Топология

Никита Латушкин

14 января 2022 г.

1 Понятие МП. Изометрия. Подпространство в МП. Примеры

Метрикой на множетсве X называют функцию $\rho(x, y)$, то есть отображение $\rho : X \times X \to R$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \ \forall x, y, z \in X$

(X, ρ) - метрическое пространство (МП)

Примеры:

1) Евклидова метрика в R^n

$d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

2) Дискретная метрика на прямой R:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

3) В R^n

$\mu(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

4) Метрика равномерной сходимости на C[0;1] (множество всех непрерывных на $[0; 1]$ функций):

$\mu(f, g) = \max\limits_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$

5) Метрика интегральной сходимости на C[0;1]

$\sigma_k(f,g) = \sqrt[k]{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|^k dx}$

Но мы будем рассматривать только при k=1, то есть

$\sigma_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x)-g(x)| dx$

Пусть даны МП $(X,\rho), x \in X$.

1) **Открытым шаром с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество**

$B(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) < \epsilon\}$

2) **Замкнутым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$D(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) \le \epsilon\}$

3) **Сферой** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$S(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) = \epsilon\}$

Пусть X и Y – МП с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. **Изометрией** между X и Y называется биекция $f: X \to Y$ такая, что $\forall x, y, \in X$ имеет место равенство: $\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x), f(y))$. Если изометрия между МП существует, то они называются **изометричными**.

Примеры

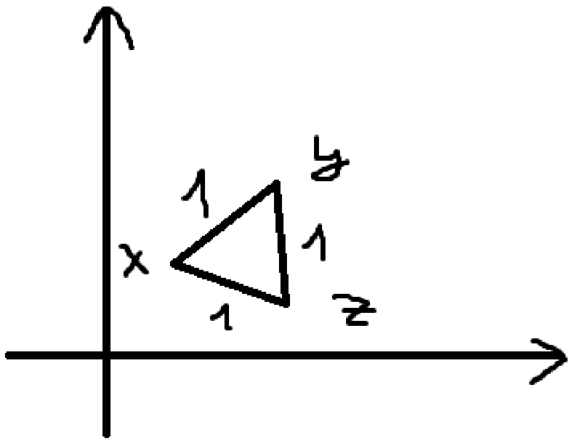
1) R^k изометрично вкладывается в R^n при $k \le n$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ Поставим точке x в соответствие точку $x' = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ (добавили в координаты (n-k) нулей)

2) (X, δ) изометрично вкладывается в R^n при $|X| \le n+1$

Случай $n = 2$:

Точкам из пространства (X, δ) ставим в соответствие вершины правильного треугольника со стороной 1, лежащего в R^2:



Случай $n = 3$:

Точкам из пространства (X, δ) ставим в соответствие вершины правильного тетраэдра с ребром 1, лежащего в R^3.

В общем случае, точкам пространства (X, δ) в соответствие надо ставить вершины n-мерного симплекса со стороной 1.

Пусть даны $(X, \rho), A \subset X$. Рассмотрев метрику ρ только на точках множества A, получим метрику на A, которая называется **индуцированной** и обозначается $\rho|_A$. Таким образом получаем МП $(A, \rho|_A)$, которое является **подпространством** МП (X, ρ)

2 Топология МП. Свойства открытых и замкнутых множеств в МП. Примеры

Семейство всех открытых множеств τ называется **топологией** МП.

Пусть даны МП $(X, \rho), U \subset X$.

Множество U называется открытым в МП, если с каждой своей точкой оно содержит какую-то её окрестность.

Обозначение: $U \underset{op}{\subset} X$

Свойства открытых множеств

1) $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$

2) Объединение любого числа открытых множеств открыто

3) Пересечение любого **конечного** числа открытых множеств открыто

Доказательство

1 и 2 очевидно. Докажем 3. Надо доказать, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

Фиксируем $\forall x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$

Для каждого $i = \overline{1, n}$ по определению $\exists \epsilon_i > 0$ такое, что $B(x, \epsilon_i) \subset U_i$. Обозначим $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$. Ясно, что $\epsilon > 0$ и $B(x, \epsilon) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} B(x, \epsilon_i) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Имеем, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

ч.т.д.

Пусть даны МП $(X, \rho), B \subset X$. Множество В называется **замкнутым**, если его дополнение $X \backslash B$ открыто.

Обозначение: $B \underset{cl}{\subset} X$

ϕ – семейство всех замкнутых множеств

Свойства замкнутых множеств

1) $\varnothing \in \phi$, $X \in \phi$

2) Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто

3) Объединение любого **конечного** числа замкнутых множеств замкнуто

Пример

В МП (X, ρ) открытый шар – открытое множество, замкнутый шар – замкнутое множество.

Доказательство

Надо показать, что $\forall x \in X, \epsilon > 0$ $B(x, \epsilon)$ – открытое множество.

Покажем, что $\forall y \in B(x, \epsilon)$ $\exists \delta > 0$, что $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$

Так как, $y \in B(x, \epsilon)$, то $\rho(x, y) < \epsilon$

Зафиксируем $\delta > 0$ такое, что $\rho(x, y) + \delta < \epsilon$. Рассмотрим шар $B(y, \delta)$ и покажем, что $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$.

Пусть $z \in B(y, \delta)$. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \delta < \epsilon$, откуда $z \in B(x, \epsilon)$

ч.т.д.

3 Понятие ТП. Примеры. Метризуемые ТП

Пусть X – некоторое множество, семейство $\tau \subset 2^X$ – называется топологией на X, а элементы τ – открытыми множествами $U \underset{op}{\subset} X$,если:

1) $\oslash \in \tau$, $X \in \tau$

2) Объединение любого числа открытых множеств открыто

3) Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто

Множества, принадлежащие топологии τ, называются открытыми в ТП.

(X, τ) - топологическое пространство (ТП)

Пусть даны ТП $(X, \tau), x \in X$. Окрестностью точки x называется $\forall U \underset{op}{\subset} X, x \in U$

Пусть даны ТП $(X, \tau), F \subset X$.

Множество F называется замкнутым в X, $F \underset{cl}{\subset} X$, если $(X \backslash F)$ – открыто .

На любом множестве X можно задать следующие топологии:

1) $\tau^0 = \{\oslash, X\}$ – антидискретная топология. В ней открытыми являются только пустое множество и всё пространство X

2) $\tau^* = 2^X$ – дискретная топология. В ней открытым является любое подмножество X

3) $\tau_F = \{\oslash, X, X \backslash A | \ |A| < \infty\}$ – топология Зарисского. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X конечного числа элементов

4) $\tau_C = \{\oslash, X, X \backslash A | \ |A| \leq \omega\}$. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X счётного числа элементов.

