Топология

Никита Латушкин

6 января 2022 г.

1 Понятие МП. Изометрия. Подпространство в МП. Примеры

Метрикой на множетсве X называют функцию $\rho(x, y)$, то есть отображение $\rho : X \times X \to R$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \forall x, y, \in X$

(X, ρ) - метрическое пространство (МП)

Примеры:

1) Евклидова метрика в R^n
$d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
2) Дискретная метрика на прямой R:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

3) В R^n
$\mu(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

4) Метрика равномерной сходимости на C[0;1] (множество всех непрерывных на $[0; 1]$ функций):
$\mu(f, g) = \max\limits_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$

5) Метрика интегральной сходимости на C[0;1]

$\sigma_k(f,g) = \sqrt[k]{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|^k dx}$

Но мы будем рассматривать только при k=1, то есть

$\sigma_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x)-g(x)| dx$

Пусть даны МП $(X,\rho), x \in X$.

1) **Открытым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$B(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) < \epsilon\}$

2) **Замкнутым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$D(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) \le \epsilon\}$

3) **Сферой** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$S(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) = \epsilon\}$

Пусть X и Y – МП с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. **Изометрией** между X и Y называется биекция $f: X \to Y$ такая, что $\forall x, y, \in X$ имеет место равенство: $\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x), f(y))$. Если изометрия между МП существует, то они называются **изометричными**.

Примеры

1) R^k изометрично вкладывается в R^n при $k \le n$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ Поставим точке x в соответствие точку $x' = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ (добавили в координаты (n-k) нулей)

2) (X, δ) изометрично вкладывается в R^n при $|X| \le n+1$

Точкам пространства X ставим в соответствие вершины правильного n-мерного симплекса со стороной 1

Пусть даны $(X,\rho), A \subset X$. Рассмотрев метрику ρ только на точках множества A, получим метрику на A, которая называется **индуцированной** и обозначается $\rho|_A$. Таким образом получаем МП $(A, \rho|_A)$, которое является **подпространством** МП (X,ρ)

2 Топология МП. Свойства открытых и замкнутых множеств в МП. Примеры

Семейство всех открытых множеств τ называется **топологией** МП.

Пусть даны МП $(X, \rho), U \subset X$. Множество U называется **открытым**, если с каждой своей точкой оно содержит какую-то её окрестность.

Обозначение: $U \underset{op}{\subset} X$

Свойства открытых множеств

1) $\oslash \in \tau$, $X \in \tau$
2) Объединение любого числа открытых множеств открыто
3) Пересечение любого **конечного** числа открытых множеств открыто

Пусть даны МП $(X, \rho), B \subset X$. Множество B называется **замкнутым**, если его дополнение $X \backslash B$ открыто.

Обозначение: $U \underset{cl}{\subset} X$

ϕ – семейство всех замкнутых множеств

Свойства замкнутых множеств

1) $\oslash \in \phi$, $X \in \phi$
2) Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто
3) Пересечение любого **конечного** числа замкнутых множеств замкнуто

Пример

В МП (X, ρ) открытый шар – открытое множество, замкнутый шар – замкнутое множество.

3 Понятие ТП. Примеры. Метризуемые ТП

Пусть X – некоторое множество, семейство $\tau \subset 2^X$ – называется топологией на X, а элементы τ – открытыми множествами $U \underset{op}{\subset} X$,если:

1) $\oslash \in \tau$, $X \in \tau$
2) Объединение любого числа открытых множеств открыто
3) Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто

(X, τ) - топологическое пространство (ТП)

Пусть даны ТП $(X, \tau), x \in X$. Окрестностью точки x называется такое открытое множество $\forall U \underset{op}{\subset} X, x \in U$

На любом множестве X можно задать следующие топологии:

1) $\tau^0 = \{\oslash, X\}$ – антидискретная топология. В ней открытыми являются только пустое множество и всё пространство X

2) $\tau^* = 2^X$ – дискретная топология. В ней открытым является любое подмножество X

3) $\tau_F = \{\oslash, X, X \setminus A | |A| < \infty\}$ – топология Зарисского. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X конечного числа элементов

4) $\tau_C = \{\oslash, X, X \setminus A | |A| \leq \omega\}$. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X счётного числа элементов.

