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $x \in [p_U(x) + \varepsilon] U$. Поэтому $x = [p_U(x) + \varepsilon] a$, где $a \in U$. Следовательно,

$$|x'(x)| = |\langle x, x' \rangle| = |\langle [p_U(x) + \varepsilon] a, x' \rangle| = [p_U(x) + \varepsilon] |\langle a, x' \rangle| \leqslant p_U(x) + \varepsilon,$$

т. е. $x'(x) \in S_x$ для любого $x \in X$. Это дает требуемое включение $x' \in S$.

Направленность $(x'_\lambda) \in U^\circ$ сходится к x' в топологии $\sigma(X'; X)$ только в том случае, если $x'_\lambda(x) \to x'(x)$ для каждого $x \in X$. Однако этой же сходимостью определяется топология и в S. Поэтому топология S и топология $\sigma(X'; X)$ совпадают на U°.

Согласно предложению 2 множество U° замкнуто в топологии $\sigma(X'; X)$, значит, U° замкнуто в S и поэтому компактно. $\lhd$

Следствие 1 (теорема Банаха — Алаоглу). *Единичный шар в нормированном пространстве X', сопряженном к нормированному X, компактен в слабой топологии, так как является полярой единичного шара в X.*

Теорема 2 (о биполяре). *Биполяра ${}^\circ(A^\circ)$ множества $A \subset X$ совпадает с замкнутой абсолютно выпуклой оболочкой множества A.*

$\rhd$ Достаточно проверить, что $A = {}^\circ(A^\circ)$, если A замкнуто и абсолютно выпукло. Очевидно, что $A \subset {}^\circ(A^\circ)$. Предположим, что $A \neq {}^\circ(A^\circ)$. Тогда существует $x_0 \in {}^\circ(A^\circ) \setminus A$. По следствию из теоремы Хана — Банаха найдется элемент $x'_0 \in X'$ такой, что $|\langle x, x'_0 \rangle| \leqslant 1$ для $x \in A$

и $\langle x_0, x'\rangle > 1$. Это означает, что $x'_0 \in A^\circ$ и $x_0 \notin {}^\circ(A^\circ)$. Противоречие доказывает теорему. $\lhd$

Для л.в.п. строится каноническое отображение во второе сопряженное пространство, аналогично случаю нормированных пространств, рассмотренному в § 46.

Теорема 3. *Пусть X — бочечное пространство, тогда каноническое отображение $J\colon X \to (X'_\beta)'_\beta$ является линейным гомеоморфизмом X на $J(X)$.*

$\rhd$ Рассмотрим B' — ограниченное множество в X'_β. Тогда $B'^\circ = \{x'' \in (X'_\beta)'_\beta | \sup\limits_{x'\in B'} |\langle x', x''\rangle| \leqslant 1\}$ — замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в $(X'_\beta)'_\beta$. Поэтому множество $B'^\circ \cap X = {}^\circ B'$ является абсолютно выпуклым и поглощающим. Но ${}^\circ B'$ замкнуто в слабой топологии $\sigma(X; X')$, а следовательно, и в исходной. Поэтому $B'^\circ \cap X$ — бочка, а значит, окрестность нуля в X. Семейство $\{B'^\circ\}$ образует базис окрестностей нуля в $(X'_\beta)'_\beta$ (когда B' пробегает ограниченные множества в X'_β). Следы этих окрестностей на X, т. е. их пересечения с X, являются окрестностями нуля в X. Поэтому отображение $J\colon X \to (X'_\beta)'_\beta$ непрерывно.

Пусть теперь U — произвольная замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в X. Тогда по предыдущей теореме $U = {}^\circ(U^\circ)$. Поэтому $J(U) = J(X) \cap (U^\circ)^\circ$. С другой стороны, U° — ограниченное множество в X'_β. Тогда $(U^\circ)^\circ$ — окрестность нуля в $(X'_\beta)'_\beta$. Поэтому образ $J(U)$ окрестности нуля в X представляет собой след окрестности нуля из $(X'_\beta)'_\beta$ на подпространство $J(X)$. $\lhd$

Локально выпуклое пространство X называют *полурефлексивным*, если каноническое отображение $J\colon X \to (X'_\beta)'_\beta$ сюръективно, или сокращенно, если $X = (X'_\beta)'_\beta$, т. е. X и $(X'_\beta)'_\beta$ совпадают как векторные пространства. Л.в.п. X называют *рефлексивным*, если каноническое отображение $J\colon X \to (X'_\beta)'_\beta$ является топологическим изоморфизмом, или, сокращенно, X и $(X'_\beta)'_\beta$ одинаковы, как локально выпуклые пространства.

Из теоремы 3 и определений следует

Предложение 3. *Полурефлексивное бочечное пространство рефлексивно.*

Оказывается, что это утверждение обратимо. Прежде чем доказывать этот факт, приведем критерий полурефлексивности л.в.п.

Теорема 4. *Для того, чтобы л.в.п. X было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякое замкнутое ограничен-*

ное множество в X было компактно в слабой топологии этого пространства.

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть $B \subset X$ — замкнутое ограниченное множество и S — абсолютно выпуклая замкнутая оболочка B и поэтому тоже ограниченное в X множество. По теореме 2 $S = {}^\circ(S^\circ)$. Так как S ограничено в X, то S° — окрестность нуля в X'_β. Тогда по теореме 1 $(S^\circ)^\circ$ компактна в слабой топологии пространства $(X'_\beta)'$. Учитывая полурефлексивность пространства X, заключаем, что множество $S = {}^\circ(S^\circ)$ компактно в слабой топологии пространства X.

Достаточность. Пусть $x'' \in (X'_\beta)'_\beta$. Из непрерывности x'' на X'_β следует, что существует замкнутое абсолютно выпуклое множество $B \subset X$ такое, что $|\langle x', x''\rangle| \leqslant 1$ для всех $x' \in B'$, т.е. $x'' \in (B^\circ)^\circ$. Так как по условию теоремы B компактно в слабой топологии $\sigma(X; X')$, то оно слабо замкнуто. Поскольку $B \subset (B^\circ)^\circ$, то для доказательства равенства $B^{\circ\circ} = B$, а тем самым и теоремы, достаточно установить, что x'' — точка прикосновения множества B в слабой топологии $\sigma((X'_\beta)'; X)$. Выберем n точек $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$ и рассмотрим отображение $\varphi\colon X_\sigma \ni x \to \varphi(x) = \{\langle x, x'_1\rangle, \ldots, \langle x, x'_n\rangle\} \in \mathbf{C}^n$. Легко видеть, что φ линейно и непрерывно. Поэтому множество $\varphi(B)$ абсолютно выпукло и компактно. Если элемент $(\langle x'_1, x''\rangle, \ldots, \langle x'_n, x''\rangle) \in \mathbf{C}^n$ не принадлежит $\varphi(B)$, то по следствию теоремы Хана — Банаха найдется точка $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{C}^n$ такая, что

$$\sup_{t\in B}\left|\sum_i c_i\langle b, x'_i\rangle\right| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_i c_i\langle x'_i, x''\rangle > 1.$$

Но это означает, что $\sum\limits_i c_i x'_i \in B^\circ$ и $x'' \notin B^{\circ\circ}$. $\triangleleft$

Теорема 5. *Для того, чтобы л.в.п. X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полурефлексивным и бочечным.*

$\triangleright$ Достаточность сформулированных условий уже установлена. Докажем необходимость бочечности.

Пусть V — некоторая бочка пространства X. Покажем, что она поглощает любое ограниченное множество $B \subset X$. Пусть K — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества B. По теореме 4 множество K компактно в слабой топологии X. Положим $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nK$ и обозначим через $p(x)$ функционал Минковского множества K. Поскольку K ограничено, то $p(x)$ — норма в Y. Так как запас ограниченных множеств в Y меньше, чем в топологии, индуцированной в Y из X, то нормированная топология в Y сильнее, чем относительная топология Y, как подмножества X. Множество V замкнуто в X, следовательно, $V \cap Y$ замкнуто в Y в нормированной топологии. Поскольку единичным шаром в Y является множество K, которое компактно, то по теореме Рисса Y конечномерно и, следовательно, полно. Значит, Y — бочечное пространство, а $V \cap Y$ — бочка в нем. Отсюда заключаем, что $V \cap Y$ поглощает $K \supset B$. Следовательно, V поглощает B. Поэтому для некоторого $\alpha > 0$ имеем $B^\circ \supset \alpha V^\circ$. Поскольку B° является окрестностью нуля в X'_β, то V° — ограниченное множество в X'_β. По теореме о биполяре $V = {}^\circ(V^\circ)$. По условиям теоремы X рефлексивно, поэтому ${}^\circ(V^\circ) = (V^\circ)^\circ$. Следовательно, $V = V^{\circ\circ}$. Таким образом, бочка V есть окрестность нуля в $(X'_\beta)'_\beta = X$. Следовательно, X — бочечное пространство. $\lhd$

Отделимое л.в.п. называют *монтелевским*, если оно бочечное и каждое замкнутое ограниченное множество в нем компактно.

Из определения и теоремы 4 вытекает, что монтелевское пространство рефлексивно.

Из теоремы Рисса (§ 28) следует, что нормированное пространство является монтелевским тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Существуют бесконечномерные монтелевские пространства (см. § 61).

