Топология

Никита Латушкин

7 января 2022 г.

1 Понятие МП. Изометрия. Подпространство в МП. Примеры

Метрикой на множетсве X называют функцию $\rho(x, y)$, то есть отображение $\rho : X \times X \to R$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)\ \forall x, y, z \in X$

(X, ρ) - метрическое пространство (МП)

Примеры:

1) Евклидова метрика в R^n
$d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
2) Дискретная метрика на прямой R:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

3) В R^n
$\mu(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

4) Метрика равномерной сходимости на C[0;1] (множество всех непрерывных на $[0; 1]$ функций):
$\mu(f, g) = \max\limits_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$

5) Метрика интегральной сходимости на C[0;1]

$\sigma_k(f,g) = \sqrt[k]{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|^k dx}$

Но мы будем рассматривать только при k=1, то есть

$\sigma_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x)-g(x)| dx$

Пусть даны МП $(X,\rho), x \in X$.

1) **Открытым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$B(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) < \epsilon\}$

2) **Замкнутым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$D(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) \leq \epsilon\}$

3) **Сферой** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$S(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) = \epsilon\}$

Пусть X и Y – МП с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. **Изометрией** между X и Y называется биекция $f : X \to Y$ такая, что $\forall x, y, \in X$ имеет место равенство: $\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x), f(y))$. Если изометрия между МП существует, то они называются **изометричными**.

Примеры

1) R^k изометрично вкладывается в R^n при $k \leq n$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ Поставим точке x в соответствие точку $x' = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ (добавили в координаты (n-k) нулей)

2) (X,δ) изометрично вкладывается в R^n при $|X| \leq n+1$

Точкам пространства X ставим в соответствие вершины правильного n-мерного симплекса со стороной 1

Пусть даны $(X,\rho), A \subset X$. Рассмотрев метрику ρ только на точках множества A, получим метрику на A, которая называется **индуцированной** и обозначается $\rho|_A$. Таким образом получаем МП $(A, \rho|_A)$, которое является **подпространством** МП (X,ρ)

2 Топология МП. Свойства открытых и замкнутых множеств в МП. Примеры

Семейство всех открытых множеств τ называется **топологией** МП.

Пусть даны МП $(X, \rho), U \subset X$. Множество U называется **открытым**, если с каждой своей точкой оно содержит какую-то её окрестность.

Обозначение: $U \underset{op}{\subset} X$

Свойства открытых множеств

1) $\oslash \in \tau$, $X \in \tau$
2) Объединение любого числа открытых множеств открыто
3) Пересечение любого **конечного** числа открытых множеств открыто

Пусть даны МП $(X, \rho), B \subset X$. Множество B называется **замкнутым**, если его дополнение $X \backslash B$ открыто.

Обозначение: $U \underset{cl}{\subset} X$

ϕ – семейство всех замкнутых множеств

Свойства замкнутых множеств

1) $\oslash \in \phi$, $X \in \phi$
2) Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто
3) Объединение любого **конечного** числа замкнутых множеств замкнуто

Пример

В МП (X, ρ) открытый шар – открытое множество, замкнутый шар – замкнутое множество.

3 Понятие ТП. Примеры. Метризуемые ТП

Пусть X – некоторое множество, семейство $\tau \subset 2^X$ – называется топологией на X, а элементы τ – открытыми множествами $U \underset{op}{\subset} X$,если:

1) $\oslash \in \tau$, $X \in \tau$
2) Объединение любого числа открытых множеств открыто
3) Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто

(X, τ) - топологическое пространство (ТП)
Пусть даны ТП $(X, \tau), x \in X$. Окрестностью точки x называется $\forall U \underset{op}{\subset} X, x \in U$

На любом множестве X можно задать следующие топологии:

1) $\tau^0 = \{\varnothing, X\}$ – антидискретная топология. В ней открытыми являются только пустое множество и всё пространство X

2) $\tau^* = 2^X$ – дискретная топология. В ней открытым является любое подмножество X

3) $\tau_F = \{\varnothing, X, X \backslash A | \ |A| < \infty\}$ – топология Зарисского. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X конечного числа элементов

4) $\tau_C = \{\varnothing, X, X \backslash A | \ |A| \leq \omega\}$. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X счётного числа элементов.