ТП (X, τ) называется **метризуемым**, если τ можно задать некоторой метрикой ρ

В таком случае пишут $\tau = \tau_\rho$

Примеры

1) $\forall$ МП – метризуемое ТП

2) ТП с дискретной топологией метризуемо дискретной метрикой

4 ФСО. Задание топологии через ФСО. Примеры

Пусть дано ТП X, каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие непустое семейство окрестностей этой точки $\nu_x = \{V_t^x | t \in T_x\}$, T_x – семейство индексов, которыми занумерованы окрестности (не обязательно целые)

V_t^x – элементарная (базовая) окрестность точки x

$\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$ – окрестностная база, или фундаментальная система окрестностей (ФСО)

Аксиомы ФСО

1) $\forall x \in X$ семейство непусто, $\forall V_t^x \in \nu_x : x \in V_t^x$

2) $\forall V_t^x, V_{t'}^x \exists V_{t''}^x : V_{t''}^x \subset (V_t^x \cap V_{t'}^x)$ – для двух любых элементарных окрестностей найдётся третья, которая лежит в их пересечении.

3) $y \in V_t^x \iff \exists V_{t'}^y \subset V_t^x$ – если точка у лежит в элементарной окрестности точки х, то найдется элементарная окрестность точки у, которая целиком лежит в элементарной окрестности точки х

Если все аксиомы выполняются,то ФСО определена однозначно

Задание топологии через ФСО

Если в пространстве задана ФСО для некоторой топологии τ, то топология определена однозначно и описывается как совокупность всех множеств $U \in X$ таких, что $\forall x \in U$ найдётся элементарная окрестность $V_t^x \subset \nu_x$, для которой выполняется условие $V_t^x \subset U$. Значит для задания топологии достаточно указать некоторую ФСО ν.

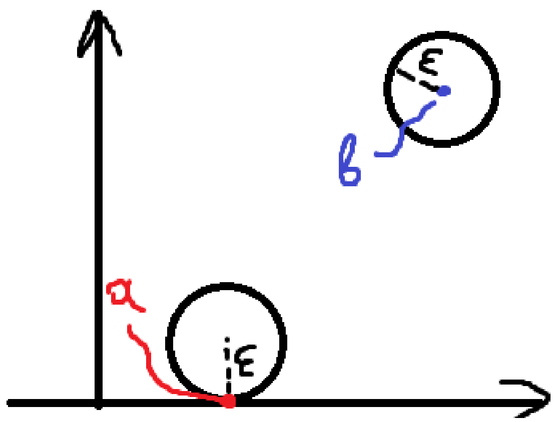
Примеры

1) Рассмотрим прямую R и произвольную точку $x \in R$. Элементарной окрестностью точки назовём полуинтервал вида $[x; x + \epsilon), \epsilon > 0$. Совокупность таких элементарных окрестностей $\nu = \{[x; x + \epsilon) | x \in R, \epsilon > 0\}$ будем ФСО. ТП (R, τ), где τ порождена ФСО ν, называется прямой Зоргенфрея.

2) Пусть $R_+^2 = \{(x,y)|y \geq 0\}$ – верхняя замкнутая полуплоскость. Определим окрестность точки $a \in R_+^2$ следующим образом:

Если $a \in OX$, то окрестностью точки a назовём множество вида $V(a,\epsilon) = \{a\} \cup B^2((x_a,\epsilon),\epsilon), \epsilon > 0$ (поднялись от точки a, лежащей на OX, на расстояние ϵ и провели окружность радиуса ϵ)

Если $b \notin OX$, то то окрестностью точки b назовём множество вида $V(b,\epsilon) = B^2(b,\epsilon), 0 < \epsilon <= y_b$.



Такое семейство ν будет ФСО. ТП (R_+^2, τ), где τ порождена ФСО ν, называется **плоскостью Немыцкого**.

5 Сравнение топологий. Роль ФСО. Примеры

Пусть τ_1 и τ_2 – некоторые топологии на пространстве X. Если $\tau_1 \supset \tau_2$, то говорят, что τ_1 сильнее τ_2, или τ_2 слабее τ_1 и пишут $\tau_1 \geq \tau_2$. Если же $\tau_1 \supset \tau_2$, причём $\tau_1 \neq \tau_2$, то говорят, что τ_1 существенно сильнее τ_2, или τ_2 существенно слабее τ_1 и пишут $\tau_1 > \tau_2$. Но может оказаться так, что $\tau_1 \not\supset \tau_2$ и $\tau_2 \not\supset \tau_1$. Тогда говорят, что τ_1 и τ_2 несравнимы.

Признак сравнения топологий с помощью ФСО

Пусть топологии τ_1 и τ_2 на множестве X порождены некоторыми ФСО $\nu_1 = \{V_\alpha^x | x \in X, \alpha \in A_x\}$ и $\nu_2 = \{V_\beta^x | x \in X, \beta \in B_x\}$, A_x, B_x – семейства индексов.

$\tau_1 \geq \tau_2 \iff \forall x \in X, W_\beta^x \in \nu_2 \; \exists V_\alpha^x \in \nu_1 : V_\alpha^x \subset W_\beta^x$, то есть для любой точки x из X и её окрестности W_β^x из ФСО ν_2 найдётся такая окрестность

V_α^x из ФСО ν_1, что V_α^x целиком лежит в W_β^x.

Доказательство

$\Longrightarrow$:

Пусть $\tau_1 \geq \tau_2$. Т.к. $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \nu_2$, то $\forall W_\beta^x \in \nu_2$ открыто в τ_1, откуда по определению $\exists V_\alpha^x \in \nu_1$, такая, что $V_\alpha^x \subset W_\beta^x$

$\Longleftarrow$:

Покажем, что $\tau_1 \supset \tau_2$. Пусть $U \in \tau_2$. $\forall x \in U$ $\exists W_\beta^x \in \nu_2$ такая, что $W_\beta^x \subset U$. По условию можно подобрать окрестность $V_\alpha^x \in \nu_1$, для которой выполняется $V_\alpha^x \subset W_\beta^x \subset U$. Тогда $U \in \tau_1$.

ч.т.д.

Примеры

1) На любом пространстве X: $\tau^* > \tau^0$

Действительно, $\oslash$ и X, открытые в топологии τ^0, будут открыты и в τ^*, но обратное неверно, так как открытое в τ^* одноточечное подмножество не будет открытым в τ^0.

2) На $R^2 : \overset{\infty}{\tau} > \tau^2$ (пример на сравнение с помощью ФСО)

$\forall x \in R^2, \epsilon > 0$ "бабочка"радиуса ϵ лежит в открытом шаре такого же радиуса, но братное неверно, то есть открытый шар радиуса ϵ не будет лежать ни в какой бабочке с центром в этой же точке.

6 Понятие базы топологии, 1 аксиомы счётности и сепарабельности и их взаимосвязь. Примеры

Пусть дано ТП (X, τ)

Семейство $\beta \subset X$ открытых в X множеств называется базой топологии, если $\forall U \underset{op}{\subset} X$ найдётся подсемейство $\gamma \subset \beta$ такое, что $U = \cup\beta$, то есть любое открытое множество U представимо в виде объединения некоторых элементов β.

