Топология

Никита Латушкин

25 ноября 2021 г.

1 Метрические пространства

Метрикой на множетсве X называют функцию $\rho(x, y)$, то есть отображение $\rho : X \times X \to R$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ $\forall x, y, z \in X$

(X, ρ) - **метрическое пространство** (МП)
Примеры:
1) Евклидова метрика в R^n :
$d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

2) Дискретная метрика на прямой R:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

3) В $R^n : \mu(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

4) Метрика равномерной сходимости на C[0;1] (**множество всех непрерывных на [0;1] функций**):
$\mu(f, g) = \max\limits_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$

5) Метрика интегральной сходимости на C[0;1]

$\sigma_k(f,g) = \sqrt[k]{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|^k dx}$ (сигма)

Но мы будем рассматривать только при $k = 1$, то есть

$\sigma_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x)-g(x)| dx$

Пусть даны МП (X, ρ), $x \in X$.

1) **Открытым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$B(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) < \epsilon\}$

2) **Замкнутым шаром** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество

$\bar{B}(x,\epsilon) = D(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) \le \epsilon\}$

3) **Сферой** с центром в точке x и радиуса ϵ называется множество $S(x,\epsilon) = \{y \in X | \rho(x,y) = \epsilon\}$

Дальше:

1) (R^n, d) – просто R^n

2) $(C[a;b], \mu)$ – просто $(C[a;b]$

2 Как метрика порождает топологию

МП (X, ρ) задаёт топологию $\tau = \tau_\rho$ следующим образом: открытым множеством $U \subset X$ в такой топологии будет любое множество X, в котором $\forall x \in U\ \exists B(x,\epsilon) : B(x,\epsilon) \subset U$, то есть любая точка множества U лежит в том множестве с каким-то открытым шаром с центром в этой точке

3 Изометрия

Пусть даны МП (X, ρ) и (X, ρ').

$X \xrightarrow{f} Y$, f – изометрия, если:

1) f – биекция

2) f сохраняет расстояние между точками, то есть

$\rho(x,y) = \rho'(f(x), f(y))$

Тогда X и Y называют изометричными.

Обозначение: $X \overset{f}{\underset{iso}{\approx}} Y$

4 Изометрическое вложение

Пусть даны МП (X, ρ) и (X, ρ').

f – изометрическое вложение, если:

1) f – инъекция

2) $\rho(x,y) = \rho'(f(x), f(y))$

Примеры:

1) Пусть даны МП (X,ρ), $A \subset X$. Имеет место тривиальное изометрическое вложение A в X

2) R^k изометрично вкладывается в R^n при $k \leq n$

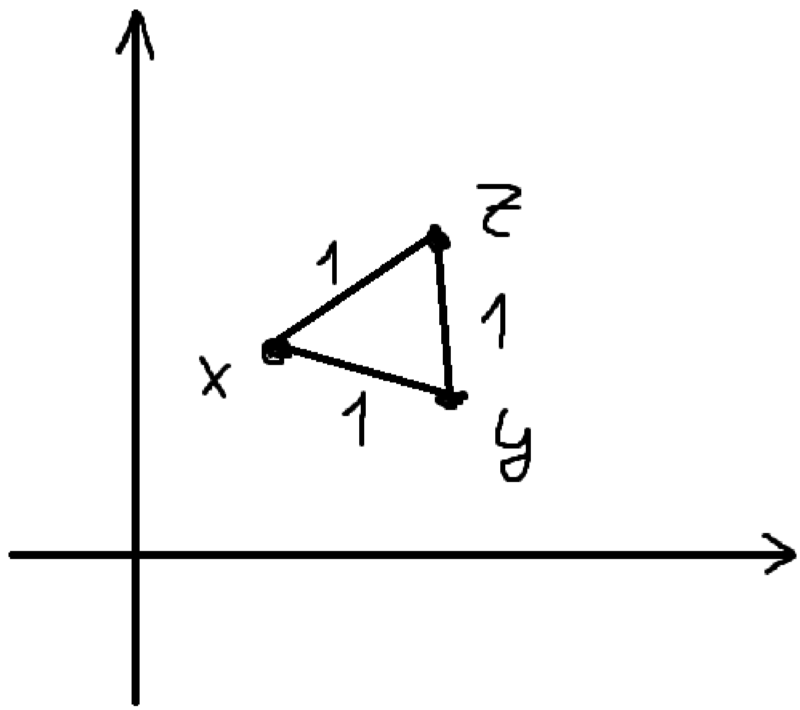
Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$

Поставим точке x в соответствие точку $x' = (x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0) \in R^n$ **(добавили в координаты $(n-k)$ нулей)**

3) МП (X,δ) изометрично вкладывается в R^n при $|X| \leq n+1$, то есть когда в X не больше (n+1) элементов

Случай n=2:

Пусть $X = \{x, y, z\}$. Фиксируем равносторонний треугольник на плоскости R^2 со стороной 1. Точкам x,y,z ставим в соответствие вершины треугольника. Таким образом получаем, что (X,δ) изометрично вкладывается в R^n



Случай n=3 аналогичен, только вместо треуольника фиксируем в R^3 правильный тетраэдр, у которого все ребра равны 1.

