

Матан теоремы

Никита Латушкин

18 января 2022 г.

1 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ называется **мажорантным** для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ на множестве $E \subset C$, если $\forall n, \forall z \in E : |u_n(z)| \leq c_n$.

Признак

Пусть $\forall n, \forall z \in E, |u_n(z)| \leq c_n$. Если положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно на E .

2 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0, \forall z \in E \forall n: |\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к 0 на E и монотонна по $k \forall x \in E$, частичные суммы $\sum_{k=1}^n a_k(x)$ равномерно ограничены, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E .

3 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно ограничена** на $E \subset C$, если $\exists M > 0, \forall z \in E \forall n: |\phi_n(z)| \leq M$

Признак

Пусть функциональная последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на E и монотонна по k , функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно, тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E .

4 Свойства степенных рядов

1) Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости

2) Степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0; x] \subset (-R; R)$. При этом радиус сходимости проинтегрированного ряда $\int_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \dots$ совпадает с исходным

3) Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = f(x)$ можно почленно продифференцировать в круге сходимости. Радиус сходимости продифференцированного ряда $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ совпадает с исходным.

5 Непрерывность суммы функционального ряда

Пусть $u_k(x) \in C(E)$, функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на E к функции f . Тогда $f \in C(E)$.

6 Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

Пусть $u_k \in \mathfrak{R}[a; b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно на $[a; b]$ сходится к функции f .

Тогда $f \in \mathfrak{R}[a; b]$ и $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$

7 Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

Пусть 1) $u_k \in C^1[a; b]$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a; b]$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x_0)$ сходится равномерно на $(a; b)$ к функции $g(x)$.

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$ к некоторой функции $f \in C^1(a; b)$ и $f'(x) = g(x)$ на $(a; b)$.

8 Интеграл Дирихле

$$J(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \beta, \beta \geq 0$$

9 Лемма Римана об осцилляции

Пусть $f(x), |f(x)| \in \mathfrak{R}[a; b]$ хотя бы в несобственном смысле, тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin px dx = 0$$

10 Признак локализации

Пусть f — 2π -периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на \mathbb{R} хотя бы в несобственном смысле. Тогда $\forall \delta \in (0; \pi) \forall x \in (-\pi; \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} D_n(t) dt = 0$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \text{ — ядро Дирихле}$$

11 Признак Дини сходимости ряда Фурье

Пусть f — 2π -периодическая функция, f и $|f|$ интегрируемы на \mathbb{R} хотя бы в несобственном смысле, $\exists f(x \pm 0)$.

$$S_f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Если для некоторого $\delta \in (0; \pi)$ сходится несобственный интеграл $\int_0^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} dt$, $\phi(t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - S_f(x)$, то ряд Фурье функции в точке сходится к значению $S_f(x)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x) = S_f(x)$$

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

12 Равномерная сходимость ряда Фурье

Пусть f — 2π -периодична, дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, f' удовлетворяет условию Дирихле. Тогда $S_n f$ равномерно сходится к f на R .

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Говорят, что функция $f : [a; b] \rightarrow R$ удовлетворяет условиям Дирихле, если существует такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, что на каждом $(x_k; x_{k+1})$ функция f ограничена, непрерывна и монотонна.

13 Дифференцируемость ИЗОП

Пусть f и $\frac{\partial f}{\partial y} \in C\{[a; b] \times (c; d)\}$, тогда ИЗОП $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ есть функция, непрерывно дифференцируемая на $(c; d)$ и верна формула Лейбница

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)dx$$

14 Интегрируемость ИЗОП

Пусть $f(x, y) \in C\{[a; b] \times [c; d]\}$, тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

15 Непрерывность ИЗОП

Пусть $f(x, y) \in C\{[a; b] \times (c; d)\}$, тогда ИЗОП $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ является непрерывным на $(c; d)$

16 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП

Пусть $|f(x, y)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a; \omega) \times Y$. Если НИ $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то НИЗОП $F(y) = \int_a^\omega f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y .

17 Признак Дирихле равномерной сходимости НИЗОП

Пусть первообразная $\int_a^x f(t, y) dt$ ограничена на $[a; \omega) \times Y$, $\forall y \in Y$ $g(x, y)$ монотонна по x и $g(x, y)$ равномерно сходится к 0 по $y \in Y$, тогда $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно на Y .

18 Признак Абеля равномерной сходимости НИЗОП

Пусть НИЗОП $\int_a^\omega f(x, y)dx$ на Y сходится равномерно, $\forall y \in Y$ $g(x, y)$ монотонна и равномерно ограничена, тогда НИЗОП $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно на Y .

19 Формула Грина

Пусть D – квадрируемая область с кусочно гладким краем ∂D . Функции $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ – непрерывны в $\bar{D} = D \cup \partial D$. Тогда верна формула

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

20 Существование первообразной в области

Область – открытое связное множество.

Теорема 1

Пусть $G \subset R^2$ – область, $P(x, y), Q(x, y)$ – непрерывно дифференцируемы. Тогда равносильны следующие условия:

- 1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall x, y \in G$
- 2) Пусть $\Delta \subset G$ – треугольник, тогда $\int_{\partial \Delta} Pdx + Qdy = 0$
- 3) В G существует локальная первообразная для дифференциала $Pdx + Qdy$

Теорема 2

Пусть $G \subset R^2$ – односвязная область. Следующие утверждения равносильны:

- 1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall x, y \in G$
- 2) Для любой замкнутой кусочно гладкой кривой γ в G
 $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$
- 3) Для любой разомкнутой кусочно гладкой кривой γ в G $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$
не зависит от формы кривой, а зависит от положения её концов
- 4) $\exists F(x, y)$ – глобальная первообразная в области G для $Pdx + Qdy$