Любая ФСО автоматически база

Локальной базой в точке x пространства X (**локальной базой**

точки x) называется семейство $\beta(x)$ окрестностей точки x такое, что $\forall U \in \tau(x)\ \exists V \in \beta(x) : x \in V, V \subset U$.

Пусть дано ТП (X, τ). Говорят, что X удовлетворяет первой аксиоме счётности, если $\forall x \in X$ существует конечная или счётная локальная база в точке x.

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$

A всюду плотно в X, если $\overline{A} = X$.Другими словами,A всюду плотно в X тогда и только тогда, когда

$\forall U \in \tau(x) : U \cap A \neq \oslash$

ТП (X, τ) называется сепарабельным, если оно содержит конечное или счётное множество, всюду плотное в X.

Теорема

Пусть дано ТП (X, τ). Если X имеет счётную базу, то оно сепарабельно.

Доказательство

Пусть $\beta = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая конечная или счётная база в X и $V_n \neq \oslash\ \forall n = 1, 2, \ldots$. В каждом V_n фиксируем некоторую точку $a_n \in V_n$. Множество $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно или счётно, а значит всюду плотно в X, а значит X – сепарабельно.

ч.т.д.

Примеры

1) Любое метризуемое пространство X удовлетворяет первой аксиоме счётности

Фиксируем метрику ρ, которая порождает топологию и каждой точке $x \in X$ ставим в соответствие локальную базу в этой точке:

$\nu'_x = \{B(x, \frac{1}{n})|n \in N)\}$

Каждому натуральному n ставим в соовететствие шар с центром в точке x и радиусом $\frac{1}{n}$. Шаров получается столько же, сколько и натуральных чисел, то есть счётное количество, значит ν'_x – счётная локальная база.

2) ТП, даже метризуемое, может не обладать счётной базой

Рассмотрим (R, τ^*), β – произвольная база топологии τ^*. Любое одноточечное подмножество $\{x\}$ в этой топологии открыто, значит представимо в виде объединения некоторых элементов базы, значит $\{x|x \in X\} \subset \beta$. Значит мощность базы β не меньше мощности R.

3) Множество Q всюду плотно в R $\Longrightarrow$ R – сепарабельно, так как Q счётное ($R = (R, d)$ – R с евклидовой топологией)

4) (R, τ_C) не сепарабельно

Для любого счётного множества A существует открытое непустое множество B, которое не пересекается с A, например $B = (R\backslash A)$. Поэтому нет всюду плотных множеств, значит (R, τ_C) не сепарабельно

5) ТП (X, τ^0) – сепарабельно $\iff$ X – конечно или счётно

Единственное всюду плотное множество в X – само множество X.

Значит, чтобы (X, τ^0) было сепарабельным, множество X должно быть конечным или счётным.

6) ТП (X, τ^*) всегда сепарабельно

В ТП (X, τ^*) любое непустое множество всюду плотно, значит ТП (X, τ^*) всегда сепарабельно.

7 Операция замыкания и её свойства. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется близкой или точкой прикосновения, если $\forall U \in \tau(x) : U \cap A \neq \oslash$

Множество всех точек, близких для A, называется замыканием множества A (обозначение $\overline{A}$ **)**

Свойства операции замыкания

1) $\overline{A} \underset{cl}{\subset} X$
2) $A \subset F \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow \overline{A} \subset F$
3) $A \underset{cl}{\subset} X \iff \overline{A} = A$

Примеры

1) В R $A = (0; 1) \Longrightarrow \overline{A}^R = [0; 1]$

2) В R $A = Q$
$\overline{A} = R$

3) ТП $(X, \tau), A \subset X$, A – всюду плотно.
$\overline{A} = X$

8 Внутренность и граница множества. Связь с операцией замыкания. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется внутренней, если $\exists U \in \tau(x) : U \subset A$

Множество всех точек, внутренних для A, называется его внутренностью. (обозначение $intA$)

Свойства операции внутренности

1) $intA \underset{op}{\subset} X$
2) $X \underset{op}{\supset} U \subset A \Longrightarrow U \subset intA$
3) $A \underset{op}{\subset} X \iff intA = A$
4) Вычислительная формула
$intA = X \backslash (\overline{X \backslash A})$

Докажем 4

$\forall x \in X$ возможны 2 варианта: либо некоторая окрестность точки x целиком содержится в A, тогда $x \in intA$ или же ни одна окрестность точки x не содержится в A, то есть любая окрестность пересекается с $(X \backslash A)$, следовательно, $x \in \overline{X \backslash A}$. Таким образом, множества $intA$ и $\overline{X \backslash A}$ взаимно дополнительны, откуда $intA = X \backslash (\overline{X \backslash A})$.

ч.т.д.

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, x \in X$.

Точка x называется граничной, если $\forall U \in \tau(x)$

$$\begin{cases} U \cap A \neq \oslash \\ U \cap (X \backslash A) \neq \oslash \end{cases}$$

Множество всех граничных точек называется его границей. (обозначение ∂A)

Свойства границы

1) $\partial A \underset{cl}{\subset} X$
2) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$

3) $\overline{A} = (intA) \cup \partial A$, $intA \cap \partial A = \oslash$

Примеры
1) В R $A = [0;1]$
$int_R A = (a;b)$
$\partial_R A = \{a;b\}$

2) В R $A = Q$
$intA = \oslash$
$\partial A = R$

9 Понятие подпространства в ТП. Индуцированная топология и её свойства. Примеры. "Теория относительности"

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$
$\tau|_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$ – является топологией на А (**индуцированной**)
ТП $(A, \tau|_A)$ – топологическое подпространство (ТПП) в ТП Х

Теорема
Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$, ФСО $\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$, β – база, тогда:

1) $\phi|_A = \{F \cap A | F \underset{op}{\subset} X\}$ – семейство всех замкнутых множеств в А
2) $\nu|_A = \{V_t^a | a \in A, t \in T_a\}$ – ФСО в А
3) $\beta|_A = \{V \cap A | V \in \beta\}$ – база в А

Докажем про ФСО
$\forall a \in A$ и $t \in T_a$ множество $V_t^a \cap A$ – окрестность точки а в подпространстве А. Фиксируем произвольные $U \in \tau|_A$ и $a \in U$. По определению U представимо в виде $U = \widetilde{U} \cap A$, где $\widetilde{U} \in \tau$. Ясно, что $\widetilde{U}\tau(a)$. Выберем элементарную окрестность $V_t^a \in \nu$ такую, что $V_t^a \subset \widetilde{U}$. Ясно, что $V_t^a \cap A \subset \widetilde{U} \cap A = U$
ч.т.д.