В общем случае в пространстве R^n нужно фиксировать правильный n-мерный симплекс, у которого все рёбра равны 1

5 Топология на пространстве

Пусть X – некоторое множество, семейство $\tau \subset 2^X$

(2^X - множество всех подмножеств X)

называется **топологией** на X, а элементы τ – открытыми множествами $U \underset{op}{\subset} X$, если:

1) $\varnothing \in \tau, X \in \tau$

2) Объединение любого числа открытых множеств открыто

3) Пересечение любого **конечного** числа открытых множеств открыто

(X, τ) - топологическое пространство (ТП)

Пусть даны ТП (X, τ), $x \in X$. Окрестностью точки x называется такое открытое множество $U \underset{op}{\subset} X$, что $x \in U$

$\tau(x)$ - семейство всех окрестностей точки x, то есть

$\tau(x) = \{U \underset{op}{\subset} X | x \in U\}$

На любом множестве X можно задать следующие топологии:

1) $\tau^0 = \{\varnothing, X\}$ - антидискретная топология. В ней открытыми являются только пустое множество и всё пространство X

2) $\tau^* = 2^X$ - дискретная топология. В ней открытым является любое подмножество X

3) $\tau_F = \{\varnothing, X, X \backslash A | A \subset X, |A| < \infty\}$ - топология Зарисского. В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X **конечного** числа элементов

4) $\tau_C = \{\varnothing, X, X \backslash A | A \subset X, |A| \leq \omega\}$

В ней открытыми являются пустое множество, всё пространство X, и любое множество, полученное выбрасыванием из X **счётного** числа элементов

6 Свойства открытых множеств

Множество U называется открытым в X, если вместе с каждой своем точкой оно содержит какую-то окрестность этой точки, то есть

$U \underset{op}{\subset} X$, если $\forall x\ \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset U(\epsilon = \epsilon(x))$

Семейство всех открытых множеств называется **топологией** МП X

τ - обозначение топологии (тау)

(X, τ) - топологическое пространство (ТП)

Свойства:

1) $\oslash \in \tau, X \in \tau$

2) Объединение любого числа открытых множеств открыто

3) Пересечение любого **конечного** числа открытых множеств открыто

7 Свойства замкнутых множеств

Множество F называется замкнутым в X, если его дополнение открыто, то есть

$(X \backslash F) \underset{op}{\subset} X$

Обозначение: $F \underset{cl}{\subset} X$

ϕ - обозначение семейства всех замкнутых множеств (фи)

Свойства:

1) $\oslash \in \phi, X \in \phi$

2) Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто

3) Объединение любого **конечного** числа замкнутых множеств замкнуто

8 Метризуемая топология

ТП (X, τ) называется **метризуемым**, если его можно задать некой метрикой ρ

$\tau = \tau_\rho$ - топология τ порождена метрикой ρ

Примеры:

1) Любое МП (X, ρ) есть метризуемое ТП. Оно метризуемо любой метрикой ρ', топологически эквивалентной метрике ρ

2) ТП R^n с естественной топологией метризуемо метриками d, μ, σ (для R^n естественная топология – топология, образованная с помощью открытых шаров)

3) ТП с дискретной топологией метризуемо дискретной метрикой

9 ФСО

Пусть дано ТП X, каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие непустое семейство окрестностей этой точки ν_x

$\nu_x = \{V_t^x | \ t \in T_x\}$, T_x – множество индексов, которыми занумерованы элементы ν_x

V_t^x – элементарная (базовая окрестность точки x)

$\nu = \{V_t^x | \ x \in X, t \in T_x\}$ – окрестностная база, или **фундаментальная система окрестностей** (ФСО)

Аксиомы ФСО

1) $\forall x \in X$ семейство ν_x непусто, $\forall V_t^x \in \nu_x : x \in V_t^x$

2) $\forall V_t^x, V_{t'}^x \ \exists V_{t''}^x : V_{t''}^x \subset (V_t^x \cap V_{t'}^x)$ – для двух любых элементарных окрестностей найдётся третья, которая лежит в их пересечении

3) $y \in V_t^x \Longrightarrow \exists V_{t'}^y \subset V_t^x$ – если точка y лежит в элементарной окрестности точки x, то найдется элементарная окрестность точки y, которая целиком лежит в элементарной окрестности точки x

Если аксиомы выполняются, то топология определена однозначно

10 Как ФСО порождает топологию

Если в пространстве задана ФСО для некоторой топологии τ, то топология определена однозначно и описывается как совокупность всех множеств $U \subset X$ таких, что $\forall x \in U$ найдётся элементарная окрестность $V_t^x \in \nu_x$, для которой выполняется условие $V_t^x \subset U$. Значит для задания топологии достаточно указать некоторую ФСО ν.

11 База топологии

Семейство β открытых множеств ТП X называется **базой топологии**, если $\forall U \underset{op}{\subset} X$ найдется подсемейство $\gamma \subset \beta$ такое, что $U = \cup\gamma$, то есть любое открытое множество U можно представить в виде объединения некоторой совокупности элементов β

Любая ФСО автоматически база

Локальной базой в точке x пространства X (базой точки x) называется семейство $\beta(x)$ окрестностей точки x такое, что $\forall U \in \tau(x)$ $\exists V \in \beta(x) : x \in V$, $V \subset U$

12 Как база порождает топологию

β – база тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $\forall x \in X$ $\exists W \in \beta : x \in W$, то есть для любой точки x из X найдется множество W из базы,что точка x принадлежит множеству W

2) $\forall U, V \subset \beta, x \in (U \cap V)$ $\exists W \in \beta : x \in W$, $W \subset (U \cap V)$, то есть

для любых двух пересекающихся элементов базы U и V и любой точки x из их пересечения найдётся такой элемент базы W, что он содержит точку x и сам содержится в пересечении $U \cap V$

В таком случае β – база некоторой топологии на X, и в этой топологии множества открыты тогда и только тогда, когда они представимы в виде объединения некоторой совокупности множеств из β.