ТП (X, τ) называется **метризуемым**, если τ можно задать некоторой метрикой ρ

В таком случае пишут $\tau = \tau_\rho$

Примеры

1) $\forall$ МП – метризуемое ТП

2) ТП с дискретной топологией метризуемо дискретной метрикой

4 ФСО. Задание топологии через ФСО. Примеры

Пусть дано ТП X, каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие непустое семейство окрестностей этой точки $\nu_x = \{V_t^x | t \in T_x\}$, T_x – семейство индексов, которыми занумерованы окрестности (не обязательно целые)

V_t^x – элементарная (базовая) окрестность точки x

$\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$ – окрестностная база, или фундаментальная система окрестностей (ФСО)

Аксиомы ФСО

1) $\forall x \in X$ семейство непусто, $\forall V_t^x \in \nu_x : x \in V_t^x$

2) $\forall V_t^x, V_{t'}^x \exists V_{t''}^x : V_{t''}^x \subset (V_t^x \cap V_{t'}^x)$ – для двух любых элементарных окрестностей найдётся третья, которая лежит в их пересечении.

3) $y \in V_t^x \iff \exists V_{t'}^y \subset V_t^x$ – если точка у лежит в элементарной окрестности точки х, то найдется элементарная окрестность точки у, которая целиком лежит в элементарной окрестности точки х

Если все аксиомы выполняются,то ФСО определена однозначно

Задание топологии через ФСО

Если в пространстве задана ФСО для некоторой топологии τ, то топология определена однозначно и описывается как совокупность всех множеств $U \in X$ таких, что $\forall x \in U$ найдётся элементарная окрестность $V_t^x \subset \nu_x$, для которой выполняется условие $V_t^x \subset U$. Значит для задания топологии достаточно указать некоторую ФСО ν.

5 Сравнение топологий. Роль ФСО. Примеры

Пусть τ_1 и τ_2 -– некоторые топологии на пространстве X. Если $\tau_1 \supset \tau_2$, то говорят, что τ_1 сильнее τ_2, или τ_2 слабее τ_1 и пишут $\tau_1 \geq \tau_2$. Если же $\tau_1 \supset \tau_2$, причём $\tau_1 \neq \tau_2$, то говорят, что τ_1 существенно сильнее τ_2, или τ_2 существенно слабее τ_1 и пишут $\tau_1 > \tau_2$. Но может оказаться так, что $\tau_1 \not\supset \tau_2$ и $\tau_2 \not\supset \tau_1$. Тогда говорят, что τ_1 и τ_2 несравнимы.

Признак сравнения топологий с помощью ФСО

Пусть топологии τ_1 и τ_2 на множестве X порождены некоторыми ФСО $\nu_1 = \{V_\alpha^x | x \in X, \alpha \in A_x\}$ и $\nu_2 = \{V_\beta^x | x \in X, \beta \in B_x\}$, A_x, B_x – семейства индексов.

$\tau_1 \geq \tau_2 \iff \forall x \in X, W_\beta^x \in \nu_2 \; \exists V_\alpha^x \in \nu_1 : V_\alpha^x \subset W_\beta^x$, то есть для любой точки х из X и её окрестности W_β^x из ФСО ν_2 найдётся такая окрестность V_α^x из ФСО ν_1, что V_α^x целиком лежит в W_β^x.

Пример

На $R^2 : \overset{\infty}{\tau} > \tau^2$

$\forall x \in R^2, \epsilon > 0$ бабочка радиуса ϵ лежит в открытом шаре такого же радиуса, но братное неверно, то есть открытый шар радиуса ϵ не будет лежать ни в какой бабочке с центром в этой же точке.

6 Понятие базы топологии, 1 аксиомы счётности и сепарабельности и их взаимосвязь. Примеры

Пусть дано ТП (X, τ)

Семейство $\beta \subset X$ открытых в X множеств называется **базой топологии**, если $\forall U \underset{op}{\subset} X$ найдётся подсемейство $\gamma \subset \beta$ такое, что $U = \cup\beta$, то есть любое открытое множество U представимо в виде объединения некоторых элементов β.

Любая ФСО автоматически база

Локальной базой в точке x пространства X (**локальной базой точки x**) называется семейство $\beta(x)$ окрестностей точки x такое, что $\forall U \in \tau(x)\ \exists V \in \beta(x) : x \in V, V \subset U$.

Пусть дано ТП (X, τ). Говорят, что X **удовлетворяет первой аксиоме счётности**, если $\forall x \in X$ существует конечная или счётная локальная база в точке x.

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$

A **всюду плотно** в X тогда и только тогда, когда

$\forall U \in \tau(x) : U \cap A \neq \oslash$

ТП (X, τ) называется **сепарабельным**, если оно содержит конечное или счётное множество, всюду плотное в X.

Теорема

Пусть дано ТП (X, τ). Если X имеет счётную базу, то оно сепарабельно.