Следствие

1) X с первой аксиомой счётности $\Longrightarrow$ A с первой аксиомой счётности

2) X со счётной базой $\Longrightarrow$ A со счётной базой

3) X метризуемо и сепарабельно $\Longrightarrow$ A сепарабельно

Теория относительности

Пусть даны ТП $(X, \tau), B \subset A \subset X$

1) $B \underset{op}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{op}{\subset} A$

1') $B \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{cl}{\subset} A$

2) $B \underset{op}{\subset} A \underset{op}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{op}{\subset} X$

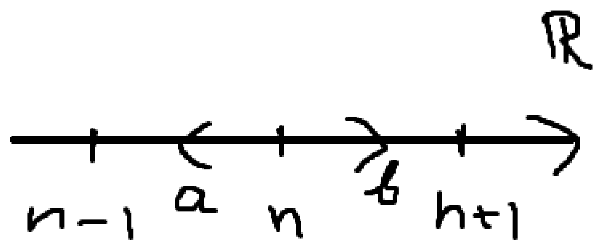
2') $B \underset{cl}{\subset} A \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow B \underset{cl}{\subset} X$

3) $U \underset{op}{\subset} X, F \underset{cl}{\subset} X \Longrightarrow$

$$\begin{cases} (U \backslash F) \underset{op}{\subset} X \\ (F \backslash U) \underset{cl}{\subset} X \end{cases}$$

Примеры

1) $(X, \tau) = R, A = Z$



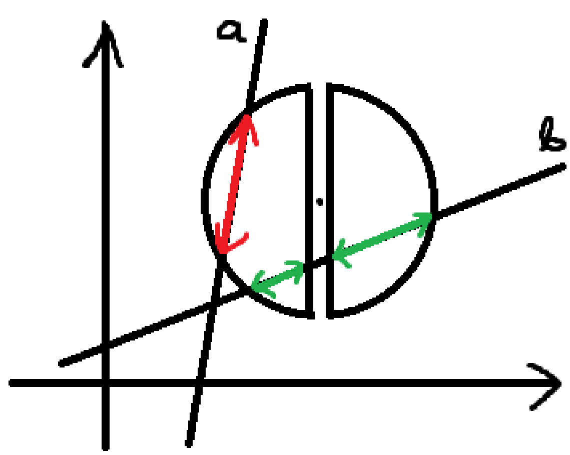
Фиксируем $\forall n \in Z, a, b$, например $n-1 < a < n$, $n < b < n+1$.

$(a; b) \cap Z = n$ (в интервале только одно целое число – n)

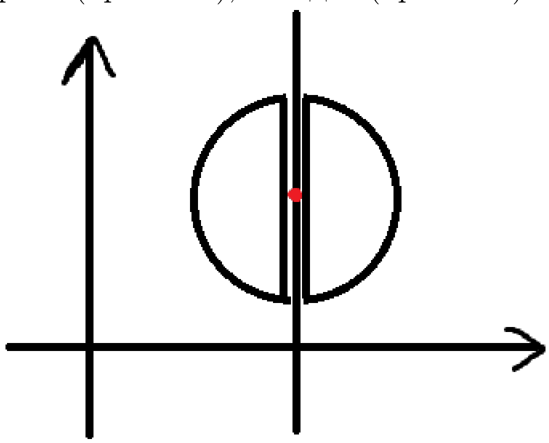
Если мы будем брать другие a и b, то в пересечении будем получать другие подмножества целых чисел (не обязательно состоящие из одного целого числа).

$\tau^1|_Z = \tau^*$

2) $(R^2, \overset{\infty}{\tau}), A = L$ – прямая



Если $L \not\parallel OX$, то пересекая бабочку прямой, будем получать или один интервал (прямая a), или два (прямая b). Поэтому $\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^1$ $(L \not\perp OX)$



Если же $L \perp OX$, то пересекая бабочку прямой, будем получать одну точку (центр бабочки), поэтому $\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^*$ $(L \perp OX)$

10 Непрерывное отображение и его свойства. Примеры

Пусть даны ТП (X, τ) и (Y, τ') и $f : X \to Y$.

f непрерывно в точке x $\iff \forall V \in \tau'(f(x))\ \exists U \in \tau(x) : f(U) \subset V$

Теорема (критерии непрерывности)

Для $f : X \to Y$ эквивалентны условия

1) f^{-1} – непрерывно

2) $f^{-1}(V) \underset{op}{\subset} X\ \forall V \underset{op}{\subset} Y$

3) $f^{-1}(B) \underset{cl}{\subset} X\ \forall B \underset{cl}{\subset} Y$

Свойства непрерывных отображений

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau'), (Z, \tau'')$

1) f,g – непрерывны $\Longrightarrow (g \circ f)$ непрерывно

2) f – непрерывно $\Longrightarrow f|_A : A \to Y$ – непрерывно

Примеры

1) Постоянное отображение $f : X \to Y$, которое отображает пространство X в некоторую фиксированную точку $y_0 \in Y$, то есть $f(X) = \{y_0\}$, непрерывно.

2) Отображение $f : C[a;b] \to R, x \to f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$ – непрерывно

$\forall x \in C[a;b], (f(x) - \epsilon; f(x) + \epsilon), \epsilon > 0$
Пусть $\delta > 0, y \in B(x, \delta)$

$|f(x) - f(y)| = \int\limits_a^b (x(t) - y(t))dt \leq \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|dt < \int\limits_a^b \delta dt = \delta(b - a)$
$\epsilon = \delta(b - a)$
$\delta = \frac{\epsilon}{b-a}$

Если положить $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{b-a}$, получим, что $f(B(x, \delta)) \subset (f(x) - \epsilon; f(x) + \epsilon)$

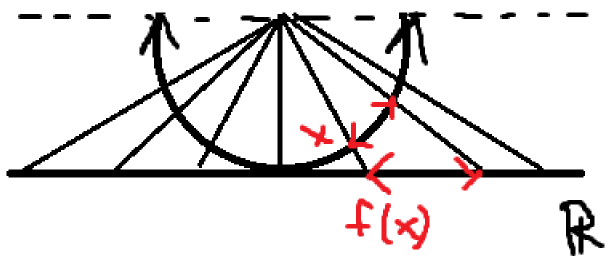
11 Понятие гомеоморфизма. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau')$ и $f : X \to Y$.

f – гомеоморфизм, если
1) f – биекция
2) f и f^{-1} непрерывны

При этом X и Y гомеоморфны (**обозначение** $X \approx Y$)

Примеры
1) $(0;7) \approx R$



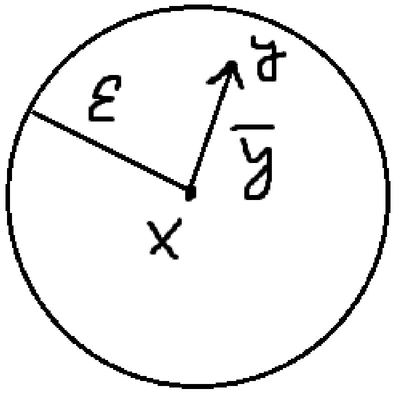
Изогнули интервал в полуокружность. Дальше каждой точке x в соответствие ставим её центральную проекцию $f(x)$ на R (проводим луч из центра полукружности в точку x из интервала, $f(x)$ – пересечение луча и прямой R). Очевидно, что f биекция и что f непрерывно в обе стороны (для любого интервала в R найдётся дуга окружности, образ которой лежит в этом интервале и наоборот: для любой дуги окружности найдётся интервал на R, образ которого лежит внутри этой дуги).