Сопряженные отображения. Пусть X и Y — отделимые л.в.п., X' и Y' — их сопряженные пространства и $T\colon X \to Y$ — линейное непрерывное отображение. Линейное отображение $T'\colon X' \to Y'$ такое, что $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, T'y'\rangle$ для всех $x \in X$, $y' \in Y'$, называют *сопряженным отображением* к T.

Предложение 4. *Пусть $T\colon X \to Y$ — линейное непрерывное отображение, тогда T непрерывно, как отображение из X в Y со слабыми топологиями $\sigma(X; X')$ и $\sigma(Y; Y')$ соответственно.*

$\rhd$ Пусть $V = \{y | \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle y, y_i\rangle| \leqslant 1\}$ — окрестность нуля в Y в топологии $\sigma(Y; Y')$. Тогда

$$U = \big\{x \in X \big| \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, T'y'_i\rangle| \leqslant 1\big\}$$

является $\sigma(X; X')$-окрестностью, для которой $T(U) \subset V$. Следовательно, T непрерывно при слабых топологиях в X и Y. $\lhd$

Обратное утверждение не имеет места. Например, пусть X — банахово пространство и Y — векторное пространство X со слабой топологией. Очевидно, что тождественное отображение $I\colon Y \to X$ слабо непрерывно, однако разрывно в исходных топологиях.

Предложение 5. *Если линейное отображение $T\colon X \to Y$ непрерывно, то $T(B)^\circ = T'^{-1}(B^\circ)$ для каждого $B \subset X$.*

$\triangleright$ Каждое из этих множеств есть множество всех тех $y' \in Y$, для которых $|\langle Tx, y'\rangle| = |\langle x, T'y'\rangle| \leqslant 1$ при каждом $x \in B$. $\triangleleft$

Предложение 6. *Пусть X, Y — отделимые л.в.п., X', Y' — их сопряженные, $T\colon X \to Y$ — непрерывное линейное отображение и пусть $\mathcal{A}$ — семейство ограниченных подмножеств из X, покрывающее X. Если X' наделено топологией равномерной сходимости на множествах из $\mathcal{A}$, а Y' — топологией равномерной сходимости на множествах из $T(\mathcal{A})$, то отображение $T'\colon Y' \to X'$ непрерывно.*

$\triangleright$ Для всякого $A \in \mathcal{A}$ имеем $T(A)^\circ = T'^{-1}(A^\circ)$, а поэтому отображение T' непрерывно. $\triangleleft$

Следствие 2. *Если $T\colon X \to Y$ непрерывно, то $T'\colon Y' \to X'$ непрерывно при слабых и сильных топологиях в X' и Y' соответственно.*

§ 60. ПОЛНОТА. ИНДУКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Определение. Направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в л.в.п. X называется *направленностью Коши*, если для каждой окрестности нуля $U \subset X$ существует элемент $\lambda_0 \in \Lambda$ такой, что для всех $\lambda, \mu > \lambda_0$ выполнено $x_\lambda - x_\mu \in U$.

Каждая сходящаяся направленность является направленностью Коши, но направленность Коши может не сходиться. Локально выпуклое пространство X называется *полным*, если в нем любая направленность Коши сходится.

Для каждого локально выпуклого пространства X существует, определенное однозначно с точностью до изоморфизма, полное л.в.п. $\hat{X}$, содержащее X как плотное подпространство. Это пространство $\hat{X}$ будем называть *пополнением* пространства X.

Направленность называется *ограниченной*, если множество всех элементов $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ограничено в X. Локально выпуклое пространство X, в котором сходится всякая ограниченная направленность Коши, называют *квазиполным*. Другими словами, л.в.п. X квазиполно, если всякое ограниченное подмножество в X полно.

Каждое л.в.п. X обладает квазипополнением $\widetilde{X}$, т. е. квазиполным л.в.п., содержащим X как плотное подпространство.

Локально выпуклое пространство X называют *секвенциально полным*, если каждая последовательность Коши в X имеет предел. Поскольку всякая последовательность Коши в л.в.п. X ограничена, то квазиполное пространство секвенциально полно.

Теорема 1. *Для локально выпуклого пространства X следующие условия эквивалентны: а) X полурефлексивно; б) X_σ квазиполно.*

$\triangleright$ *а)* $\Rightarrow$ *б).* Пусть B — слабозамкнутое слабоограниченное множество в X. Следовательно, оно замкнуто и ограничено в X, а поскольку X полурефлексивно, то B — слабо компактно, а поэтому и слабо полно в X. $\triangleleft$

Следствие 1. *Полурефлексивное пространство квазиполно.*

Следствие 2. *Всякое полурефлексивное нормированное пространство является рефлексивным банаховым пространством.*

$\triangleright$ Из следствия 1 вытекает, что полурефлексивное нормированное пространство является банаховым и поэтому бочечным. $\triangleleft$

Теорема 2. *Если X — бочечное л.в.п., то X' квазиполно для всякой $\mathcal{A}$-топологии, где $\mathcal{A}$ — семейство ограниченных множеств, покрывающее X.*

$\triangleright$ Пусть (x'_λ) — ограниченная направленность Коши в $X'_{\mathcal{A}}$. Тогда x'_λ сходится к x' равномерно на каждом $A \in \mathcal{A}$. Следовательно, x' — линейный функционал, ограниченный на каждом $A \in \mathcal{A}$. Поскольку X — бочечное пространство, а (x'_λ) — ограниченное множество, то (x'_λ) равностепенно непрерывно по теореме 7 § 58. Следовательно, существует окрестность U нуля в X такая, что $|\langle x, x'_\lambda\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in U$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим, что $|\langle x, x'\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in U$, т.е. x' — непрерывный функционал и $x'_\lambda \to x'$ равномерно на каждом $A \in \mathcal{A}$. $\triangleleft$

Теорема 3. *Если X — борнологическое л.в.п., то X'_β полно.*

$\triangleright$ Пусть (x'_λ) — направленность Коши в X'_β. Тогда для каждого $x \in X$ числовая направленность $x'_\lambda(x)$ сходится к $x'(x)$ равномерно на каждом ограниченном множестве B из X. Отсюда x' — линейный функционал на X, ограниченный на каждом ограниченном множестве из X. Поскольку X борнологично, то $x' \in X'_\beta$ и $x'_\lambda \to x'$ в X'_β. $\triangleleft$

Индуктивные пределы локально выпуклых пространств. Пусть X — векторное пространство и $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство векторных подпространств из X таких, что $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Предположим, что все X_λ — локально выпуклые пространства, причем для любых λ_1 и λ_2

выполняется следующее условие: если $X_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_2}$, то топология в X_{λ_1} сильнее, чем топология, индуцированная в X_{λ_1} из X_{λ_2}, т. е. отображение вложения $X_{\lambda_1} \to X_{\lambda_2}$ непрерывно.

На векторном пространстве X зададим локально выпуклую *топологию индуктивного предела*. Назовем окрестностями нуля те и только те абсолютно выпуклые множества U из X, для которых пересечения $U \cap X_\lambda$ со всеми X_λ представляют собой окрестности нуля в X_λ. Локально выпуклое пространство X с определенной выше топологией называют *индуктивным пределом* л.в.п. X_λ и обозначают $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{ind} X_\lambda$.

Фундаментальная система окрестностей нуля в X задается следующим способом. Выберем из каждого пространства X_λ некоторую абсолютно выпуклую окрестность U_λ нуля в этом пространстве. Тогда выпуклая оболочка объединения $V = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, т. е. множество

$$U = \Big\{x \in X \Big| \; x = \sum_{i=1}^{n(x)} \alpha_i y_i, \; y_i \in V, \; \alpha_i \geqslant 0, \; \sum_{i=1}^{n(x)} \alpha_i = 0\Big\},$$

является абсолютно выпуклым и поглощающим, при этом пересечения $U \cap X_\lambda$ представляют собой абсолютно выпуклые окрестности нуля в X_λ для всех X_λ. Совокупность всех таких множеств U, когда U_λ пробегает базис окрестностей нуля в X_λ, образует базис окрестностей нуля индуктивного предела $X = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{ind} X_\lambda$.

Исследование произвольных индуктивных пределов затруднительно, как правило, по той причине, что трудно дать описание ограниченных множеств в индуктивных пределах. В связи с этим выделяют индуктивные пределы X, в которых множество B ограничено только в том случае, если оно содержится и ограничено в одном из X_λ. Такие пределы называют *регулярными* индуктивными пределами. Наиболее часто используются следующие два случая, когда предел является регулярным. Приведем соответствующие утверждения без доказательства (см., например, [20]).

Теорема 4. *1. Пусть задана последовательность л.в.п. X_n и $X = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ind} X_n$ — их индуктивный предел. Если индуктивный предел строгий, т. е. $X_n \subset X_{n+1}$, и топология, индуцированная из X_{n+1} на X_n, совпадает с топологией X_n, то этот предел регулярен.*

2. Пусть X_n — банаховы пространства и вложения $X_n \subset X_{n+1}$ компактны. Тогда индуктивный предел $X = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ind} X_n$ регулярен.

Следующая теорема показывает, что топология индуктивного предела наследует многие свойства порождающих топологий.