ТП (X, τ) называется **метризуемым**, если τ можно задать некоторой метрикой ρ

В таком случае пишут $\tau = \tau_\rho$

Примеры

1) $\forall$ МП – метризуемое ТП

2) ТП с дискретной топологией метризуемо дискретной метрикой

4 ФСО. Задание топологии через ФСО. Примеры

Пусть дано ТП X, каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие непустое семейство окрестностей этой точки $\nu_x = \{V_t^x | t \in T_x\}$, T_x – семейство индексов, которыми занумерованы окрестности (не обязательно целые)

V_t^x – элементарная (базовая) окрестность точки x

$\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$ – окрестностная база, или фундаментальная система окрестностей (ФСО)

Аксиомы ФСО

1) $\forall x \in X$ семейство непусто, $\forall V_t^x \in \nu_x : x \in V_t^x$

2) $\forall V_t^x, V_{t'}^x \exists V_{t''}^x : V_{t''}^x \subset (V_t^x \cap V_{t'}^x)$ – для двух любых элементарных окрестностей найдётся третья, которая лежит в их пересечении.

3) $y \in V_t^x \iff \exists V_{t'}^y \subset V_t^x$ – если точка у лежит в элементарной окрестности точки х, то найдется элементарная окрестность точки у, которая целиком лежит в элементарной окрестности точки х

Если все аксиомы выполняются,то ФСО определена однозначно

Задание топологии через ФСО

Если в пространстве задана ФСО для некоторой топологии τ, то топология определена однозначно и описывается как совокупность всех множеств $U \in X$таких, что $\forall x \in U$ найдётся элементарная окрестность $V_t^x \subset \nu_x$, для которой выполняется условие $V_t^x \subset U$. Значит для задания топологии достаточно указать некоторую ФСО ν.

5 Сравнение топологий. Роль ФСО. Примеры

Пусть τ_1 и τ_2 -– некоторые топологии на пространстве X. Если $\tau_1 \supset \tau_2$, то говорят, что τ_1 сильнее τ_2, или τ_2 слабее τ_1 и пишут $\tau_1 \geq \tau_2$. Если же $\tau_1 \supset \tau_2$, причём $\tau_1 \neq \tau_2$, то говорят, что τ_1 существенно сильнее τ_2, или τ_2 существенно слабее τ_1 и пишут $\tau_1 > \tau_2$. Но может оказаться так, что $\tau_1 \not\supset \tau_2$ и $\tau_2 \not\supset \tau 1$. Тогда говорят, что τ_1 и τ_2 несравнимы.

6 Понятие базы топологии, 1 аксиомы счётности и сепарабельности и их взаимосвязь. Примеры

7 Операция замыкания и её свойства. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется **близкой** или **точкой прикосновения**, если $\forall U \in \tau(x) : U \cap A \neq \oslash$

Множество всех точек, близких для A, называется **замыканием** множества A (**обозначение** $\overline{A}$)

Свойства операции замыкания

1) $\overline{A} \underset{cl}{\subset} X$
2) $A \subset F \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow \overline{A} \subset F$
3) $A \underset{cl}{\subset} X \iff \overline{A} = A$

Пример
$R, A = (0; 1) \Longrightarrow \overline{A}^R = [0; 1]$

8 Внутренность и граница множества. Связь с операцией замыкания. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется **внутренней**, если $\exists U \in \tau(x) : U \subset A$

Множество всех точек, внутренних для A, называется его **внутренностью**. (**обозначение** $intA$)

Свойства операции внутренности

1) $intA \underset{op}{\subset} X$
2) $X \underset{op}{\supset} U \subset A \Longrightarrow U \subset intA$

3) $A \underset{op}{\subset} X \iff intA = A$
4) Вычислительная формула
$intA = X \backslash (\overline{X \backslash A})$