Таким образом, $(0;7) \approx R$

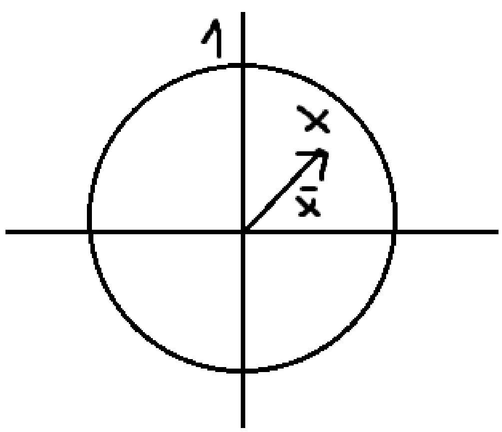
2) $B^n(x, \epsilon) \approx R^n$

Для начала покажем, что $B^n(x, \epsilon) \approx B^n(0, 1)$, а затем, что $B^n(0, 1) \approx R^n$ (композиция двух гомеоморфизмов – гомеоморфизм).

Каждую точку $y \in B^n(x, \epsilon)$ отождествим с её радиус-вектором, имеющим начало в точке x и конец в точке y.



Определим отображение $g : B^n(x, \epsilon) \to B^n(O, 1)$, $O = (0, 0, \ldots, 0)$ (n нулей): $x \to O$, для любой другой точки $y \in B^n(x, \epsilon)$ делим её радиус-вектор на ϵ, откладываем от точки O, конец этого вектора и есть точка $g(y)$. g – биекция и непрерывно в обе стороны, значит **g – гомеоморфизм**.



Опять каждую точку $x \in B^n(0; 1)$ отождествляем с её радиус-вектором $\vec{x}$.

Определим отображение $f : B^n(0; 1) \to R^n, x \to \frac{\vec{x}}{1-|\vec{x}|}$.

Очевидно, что f – биекция и f непрерывно в обе стороны (при $|\vec{x}| = 1$ просто уходим в бесконечность). Значит **f – гомеорморфизм**.

Таким образом, $g \circ f$ – гомеоморфизм, то есть $B^n(x, \epsilon) \approx R^n$

3) Любая изометрия является гомеоморфизмом.

12 Аксиомы отделимости и их иерархия. Критерии регулярности и нормальности. Примеры

Пусть дано ТП (X, τ). ТП (X, τ) называется T_1 - пространством, если в нём любое одноточечное множество замкнуто, т.е.

$\forall x \in X$: $\{x\} \underset{cl}{\subset} X$

ТП называется T_2 - пространством, или **хаусдорфовым**, если для любых двух точек x и y, $x \neq y$ найдутся дизъюнктные окрестности, т.е.

$\forall x, y, \in X, x \neq y \; \exists U \in \tau(x), V \in \tau(y) : U \cap V = \oslash$

ТП называется T_3 - пространством, или **регулярным**, если

$$\begin{cases} X - T_1 \\ \forall F \underset{cl}{\subset} X, x \in (X \backslash F), \exists U \in \tau(F), V \in \tau(x) : U \cap V = \oslash \end{cases}$$

то есть если для любого замкнутого множества и точки из его дополнения найдутся дизъюнктные окрестности

ТП называется T_4 - пространством, или **нормальным**, если

$$\begin{cases} X - T_1 \\ \forall F \underset{cl}{\subset} X, B \underset{cl}{\subset} X, F \cap B = \oslash, \exists U \in \tau(F), V \in \tau(B) : U \cap V = \oslash \end{cases}$$

то есть если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств найдутся дизъюнктные окрестности

Иерархия отделимости

Пусть дано ТП (X, τ)

1) Если X – метризуемо, то X – T_4

2) Если X – T_4, то X – T_3

3) Если X – T_3, то X – T_2

4) Если X – T_2, то X – T_1

Критерий регулярности

ТП (X, τ) регулярно тогда и только тогда, когда X – T_1, в котором $\forall x \in X$ и $U \in \tau(x)$ найдётся окрестность $V \in \tau(x)$ такая, что $\overline{V} \subset U$

Доказательство

$\Longrightarrow$:

Обозначим $B = (X \backslash U)$. По условию $\exists V \in \tau(x)$ и $W \in \tau(B)$, для которых $V \cap W = \oslash$. Имеем $V \subset (X \backslash W) \in \phi$, тогда $\overline{V} \subset (X \backslash W)$. Но $(X \backslash W) \subset U$, следовательно, $\overline{V} \subset U$.

$\Longleftarrow$:

Пусть $x \in X, B \in \phi$ и $x \notin B$. Обозначим $U = (X \backslash B)$. Ясно, что $U \in \tau(x)$. По условию $\exists V \in \tau(x)$ такая, что $\overline{V} \in U$. Обозначим $W = (X \backslash \overline{V})$. Имеем $W \in \tau(B)$ и $V \cap W = \oslash$.

ч.т.д.

Критерий нормальности

ТП (X, τ) нормально тогда и только тогда, когда X – T_1, в котором $\forall F \underset{cl}{\subset} X$ и $U \in \tau(F)$ найдётся окрестность $V \in \tau(F)$ такая, что $\overline{V} \subset U$

Доказательство аналогично доказательству критерия регулярности.

Примеры

1) Не T_1 пространство: (R, τ^0)

Действительно, в (R, τ^0) открыты только $\oslash$ и R, значит замкнуты их дополнения, то есть R и $\oslash$, а одноточечного множества среди замкнутых нет, значит (R, τ^0) – не T_1

2) (R, τ_C) – T_1, но не T_2

В (R, τ_C) открыта прямая с конечным числом дырок, значит замкнутыми будут конечные множества. $\{x\}$ – конечно $\forall x \in X$,