Теорема 5. *Пусть* $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — *семейство отделимых л.в.п. и* $X = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{ind} X_\lambda$ — *их регулярный индуктивный предел. Тогда*

1) X *отделимо;*

2) X *бочечно, если* X_λ *бочечны;*

3) X *борнологично, если* X_λ *борнологичны;*

4) X *квазиполно, если* X_λ *квазиполны;*

5) X *рефлексивно, если* X_λ *рефлексивны;*

6) X *монтелевское, если* X_λ *монтелевские.*

$\triangleright$ 1. Пусть $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, содержится в каждой окрестности нуля пространства X, тогда и прямая $\{\alpha x_0\}_{\alpha>0}$ содержится в каждой окрестности нуля пространства X, т. е. она ограничена. В силу регулярности предела она ограничена в некотором X_λ, что невозможно ввиду отделимости X_λ.

2. Пусть V — бочка в X. Следовательно, $V_\lambda = V \cap X_\lambda$ — бочка в X_λ и поэтому окрестность нуля в X_λ. Значит, V является окрестностью нуля в X.

3. Пусть W — абсолютно выпуклое множество в X, поглощающее все ограниченные множества из X. Тогда $W_\lambda = W \cap X_\lambda$ — абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества в X_λ и, следовательно, окрестность нуля в X_λ. Поэтому W — окрестность нуля в X.

4. Вытекает из определения квазиполноты и условия регулярности индуктивного предела.

5. Следует из регулярности индуктивного предела, свойства 2) и теоремы 4 § 59.

6. Вытекает из свойства 2) и регулярности предела X. $\triangleleft$

Многие л.в.п., используемые в приложениях, строятся как индуктивные пределы более простых пространств — нормированных или конечномерных. Доказанная теорема позволяет описать свойства таких л.в.п.

§ 61. ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Приведем список свойств некоторых конкретных топологических векторных пространств, наиболее часто встречающихся в функциональном анализе.

1. *Пространство* $C(\mathbf{R})$.

Множество $C(\mathbf{R})$ всех непрерывных вещественных (или комплексных) функций на $\mathbf{R}$ является локально выпуклым пространством в топологии, определяемой полунормами

$$p_n(x) = \sup_{-n\leqslant t\leqslant n} |x(t)|.$$

Это отделимое, метризуемое (теорема 4 § 57), полное л.в.п., т.е. пространство Фреше. Следовательно, оно бочечно и борнологично (теоремы 3 и 6 § 58). Оно не нормируемо. Предположим, что существует норма, определяющая ту же топологию. Тогда единичный шар U содержит окрестность $V = \{x|\ p_n(x) \leqslant \varepsilon\}$ с некоторым n и $\varepsilon > 0$, поэтому из $p_n(x) = 0$ следует, что $\lambda x \in U$ для $\forall\lambda$, и, значит, $x = 0$. Однако для каждого n существует ненулевая непрерывная функция x, обращающаяся в нуль на $[-n, n]$, такая что $p_n(x) = 0$. Получаем противоречие.

2. *Пространство* $\mathbf{K}(\mathbf{R})$.

$\mathbf{K}(\mathbf{R})$ — множество всех непрерывных вещественных (или комплексных) функций с компактным носителем в $\mathbf{R}$. Это множество можно наделить различными топологиями: нормированной топологией равномерной сходимости

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbf{R}} |x(t)|$$

или метризуемой топологией компактной сходимости

$$p_n(x) = \sup_{-n\leqslant t\leqslant n} |x(t)|.$$

Однако в обеих этих топологиях пространство $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ неполно.

“Естественная” топология на $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ определяется следующим образом: для каждого компакта $A_n = [-n, n]$ обозначим через $\mathbf{K}_n(\mathbf{R})$ векторное подпространство в $\mathcal{K}(\mathbf{R})$, состоящее из тех функций, носитель которых содержится в $[-n, n]$. На пространстве $\mathbf{K}_n(\mathbf{R})$ зададим норму $\|x\|_n = \sup\limits_{-n\leqslant t\leqslant n} |x(t)|$. Пространство $\mathbf{K}_n(\mathbf{R})$ с такой нормой становится банаховым пространством. Если $k < n$, то $\mathbf{K}_k(\mathbf{R})) \subset \mathbf{K}_n(\mathbf{R})$ и топология, индуцированная на $\mathbf{K}_k(\mathbf{R})$ из $\mathbf{K}_n(\mathbf{R})$, совпадает с топологией $\mathbf{K}_n(\mathbf{R})$. Поскольку

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}_n(\mathbf{R}),$$

то на $\mathbf{K}(\mathbf{R})$ зададим локально выпуклую топологию строгого индуктивного предела пространств $\mathbf{K}_n(\mathbf{R})$.

Таким образом, пространство $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ — отделимое квазиполное (на самом деле полное) неметризуемое (базис окрестностей нуля, как видно из топологии индуктивного предела, несчетен) бочечное и борнологическое пространство.

Пространство $\mathcal{K}'(\mathbf{R})$, сопряженное к $\mathcal{K}(\mathbf{R})$, является полным отделимым локально выпуклым пространством, совпадающим с пространством мер Радона.

3. *Пространство* $\mathcal{E}(\mathbf{R})$.

Пространство $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$. В топологии компактной сходимости всех производных, определяемой семейством полунорм

$$p_{mn}(x) = \sup_{-n\leqslant t\leqslant n} |x^{(m)}(t)|; \quad m = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots,$$

$\mathcal{E}(\mathbf{R})$ — полное метризуемое л.в.п., т. е. пространство Фреше.

Покажем, что $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ — монтелевское пространство. Пусть B — ограниченное множество из $\mathcal{E}(\mathbf{R})$. Тогда производные $(m+1)$-го порядка равномерно ограничены на каждом интервале $[-n, n]$ из $\mathbf{R}$; из теоремы о конечных приращениях следует, что сужения на $[-n, n]$ производных m-го порядка функций из B образуют для каждого $m \geqslant 0$ равностепенно непрерывное множество; теорема Арцела — Асколи показывает тогда, что это множество предкомпактно в топологии равномерной сходимости на $[-n, n]$ функций и их производных до порядка $\leqslant m$. Поскольку m произвольное, то B предкомпактно в $\mathcal{E}(\mathbf{R})$, а поскольку $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ полно, то B относительно компактно.

Пространство $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$, наделенное сильной топологией, является полным рефлексивным пространством, оно совпадает с пространством обобщенных функций (распределений) с компактными носителями.

4. *Пространство* $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Пространство $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ (см. § 56) состоит из всех вещественных (или комплексных) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$, обладающих тем свойством, что, каковы бы ни были целые числа $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$, $|t|^n x^{(m)}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (быстро убывающие функции). При введении топологии, определяемой полунормами

$$p_{mn}(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}} |(1 + |t|^n) x^{(m)}(t)|,$$

$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ становится пространством Фреше. Эта топология сильнее топологии компактной сходимости всех производных, индуцированной из $\mathcal{E}(\mathbf{R})$. Пространство $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ является монтелевским, это вытекает из теоремы Арцела — Асколи.

5. *Пространство* $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Пространство $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$ с компактными носителями в $\mathbf{R}$ (см. § 54). Топология на $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ вводится следующим образом. Обозначим через $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ векторное подпространство пространства $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, образованное всеми функциями, носители которых содержатся в $[-n, n]$, и наделенное топологией, определямой полунормами

$$p_{mn}(x) = \sup_{-n \leqslant t \leqslant n} |x^{(m)}(t)|.$$

В этой топологии $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ является пространством Фреше, причем топология, индуцированная из $\mathbf{D}_{n+1}(\mathbf{R})$ на $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$, совпадает с топологией из $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$.

Теми же рассуждениями, что и для пространства $\mathcal{E}(\mathbf{R})$, устанавливается, что $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$ — монтелевское пространство Фреше. Поскольку

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}_n(\mathbf{R}),$$

то на $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ задаем топологию строгого индуктивного предела монтелевских пространств Фреше $\mathbf{D}_n(\mathbf{R})$. Таким образом, $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ — отделимое квазиполное (на самом деле полное) неметризуемое монтелевское бочечное и борнологическое пространство. Сходимость последовательности в этом пространстве совпадает со сходимостью, введенной в § 54.

Его сопряженное пространство $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, наделенное сильной топологией, является полным монтелевским пространством и называется *пространством обобщенных функций (распределений)*.

Для рассмотренных пространств имеем включения вместе с топологиями $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbf{R})$ и $\mathcal{D}'(\mathbf{R}) \supset \mathcal{S}'(\mathbf{R}) \supset \mathcal{E}'(\mathbf{R})$.

Пространства основных функций $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ и пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ называют *пространствами Л. Шварца*. Аналогично определяются пространства обобщенных функций в $\mathbf{R}^n$ и в области из $\mathbf{R}^n$.

6. *Пространство* $\mathbf{H}(D)$.

Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с границей ∂D. Пространство $\mathbf{H}(D)$ состоит из всех функций, определенных и голоморфных на D. Пространство наделяется топологией компактной сходимости, которая задается счетным набором полунорм

$$p_n(x) = \sup_{t \in B_n} |x(t)|,$$

где $B_n = \{t \in D : \ |t| \leqslant n, \ \rho(t, \partial D) \geqslant 1/n\}$, $\rho(t, \partial D)$ — расстояние от точки t до границы области.

