ДУ доп. вопросы

Никита Латушкин

28 декабря 2021 г.

1 Связь между автономным и неавтономным ДУ

Векторное ДУ

$\dot{x} = f(t, x)$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $f(t, x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 - e^{-2t} \\ x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$

записывается в виде системы так

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_1 + x_2 - e^{-2t} \\ \dot{x_2} = x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

В общем случае уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ является неавтономным. Но оказывается, что неавтономному ДУ всегда можно поставить в соответствие автономную систему, вводя специальным бразом новую переменную. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(t, x) \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 \end{cases}$$

2 Геометрический смысл приближения Пикара

Если мы рассматриваем кривые $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$, которые являются графиками соответствующих приближений Пикара, то так это следует из формулы $\phi_k(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \phi_{k-1}(\tau))d\tau,\ k = 1, 2, \dots$, геометрически переход от кривой K_{k-1} к кривой K_k означает построение по кривой K_{k-1} такой кривой K_k, направление касательной к которой при каждом фиксированном t совпадает с направлением поля на кривой K_{k-1}, при соответствующем значении t.

Заметим, что если бы на некоторой кривой K_m направление касательной совпадало бы при каждом фиксированном t с направлением поля на самой кривой, то кривая K_m была бы интегральной.

3 Условие Липшица

Пусть $F : X \to Y$ – отображение МП (X, ρ_1) в МП (Y, ρ_2) и пусть L>0 – некоторое вещественное число.

Отображение $F : X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, если оно увеличивает расстояние между $\forall x_1, x_2 \in X$ не более, чем в L раз, то есть

$\rho_2(F(x_1), F_(x_2)) \leq L \cdot \rho_1(x_1, x_2),\ \forall x_1, x_2 \in X$

Это означает, что относительный рост функции f по переменной x ограничен постоянной L. Другими словами, функция f растёт по переменной x не быстрее, чем линейная функция.

4 Теорема Пикара-Линделёфа

Если отображение $f : D \to R^n$ параллелепипеда $D : |t - t_0| \leq a$,

$||x - x_0|| \leq b$ непрерывно и удовлетворяет по фазовой переменной x условию Липшица, то начальная задача

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение ϕ^*, определён용 а промежутке $|t - t_0| \leq h$, где $h = \min(a, \frac{b}{M})$, а $M = ||f|| = \max ||f(t, x)||$

5 Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим ДУ

$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ (1)

в предположении, что функции M и N непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$ на некотором открытом множестве $D \subset R^2$.

ДУ (1) называют **уравнением в полных дифференциалах** на открытом множестве $D^* \subset D$, если существует скалярная функция $U : D^* \to R$, имеющая непрерывные частные производные такая, что в D^* её полный дифференциал совападает с левой частью ДУ (1), то есть если в D^*

$dU(t,x) \equiv M(t,x)dt + N(t,x)dx$

6 Первый интеграл

Непрерывное непостоянное отображение $U : D^* \to R, D^* \subset D$, называется **первым интегралом ДУ**, если оно постоянно вдоль любой интегральной кривой ДУ из области D^*, то есть $U(t, \phi(t)) \equiv const$, где $\phi : I^* \to R^n$ – решение ДУ

7 Поверхность уровня С

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D, в которой задана функция $u = u(x, y, z)$. В этом случае говорят, что в области D задано скалярное поле. Рассмотрим точки области D, в которых функция $u(x, y, z)$ имеет постоянное значение c. Совокупность этих точек образует некоторую поверхность. Если возьмём другое значение c, то получим другую поверхность. Эти поверхности называются **поверхностями уровня**.

8 Лемма Гронволла

Пусть задано непрерывное отображение $U : [t_0; +\infty) \to R$ такое, что для $t \geq t_0$ имеет место интегральное неравенство

$0 \leq U(t) \leq \delta + \int\limits_{t_0}^{t} (\eta + L \cdot U(\tau))d\tau$

где δ, η, L – постоянные такие, что $\delta \geq 0$, $\eta \geq 0$, $L > 0$, тогда имеет место экспоненциальное неравенство

$U \leq \delta e^{L(t-t_0)} + \frac{\eta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1)$

9 Тождество Эйлера

$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ (1)

Если на открытом множестве $D^* \subseteq D$ уравнение (1) является уравнением в полным дифференциалах, то на множестве D^* выполняется **тождество Эйлера**

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \equiv \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$$

Доказательство

Т.к. уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах на множестве D^*, то на D^* существует непрерывно дифференцируемая функция $U : D^* \to R$ такая, что

$$dU \equiv M(t,x)dt + N(t,x)dx = \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}dx$$

и значит на D^* справедливы равенства

$$M(t,x) = \frac{\partial U(t,x)}{\partial t},\ N(t,x) = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}$$

По предположению, частные производные $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$ непрерывны на D^*, а следовательно на D^* непрерывны и смешанные производные $\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x \partial t}$ и $\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x}$

Последнее означает, что $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$, откуда и следует тождество Эйлера

ч.т.д.

10 Функционально независимые отображения

Непрерывно дифференцируемые отображения $F_1, F_2, \dots, F_m : G \to R, G \subset R^s, s \geq m$, называются **функционально независимыми** (или независимыми), если ранг производной $\frac{dF}{dz}, F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, равен m.

11 P-дискриминантная кривая

Пусть дано скалярное ОДУ 1-ого порядка в общей форме
$F(t, x, \dot{x}) = 0$ (1)

Если выполняется условие

$\frac{\partial F(t_0, x_0, \dot{x_0})}{\partial \dot{x}} \neq 0$,
то через точку (t_0, x_0) будет проходить единственная интегральная кривая.

Если же

$\frac{\partial F(t_0, x_0, \dot{x_0})}{\partial \dot{x}} = 0$,
то возможно ветвление интегральных кривых.

Таким образом, точки ветвления решений ДУ (1) могут быть расположены на кривой, определяемой из системы

$$\begin{cases} F(t, x, p) = 0 \\ F'_p(t, x, p) = 0 \end{cases}$$

исключением p, которая называется **p-дискриминантной кривой**.
Обозначение:
$Disct_p : F(t, x) = 0$

12 Определение области?

Областью называется любое открытое и связное в R^n множество

13 Аналитический критерий первого интеграла

$\dot{x} = f(t, x)$ (1)

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое отображение $U : D^* \to R$ было первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы $\forall (t, x) \in D^*$ выполнялось равенство

$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} f(t, x) = 0$ (2)

<u>**Доказательство**</u>

Необходимость

Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $U : D^* \to R$ является для ДУ (1) первым интегралом. Это означает, что $U(t, x) \equiv const$, где $x = \phi(t)$ – решение ДУ (1). Дифференцируя последнее соотношение по t, получим в силу (1), что

$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} f(t, x) = 0.$

Получаем (2).

Достаточность

Пусть имеет место (2). Тогда вдоль интегральных кривых ДУ (1) справедливо равенство

$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{dU(t,x)}{dt} = 0$

которое равносильно равенству $U(t, x) = const$, где $x = \phi(t)$ – интегральная кривая ДУ (1), а это и означает, что U – первый интеграл ДУ (1)

ч.т.д.