значит (R, τ_C) – T_1

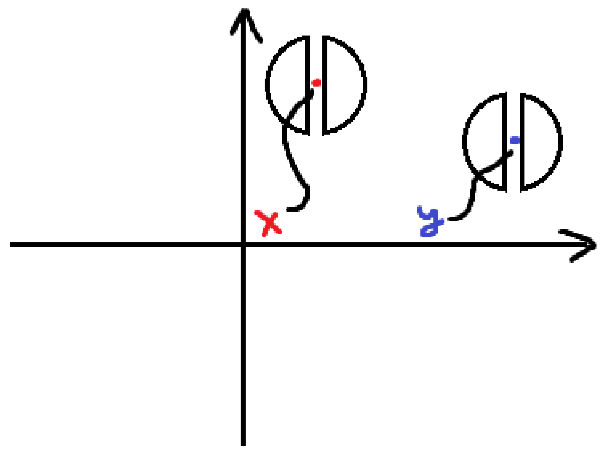
Пусть $Ox = (R \backslash A), Oy = (R \backslash B), x, y \in R$, A, B – не более чем счётные

$Ox \cap Oy = (R \backslash A) \cap (R \backslash B) = R \backslash (A \cup B) \neq \oslash$

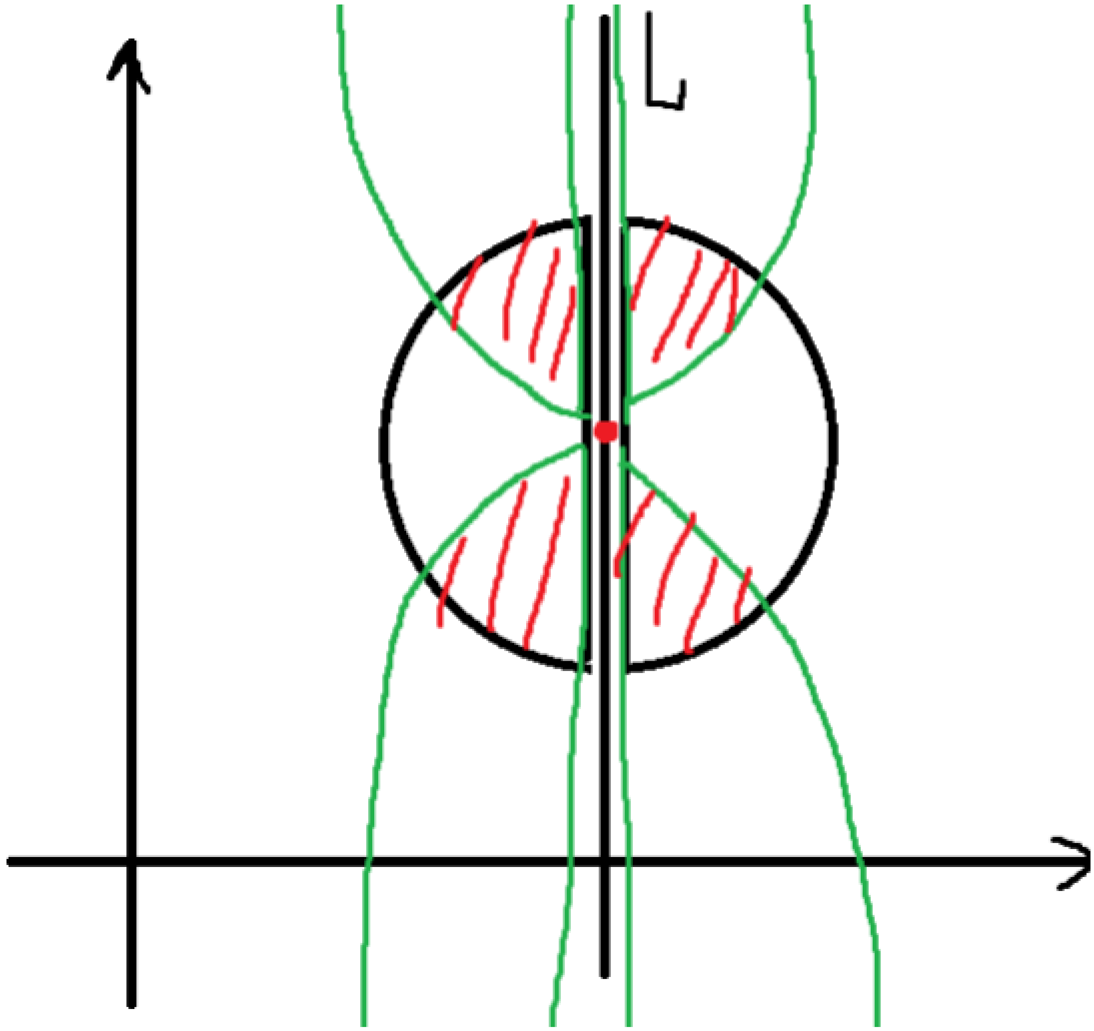
Значит (R, τ_C) – не T_2

3) $(R^2, \overset{\infty}{\tau})$ – T_2, но не T_3

Для двух различных точек мы можем нарисовать две непересекающиеся бабочки



значит $(R^2, \overset{\infty}{\tau}) - T_2$



Пусть $F = L \backslash \{x_0\}, F \underset{cl}{\subseteq} (R^2, \overset{\infty}{\tau})$, то есть в качестве замкнутого множества возьмём вертикальную прямую без центра бабочки.

По рисунку видно, что какие бы мы бабочки не построили, они всё равно будут пересекаться, то есть не будут дизъюнктными окрестностями.

4) $(R, \tau_S) - T_4$, но не метризуемо.

τ_S – топология Зоргенфрея: в ней открыты промежутки вида $[a; b)$ ("стрелки")

13 Произведение ТП. Проектирование. Непрерывность отображения в произведение. Примеры

Пусть даны ТП $(X_i, \tau_i), i = \overline{1, n}$

Рассмотрим декартово произведение $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \in X_i$

На X определена топология произведения τ^{Π}

τ^{Π} задаётся элементарными окрестностями.

Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ элементарная окрестность – любое множество вида $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, где $U_i \in \tau(x_i)$

Пусть дано ТП $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$

$p_j : X \to X_j$ – **j-ое проектирование**

$A \subset X, p_j(A)$ – **проекция** множества A

Теорема 1

Отображения p_j непрерывны

Доказательство

Пусть $V \in \tau_j$. Тогда $p_j^{-1}(V) = V \times \prod(X_i | 1 \leq i \leq n, i \neq j) \in \tau$. Следовательно, p_j непрерывно.

ч.т.д.

Координатные отображения

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y_i, \tau_i'), i = \overline{1, n}$ и отображение

$X \to \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i : x \to y = (y_1, y_2, \dots, y_n), y_i \in Y_i$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \dots \\ y_n = f_n(x) \end{cases}$$

Определены **координатные отображения**

$f_i : X \to Y_i : x \to y_i = f_i(x)$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

Теорема 2

f – непрерывно $\iff$ все координатные отображения f_i непрерывны

Доказательство

$\Longrightarrow$:

$x \xrightarrow{f} f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \xrightarrow{p_i} y_i$

$f_i = p_i \circ f$. p_i и f непрерывны, значит f_i непрерывно.

$\Longleftarrow$:

Фиксируем $\forall x \in X$, $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$.

$f_i : x \to y_i \in V_i$.