Следовательно, $\mathbf{H}(D)$ метризуемо. Пространство $\mathbf{H}(D)$ является подпространством пространства $\mathbf{E}(D)$, по теореме Вейерштрасса для голоморфных функций оно замкнуто в $\mathbf{E}(D)$ и поэтому полно. Из этих же соображений следует, что оно монтелевское.

7. *Пространство* $\mathbf{F}(S)$.

Пусть S — произвольное множество. Векторное пространство $\mathcal{F}(S)$ всех вещественных (или комплексных) функций на S можно сделать локально выпуклым пространством, наделив его топологией точечной сходимости, определяемой полунормами $p_t(x) = |x(t)|$ для каждого $t \in S$.

8. *Банахово пространство* является локально выпуклым топологическим векторным пространством. Оно метризуемое, борнологическое и бочечное. Как видно из предыдущего, основные теоремы функционального анализа о банаховых пространствах базируются на этих свойствах: теорема Банаха — Штейнгауза следует из бочечности, теорема Хана — Банаха — из свойства локальной выпуклости, а доказательство теоремы о замкнутом графике использует свойство метризуемости.

Нормированное пространство является локально выпуклым, метризуемым и борнологическим, но может не быть бочечным.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА. ОКРЕСТНОСТИ

Определение 1. *Топологией* на множестве X называется множество $\tau \subset \mathbf{P}(X)$ подмножеств множества X, обладающее следующими свойствами: 1) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ; 2) пересечение всякого конечного семейства подмножеств из τ принадлежит τ; 3) $\emptyset, X \in \tau$.

Множества из τ называют *открытыми*, а X с заданной на нем топологией называется *топологическим пространством.*

П р и м е р ы.

1. На произвольном непустом множестве X определим топологию $\tau = \{\emptyset, X\}$, называемую *антидискретной* топологией. Открытыми множествами этой топологии являются пустое множество и все X.

2. На произвольном непустом множестве X определим топологию $\tau = \mathcal{P}(X)$, называемую *дискретной.* Открытым множеством в этой топологии является каждое подмножество множества X.

3. На множестве $\mathbf{R}$ (действительных чисел) определим топологию, приняв за открытые множества всевозможные объединения открытых интервалов. Аксиома 1) определения 1 выполняется очевидным образом, а для проверки аксиомы 2) достаточно заметить, что непустое пересечение двух открытых интервалов снова является открытым интервалом. Такая топология на $\mathbf{R}$ называется *естественной*, и $\mathbf{R}$ с естественной топологией называется *числовой прямой.*

На каждом множестве X, содержащем более одной точки, может быть задано несколько топологий.

Определение 2. Топология τ_1 на X *слабее* топологии τ_2 на X или τ_2 *сильнее* τ_1 (*мажорирует*), если $\tau_1 \subset \tau_2$. Две топологии, одна из которых мажорирует другую, называются *сравнимыми.*

Таким образом, топология τ_1 слабее топологии τ_2, если каждое открытое множество в топологии τ_1 открыто в топологии τ_2. Другими словами, запас открытых множеств в более слабой топологии беднее, чем в более сильной.

П р и м е р ы.

1. Естественная топология в $\mathbf{R}$ сильнее антидискретной и слабее дискретной.

2. Пусть $X = \{a, b\}$ — двухточечное множество. Определим на X две топологии: $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ и $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$. Эти топологии не сравнимы.

Определение 3. *Окрестностью подмножества* A в топологическом пространстве X называется всякое множество, которое содержит некоторое открытое множество, содержащее A. *Окрестностью точки* $x \in X$ называется окрестность множества $\{x\}$.

П р и м е р ы.

1. Пусть X — антидискретное топологическое пространство. Тогда единственной окрестностью каждой точки $x \in X$ является X.

2. Пусть X — дискретное топологическое пространство. Каждое подмножество из X, содержащее точку $x \in X$, является окрестностью этой точки.

3. Если $X = \mathbf{R}$ с естественной топологией, то окрестностью точки $x \in \mathbf{R}$ является любое множество, содержащее какой-нибудь открытый интервал, которому принадлежит точка x.

Предложение 1. *Множество A в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.*

$\triangleright$ *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть A является окрестностью каждой своей точки, U — объединение всех открытых подмножеств из A. Тогда U — открытое множество в X и $U \subset A$. Пусть $x \in A$ — произвольная точка. Так как A — окрестность x, то x принадлежит некоторому открытому подмножеству из A и, следовательно, $x \in U$, т. е. $A \subset U$. Таким образом, $A = U$. $\triangleleft$

Обозначим через $\mathbf{V}(x)$ множество всех окрестностей точки x.

Предложение 2. *Множества из $\mathbf{V}(x)$ обладают следующими свойствами:*

1) если $V \subset X$, $U \in \mathbf{V}(x)$ и $U \subset V$, то $V \in \mathbf{V}(x)$;

2) пересечение конечного числа множеств из $\mathbf{V}(x)$ принадлежит $\mathbf{V}(x)$;

3) элемент x принадлежит каждому множеству из $\mathbf{V}(x)$;

4) для каждого $V \in \mathbf{V}(x)$ существует множество $W \in \mathbf{V}(x)$ такое, что $V \in \mathbf{V}(y)$ для любого $y \in W$.

$\triangleright$ Свойства 1) — 3) являются непосредственными следствиями определения 3 и аксиомы 2) определения 1. Для доказательства свойства 4) достаточно на основании предложения 1 в качестве W взять любое открытое множество, содержащее x и содержащееся в V. $\triangleleft$

Эти четыре свойства множества $\mathbf{V}(x)$ являются характеристическими в следующем смысле.

Предложение 3. *Если каждому элементу x множества X поставлено в соответствие множество $\mathbf{V}(x)$ подмножеств из X, для которого справедливы свойства 1) — 4) предложения 2, то на X существует, и притом единственная, топология, для которой $\mathcal{V}(x)$ является множеством окрестностей точки x.*

$\triangleright$ Единственность требуемой топологии следует из предложения 1, ибо множеством всех открытых множеств в этой топологии является множество τ всех подмножеств A из X таких, что $A \in \mathbf{V}(x)$ для любого $x \in A$.

Из свойств 1) и 2) непосредственно следует, что τ — топология на X. Остается проверить, что множество окрестностей точки x в этой топологии совпадает с $\mathbf{V}(x)$.

Пусть V — окрестность точки x в топологии τ; следовательно, существует $A \subset V$ такое, что $x \in A$, $A \in \mathbf{V}(y)$ для каждого $y \in A$ и $V \supset A$. По свойству 1) предложения 2 имеем $V \in \mathbf{V}(x)$.

Обратно, пусть $V \in \mathbf{V}(x)$. Положим $U = \{y \in X |\ V \in \mathbf{V}(y)\}$. Очевидно, что $x \in U$; если $y \in U$, то $V \in \mathbf{V}(y)$ и по свойству 3) предложения 2 имеем $y \in V$. Таким образом, $U \subset V$. Покажем, что $U \in \tau$, т. е. $U \in \mathbf{V}(y)$ для всех $y \in U$. Если $y \in U$, то, согласно свойству 4), существует $W \in \mathbf{V}(y)$ такое, что $V \in \mathbf{V}(z)$ для всех $z \in W$. Так как $V \in \mathbf{V}(z)$ означает $z \in U$, то $W \subset U$, и, следовательно, по свойству 1) $U \in \mathbf{V}(y)$. $\triangleleft$

Таким образом, топологию на X можно определить заданием окрестностей каждой точки.

Определение 4. *Фундаментальной системой (базисом, базой) окрестностей* точки x в топологическом пространстве X называют множество $\mathbf{B}$ окрестностей точки x такое, что в каждой окрестности точки x содержится множество из $\mathbf{B}$.

П р и м е р ы.

1. Множество открытых окрестностей точки x образует фундаментальную систему окрестностей точки x в произвольном топологическом пространстве.

2. В дискретном топологическом пространстве множество $\{\{x\}\}$,

состоящее из одной окрестности, образует фундаментальную систему окрестностей точки x.

3. Множество открытых интервалов $]x-1/n, x+1/n[$ на прямой $\mathbf{R}$ является фундаментальной системой окрестностей точки x в естественной топологии.

Определение 5. Множество $\mathcal{B}$ открытых множеств из X называется *базой топологии* топологического пространства X, если любое открытое множество в X является объединением множеств из $\mathcal{B}$.

П р и м е р ы.

1. Множество всех одноточечных множеств является базой дискретной топологии.

2. Множество ограниченных открытых интервалов — база топологии числовой прямой.

Определение 6. *Предбазой топологии* на X называется всякое множество Σ открытых множеств из X такое, что семейство всевозможных конечных пересечений элементов из Σ образует базу топологического пространства X.

Теорема 1. *Произвольное непустое семейство Σ множеств из X образует предбазу некоторой топологии на X.*

Определение 7. *Замкнутыми множествами* в топологическом пространстве X называют дополнения открытых множеств.

П р и м е р ы.

1. Множества $\emptyset$ и X замкнуты в любом топологическом пространстве X.

2. В дискретном топологическом пространстве всякое подмножество замкнуто.

3. Замкнутый интервал на числовой прямой — замкнутое множество.

Определение 8. Точка x топологического пространства X называется *внутренней точкой* множества A, если A — окрестность x. Множество внутренних точек множества A называется *внутренностью множества* и обозначается $\overset{\circ}{A}$.