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.
Точка x называется **граничной**, если $\forall U \in \tau(x)$

$$\begin{cases} U \cap A \neq \oslash \\ U \cap (X \backslash A) \neq \oslash \end{cases}$$

Множество всех граничных точек называется его **границей**. (**обозначение** ∂A)

Свойства границы

1) $\partial A \underset{cl}{\subset} X$
2) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$
3) $\overline{A} = (intA) \cup \partial A$, $intA \cup \partial A = \oslash$

Примеры
$R, A = [0; 1]$
$int_R A = (a; b)$
$\partial_R A = \{a; b\}$

9 Понятие подпространства в ТП. Индуцированная топология и её свойства. Примеры. "Теория относительности"

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$
$\tau|_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$ – является топологией на A (**индуцированной**)
ТП $(A, \tau|_A)$ – топологическое подпространство (ТПП) в ТП X

Теорема
Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$, ФСО $\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$, β – база, тогда:

1) $\phi|_A = \{F \cap A | F \underset{op}{\subset} X\}$ – семейство всех замкнутых множеств в А
2) $\nu|_A = \{V_t^a | a \in A, t \in T_a\}$ – ФСО в А
3) $\beta|_A \ V \cap A | V \in \beta$ – база в А

Следствие
1) X с первой аксиомой счётности $\Longrightarrow$ А с первой аксиомой счётности
2) X со счётной базой $\Longrightarrow$ А со счётной базой
3) X метризуемо и сепарабельно $\Longrightarrow$ А сепарабельно

Теория относительности
Пусть даны ТП $(X, \tau), B \subset A \subset X$
1) $B \underset{op}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{op}{\subset} A$
1') $B \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{cl}{\subset} A$
2) $B \underset{op}{\subset} A \underset{op}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{op}{\subset} X$
2') $B \underset{cl}{\subset} A \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{cl}{\subset} X$
3) $U \underset{op}{\subset} X, F \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow$

$$\begin{cases} (U \backslash F) \underset{op}{\subset} X \\ (F \backslash U) \underset{cl}{\subset} X \end{cases}$$

Примеры
1) $(X, \tau) = R, A = Z$
$\tau^1|_Z = \tau^*$

2) $(R^2, \overset{\infty}{\tau}), A = L$ – прямая
$\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^1$, $L \not\perp OX$
$\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^*$, $L \perp OX$

10 Непрерывное отображение и его свойства. Примеры

Пусть даны ТП (X, τ) и (Y, τ') и $f : X \to Y$.

f непрерывно в точке x $\iff \forall V \in \tau'(f(x))\ \exists U \in \tau(x) : f(U) \subset V$

Теорема (критерии непрерывности)

Для $f : X \to Y$ эквивалентны условия

1) f^{-1} – непрерывно

2) $f^{-1}(V) \underset{op}{\subset} X\ \forall V \underset{op}{\subset} Y$

3) $f^{-1}(B) \underset{cl}{\subset} X\ \forall B \underset{cl}{\subset} Y$

Свойства неперывных отображений

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau'), (Z, \tau'')$

1) f,g – непрерывны $\implies g \circ f$

2) f – непрерывно $\implies f|_A : A \to Y$ – непрерывно

11 Понятие гомеоморфизма. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau')$ и $f : X \to Y$.

f – гомеоморфизм, если

1) f – биекция

2) f и f^{-1} непрерывны

При этом X и Y гомеоморфны (**обозначение** $X \approx Y$)

12 Аксиомы отделимости и их иерархия. Критерии регулярности и нормальности. Примеры

13 Произведение ТП. Проектирование. Непрерывность отображения в произведение. Примеры

14 Понятие компактности. Примеры. Свойства компактности. Критерий компактности метризуемого ТП

15 Непрерывные отображения компактного ТП. Случай гомеоморфизма

16 Понятие полного МП. Вполне ограниченные множества в МП. Критерий компактности в МП

17 Понятие связности. Примеры. Основные свойства связности

18 Линейная связность и её свойства. Примеры

19 Связная компонента в ТП и её свойства. Примеры