Такую топологию называют **порождённой базой** β

13 Аксиомы счётности, примеры

Пусть дано ТП (X, τ). Говорят, что оно удовлетворяет первой аксиоме счётности, если $\forall x \in X$ существует конечная или счётная **локальная** база в точке x.

ТП удовлетворяет второй аксиоме счётности, если топология τ имеет конечную или счётную базу.

Дальше будем вместо **"удовлетворяет второй аксиоме счётности"** говорить **"со счётной базой"**

Если ТП удовлетворяет второй аксиоме счётности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счётности

Если пространство метризуемо и сепарабельно (сепарабельность см. в 18), то оно со счётной базой

Примеры:

1) Любое метризуемое пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Фиксируем метрику ρ, которая порождает топологию и каждой точке $x \in X$ ставим в соответствие локальную базу в этой точке

$\nu'_x = (B(x, \frac{1}{n})|n \in N))$

Каждому натуральному n ставим в соответствие шар с центром в точке x и радиусом $\frac{1}{n}$. Шаров получается столько же, сколько и натуральных чисел, то есть счётное количество, значит ν'_x – счетная локальная база

2) R^n удовлетворяет второй аксиоме счётности

Рассмотрим n-мерные открытые параллелепипеды

$H(r_1, \ldots, r_n; q_1, \ldots, q_n) = \{x \in R^n | r_i < x_i < q_i, i = \overline{1, n}\}$, r_i, q_i – рациональные, $r_i < q_i$, $i = \overline{1, n}$

Эти параллелепипеды – открытые множества и их счётное количество. Покажем, что они образуют базу топологии τ^n.

Рассмотрим произвольные $U \in \tau^n$ и $x \in U$.

R^n метризуемо метрикой μ, следовательно $\exists \epsilon > 0 : B^n_\mu(x, \epsilon) \subset U$,

а $B^n_\mu(x, \epsilon)$ есть открытый куб,

$B^n_\mu(x, \epsilon) = \{y \in R^n | x_i - \epsilon < y_i < x_i + \epsilon, i = \overline{1, n}\}$

Подберём числа r_i, q_i так, чтобы выполнялось неравенство

$x_i - \epsilon < r_i < x_i < q_i < x_i + \epsilon$, $i = \overline{1, n}$

Получается, что параллелепипед лежит внутри куба, то есть $x \in H(r_1, \ldots, r_n; q_1, \ldots, q_n) \subset B^n_\mu(x, \epsilon) \subset U$

Отсюда получается, что U представимо в виде объединения параллелепипедов указанного вида

3) <u>ТП, даже метризуемое, может не обладать счётной базой</u>

Рассмотрим прямую R с дискретной топологией τ^*, β – произвольная база дискретной топологии τ^*. Любое одноточечное подмножество $\{x\}$ в этой топологии открыто, значит представимо в виде объединения некоторых элементов базы. Но т.к. $\{x\}$ – одноточечное множество, то оно само является элементом базы, значит $\{\ \{x\} | x \in X\} \subset \beta$. Значит мощность базы β не меньше мощности R

14 Сравнение топологий

Пусть τ_1 и τ_2 – некоторые топологии на пространстве X. Если $\tau_1 \supset \tau_2$, то говорят, что τ_1 сильнее τ_2, или τ_2 слабее τ_1 и пишут $\tau_1 \geq \tau_2$. Если же $\tau_1 \supset \tau_2$, причём $\tau_1 \neq \tau_2$, то говорят, что τ_1 существенно сильнее τ_2, или τ_2 существенно слабее τ_1 и пишут $\tau_1 > \tau_2$. Но может оказаться так, что $\tau_1 \not\supset \tau_2$ и $\tau_2 \not\supset \tau_1$. Тогда говорят, что τ_1 и τ_2 несравнимы.

Примеры:

1) На любом пространстве X: $\tau^* > \tau^0$

Действительно, $\oslash$ и X, открытые в τ^0, будут открыты и в τ^*, но обратное неверно, так как открытое в τ^* одноточечное подмножество X не будет открытым в τ^0

Вообще говоря, τ^* – самая сильная топология, τ^0 – самая слабая

2) На R: τ_C не сравнима с τ^1

Надо показать, что $\tau_C \not\subset \tau^1$ и $\tau^1 \not\subset \tau_C$

$\tau_C \not\subset \tau^1$:

В τ_C открыты множества "с не более, чем со счётным числом дырок"то есть множества, полученные выбрасыванием не более чем счётного множества

Выбросим из R все рациональные числа, то есть рассмотрим множество иррациональных чисел

У нас не получится "покрыть"его открытыми интервалами топологии τ^1 (покрыть в смысле покрыть так, чтобы были покрыты только иррациональные числа), так как в любом интервале есть рациональные числа. Поэтому $\tau_C \not\subset \tau^1$.

$\tau^1 \not\subset \tau_C$:

В τ^1 открытыми множествами являются открытые интервалы.

Выбросим из R все рациональные числа, то есть рассмотрим множество иррациональных чисел.

У нас никак не получится "покрыть"интервал множеством иррациональных чисел, так как в каждом интервале есть рациональные числа, и они не будут покрыты. Поэтому $\tau^1 \not\subset \tau_C$.