Таким образом, точка $x \in X$ является внутренней точкой множества A, если существует открытое множество U такое, что $x \in U \subset A$, поэтому A есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в A. Значит, $\overset{\circ}{A}$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Следовательно, из соотношения $A \subset B$ следует $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$. Используя понятие внутренности, предложение 1 можно сформулировать следующим образом: множество A в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда $A = \overset{\circ}{A}$.

Предложение 4. *Для любых двух множеств A и B в топологическом пространстве X справедливо равенство*

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} . \tag{1}$$

$\triangleright$ Так как $\overset{\circ}{A} \subset A$, $\overset{\circ}{B} \subset B$, то $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ и $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$, ибо $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ открыто.

Обратно, из $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ следует $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B}$ и $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. $\triangleleft$

Определение 9. Точка топологического пространства X называется *точкой прикосновения* множества A, если каждая окрестность точки x содержит точки из A. Множество точек прикосновения множества A называется *замыканием* множества и обозначается $\overline{A}$.

Предложение 5. *Для любого подмножества $A \subset X$ топологического пространства X и его дополнения $C_X A = X \setminus A$ справедливы равенства*

$$C_X \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{C_X A}}, \quad C_X \overset{\circ}{A} = \overline{C_X A}. \tag{2}$$

$\triangleright$ Докажем первое из этих равенств. Второе вытекает из первого переходом к дополнениям.

Пусть $x \in \overline{CA}$, это означает, что существует окрестность V точки x такая, что $V \cap A \neq \emptyset$, т. е. $V \subset C_X A$. Следовательно, $x \in \overset{\circ}{\widehat{CA}}$.

Отсюда следует, что замыкание A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A. В частности, из включения $A \subset B$ следует, что $\overline{A} \subset \overline{B}$. $\triangleleft$

Предложение 6. *Множество A в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$.*

Доказательство непосредственно вытекает из предложений 1 и 4.

Предложение 7. *Для любых двух множеств A и B из топологического пространства X справедливо равенство*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{3}$$

Доказательство вытекает из равенств (1) и (2) переходом к дополнениям.

Определение 10. Точка x топологического пространства X называется *граничной точкой* множества A, если она является точкой прикосновения как множества A, так и множества CA. Множество граничных точек множества A называется *границей множества* и обозначается ∂A.

Граница каждого множества замкнута, так как $\partial A = \overline{A} \cap \overline{CA}$.

Определение 11. Говорят, что множество A *плотно* в топологическом пространстве X, если $\overline{A} = X$. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное плотное множество.

Примеры.

1. Внутренность отрезка $[a, b]$ на числовой прямой есть интервал $]a, b[$. Внутренность любого одноточечного множества на числовой прямой есть пустое множество.

2. Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел плотно на прямой. Следовательно, $\mathbf{R}$ — сепарабельное топологическое пространство и $\partial\mathbf{Q} = \mathbf{R}$.

3. В дискретном пространстве X не существует плотных множеств, отличных от X.

4. В антидискретном пространстве X всякое непустое множество плотно в X. Следовательно, каждое антидискретное пространство сепарабельно.

§ 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 1. Отображение $f\colon X \to Y$, где X и Y — топологические пространства, называют *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки $f(x_0)$ найдется окрестность V точки x_0 в X такая, что $x \in V$ влечет $f(x) \in U$.

Поскольку условие $f(x) \in U$ для всех $x \in V$ равносильно условию $f(V) \subset U$, а также условию $V \subset f^{-1}(U)$, то с учетом свойства 1) предложения 2 § 1 определение 1 эквивалентно следующему определению.

Определение 1′. Отображение $f\colon X \to Y$ *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, если прообраз $f^{-1}(U)$ каждой окрестности U в Y точки $f(x_0)$ является окрестностью точки x_0 в X.

Определение 2. Отображение $f\colon X \to Y$, где X, Y — топологические пространства, называют *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке из X.

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно биективно, непрерывно и обратное к нему отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно.

Примеры.

1. Тождественное отображение топологического пространства X на себя непрерывно.

2. Постоянное отображение одного топологического пространства в другое непрерывно.

3. Всякое отображение дискретного пространства в топологическое пространство непрерывно.

Теорема 1. *Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) f непрерывно на X;

б) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset X$;

в) прообраз всякого замкнутого множества из Y — замкнутое множество в X;

г) прообраз всякого открытого множества из Y — открытое множество в X.

$\triangleright$ а) $\Rightarrow$ б). Пусть $x \in \overline{A}$ и пусть U — произвольная окрестность в Y точки $f(x)$; поскольку $f^{-1}(U)$ — окрестность точки x в X, то $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$ и поэтому существует $y \in f^{-1}(U) \cap A$. Отсюда следует, что $f(y) \in U \cap f(A)$, т. е. $U \cap f(A) \neq \emptyset$, следовательно, $f(x) \in \overline{f(A)}$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $F' \subset Y$ — замкнутое множество и $F = f^{-1}(F')$; по предложению $f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)} \subset \overline{F'}$, откуда $\overline{F} \subset f^{-1}(F') = F \subset \overline{F}$, т. е. $F = \overline{F}$, что означает замкнутость F (предложение 7 § 1 приложения).

в) $\Rightarrow$ г). Следует из равенства $Cf^{-1}(A') = f^{-1}(CA')$.

г) $\Rightarrow$ а). Пусть $x \in X$ и U — произвольная окрестность точки $f(x)$; следовательно, $f(x) \in A' \subset U$, где A' — открытая окрестность точки $f(x)$. Тогда $x \in f^{-1}(A') \subset f^{-1}(U)$, и, поскольку $f^{-1}(A')$ открыто, $f^{-1}(U)$ — окрестность точки x. $\triangleleft$

Следствие 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения, тогда композиция $g \circ f\colon X \to Z$ непрерывна.*

Следствие 2. *Для того, чтобы биективное непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ открытого множества в X был открыт в Y.*

Следствие 3. *Для того, чтобы топология τ_1 была сильнее топологии τ_2 на X, необходимо и достаточно, чтобы тождественное* *отображение* $I\colon X_1 \to X_2$ *было непрерывным, где* X_i *— множество* X, *наделенное топологией* τ_i $(i = 1, 2)$.

$\triangleright$ Это следствие немедленно вытекает из теоремы 1 г). $\triangleleft$

Замечание 1. При непрерывном отображении X в Y образ открытого (замкнутого) множества в X не обязательно открыт (замкнут) в Y. Например, отображение $f\colon \mathbf{R} \ni x \to 1/(1+x)^2 \in \mathbf{R}$ непрерывно, но $f(\mathbf{R}) =]0, 1]$, т. е. образ открытого и одновременно замкнутого множества не является открытым и не является замкнутым.

Замечание 2. Непрерывная биекция $f\colon X \to Y$ топологических пространств в общем случае не является гомеоморфизмом. Например, пусть X — множество действительных чисел с дискретной топологией, Y — действительные числа с естественной топологией и $f\colon X \to Y$ — тождественное отображение.

Замечание 3. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ остается непрерывным, если топологию на X усилить, а на Y ослабить. Если обе топологии, на X и на Y, ослабить или усилить одновременно, то непрерывность отображения f может нарушиться.

§ 3. ПОДПРОСТРАНСТВА. ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — топологическое пространство и Y — его подмножество. В этом случае можно определить некоторую топологию на множестве Y, которую называют *индуцированной* топологией.

Определение 1. Топологией, *индуцированной* из X на Y, называется топология, открытыми множествами которой служат пересечения открытых множеств из X с множеством Y (следы открытых множеств из X). Множество Y, наделенное этой топологией, называется *подпространством* пространства X.

Легко видеть, что это определение корректно, т. е. индуцированная топология удовлетворяет аксиомам топологии.

Пример. Топология действительной прямой $\mathbf{R}$ индуцирует на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел дискретную топологию, ибо следом открытого интервала $]n - 1/2, n + 1/2[$ на $\mathbf{Z}$ является множество $\{n\}$.

Во всех вопросах, где фигурируют подмножества и точки из Y, надо отличать их свойства как подмножеств и точек пространства X от их свойств как подмножеств и точек из Y. Например, множество, открытое в Y, не обязательно открыто в X.

Индуцированные топологии *транзитивны*, т. е. если $Z \subset Y \subset X$, то подпространство Z пространства X совпадает с подпространством Z пространства Y. Это прямо следует из определения.

Пусть X — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности на X, $Y = X/R$ — фактор-множество и $\varphi : X \to Y$ — каноническое отображение. Определим на Y топологию, открытыми множествами которой будут такие подмножества $B \subset Y$, у которых прообразы $\varphi^{-1}(B)$ открыты в X. Эти подмножества из Y образуют топологию. Эта топология называется *фактор-топологией* топологии пространства X по отношению R.

Фактор-топология есть сильнейшая из топологий на X/R, при которых каноническое отображение φ непрерывно.

Определение 2. Пусть R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве X. *Фактор-пространством* X по R называют фактор-множество X/R, наделенное фактор-топологией.

