Матан теоремы

Никита Латушкин

19 января 2022 г.

1 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ называется **мажорантным** для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ на множестве $E \subset C$, если $\forall n, \forall z \in E : |u_n(z)| \leq c_n$.

Признак

Пусть $\forall n, \forall z \in E$, $|u_n(z)| \leq c_n$. Если положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на E.

2 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0$, $\forall z \in E$ $\forall n$: $|\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к 0 на E и монотонна по k $\forall x \in E$, частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ равномерно ограничены, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на E.

3 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0$, $\forall z \in E$ $\forall n$: $|\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на E и монотонна по k, функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E.

4 Свойства степенных рядов

1) Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости

2) Степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0; x] \subset (-R; R)$. При этом радиус сходимости проинтегрированного ряда $\int\limits_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$ совпадает с исходным

3) Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} = f(x)$ можно почленно продифференцировать в круге сходимости. Радиус сходимости продифференцированного ряда $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ совпадает с исходным.

5 Непрерывность суммы функционального ряда

Пусть $u_k(x) \in C(E)$, функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на E к функции f. Тогда $f \in C(E)$.

6 Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

Пусть $u_k \in \Re[a;b]$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно на $[a;b]$ сходится к функции f.

Тогда $f \in \Re[a;b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_k(x)dx$

7 Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

Пусть 1) $u_k \in C^1[a;b]$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x_0)$ сходится равномерно на $(a;b)$ к функции $g(x)$.

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к некоторой функции $f \in C^1(a;b)$ и $f'(x) = g(x)$ на $(a;b)$.

8 Интеграл Дирихле

Пусть f – 2π - периодическая, f и $|f|$ интегрируемы на $[-\pi;\pi]$ хотя бы в несобственном смысле.

Тогда $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} =$

$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} D_n(t)dt$

$D_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ – ядро Дирихле

9 Лемма Римана об осцилляции

Пусть $f(x), |f(x)| \in \Re[a;b]$ хотя бы в несобственном смысле, тогда

$\lim\limits_{p\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos pxdx = \lim\limits_{p\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin pxdx = 0$

10 Признак локализации

Пусть f – 2π-периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на R хотя бы в несобственном смысле. Тогда $\forall \delta \in (0;\pi)$ $\forall x \in (-\pi;\pi)$

$$\lim_{n\to\infty}(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi})\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}D_n(t)dt = 0$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \text{ – ядро Дирихле}$$

11 Признак Дини сходимости ряда Фурье

Пусть f – 2π-периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на R хотя бы в несобственном смысле, $\exists f(x \pm 0)$.

$S_f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Если для некоторого $\delta \in (0;\pi)$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{|\phi(t)|}{t}dt$, $\phi(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - S_f(x)$, то ряд Фурье функции в точке сходится к значению $S_f(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}(S_n f)(x) = S_f(x)$$

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

12 Равномерная сходимость ряда Фурье

Пусть f – 2π-периодична, дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, f' удовлетворяет условию Дирихле. Тогда $S_n f$ равномерно сходится к f на R.

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Говорят, что функция $f : [a;b] \to R$ **удовлетворяет условиям Дирихле**, если существует такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, что на каждом $(x_k; x_{k+1})$ функция f ограничена, непрерывна и монотонна.

13 Дифференцируемость ИЗОП

Пусть f и $\frac{\partial f}{\partial y} \in C\{[a;b] \times (c;d)\}$, тогда ИЗОП $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ есть функция, непрерывно дифференцируемая на $(c;d)$ и верна формула Лейбница

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$$

14 Интегрируемость ИЗОП

Пусть $f(x,y) \in C\{[a;b] \times [c;d]\}$, тогда

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

15 Непрерывность ИЗОП

Пусть $f(x,y) \in C\{[a;b] \times (c;d)\}$, тогда ИЗОП $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ является непрерывным на $(c;d)$

16 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП

Пусть $|f(x,y)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a;\omega) \times Y$. Если НИ $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ сходится, то НИЗОП $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

17 Признак Дирихле равномерной сходимости НИЗОП

Пусть первообразная $\int\limits_a^x f(t,y)dt$ ограничена на $[a;\omega)\times Y$, $\forall y\in Y$ $g(x,y)$ монотонна по х и $g(x,y)$ равномерно сходится к 0 по $y\in Y$, тогда
$\int\limits_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

18 Признак Абеля равномерной сходимости НИЗОП

Пусть НИЗОП $\int\limits_a^\omega f(x,y)dx$ на Y сходится равномерно, $\forall y\in Y$ $g(x,y)$ монотонна и равномерно ограничена, тогда НИЗОП $\int\limits_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

19 Формула Грина

Пусть D – квадрируемая область с кусочно гладким краем ∂D. Функции $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ – непрерывны в $\overline{D}=D\cup\partial D$. Тогда верна формула
$\int\limits_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\int\limits_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y))dxdy$

20 Существование первообразной в области

Область – открытое связное множество.

Теорема 1

Пусть $G \subset R^2$ – область, $P(x,y), Q(x,y)$ – непрерывно дифференцируемы. Тогда равносильны следующие условия:

1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $\forall x, y \in G$

2) Пусть $\triangle \subset G$ – треугольник, тогда $\int\limits_{\partial\triangle} Pdx + Qdy = 0$

3) В G существует локальная первообразная для дифференциала $Pdx + Qdy$

Область называется **односвязной**, если $\forall$ замкнутый контур непрерывно стягивается в точку (по-простому, область "без дырок").

Теорема 2

Пусть $G \subset R^2$ – односвязная область. Следующие утверждения равносильны:

1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall x, y \in G$

2) Для любой замкнутой кусочно гладкой кривой γ в G $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$

3) Для любой разомкнутой кусочно гладкой кривой γ в G $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy$ не зависит от формы кривой, а зависит от положения её концов

4) $\exists F(x,y)$ – глобальная первообразная в области G для $Pdx + Qdy$