Таким образом, τ_C и τ^1 не сравнимы

15 Эквивалентность метрик

Метрики ρ_1 и ρ_2 называются **эквивалентными** ($\rho_1 \sim \rho_2$), если они порождают одну и ту же топологию τ

16 Признак сравнения топологий с помощью ФСО

Пусть топологии τ_1 и τ_2 на множестве X порождены некоторыми ФСО $\nu_1 = \{V_\alpha^x | x \in X, \alpha \in A_x\}$ и $\nu_2 = \{W_\beta^x | x \in X, \beta \in B_x\}$, A_x, B_x – семейства индексов

$\tau_1 \geq \tau_2 \iff \forall x \in X, W_\beta^x \in \nu_2 \; \exists V_\alpha^x \in \nu_1 : V_\alpha^x \subset W_\beta^x$,

то есть для любой точки x из X и окрестности W_β^x из ФСО ν_2 найдется такая окрестность V_α^x из ФСО ν_1, что окрестность V_α^x будет целиком лежать в окрестности W_β^x

Пример

На R^2: $\overset{\infty}{\tau} > \tau^2$

$\forall x \in R^2, \epsilon > 0$ бабочка радиуса ϵ лежит в открытом шаре такого же радиуса, но обратное неверно, то есть открытый шар радиуса ϵ не будет лежать ни в какой бабочке с центром в этой точке

17 Замыкание, внутренность, граница множества, примеры

Пусть даны ТП $A \subset X$, $x \in X$

Точка x называется **близкой** для A, или точкой прикосновения, если любая окрестность точки x пересекается с A, то есть

$\forall U \in \tau(x) : U \cap A \neq \oslash$

Множество всех точек, близких для A, называется замыканием множества A.

Другая формулировка: замыкание множества A – самое "маленькое"замкнутое множество, которое содержит A

Обозначение: $\bar{A}$

Свойства:

1) $A \subset \bar{A}$

2) $\bar{A} \underset{cl}{\subset} X$, то есть замыкание – замкнутое множество

3) $A \underset{cl}{\subset} X \iff A = \bar{A}$

Точка x называется **внутренней** для A, если существует окрестность точки x,которая целиком лежит в A, то есть

$\exists U \in \tau(x) : U \subset A$

Множество всех внутренних точек множества A называется его внутренностью

Обозначение: $intA$

Свойства:

1) $intA \subset A$

2)$intA \underset{op}{\subset} X$, то есть внутренность – открытое множество

3) $U \underset{op}{\subset} X$ и $U \subset A \Longrightarrow U \subset (intA)$, т.е. если множество U открыто в X и оно лежит в A, то U лежит и во внутренности A

4) $A \underset{op}{\subset} X \iff A = intA$

5) Вычислительная формула:

$intA = X \backslash \overline{(X \backslash A)}$

Точка x называется **граничной** для A, если любая её окрестность пересекается как с A, так и с дополнением к A, то есть

$$\forall U \in \tau(x) : \begin{cases} U \cap A \neq \oslash \\ U \cap \overline{(X \backslash A)} \neq \oslash \end{cases}$$

Множество всех граничных точек называется границей множества A.

Обозначение: ∂A

Свойства:

1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$

2) $\partial A \underset{cl}{\subset} X$, то есть граница – замкнутое множество

3) $\bar{A} = (intA) \cup \partial A$, $intA \cap \partial A = \oslash$

Примеры:

1) $A = [a; b]$

Т.к. $[a; b] \underset{cl}{\subset} R$, то $\bar{A} = A$

$intA = X \backslash \overline{(X \backslash A)}$

$\overline{(X \backslash A)} = X \backslash (a; b)$

$intA = X \backslash \overline{(X \backslash A)} = X \backslash (X \backslash (a;b)) = X \backslash X \cup (a;b) = (a;b)$
$\partial A = \bar{A} \backslash intA = [a;b] \backslash (a;b) = \{a;b\}$

2) $Q \subset R$
$intA = \oslash$, потому что какую бы мы не взяли точку, она не будет лежать в Q вместе со свей окрестностью, потому что в каждому интервале есть иррациональные числа

$\bar{Q} = R$, потому что любая окрестность любого действительного числа (открытый интервал) пересекается с Q, потому что в любом интервале есть рациональные числа

$\partial Q = \bar{Q} \backslash (intQ) = R \backslash \oslash = R$

3) Пусть даны ТП (X, τ), $A \subset X$, A – всюду плотное (см. 18)
Если A – всюду плотное (см. 18), то $\bar{A} = X$

18 Сепарабельность, всюду плотные множества, примеры

Пусть даны ТП (X,τ), $A \subset X$. Множество A называется **всюду плотным в X**, если $\bar{A} = X$

Множество $A \subset X$ всюду плотно в X $\iff \forall U \neq \oslash : U \cap A \neq \oslash$, то есть любое непустое множество U пересекается с A

Пусть даны ТП (X,τ), $A \subset X$. Множество A называется **сепарабельным**, если оно содержит конечное или счётное множество, всюду плотное в X

Если пространство X имеет счётную базу, то оно сепрабельно

Примеры:

1) Множество Q всюду плотно в пространстве R $\Longrightarrow$ R сепарабельно, так как Q – счётное

2) (R,τ_c) не сепарабельно

Для любого счётного множества A существует открытое непустое множество B, которое не пересекается с A, например $B = (R \backslash A)$.