§ 4. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство топологических пространств и пусть $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ — декартово произведение множеств X_i. На множестве X определяется топология, называемая *произведением топологий* или *топологией Тихонова*, следующим образом. Напомним, что *произведением* $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ называется множество, состоящее из семейств элементов $(x_i)_{i\in I}$ таких, что $x_i \in X_i \ \ \forall i \in I$. Отображение $\mathrm{pr}_i \colon X \to X_i$ такое, что $pr_i(x) = x_i$, называется *проектированием* на i-й сомножитель, а элемент x_i — i-й *проекцией* элемента $x = (x_i)_{i\in I}$. Семейство всевозможных подмножеств вида $pr_i^{-1}(U_i)$, где U_i — открытые множества из X_i, образует предбазу топологии Тихонова. По самому определению эта топология — самая слабая среди топологий на X, при которых все проектирования непрерывны. Базу этой топологии образует семейство всевозможных конечных пересечений элементов указанной предбазы. Произвольный элемент U этой базы имеет вид $U = \bigcap\limits_{i\in K} pr_i^{-1}(U_i)$, где K — конечное множество. Если I — конечное множество, то построение топологии произведения по топологиям сомножителей X_i упрощается: множества вида $\prod\limits_{i\in I} A_i$, где A_i — произвольное открытое множество из X_i для каждого $i \in I$, образуют базу топологии в $\prod\limits_{i\in I} X_i$.

П р и м е р. Топология пространства $\mathbf{R}^n$ имеет своим базисом множество всевозможных произведений n открытых интервалов из $\mathbf{R}$.

Теорема 1. *Пусть f — отображение топологического пространства Y в топологическое пространство $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Для того, чтобы отображение f было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы была непрерывной каждая композиция $pr_i \circ f,\ \ i \in I$.*

$\triangleright$ Если f непрерывно, то непрерывна и композиция $pr_i \circ f$ для каждого $i \in I$, так как проекции pr_i непрерывны.

Пусть отображения $pr_i \circ f$ непрерывны при всех $i \in I$. Тогда для открытого множества U из X_i множество $(pr_i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(pr_i^{-1}(U))$ открыто в Y. Отсюда следует, что прообраз относительно f каждого элемента предбазы из $\prod\limits_{i\in I} X_i$ открыт в Y. Следовательно, отображение f непрерывно. $\triangleleft$

§ 5. СХОДЯЩИЕСЯ НАПРАВЛЕННОСТИ

Упорядоченное множество Λ называется *направленным*, если для любых двух элементов $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ существует элемент λ_3 такой, что $\lambda_1 < \lambda_3,\ \ \lambda_2 < \lambda_3$. Например, множества $\mathbf{N}, \mathbf{R}$ с естественным отношением порядка являются направленными.

Определение 1. Пусть X — произвольное множество. *Направленностью* в X называют отображение направленного множества Λ в X. Направленность обозначается $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

П р и м е р ы.

1. Каждая последовательность есть направленность.

2. Всякая функция действительной переменной является направленностью.

3. Пусть $\mathbf{P}(X)$ — множество всех подмножеств произвольного множества X, направленное по включению. Для каждого $V \in \mathbf{P}(X)$ выделим (по аксиоме выбора) элемент $x_V \in V$. Получим направленность $(x_V)_{V\in\mathbf{P}(X)}$.

Определение 2. Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *сходится к точке* $x \in X$, если для каждой окрестности V_x точки x существует элемент $\lambda_0 \in \Lambda$ такой, что $\lambda \geqslant \lambda_0$ влечет $x_\lambda \in V_x$.

Будем это записывать следующим образом: $x = \lim\limits_{\Lambda} x_\lambda$.

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{B}(x_0)$ — базис окрестностей точки x_0. Для каждой окрестности $V \in \mathbf{B}(x_0)$ выберем $x_V \in V$. Тогда направленность $(x_V)_{V\in\mathbf{B}(x_0)}$, где $\mathbf{B}(x_0)$ направлено по обратному включению, сходится к x_0.

2. Пусть X — топологическое пространство, $M \subset X$ — подпространство. Пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — направленность в M и $m \in M$. Тогда $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к m в M только в том случае, если $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к m в X.

3. Пусть $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (x_\lambda, y_\lambda)$ — направленность в топологическом пространстве $Z = X \times Y$ и $z = (x, y) \in Z$. Направленность $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к z тогда и только тогда, когда $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к x, а $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к y.

Теорема 1. *Пусть A — подмножество топологического пространства X. Для того, чтобы $x \in \overline{A}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала направленность в A, сходящаяся к x.*

$\triangleright$ Пусть $x = \lim\limits_{\Lambda} a_\lambda$, $a_\lambda \in A$. Тогда каждая окрестность нуля точки x пересекается с A, т. е. $x \in \overline{A}$.

Обратно, пусть $x \in \overline{A}$ и пусть $\mathcal{B}(x)$ — базис окрестностей точки x, направленный отношением обратного включения ($V_1 \leqslant V_2$ означает $V_2 \subset V_1$). Для каждого $V \in \mathcal{B}(x)$ выберем $a_V \in A \cap V$. Тогда направленность $(a_V)_{V\in\mathcal{B}(x)}$ сходится к x. $\triangleleft$

Замечание 1. В произвольном топологическом пространстве, в отличие от метрического, может существовать такая точка $x_0 \in \overline{A}$, что нет ни одной последовательности $x_n \in A$, сходящейся к x_0. Если у точки x_0 существует счетный базис окрестностей, то такая последовательность обязательно существует.

Теорема 2. *Пусть X, Y — топологические пространства, x_0 — точка из X, и $f\colon X \to Y$ — отображение. Для того, чтобы отображение f было непрерывно в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой направленности $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, сходящейся к x_0, направленность $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ сходилась к точке $f(x_0)$.*

$\triangleright$ Пусть f непрерывно в точке x_0 и пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — направленность, сходящаяся к x_0. Пусть $V_{f(x_0)}$ — произвольная окрестность точки $f(x_0)$. Ввиду непрерывности f существует U_{x_0} — окрестность точки x_0 такая, что $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$. Для U_{x_0} существует $\lambda_0 \in \Lambda$ такая, что $\lambda \geqslant \lambda_0$ влечет $x_\lambda \in U_{x_0}$. Следовательно, для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ имеем $f(x_\lambda) \in V_{f(x_0)}$, т. е. $f(x_0) = \lim\limits_{\Lambda} f(x_\lambda)$.

Предположим теперь, что отображение f не является непрерывным в точке x_0. Покажем, что можно найти направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, сходящуюся к x_0, для которой $f(x_\lambda)$ не сходится к $f(x_0)$. Запишем условие разрывности f следующим образом: существует окрестность V точки $f(x_0)$ такая , что для любой окрестности $U \in \mathcal{B}(x_0)$ $f(U) \not\subset V$, где $\mathcal{B}(x_0)$ — базис окрестностей точки x_0. Отношение $f(U) \not\subset V$ означает, что существует точка $u \in U$ такая, что $f(u) \notin V$. Таким образом, для каждого $U \in \mathcal{B}(x_0)$ выберем $x_u \in U$ так, что $f(x_u) \notin V$. Построена направленность (x_u), занумерованная элементами $U \in \mathbf{B}(x_0)$. Она по построению сходится к x_0. Так как $f(x_u) \notin V$, то направленность $(f(x_u))$ не сходится к $f(x_0)$. $\triangleleft$

Замечание 2. Если X и Y — топологические пространства и $f\colon X \to Y$ — отображение, то может оказаться, что для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0 в X, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$, но отображение f разрывно в точке x_0. Пример такого отображения приведен в замечании 2 § 15. В пространстве (X, τ_2) из этого примера любая точка $x \in X$ является предельной точкой множества A, состоящего из иррациональных чисел, но если $x_0 \notin A$, то не существует последовательности $x_n \in A$, сходящейся к x_0. Это замечание вместе с теоремами 1 и 2 поясняет, почему в случае произвольных топологических пространств вместо последовательностей необходимо рассматривать более общее понятие направленности.

Определение 3. Говорят, что направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в X *часто встречается с множеством* $A \subset X$, если для каждого $\mu \in \Lambda$ найдется элемент $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\lambda > \mu$ и $x_\lambda \in A$.

Точка x топологического пространства X называется *предельной точкой* направленности $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, если эта направленность часто встречается с каждой окрестностью точки x.

Определение 4. Направленность $(y_\mu)_{\mu\in M}$ называется *поднаправленностью* направленности $(x_\lambda)_{\lambda\,\in\,\Lambda}$, если существует функция $\varphi : M \to \Lambda$ такая, что $y_\mu = x_{\varphi(\mu)}$; и для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$ найдется элемент $\mu_0 \in M$ такой, что если $\mu > \mu_0$, то $\varphi(\mu) > \lambda_0$.

Теорема 3. *Точка x топологического пространства X является предельной точкой направленности тогда и только тогда, когда некоторая поднаправленность заданной направленности сходится к x.*

§ 6. ОТДЕЛИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. Топологическое пространство X называют *отделимым* или *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек из X существуют непересекающиеся окрестности.

Примеры.

1. Всякое дискретное пространство отделимо.

2. Числовая прямая $\mathbf{R}$ отделима: если $x, y \in \mathbf{R}$ и $x \neq y$, то для $\varepsilon < |x-y|/2$ окрестности $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ и $]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$ точек x и y не пересекаются.

3. Антидискретное топологическое пространство, состоящее более чем из одной точки, не отделимо.