$\forall i = \overline{1, n}$ $\exists U_i \in \tau(x) : f_i(U_i) \subset V_i$

Обозначим $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$, тогда $f(U) \subset V$, то есть f – непрерывно.

ч.т.д.

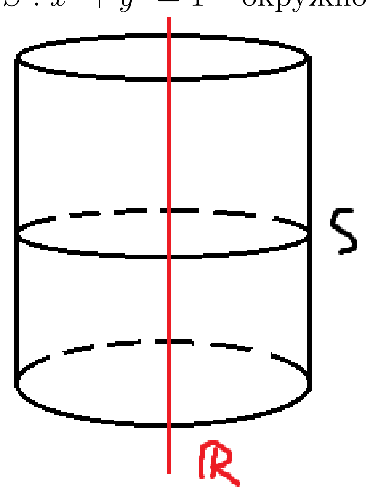
Примеры

1) $R^n = \prod\limits_{i=1}^{n} R \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Евклидова топология на R^n $\tau^n = \tau^{\Pi}$

2) $R^3 \supset Z, Z : x^2 + y^2 = 1$ – цилиндр

$S \subset R^2, S : x^2 + y^2 = 1$ – окружность



$Z = S \times R$

14 Понятие компактности. Примеры. Свойства компактности. Критерий компактности метризуемого ТП

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$,

$\alpha \subset \tau$ – семейство называется **покрытием** A, если $\cup\alpha \supset A$,
подсемейство $\alpha' \subset \alpha$ – называется **подпокрытием** для A,
если $\cup\alpha' \supset A$

А называется компактным, если из любого покрытия α можно выбрать конечное подпокрытие α'

В частности, может быть, что $A = X$

Свойства компактности

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau'), A \subset X, f : X \to Y$

1) Если X – компактно и A замкнуто, то A – компактно
2) Если X – T_2 (хаусдорфово) и A – компактно, то A – замкнуто
3) Если A – компактно и f – непрерывно, то $f(A)$ – компактно

К критерию компактности метризуемого ТП

Пусть дано ТП $(X, \tau), (x_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность точек из X. Тогда говорят, что **последовательность точек сходится к точке** x ($x_n \to x$), если для любой окрестности U точки x найдётся порядковый номер n, что все члены последовательности, начиная с n-ого, лежат в U, то есть

$x_n \to x \iff \forall U \in \tau(x)\ \exists n : \{x_k | k \geq n\} \subset U$

Если τ задана некоторой метрикой ρ, то

$x_n \to x \iff \rho(x, x_n) \to 0$

Критерий компактности метризуемого ТП

Пусть дано (X, τ) – метризуемое ТП. X – компактно $\iff$ из любой последовательности $x_n \subset X$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

Примеры

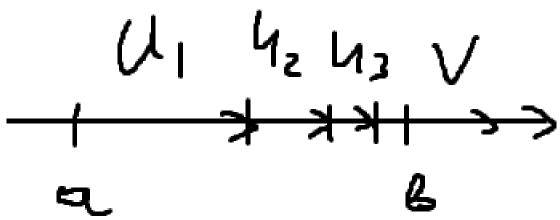
1) Любое конечное множество компактно

2) Интервал $(0; 1)$ не компактен

Покрытие: $(0; 1) = \bigcup\limits_{n>2} (\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n})$, но из этого покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие

Аналогично $[0;1)$ не компактен

3) $(R, \tau_S), A = [a;b]$ – не компактен



Покрываем $[a;b]$ стрелками $U_1 = [a; b - \frac{a+b}{2}), U_2 = [a; b - \frac{a+b}{4}), \ldots, U_n = [a; b - \frac{a+b}{2^n}), \ldots, V = [b; b_1), \forall b_1 > b$

Из этого покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие

4) В (R, τ_F) $\forall A \subset (R, \tau_F)$ – компактно

5) В (R, τ_C) $\forall A \subset (R, \tau_C)$ – компактно $\iff |A| < \infty$

15 Непрерывные отображения компактного ТП. Случай гомеоморфизма

Теорема 1

Пусть даны ТП $(X, \tau), f : X \to R$ – непрерывное отображение. Если X – компактно, то $\exists\ x_{min}, x_{max} \in X : f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})\ \forall x \in X$

Доказательство

Множество $f(X) \subset R$ компактно, а следовательно, замкнуто и ограничено. Но тогда $m = \inf(f(X)) \in f(X)$ и $M = \sup(f(X)) \in f(X)$. Таким образом, для некоторых $x_{min}, x_{max} \in X$: $f(x_{min}) = m, f(x_{max}) = M$.

ч.т.д.

Теорема 2
Пусть даны ТП $(X,\tau),(Y,\tau'), f : X \to Y$
Если: 1) X – компактно; 2) Y – T_2; 3) f – непрерывная биекция,
то f – гомеоморфизм

Теорема 3

Пусть даны ТП $(X_i,\tau_i), i = \overline{1,n}$. Если все X_i компактны, то $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ – компактно.

16 Понятие полного МП. Вполне ограниченные множества в МП. Критерий компактности МП

Пусть даны МП $(X,\rho),(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ – последовательность. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если $\forall \epsilon > 0\ \exists n : \rho(x_k,x_m) < \epsilon\ \forall k,m \geq n$

Теорема 1
Пусть даны МП $(X,\rho),(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальна.

Определение 1
МП (X,ρ) и метрика ρ называются **полными**, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Теорема 2
Пусть даны МП $(X,\rho), A \subset X$, тогда
1) Если X – полное и A замкнутое, то A – полное
2) Если A – полное, то A замкнутое

Определение 2
Пусть дано МП $(X,\rho), A \subset X$. Множество A называется вполне ограниченным, если $\forall \epsilon_0 > 0$ A можно покрыть конечным числом шаров вида $B(x,\epsilon_0)$

Теорема 3 Пусть дано МП $(X, \rho), A \subset X$. Если A вполне ограниченное, то оно ограниченное.

Доказательство

Фиксируем $\epsilon_0 = 1$. Покроем А шарами $B(x_1, 1), \ldots, B(x_n, 1)$. Обозначим $M = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \rho(x_1, x_i)$. Тогда $A \subset B(x_1, M+1)$, то есть А – ограничено.

ч.т.д.

Теорема 4

Пусть $A \subset R^n$. А – вполне ограниченное $\iff$ А– ограниченное.

Доказательство

$\Longrightarrow$: доказано.

$\Longleftarrow$:

Если А – ограничено, то $\exists D(x, \epsilon) \supset A$. D компактен.

Фиксируем $\forall \epsilon_0 > 0$.

Рассмотрим покрытие $\{B(x, \epsilon_0 | x \in D)\}$.

Выделяем подпокрытие $\{B(x_1, \epsilon_0, \ldots, B(x_n, \epsilon_0))\}$ для D. Оно конечно, также оно покрывает и А. Значит А – вполне ограниченное.