Поэтому нет всюду плотных множеств, значит (R,τ_c) не сепарабельно

3) ТП (X,τ^0) сепарабельно $\iff$ X конечно или счётно

Единственное всюду плотное множество в X – само множество X. Значит ТП (X,τ^0) сепарабельно $\iff$ X конечно или счётно

4) ТП (X,τ^*) всегда сепарабельно

В ТП (X,τ^*) любое непустое множество всюду плотно, значит ТП (X,τ^*) всегда сепарабельно

19 Аксиомы отделимости, примеры

Пусть дано ТП (X, τ). ТП (X, τ) называется T_1 - пространством, если любое одноточечное подмножество замкнуто, то есть

$\forall x \in X \ \{x\} \underset{cl}{\subset} X$

ТП X называется T_2 - пространством, или хаусдорфовым, если для любых двух точек x и y, $x \neq y$ найдутся дизъюнктные окрестности, то есть для двух разных точек найдутся две их такие окрестности, что эти окрестности не пересекаются

$\forall x, y \in X, x \neq y \ \exists U \in \tau(x), V \in \tau(y) : U \cap V = \oslash$

ТП X называется T_3 - пространством, если:

$$\begin{cases} X - T_1 \\ \forall F \underset{cl}{\subset} X, x \in \overline{(X \backslash F)}\ \exists U \in \tau(F), V \in \tau(x) : U \cap V = \oslash \end{cases}$$

То есть для замкнутого множества и точки, не лежащей в этом множестве, найдутся дизъюнктные окрестности

ТП X называется T_4 - пространством, если:

$$\begin{cases} X - T_1 \\ \forall F \underset{cl}{\subset} X, B \underset{cl}{\subset} X, F \cap B = \oslash\ \exists U \in \tau(F), V \in \tau(B) : U \cap V = \oslash \end{cases}$$

То есть для двух замкнутых непересекающихся множеств найдутся дизъюнктные окрестности

Пусть дано ТП (X, τ).

Если X - метризуемо, то оно T_4, если X - T_4, то оно T_3, если X - T_3, то оно T_2, если X - T_2, то оно T_1

Примеры:

1) Не T_1 - пространство: (R, τ^0) - **прямая с антидискретной топологией**

В этой топологии открыты только пустое множество и вся прямая, значит замкнутыми будут только их дополнения, то есть вся прямая и пустое множество, а одноточечное множество в число замкнутых не входит, значит (R, τ^0) – не T_1 - пространство

2) (R, τ_C) – T_1, но не T_2

Здесь замкнутыми будут любые не более чем счётные множества

Множество $\{x\}$, $x \in R$ – конечно, потому и замкнутое в этом ТП, значит (R, τ_C) – T_1

Покажем, что оно не T_2. Пусть $Ox = R \backslash A$, $Oy = R \backslash B$, $x, y \in R$,

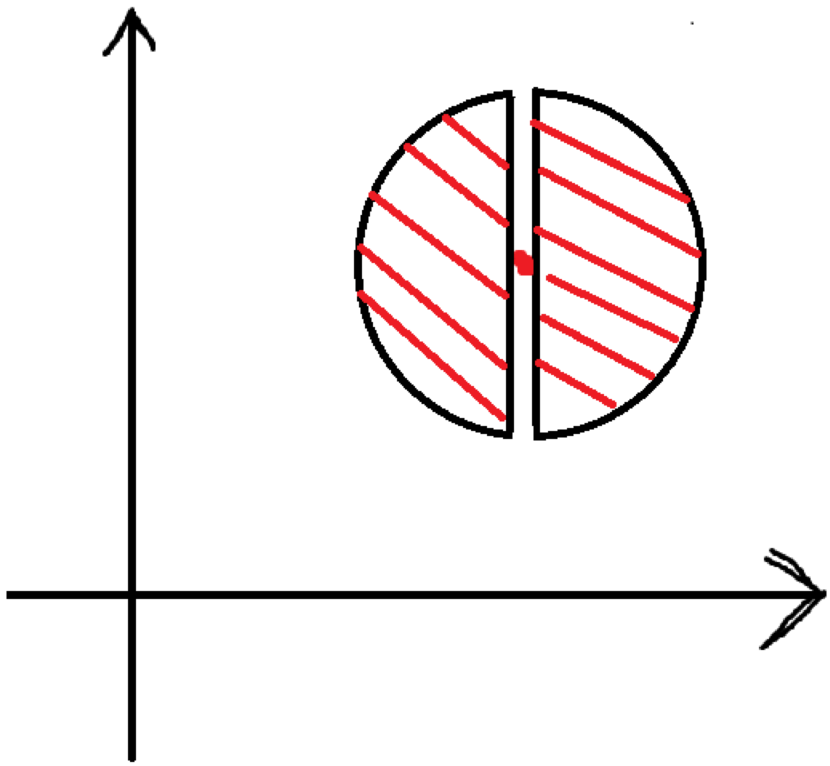
A и B – не более чем счётные

$Ox \cap Oy = (R \backslash A) \cap (R \backslash B) = R \backslash (A \cup B) \neq \oslash$