Теорема 1. *Топологическое пространство X отделимо тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся направленность имеет только один предел.*

$\triangleright$ Пусть X отделимо и x_1, x_2 — пределы направленности $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда существуют V_1 — окрестность точки x_1 и V_2 — окрестность точки x_2 такие, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Так как направленность (x_λ) сходится к x_i $(i = 1, 2)$, то существуют $\lambda_i \in \Lambda$ такие, что $x_\lambda \in V_i$ для всех $\lambda > \lambda_i$ $(i = 1, 2)$. Поскольку множество Λ направлено, то существует $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $\lambda_0 > \lambda_1$, $\lambda_0 > \lambda_2$. Следовательно, при $\lambda > \lambda_0$ имеем $x_\lambda \in V_1 \cap V_2$, что противоречит $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Значит, $x_1 = x_2$.

Предположим теперь, что X не отделимо. Тогда найдутся точки $x_1 \neq x_2$ такие, что любая окрестность точки x_1 пересекает любую окрестность точки x_2. Обозначим через $\mathbf{V}(x_i)$ множество всех окрестностей точки x_i $(i = 1, 2)$, направленное относительно обратного включения. На декартовом произведении $\mathbf{V}(x_1) \times \mathbf{V}(x_2)$ зададим порядок произведения, считая, что $V_1 \times V_2 < V_1' \times V_2'$, если $V_1' \subset V_1$ и $V_2' \subset V_2$. Ясно, что $\mathbf{V}(x_1) \times \mathbf{V}(x_2)$ Для каждого элемента $V_1 \times V_2 \in \mathbf{V}(x_1) \times \mathbf{V}(x_2)$ имеем $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Выберем $S_{V_1\times V_2} \in V_1 \cap V_2$. Если $V_1 \times V_2 > V_1' \times V_2'$, то $S_{V_1\times V_2} \in V_1 \cap V_2 \subset V_1' \times V_2'$. Следовательно, направленность S сходится к точкам x_1 и x_2. $\triangleleft$

Теорема 2. *Пусть f и g — непрерывные отображения топологического пространства X в отделимое топологическое пространство Y. Тогда множество тех $x \in X$, для которых $f(x) = g(x)$, замкнуто в пространстве X.*

$\triangleright$ Обозначим $A = \{x \in X |\ f(x) = g(x)\}$. Докажем, что $C_X A$ открыто в X. Пусть $x_0 \in C_X A$, следовательно, $f(x_0) \neq g(x_0)$. Ввиду отделимости Y существуют множества $V_{f(x_0)}$ — окрестность точки $f(x_0)$ и $V_{g(x_0)}$ — окрестность точки $g(x_0)$ такие, что $V_{f(x_0)} \cap V_{g(x_0)} = \emptyset$. Множества $U_1 = f^{-1}(V_{f(x_0)})$, $U_2 = g^{-1}(V_{g(x_0)})$ являются окрестностями точки x_0, ибо f и g непрерывны. Следовательно, $U = U_1 \cap U_2$ — окрестность точки x_0 и $f(U) \subset V_{f(x_0)}$, $g(U) \subset V_{g(x_0)}$. Мы получили, что $U \subset C_X A$. Значит, множество $C_X A$ является окрестностью каждой своей точки, т. е. $C_X A$ открыто. $\triangleleft$

Следствие 1 (принцип продолжения тождества). *Пусть f и g — непрерывные отображения топологического пространства X в отделимое топологическое пространство Y. Если $f(x) = g(x)$ во всех точках некоторого всюду плотного в X множества, то $f = g$.*

Предложение 1. *Если для любой пары различных точек x, y топологического пространства X существует такое его непрерывное отображение f в отделимое пространство Y, что $f(x) \neq f(y)$, то X отделимо.*

$\triangleright$ Пусть V и W — непересекающиеся окрестности точек $f(x)$ и $f(y)$. Тогда $f^{-1}(V)$, $f^{-1}(W)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y, что доказывает предложение. $\triangleleft$

Следствие 2. *Всякое подпространство A отделимого топологического пространства X отделимо.*

$\triangleright$ Достаточно применить предложение 1 к каноническому вложению $j_A : A \to X$. $\triangleleft$

Следствие 3. *Всякая топология, мажорирующая отделимую топологию, отделима.*

Следствие 4. *Произведение любого семейства отделимых топологических пространств отделимо.*

$\triangleright$ Пусть $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ — топологическое произведение отделимых пространств X_i. Если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то существует $i_0 \in I$ такое, что $pr_{i_0} x \neq pr_{i_0} y$, и из предложения 1 следует, что X отделимо. $\triangleleft$

§ 7. КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. Отделимое топологическое пространство X называется *компактным*, если у всякого открытого покрытия пространства X существует конечное открытое подпокрытие.

П р и м е р. Всякое отделимое пространство, состоящее из конечного числа точек, компактно.

Определение 2. Семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ подмножеств множества X называется *центрированным*, если пересечение любого конечного набора множеств из этого семейства непусто.

Предложение 1. *Отделимое топологическое пространство X является компактным тогда и только тогда, когда каждое центрированное семейство замкнутых подмножеств из X имеет непустое пересечение.*

$\triangleright$ *Необходимость.* Пусть пространство X компактно. Предположим, что существует центрированная система замкнутых множеств $\{A_i\}_{i\in I}$ такая, что $\bigcap\limits_{i\in I} A_i=\emptyset$. Тогда дополнения $U_i=X\setminus A_i$ образуют открытое покрытие X. В силу компактности X существует конечный набор $i_1,\dots,i_n$ такой, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}=X$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}=X\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}=\emptyset$. Получаем противоречие с определением центрированной системы

Достаточность. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие пространства X. Предположим, что у этого покрытия нет конечных подпокрытий. Тогда система множеств $A_i=X\setminus U_i$ является центрированной. По условию $\cap A_i\neq\emptyset$, и, значит, $\cup U_i\neq X$. Получаем противоречие. $\triangleleft$

Теорема 1. *Для того, чтобы топологическое пространство X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждая направленность в X имела предельную точку.*

$\triangleright$ Пусть X — компактное пространство и $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — направленность в X. Для каждого $\lambda\in\Lambda$ обозначим $A_\lambda=\{x_\mu\colon \mu>\lambda\}$ и рассмотрим семейство множеств $(\overline{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Нетрудно видеть, что $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A}_\lambda\neq\emptyset$. Действительно, в противном случае, так как X компактно, нашлось бы конечное множество $K\subset\Lambda$ такое, что $\bigcap\limits_{\lambda\in K}\overline{A}_\lambda=\emptyset$. И тем более $\bigcap\limits_{\lambda\in K} A_\lambda=\emptyset$. Но это невозможно, ибо если $K=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, то найдется $\lambda_0\in\Lambda$ такой, что $\lambda_0>\lambda_i,\ \ i=1,\dots,n$. Следовательно, $A_{\lambda_0}\subset\bigcap\limits_{\lambda\in K} A_\lambda$. Таким образом, существует $x\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A}_\lambda$. Точка x является предельной точкой направленности $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, ибо в противном случае у x найдется окрестность U, с которой направленность $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ не встречается часто. Значит, для некоторого $\mu\in\Lambda$ из $\lambda>\mu$ следует $x_\lambda\notin U$, т. е. $U\cap A_\mu=\emptyset$. Это означает, что $x\in\overline{A}_\mu$.

Обратно, пусть каждая направленность имеет предельную точку в X и пусть U — произвольное семейство замкнутых множеств такое, что пересечение любого конечного множества элементов этого семейства непусто (центрированное семейство). Определим $\mathcal{V}$ как семейство всевозможных конечных пересечений элементов из U, направленное по обратному включению. Ясно, что пересечение конечного множества элементов из $\mathcal{V}$ непусто. Выбирая $x_V \in V$ для каждого $V \in \mathcal{V}$, получим направленность $(x_V)_{V\in\mathcal{V}}$. Если $W > V$, то $x_W \in W \subset V$. Поэтому направленность $(x_V)_{V\in\mathcal{V}}$ с некоторого момента находится в замкнутом множестве V, а потому и ее предельная точка $x \in V$. Таким образом, $x \in \bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}} V$, т. е. $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}} V \neq \emptyset$ и, следовательно, $\bigcap\limits_{V\in U} V \neq \emptyset$. $\lhd$

Определение 3. Подмножество A отделимого топологического пространства X называется *компактным*, если A компактно как подпространство с индуцированной топологией.

Другими словами, для того чтобы подмножество A отделимого топологического пространства X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы из каждого его покрытия множествами, открытыми в X, можно было выделить конечное подпокрытие.

Предложение 2. *В компактном пространстве X всякое замкнутое множество A компактно.*

$\rhd$ Достаточно воспользоваться предложением 1, учитывая, что если A замкнуто в X, то всякое множество, замкнутое в A, замкнуто в пространстве X. $\lhd$

Предложение 3. *В отделимом топологическом пространстве X всякое компактное множество A замкнуто.*

$\rhd$ Пусть x — произвольная точка из $C_X A$. В силу отделимости X для каждой точки $a \in A$ найдется открытая окрестность U_a такая, что $x \notin \overline{U}_a$. Такие окрестности образуют покрытие множества A. В силу компактности A существует конечное семейство $U_0, U_1, \ldots, U_n$ таких окрестностей, покрывающее A. При этом $x \notin \overline{U}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Положим $V = \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i$. Тогда $A \subset V$ и $x \notin \overline{V} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i$, следовательно, $x \in C_X \overline{V} \subset C_X A$ — окрестность точки x. Таким образом, доказано, что $C_X A$ открыто, т. е. A замкнуто. $\lhd$

Теорема 2. *Для того, чтобы множество $A \subset \mathbf{R}$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и ограничено.*

$\rhd$ Пусть A компактно, тогда оно замкнуто, согласно предложению 3, и ограничено, ибо его можно покрыть конечным числом открытых интервалов длины 1.