7 Операция замыкания и её свойства. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется **близкой** или **точкой прикосновения**, если $\forall U \in \tau(x) : U \cap A \neq \oslash$

Множество всех точек, близких для A, называется **замыканием** множества A (**обозначение** $\overline{A}$)

Свойства операции замыкания

1) $\overline{A} \underset{cl}{\subset} X$
2) $A \subset F \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow \overline{A} \subset F$
3) $A \underset{cl}{\subset} X \iff \overline{A} = A$

Примеры
1) В R $A = (0;1) \Longrightarrow \overline{A}^R = [0;1]$

2) В R $A = Q$
$\overline{A} = R$

8 Внутренность и граница множества. Связь с операцией замыкания. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется **внутренней**, если $\exists U \in \tau(x) : U \subset A$

Множество всех точек, внутренних для A, называется его **внутренностью**. (**обозначение** $intA$)

Свойства операции внутренности

1) $intA \underset{op}{\subset} X$
2) $X \underset{op}{\supset} U \subset A \Longrightarrow U \subset intA$
3) $A \underset{op}{\subset} X \iff intA = A$
4) Вычислительная формула

$intA = X\backslash(\overline{X\backslash A})$

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.
Точка x называется **граничной**, если $\forall U \in \tau(x)$

$$\begin{cases} U \cap A \neq \oslash \\ U \cap (X\backslash A) \neq \oslash \end{cases}$$

Множество всех граничных точек называется его **границей**. (**обозначение** ∂A)

Свойства границы

1) $\partial A \underset{cl}{\subset} X$
2) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\backslash A}$
3) $\overline{A} = (intA) \cup \partial A$, $intA \cup \partial A = \oslash$

Примеры
1) В R $A = [0; 1]$
$int_R A = (a; b)$
$\partial_R A = \{a; b\}$

2) В R $A = Q$
$intA = \oslash$
$\partial A = R$

9 Понятие подпространства в ТП. Индуцированная топология и её свойства. Примеры. "Теория относительности"

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$
$\tau|_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$ – является топологией на A (**индуцированной**)
ТП $(A, \tau|_A)$ – топологическое подпространство (ТПП) в ТП X

Теорема

Пусть даны ТП $(X,\tau), A \subset X$, ФСО $\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$, β – база, тогда:

1) $\phi|_A = \{F \cap A | F \underset{op}{\subset} X\}$ – семейство всех замкнутых множеств в A
2) $\nu|_A = \{V_t^a | a \in A, t \in T_a\}$ – ФСО в A
3) $\beta|_A \ V \cap A | V \in \beta$ – база в A

Следствие
1) X с первой аксиомой счётности $\Longrightarrow$ A с первой аксиомой счётности
2) X со счётной базой $\Longrightarrow$ A со счётной базой
3) X метризуемо и сепарабельно $\Longrightarrow$ A сепарабельно

Теория относительности
Пусть даны ТП $(X,\tau), B \subset A \subset X$
1) $B \underset{op}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{op}{\subset} A$
1') $B \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{cl}{\subset} A$
2) $B \underset{op}{\subset} A \underset{op}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{op}{\subset} X$
2') $B \underset{cl}{\subset} A \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{cl}{\subset} X$
3) $U \underset{op}{\subset} X, F \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow$

$$\begin{cases} (U \backslash F) \underset{op}{\subset} X \\ (F \backslash U) \underset{cl}{\subset} X \end{cases}$$

Примеры
1) $(X,\tau) = R, A = Z$
$\tau^1|_Z = \tau^*$

2) $(R^2, \overset{\infty}{\tau}), A = L$ – прямая
$\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^1$, $L \not\perp OX$
$\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^*$, $L \perp OX$

10 Непрерывное отображение и его свойства. Примеры

Пусть даны ТП (X,τ) и (Y,τ') и $f: X \to Y$.

f непрерывно в точке x $\iff \forall V \in \tau'(f(x))\ \exists U \in \tau(x): f(U) \subset V$

Теорема (критерии непрерывности)

Для $f: X \to Y$ эквивалентны условия

1) f^{-1} – непрерывно

2) $f^{-1}(V) \underset{op}{\subset} X\ \forall V \underset{op}{\subset} Y$

3) $f^{-1}(B) \underset{cl}{\subset} X\ \forall B \underset{cl}{\subset} Y$

Свойства неперывных отображений

Пусть даны ТП $(X,\tau),(Y,\tau'),(Z,\tau'')$

1) f,g – непрерывны $\Longrightarrow g \circ f$

2) f – непрерывно $\Longrightarrow f|_A : A \to Y$ – непрерывно

11 Понятие гомеоморфизма. Примеры

Пусть даны ТП $(X,\tau),(Y,\tau')$ и $f: X \to Y$.

f – гомеоморфизм, если

1) f – биекция

2) f и f^{-1} непрерывны

При этом X и Y гомеоморфны (**обозначение** $X \approx Y$)

12 Аксиомы отделимости и их иерархия. Критерии регулярности и нормальности. Примеры

Пусть дано ТП (X,τ). ТП (X,τ) называется T_1 - пространством, если в нём любое одноточечное множество открыто, т.е.