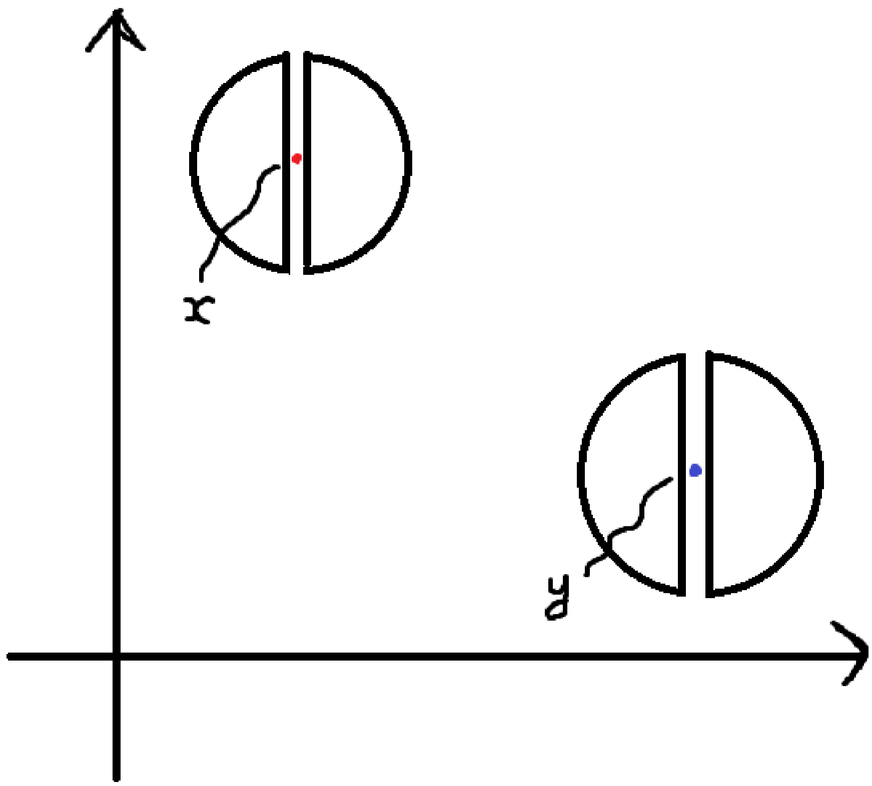
3) $(R^2, \overset{\infty}{\tau})$ – T_2, но не T_3, то есть хаусдорфово, но не регулярно

$\overset{\infty}{\tau}$ - топология "бабочек"

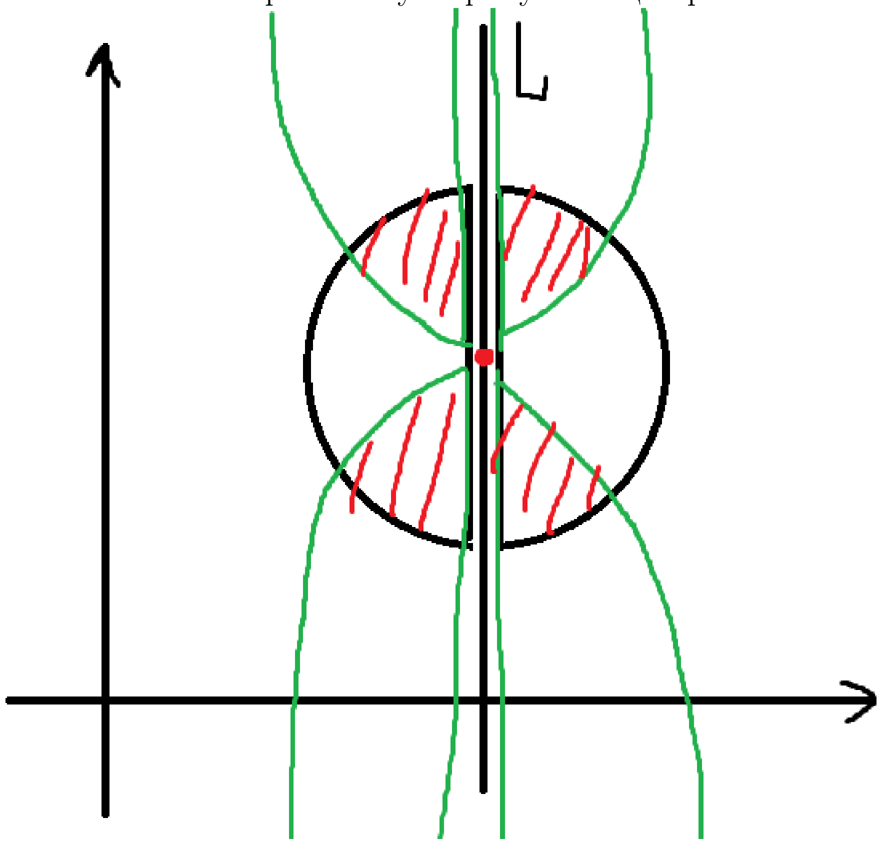
(берём открытый шар на плоскости R^2, выбрасываем из него вертикальную пряму, проходящую через центр, но сам центр оставляем)



а) для двух разных точек мы можем нарисовать две непресекающиеся бабочки



б) Пусть $F = L\backslash\{x_0\}$, $F \underset{cl}{\subset} (R^2, \overset{\infty}{\tau})$, то есть в качестве замкнутого множества возьмём вертикальную прямую без центра бабочки



По рисунку видно, что какие бы мы бабочки не построили, они всё равно будут пересекаться, то есть не будут дизъюнктными окрестностями

4) (R, τ_S) – T_4, но не метризуемо

τ_S – топология Зоргенфрея

В ней открыты полуинтервалы $[a; b)$ с включенным левым концом ("стрелки")

20 Понятие топологического подпространства

Пусть даны ТП (X,τ), $A \subset X$. Определим на множестве А топологию $\tau|_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$. Такая топология называется **индуцированной**, а ТП (A,$\tau|_A$) – **топологическим подпространством** (ТПП).