Обратно, если множество A замкнуто и ограничено, то оно содержится в некотором замкнутом интервале $A \subset [a, b]$. И поскольку $[a, b]$ компактен, то A компактно ввиду предложения 2. $\triangleleft$

Предложение 4. *Если f — непрерывное отображение компактного топологического пространства X в отделимое пространство Y, то $f(X)$ компактно.*

$\triangleright$ Поскольку Y отделимо, то $f(X)$ также отделимо. Пусть задано покрытие $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ множества $f(X)$ открытыми множествами B_λ из Y. Тогда $(f^{-1}(B_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ — открытое покрытие множества X. Поскольку X компактно, то существует конечное множество $K \subset \Lambda$ такое, что семейство $(f^{-1}(B_\lambda))_{\lambda\in K}$ покрывает X, следовательно, семейство $(B_\lambda)_{\lambda\in K}$ покрывает $f(X)$. $\triangleleft$

Теорема 3 (Вейерштрасс). *Пусть X — компактное топологическое пространство и $f\colon X \to \mathbf{R}$ — непрерывное отображение. Тогда $f(X)$ ограничено и существуют в X точки a и b такие, что*

$$f(a) = \inf_{x\in X} f(x), \quad f(b) = \sup_{x\in X} f(x).$$

$\triangleright$ Первая часть теоремы следует из предложения 4 и теоремы 2. Вторая часть следует из того, что $f(X)$ замкнуто и поэтому точки $\inf f(x)$ и $\sup f(x)$, являющиеся точками прикосновения множества $f(X)$, принадлежат $f(X)$. $\triangleleft$

Теорема 4 (А. Н. Тихонов). *Произведение произвольного семейства компактных топологических пространств компактно.*

$\triangleright$ Пусть задано семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ компактных топологических пространств и пусть X — его топологическое произведение. Согласно предложению 1, достаточно показать, что для любой центрированной системы Σ пересечение $\bigcap\limits_{A\in\Sigma} \overline{A}$ непусто.

Рассмотрим множество S всех центрированных систем подмножеств в X, содержащих Σ. Это множество упорядочено по включению. Покажем, что для него выполнено условие леммы Цорна. Действительно, если Σ_α, $\alpha \in J$, — линейно упорядоченный набор элементов из S, то $\bigcup\limits_{\alpha\in J} \Sigma_\alpha$ — центрированная система, содержащая Σ, которая мажорирует все Σ_α. Согласно лемме Цорна, существует максимальная центрированная система $\Sigma_{\max}$, содержащая Σ.

Максимальность $\Sigma_{\max}$ означает, что если к $\Sigma_{\max}$ добавить множество, не принадлежащее $\Sigma_{\max}$, то полученная система не будет центрированной; если для максимальной системы $\Sigma_{\max}$ пересечение

$\bigcap\limits_{A\in\Sigma_{\max}} \overline{A} \neq \emptyset$, то тем более пересечение $\bigcap\limits_{A\in\Sigma} \overline{A}$ меньшего семейства множеств непусто.

Так как добавление к центрированной системе конечных пересечений не нарушает свойства центрированности, из максимальности системы получаем следующие свойства: а) любое конечное пересечение множеств из $\Sigma_{\max}$ принадлежит $\Sigma_{\max}$; б) если множество A пересекает каждое множество из $\Sigma_{\max}$, то $A \in \Sigma$.

При каждом фиксированном $i \in I$ система $\{\mathrm{pr}_i(A)\}_{A\in\Sigma}$ проекций множеств A из системы Σ на X_i центрирована. Так как замыкания этих множеств образуют также центрированную систему, в силу компактности пространства X_i, существует точка x_i, принадлежащая всем этим замыканиям, т. е. являющаяся точкой прикосновения для всех множеств $\mathrm{pr}_i(A)$. Полученное семейство точек $\{x_i\}_{i\in I}$ есть элемент x пространства X.

Покажем, что $x \in \bigcap\limits_{A\in\Sigma_{\max}} \overline{A}$, т. е. является точкой прикосновения каждого множества A из $\Sigma_{\max}$. Если U_i — окрестность точки x_i в X_i, то $U_i \cap \mathrm{pr}_i(A)$ непусто для любого $A \in \Sigma_{\max}$. Переходя к прообразам, получаем, что пересечение $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \cap A \neq \emptyset$ для любого $A \in \Sigma_{\max}$. В силу свойства б) множество $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$ принадлежит $\Sigma_{\max}$. Но совокупность таких конечных пересечений образует базис окрестностей точки $x = \{x_i\}$ в топологии произведения. Таким образом, каждая окрестность точки x принадлежит системе $\Sigma_{\max}$ и в силу центрированности этой системы имеет непустое пересечение с каждым множеством этой системы. Это по определению означает, что x является точкой прикосновения для каждого множества A из $\Sigma_{\max}$, т. е. $x \in \bigcap\limits_{A\in\Sigma_{\max}} \overline{A}$. Значит, пересечение непусто. $\lhd$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
2. *Александров П. С., Колмогоров А. Н.* Введение в теорию функций действительного переменного. — М.; Л.: Гос. тех.-теорет. изд-во, 1933. — 272 с.
3. *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Мн.: Вышэйш. шк., 1978. — 206 с.
4. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
5. *Банах С.* Теория линейных операций. — Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.— 272 с.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ю., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. Курс лекций. — Киев: Выща шк., 1990. — 600 с.
8. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 410 с.
9. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
10. *Бурбаки Н.* Общая топология: Основные структуры. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
11. *Брудно Ф. Л.* Теория функций действительного переменного. — М.: Наука, 1971. — 120 с.
12. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976. — 280 с.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
14. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1973. — 352 с.
15. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. — М.: Наука, 1967. — 416 с.
16. *Гелбаум И. М., Олмстед Дж. Т.* Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967. — 251 с.
17. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. М.: Физматгиз, 1958. — Т. 1. — 440 с.; — Т. 3. — 273 с.

18. *Городецкий В.В., Нагнибеда Н.И., Настиев П.П.* Методы решения задач по функциональному анализу. — Киев: Выща шк., 1990. — 479 с.
19. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы: Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы: Спектральная теория. — М.: Мир, 1966. — 1064 с.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы: Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974. — 662 с.
22. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964. — 432 с.
23. *Дэй М.* Нормированные линейные пространства. — М.: Мир, 1961. — 232 с.
24. *Заманский М.* Введение в современную алгебру и анализ. — М.: Мир, 1974. — 487 с.
25. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
26. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959. — 684 с.
27. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
28. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 384 с.
29. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
30. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Мир, 1969. — 447 с.
31. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
32. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
33. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние., 1983. — 222 с.
34. *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — 252 с.
35. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
36. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высш. шк., 1982. — 272 с.
37. *Макаров Б.М. и др.* Избранные задачи по вещественному анализу. — М.: Наука, 1992. — 431 с.
38. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.— 336 с.
39. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959. — 232 с.

40. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.
41. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
42. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
43. *Окстоби Дж.* Мера и категория. — М.: Мир, 1974. — 158 с.
44. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965. — 128 с.
45. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 357 с.
46. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность — М.: Мир, 1978. — 395 с.
47. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3: Теория рассеяния. — М.: Мир, 1982. — 443 с.
48. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. — М.: Мир, 1982. — 428 с.
49. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 592 с.
50. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 260 с.
51. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 448 с.
52. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 494 с.
53. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. —256 с.
54. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 808 с.
55. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: Гостехиздат, 1948. — 480 с.
56. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
57. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
58. *Треногин В. А., Писаревский Б.М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. — М.: Наука, 1984. — 256 с.
59. *Халмош П.* Теория меры. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. — 290 с.
60. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970. — 352 с.
61. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.; Л.: Гостехиздат, 1937. — 304 с.
62. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.

63. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. — М.: Физматгиз, 1960. — 388 с.
64. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965. — 328 с.
65. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера, производная. — М.: Наука, 1967. — 220 с.
66. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Здесь в.п., н.п., м.п., т.в.п., б.п., с.п. — векторное, нормированное, метрическое, топологическое векторное, банахово, сопряженное пространство соответственно, о.ф. — обобщенная функция.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Антоневич Анатолий Борисович
Радыно Яков Валентинович

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебник

Художник обложки *Л. А. Стрижак*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректор *Е. И. Бондаренко*

Ответственный за выпуск *А. Б. Антоневич*

Подписано в печать 04.03.2003. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Роман. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,11. Уч.-изд. л. 26,14.
Тираж 3000 экз. (2-й завод 1001–3000 экз.). Зак. 2937.

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220050, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательство «Белорусский Дом печати».
Республика Беларусь, 220013, Минск, пр. Независимости, 79.