

# Матан теоремы

Никита Латушкин

18 января 2022 г.

## 1 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Положительный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  называется **мажорантным** для функционального ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  на множестве  $E \subset C$ , если  $\forall n, \forall z \in E : |u_n(z)| \leq c_n$ .

### Признак

Пусть  $\forall n, \forall z \in E, |u_n(z)| \leq c_n$ . Если положительный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  сходится, то функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  сходится равномерно на  $E$ .

## 2 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  **равномерно ограничена** на  $E \subset C$ , если  $\exists M > 0, \forall z \in E \forall n: |\phi_n(z)| \leq M$

### Признак

Пусть функциональная последовательность  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  равномерно сходится к 0 на  $E$  и монотонна по  $k \forall x \in E$ , частичные суммы  $\sum_{k=1}^n a_k(x)$  равномерно ограничены, тогда функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

### 3 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Функциональная последовательность  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  **равномерно ограничена** на  $E \subset C$ , если  $\exists M > 0, \forall z \in E \forall n: |\phi_n(z)| \leq M$

#### Признак

Пусть функциональная последовательность  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  равномерно ограничена на  $E$  и монотонна по  $k$ , функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$  сходится равномерно, тогда функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$  сходится равномерно на  $E$ .

### 4 Свойства степенных рядов

1) Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости

2) Степенной ряд  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  можно почленно интегрировать на любом отрезке  $[0; x] \subset (-R; R)$ . При этом радиус сходимости проинтегрированного ряда  $\int_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \dots$  совпадает с исходным

3) Степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = f(x)$  можно почленно продифференцировать в круге сходимости. Радиус сходимости продифференцированного ряда  $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$  совпадает с исходным.

### 5 Непрерывность суммы функционального ряда

Пусть  $u_k(x) \in C(E)$ , функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  равномерно сходится на  $E$  к функции  $f$ . Тогда  $f \in C(E)$ .

## 6 Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

Пусть  $u_k \in \mathfrak{R}[a; b]$ , ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  равномерно на  $[a; b]$  сходится к функции  $f$ .

Тогда  $f \in \mathfrak{R}[a; b]$  и  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$

**Доказательство**

## 7 Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

Пусть 1)  $u_k \in C^1[a; b]$  2)  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится в некоторой точке  $x_0 \in [a; b]$

3)  $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x_0)$  сходится равномерно на  $(a; b)$  к функции  $g(x)$ .

Тогда функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  сходится равномерно на  $[a; b]$  к некоторой функции  $f \in C^1(a; b)$  и  $f'(x) = g(x)$  на  $(a; b)$ .

## 8 Интеграл Дирихле

$$J(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctg \beta, \beta \geq 0$$

## 9 Лемма Римана об осцилляции

Пусть  $f(x), |f(x)| \in \mathfrak{R}[a; b]$  хотя бы в несобственном смысле, тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin px dx = 0$$

## 10 Признак локализации

Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $f$  и  $|f|$  интегрируемы на  $\mathbb{R}$  хотя бы в несобственном смысле. Тогда  $\forall \delta \in (0; \pi) \forall x \in (-\pi; \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} D_n(t) dt = 0$$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} - \text{ядро Дирихле}$$

## 11 Признак Дини сходимости ряда Фурье

Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $f$  и  $|f|$  интегрируемы на  $\mathbb{R}$  хотя бы в несобственном смысле,  $\exists f(x \pm 0)$ .

$$S_f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Если для некоторого  $\delta \in (0; \pi)$  сходится несобственный интеграл  $\int_0^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t} dt$ ,  $\phi(t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - S_f(x)$ , то ряд Фурье функции в точке сходится к значению  $S_f(x)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x) = S_f(x)$$

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

## 12 Равномерная сходимость ряда Фурье

Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодична, дифференцируема на  $[-\pi; \pi]$ ,  $f'$  удовлетворяет условию Дирихле. Тогда  $S_n f$  равномерно сходится к  $f$  на  $\mathbb{R}$ .

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Говорят, что функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условиям **Дирихле**, если существует такое разбиение  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , что на каждом  $(x_k; x_{k+1})$  функция  $f$  ограничена, непрерывна и монотонна.

## 13 Дифференцируемость ИЗОП

Пусть  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y} \in C\{[a; b] \times (c; d)\}$ , тогда ИЗОП  $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  есть функция, непрерывно дифференцируемая на  $(c; d)$  и верна формула Лейбница

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)dx$$

## 14 Интегрируемость ИЗОП

Пусть  $f(x, y) \in C\{[a; b] \times [c; d]\}$ , тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

## 15 Непрерывность ИЗОП

Пусть  $f(x, y) \in C\{[a; b] \times (c; d)\}$ , тогда ИЗОП  $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  является непрерывным на  $(c; d)$

## 16 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП

Пусть  $|f(x, y)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a; \omega) \times Y$ . Если НИ  $\int_a^\omega g(x)dx$  сходится, то НИЗОП  $F(y) = \int_a^\omega f(x, y)dx$  сходится равномерно на  $Y$ .

## 17 Признак Дирихле равномерной сходимости НИЗОП

Пусть первообразная  $\int_a^x f(t, y) dt$  ограничена на  $[a; \omega) \times Y$ ,  $\forall y \in Y$   $g(x, y)$  монотонна по  $x$  и  $g(x, y)$  равномерно сходится к 0 по  $y \in Y$ , тогда  $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y)dx$  сходится равномерно на  $Y$ .

## 18 Признак Абеля равномерной сходимости НИЗОП

Пусть НИЗОП  $\int_a^\omega f(x, y)dx$  на  $Y$  сходится равномерно,  $\forall y \in Y$   $g(x, y)$  монотонна и равномерно ограничена, тогда НИЗОП  $\int_a^\omega f(x, y)g(x, y)dx$  сходится равномерно на  $Y$ .

## 19 Формула Грина

Пусть  $D$  – квадрируемая область с кусочно гладким краем  $\partial D$ . Функции  $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$  – непрерывны в  $\bar{D} = D \cup \partial D$ . Тогда верна формула

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

## 20 Существование первообразной в области

Пусть  $G \subset R^2$  – область,  $P(x, y), Q(x, y)$  – непрерывно дифференцируемы. Тогда равносильны следующие условия:

- 1)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall x, y \in G$
- 2) Пусть  $\Delta \subset G$  – треугольник, тогда  $\int_{\partial \Delta} Pdx + Qdy = 0$
- 3) В  $G$  существует локальная первообразная для дифференциала  $Pdx + Qdy$