Отметим, что любое множество $A \subset X$ рассматирвают автоматически как подпространство в X. Множество $U \cap A, U \in \tau$ называют **отпечатком** множества U на подпространстве А

Верны следующие утверждения:

1) X со счётной базой $\Longrightarrow$ любое подпространство $A \subset X$ со счётной базой

2) X удовлетворяет первой аксиоме счётности $\Longrightarrow$ любое подпространство $A \subset X$ удовлетворяет первой аксиоме счётности

3) X метризуемо метрикой $\rho \Longrightarrow$ любое подпространство $A \subset X$ метризуемо индуцированной метрикой $\rho|_A$

к утверждению 3: пусть даны МП (X,ρ), $A \subset X$, $\rho : X \times X \to R$, тогда $\rho|_A : A \times A \to R$ – индуцированная метрика

21 ФСО в подпространстве

Пусть $\nu = \{V_t^x | x \in X, t \in T_x\}$ – ФСО топологии τ,

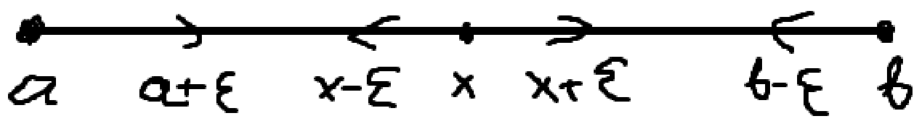
тогда $\nu|_A = \{V_t^a \cap A | a \in A, t \in T_a\}$ – ФСО индуцированной топологии $\tau|_A$

Пример

На отрезке $[a; b] \subset R$ в качестве элементарной окрестности возьмём:

Для точки а: $[a; a + \epsilon)$, $0 < \epsilon < b - a$

Для точки b: $(b-\epsilon; b]$, $0 < \epsilon < b-a$
$\forall x \in (a;b)$: $(x-\epsilon; x+\epsilon)$, $\epsilon > 0, a < x-\epsilon < x < x+\epsilon < b$



Семейство всех таких окрестностей есть ФСО индуцированной топологии на $[a;b]$

22 База в подпространстве

Пусть β – база топологии τ, тогда $\beta|_A = \{V \cap A | V \in \beta\}$ – база индуцированной топологии $\beta|_A$

23 Индуцированная топология

Пусть даны ТП (X,τ), $A \subset X$. Определим на множестве A топологию $\tau|_A = \{U \cap A | U \in \tau\}$. Такая топология называется **индуцированной**.

Примеры:
1) $Z \subset R$, $\tau^1|_Z = \tau^*$
Достаточно показать, что любое одноточечное множество $\{n\}, n \in Z$ открыто в Z
Действительно, потому что мы можем представить $\{n\}$ в виде
$\{n\} = (n - \frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}) \cap Z$

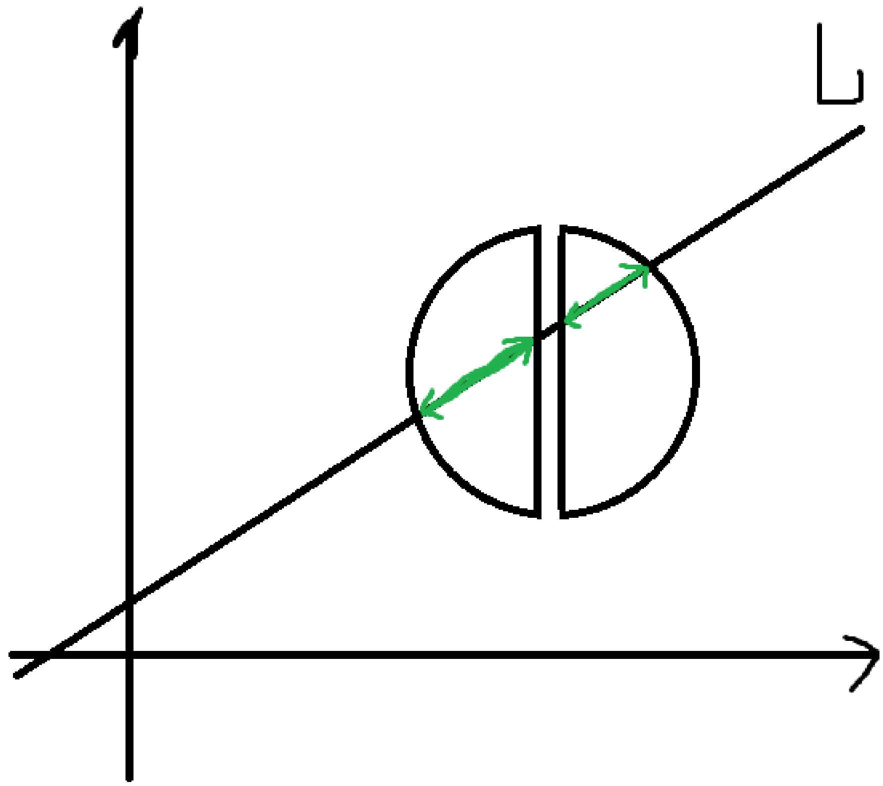
2) $Q \subset R$, $\tau_C|_Q = \tau^*$
Как и в предыдущем случае, достаточно показать, что любое одноточечное множество $\{r\}, r \in Q$ открыто в Q

