

Матан теоремы

Никита Латушкин

15 января 2022 г.

1 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ называется **мажорантным** для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ на множестве $E \subset C$, если $\forall n, \forall z \in E : |u_n(z)| \leq c_n$.

Признак

Пусть $\forall n, \forall z \in E, |u_n(z)| \leq c_n$. Если положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на E .

2 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0, \forall z \in E \forall n: |\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к 0 на E и монотонна по $k \forall x \in E$, частичные суммы $\sum_{k=1}^n a_k(x)$ равномерно ограничены, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E .

3 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0, \forall z \in E \forall n: |\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на E и монотонна по k , функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E .

4 Свойства степенных рядов

1) Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости

2) Степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0; x] \subset (-R; R)$. При этом радиус сходимости проинтегрированного ряда $\int_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \dots - \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \dots$ совпадает с исходным

3) Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = f(x)$ можно почленно продифференцировать в круге сходимости. Радиус сходимости продифференцированного ряда $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ совпадает с исходным.

5 Непрерывность суммы функционального ряда

Пусть $u_k(x) \in C(E)$, функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на E к функции f . Тогда $f \in C(E)$.

6 Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

Пусть $u_k \in \mathfrak{R}[a; b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно на $[a; b]$ сходится к функции f .

Тогда $f \in \mathfrak{R}[a; b]$ и $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$

Доказательство

7 Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

Пусть 1) $u_k \in C^1[a; b]$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a; b]$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $(a; b)$ к функции $g(x)$.

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$ к некоторой функции $f \in C^1(a; b)$ и $f'(x) = g(x)$ на $(a; b)$.

8 Интеграл Дирихле

$$J(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctg \beta, \beta \geq 0$$

9 Лемма Римана об осцилляции

Если $f(x) \in \mathfrak{R}(a; b)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin px dx = 0$$

10 Признак локализации

Пусть f — 2π -периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на \mathbb{R} хотя бы в несобственном смысле. Тогда $\forall \delta \in (0; \pi) \forall x \in (-\pi; \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} D_n(t) dt = 0$$

11 Признак Дини сходимости ряда Фурье

Пусть f — 2π -периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на \mathbb{R} хотя бы в несобственном смысле, $\exists f(x \pm 0)$.

$$S_f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Если для некоторого $\delta \in (0; \pi)$ сходится несобственный интеграл

$\int_0^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} dt$, $\phi(t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - S_f(x)$, то ряд Фурье функции в точке сходится к значению $S_f(x)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x) = S_f(x)$$

- 12 Равномерная сходимость ряда Фурье
- 13 Дифференцируемость ИЗОП
- 14 Интегрируемость ИЗОП
- 15 Непрерывность ИЗОП
- 16 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП
- 17 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда
- 18 Признак Дирихле равномерной сходимости НИЗОП
- 19 Признак Абеля равномерной сходимости НИЗОП
- 20 Формула Грина
- 21 Существование первообразной в области