ч.т.д.

Критерий компактности МП

МП (X, ρ) компактно $\iff$ X полное и вполне ограниченное

Доказательство

Вспомогательная лемма

Пусть последовательность $\gamma = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X, \gamma$ – фундаментальна и $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, $x_{n_i} \to x$.

Тогда $x_n \to x$

Доказательство леммы

Фиксируем $\forall \epsilon > 0$.

1) $\exists$ n: $k \geq n, m \geq n \Longrightarrow \rho(x_k, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$

2) $\exists$ p: $i \geq p \Longrightarrow \rho(x_{n_i}, x) < \frac{\epsilon}{2}$

Пусть $k \geq n$: $\rho(x_k, x) \leq \rho(x_k, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, то есть $\rho(x_k, x) < \epsilon$.

Лемма доказана

$\Longrightarrow$:

Докажем, что X – полное. Рассмотрим $\forall$ фунадментальную подпоследовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$

X – компактно $\Longrightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}(n_1 < n_2 < \dots)$.

$x_{n_i} \to x$. По лемме $x_n \to x$.

Значит X – полное.

Докажем, что X – вполне ограниченное.

Фиксируем $\forall \epsilon_0 > 0$, семейство $\{B(x, \epsilon_0) | x \in X\}$ – покрытие для пространства X.

X – компактно $\Longrightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{B(x_1, \epsilon_0), B(x_2, \epsilon_0), \dots, B(x_n, \epsilon_0)\}$

Значит X – вполне ограниченное.

$\Longleftarrow$:

Рассмотрим $\forall$ последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. X – вполне ограниченное $\Longrightarrow \exists$ фундаментальная последовательность $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}(n_1 < n_2 < \dots)$.

X – полное $\Longrightarrow \exists x \in X : x_{n_i} \to x$

X – компактно.

ч.т.д.

17 Понятие связности. Примеры. Основные свойства связности

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X$. Говорят, что A **несвязно**, если A представимо в виде $A = U \cup V$, где $U \neq \oslash, V \neq \oslash, U \underset{op}{\subset} A, V \underset{op}{\subset} A, U \cap V = \oslash$, то есть в виде объединения двух непустых открытых дизъюнктных множеств.

A связно, если A не несвязно.

Свойства связных множеств

Пусть даны ТП $(X, \tau), (Y, \tau'), A \subset X, f : X \to Y$ – непрерывное отображение, тогда:

1) A – связно $\Longrightarrow f(A)$ – связно

2) A – связно $\Longrightarrow \overline{A}$ – связно

3) Если $A_t \subset X, t \in T$ (T – семейство индексов), A_t связно $\forall t \in T$, $\cap_{t \in T} A_t \neq \oslash \Longrightarrow \cup_{t \in T} A_t$ – связно

4) Если $A_i \subset X, i = \overline{1, n}$, A_i – связно $\forall i = \overline{1, n}$,

$A_i \cap A_{i+1} \neq \oslash \ \forall i = \overline{1, n-1}$ (то есть $\{A_1, \ldots, A_n\}$ – связная цепочка) $\Longrightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i$ – связно

Примеры

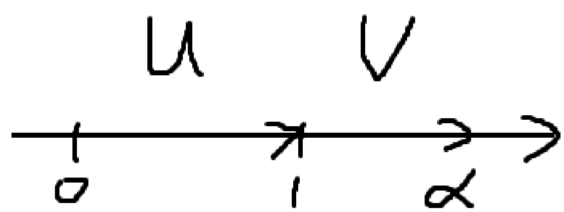
1) $Q \subset R$ – несвязно

Фиксируем $\forall \alpha \in (R \backslash Q)$

Q представимо в виде

$Q = (-\infty; \alpha) \cap Q \cup (\alpha; +\infty) \cap Q$

2) $(R, \tau_S) \supset A = [0; 1]$, A – несвязно



$A = U \cup V$

$U = [0; 1)$

$V = [1; \alpha) \cap A = \{1\} \underset{op}{\subset} A$

3) $R \supset A = [0; 1] \cup [2; 3)$, A – несвязно

18 Линейная связность и её свойства. Примеры

Пусть дано ТП (X, τ). **Кривой** в X называется множество $\gamma \subset X$ такое, что существует непрерывное отображение $f : [a; b] \to X$, для которого $f([a; b]) = \gamma$. В таком случае f называют **параметризацией кривой** γ.

Говорят, что точки $x, y \in X$ соединены кривой γ, если эти точки лежат в этом множестве.

Множество $A \subset X$ **линейно связно**, если $\forall x, y \in X$ $\exists$ кривая $\gamma \subset A$, которая соединяет x и y.

В частности, может быть, что $A = X$.

Свойства

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, (Y, \tau'), f : X \to Y$ – непрерывное отображение, тогда:

1) Если A – линейно связно,то A – связно

2) Если A – линейно связно, то и образ A линейно связен

Примеры
1) на R $[a;b]$, $[a;b)$, R линейно связны

2) в R^n $\forall$ выпуклое множество линейно связно
(**выпуклое множество** – множество, которое вместе с двумя своими любыми точками содержит отрезок, соединяющий их)

3) $S^n \subset R^{n+1}$ линейно связна
$S^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ – сфера

19 Связная компонента в ТП и её свойства. Примеры

Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, A \neq \oslash$

Тогда A – **связная компонента** в X, или **компонента связности**, если
1) A – связно
2) $A \subset B \subset X, A \neq B \iff B$ – несвязно

Если A – связная компонента в X и $A \ni x$, то обозначают $A = C(x)$ или C_x

Свойства
Пусть даны ТП $(X, \tau), A \subset X, A \neq \oslash$, тогда:
1) A – связная компонента в X $\Longrightarrow A \underset{cl}{\subset} X$
2) Если A и B – связные компоненты в X, $A \cap B \neq \oslash$, то $A = B$

Примеры

1) $\forall$ связная компонента множества Q одноточечна

Пусть для некоторого $r \in Q$ связная компонента неодноточечна, т.е. $C_r \ni q, q \neq r$. Пусть для определённости $r < q$.

Фиксируем число $\alpha \in (R \backslash Q), r < \alpha < q$.

$C_r = U \cup V, U = (-\infty; \alpha) \cap C_r, V = (\alpha; +\infty) \cap C_r$.

Противоречие.

Значит любая связная компонента множества Q одноточечна.

2) Если пространство X дискретно, то $\forall x \in X$ имеем $C_x = \{x\}$, то есть все связные компоненты пространства X одноточечные.

20 Обязательное, что не вошло в билеты

Критерий компактности в R^n

Пусть $A \subset R^n$. A – компактно $\iff$ A замкнуто и ограниченно.

Определение 1

Пусть даны МП $(X, \rho), A \subset X$. Множество A называется ограниченным, если существует замкнутый шар, содержащий множество A, то есть $\exists D(x, \epsilon) \supset A$.