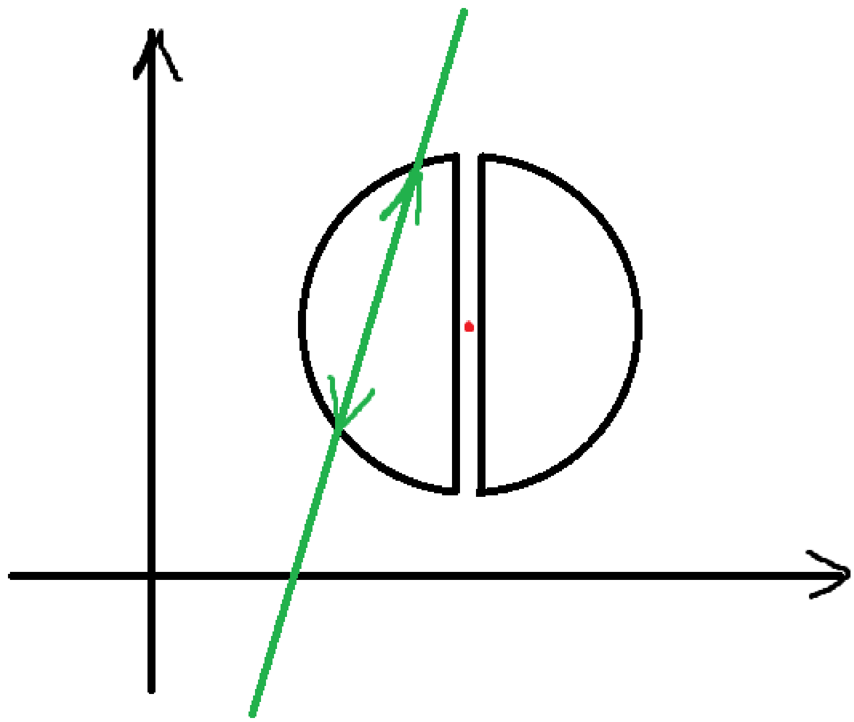
Фиксируем какое-то рациональное число r. Выбрасываем все рациональные числа из R, кроме r. Пусть $A = \{q \in Q | q \neq r\} = Q \backslash \{r\}$, $U = R \backslash A$, тогда $U = R \backslash (Q \backslash \{r\}) = (R \backslash Q) \cup \{r\} = I \cup \{r\}$, I - множество иррациональных чисел

$U \cap Q = \{r\}$

3) $L \subset (R^2, \overset{\infty}{\tau})$, L – прямая
Здесь мы сталкиваемся с двумя случаями:
$L \perp OX$ и $L \not\perp OX$

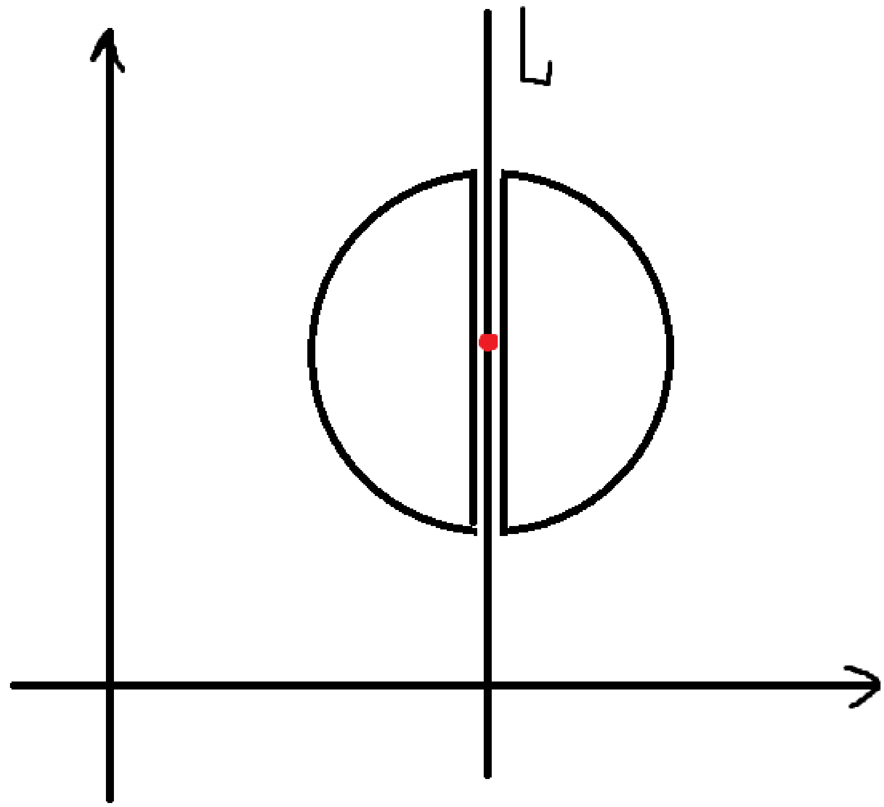
Рассмотрим случай $L \not\perp OX$:





В пересечении будет получаться либо один открытый интервал, либо два, поэтому $\overset{\infty}{\tau}|_A = \tau^1$

Рассмотрим случай $L \perp OX$:



Пересечение прямой и бабочки – точка, которая является центром бабочки, поэтому $\overset{\infty}{\tau}|_L = \tau^*$