$\forall x \in X\ \{x\} \underset{cl}{\subset} X$

ТП называется T_2 - пространством, или **хаусдорфовым**, если для любых двух точек x и y, $x \neq y$ найдутся дизъюнктные окрестности, т.е.

$\forall x,y, \in X, x \neq y\ \exists U \in \tau(x), V \in \tau(y): U \cap V = \oslash$

ТП называется T_3 - пространством, или **регулярным**, если

$$\begin{cases} X - T_1 \\ \forall F \underset{cl}{\subseteq} X, x \in (X \backslash F), \exists U \in \tau(F), V \in \tau(x) : U \cap V = \varnothing \end{cases}$$

то есть если для любого замкнутого множества и точки из его дополнения найдутся дизъюнктные окрестности

ТП называется T_4 - пространством, или **нормальным**, если

$$\begin{cases} X - T_1 \\ \forall F \underset{cl}{\subseteq} X, B \underset{cl}{\subseteq} X, F \cap B = \varnothing, \exists U \in \tau(F), V \in \tau(B) : U \cap V = \varnothing \end{cases}$$

то есть если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств найдутся дизъюнктные окрестности

Иерархия отделимости

Пусть дано ТП (X, τ)

1) Если X – метризуемо, то X – T_4
2) Если X – T_4, то X – T_3
3) Если X – T_3, то X – T_2
4) Если X – T_2, то X – T_1

Критерий регулярности

ТП (X, τ) регулярно тогда и только тогда, когда X – T_1, в котором $\forall x \in X$ и $U \in \tau(x)$ найдётся окрестность $V \in \tau(x)$ такая, что $\overline{V} \subset U$

Критерий нормальности

ТП (X, τ) нормально тогда и только тогда, когда X – T_1, в котором $\forall F \underset{cl}{\subseteq} X$ и $U \in \tau(F)$ найдётся окрестность $V \in \tau(F)$ такая, что $\overline{V} \subset U$

Примеры

13 Произведение ТП. Проектирование. Непрерывность отображения в произведение. Примеры

Пусть даны ТП $(X_i, \tau_i), i = \overline{1, n}$

Рассмотрим декартово произведение $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \in X_i$

На X определена топология произведения τ^{Π}

τ^{Π} задаётся элементарными окрестностями.

Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ элементарная окрестность – любое множество вида $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, где $U_i \in \tau(x_i)$

Пусть дано ТП $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$

$p_j : X \to X_j$ – **j-ое проектирование**

$A \subset X, p_j(A)$ – **проекция** множества A

Теорема 1

Отображения p_j непрерывны

Координатные отображения

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y_i, \tau_i'), i = \overline{1, n}$ и отображение

$X \to \prod\limits_{i=1}^{n} : x \to y = (y_1, y_2, \dots, y_n), y_i \in Y_i$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \dots \\ y_n = f_n(x) \end{cases}$$

Определены **координатные отображения**

$f_i : X \to Y_i : x \to y_i = f_i(x)$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

Теорема 2

f – непрерывно $\iff$ все координатные отображения f_i непрерывны

14 Понятие компактности. Примеры. Свойства компактности. Критерий компактности метризуемого ТП

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$,

$\alpha \subset \tau$ – семейство называется **покрытием** А, если $\cup\alpha \supset A$,

подсемейство $\alpha' \subset \alpha$ – называется **подпокрытием** для А,

если $\cup\alpha' \supset A$

А называется **компактным**, если из любого покрытия α можно выбрать конечное подпокрытие α'

В частности, может быть, что $A = X$

Свойства компактности

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau'), A \subset X, f : X \to Y$

1) Если X – компактно и A замкнуто, то A – компактно

2) Если X – T_2 (хаусдорфово) и A – компактно, то A – замкнуто

3) Если A – компактно и f – непрерывно, то $f(A)$ – компактно

К критерию компактности метризуемого ТП

Пусть дано ТП $(X, \tau), (x_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек из X. Тогда говорят, что **последовательность точек сходится к точке** x ($x_n \to x$), если для любой окрестности U точки x найдётся порядковый номер n, что все члены последовательности, начиная с n-ого, лежат в U, то есть

