Матан теоремы

Никита Латушкин

15 января 2022 г.

1 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ называется **мажорантным** для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ на множестве $E \subset C$, если $\forall n, \forall z \in E : |u_n(z)| \leq c_n$.

Признак

Пусть $\forall n, \forall z \in E$, $|u_n(z)| \leq c_n$. Если положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на E.

2 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0$, $\forall z \in E$ $\forall n$: $|\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к 0 на E и монотонна по k $\forall x \in E$, частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно ограничены, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на E.

3 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0$, $\forall z \in E$ $\forall n$: $|\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на E и монотонна по k, функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E.

4 Свойства степенных рядов

1) Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости

2) Степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0; x] \subset (-R; R)$. При этом радиус сходимости проинтегрированного ряда $\int\limits_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \dots - \frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$ совпадает с исходным

3) Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} = f(x)$ можно почленно продифференцировать в круге сходимости. Радиус сходимости продифференцированного ряда $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kc_k x^{k-1}$ совпадает с исходным.

5 Непрерывность суммы функционального ряда

Пусть $u_k(x) \in C(E)$, функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на E к функции f. Тогда $f \in C(E)$.

6 Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

Пусть $u_k \in \Re[a;b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно на $[a;b]$ сходится к функции f.

Тогда $f \in \Re[a;b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx$

Доказательство

7 Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

Пусть 1) $u_k \in C^1[a;b]$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится равномерно на $(a;b)$ к функции $g(x)$.

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к некоторой функции $f \in C^1(a;b)$ и $f'(x) = g(x)$ на $(a;b)$.

8 Интеграл Дирихле

$J(\beta) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - arctg\beta$, $\beta \geq 0$

9 Лемма Римана об осцилляции

Если $f(x) \in \Re(a;b)$, то

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos pxdx = \lim_{p\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin pxdx = 0$$

10 Признак локализации

Пусть f – 2π-периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на R хотя бы в несобственном смысле. Тогда $\forall\delta \in (0;\pi)$ $\forall x \in (-\pi;\pi)$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}) \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} D_n(t)dt = 0$

11 Признак Дини сходимости ряда Фурье

Пусть f – 2π-периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на R хотя бы в несобственном смысле, $\exists f(x \pm 0)$.

$S_f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Если для некоторого $\delta \in (0;\pi)$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t}dt$, $\phi(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - S_f(x)$, то ряд Фурье функции в точке сходится к значению $S_f(x)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} (S_n f)(x) = S_f(x)$

12 Равномерная сходимость ряда Фурье

13 Дифференцируемость ИЗОП

14 Интегрируемость ИЗОП

15 Непрерывность ИЗОП

16 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП

17 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

18 Признак Абеля равномерной сходимости НИЗОП

19 Формула Грина

20 Существование первообразной в области