$x_n \to x \iff \forall U \in \tau(x)\ \exists n : \{x_k | k \geq n\} \subset U$

Если τ задана некоторой метрикой ρ, то

$x_n \to x \iff \rho(x, x_n) \to 0$

Критерий компактности метризуемого ТП

Пусть дано (X, τ) – метризуемое ТП. X – компактно $\iff$ из любой последовательности $x_n \subset X$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

15 Непрерывные отображения компактного ТП. Случай гомеоморфизма

16 Понятие полного МП. Вполне ограниченные множества в МП. Критерий компактности МП

Пусть даны МП $(X, \rho), (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ – последовательность. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists n : \rho(x_k, x_m) < \epsilon \; \forall k, m \geq n$

Теорема 1
Пусть даны МП $(X, \rho), (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальна.

Определение 1
МП (X, ρ) и метрика ρ называются **полными**, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Теорема 2
Пусть даны МП $(X, \rho), A \subset X$, тогда
1) Если X – полное и A замкнутое, то А – полное
2) Если A – полное, то A замкнутое

Определение 2
Пусть дано МП $(X, \rho), A \subset X$. Множество A называется **вполне ограниченным**, если $\forall \epsilon_0 > 0$ A можно покрыть конечным числом шаров вида $B(x, \epsilon_0)$

Теорема 3 Пусть дано МП $(X, \rho), A \subset X$. Если A вполне ограниченное, то оно ограниченное.

Теорема 4
Пусть $A \subset R^n$. А – вполне ограниченное $\iff$ А– ограниченное.

Критерий компактности МП

МП (X,ρ) компактно $\iff$ X полное и вполне ограниченное

17 Понятие связности. Примеры. Основные свойства связности

Пусть даны ТП $(X,\tau), A \subset X$. Говорят, что A **несвязно**, если A представимо в виде $A = U \cup V$, где $U \neq \varnothing, V \neq \varnothing, U \underset{op}{\subset} A, V \underset{op}{\subset} A, U \cap V = \varnothing$, то есть в виде объединения двух непустых открытых дизъюнктных множеств.

A **связно**, если A не несвязно.

Теорема

Любой отрезок $[a;b]$ связен.

Свойства связных множеств

Пусть даны ТП $(X,\tau), (Y,\tau'), A \subset X, f : X \to Y$ – непрерывное отображение, тогда:

1) A – связно $\Longrightarrow$ $f(A)$ – связно

2) A – связно $\Longrightarrow$ $\overline{A}$ – связно

3) Если $A_t \subset X, t \in T$ (T – семейство индексов), A_t связно $\forall t \in T$, $\cap_{t\in T} A_t \neq \varnothing \Longrightarrow \cup_{t\in T} A_t$ – связно

4) Если $A_i \subset X, i = \overline{1,n}$, A_i – связно $\forall i = \overline{1,n}$,

$A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ $\forall i = \overline{1, n-1}$ (то есть $\{A_1, \ldots, A_n\}$ – связная цепочка) $\Longrightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i$ – связно

Примеры

18 Линейная связность и её свойства. Примеры

Пусть дано ТП (X,τ). **Кривой** в X называется множество $\gamma \subset X$ такое, что существует непрерывное отображение $f : [a;b] \to X$, для которого $f([a;b]) = \gamma$. В таком случае f называют **параметризацией кривой** γ.

Говорят, что точки $x, y \in X$ соединены кривой γ, если эти точки лежат в этом множестве.

Множество $A \subset X$ **линейно связно**, если $\forall x, y \in X$ $\exists$ кривая $\gamma \subset A$, которая соединяет x и y.

В частности, может быть, что $A = X$.

Свойства

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, (Y, \tau'), f : X \to Y$ – непрерывное отображение, тогда:

1) Если A – линейно связно,то A – связно

2) Если A – линейно связно, то и образ A линейно связен

Примеры

19 Связная компонента в ТП и её свойства. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, A \neq \oslash$

Тогда A – **связная компонента** в X, или **компонента связности**, если

1) A – связно

2) $A \subset B \subset X, A \neq B \iff B$ – несвязно

Если A – связная компонента в X и $A \ni x$, то обозначают $A = C(x)$ или C_x

Свойства

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, A \neq \oslash$, тогда:

1) A – связная компонента в X $\Longrightarrow A \underset{cl}{\subset} X$

2) Если A и B – связные компоненты в X, $A \cap B \neq \oslash$, то $A = B$

Примеры