Transformada de Fourier en Tiempo Continuo

CLAUDIA CATALINA CARO RUIZ

SEÑALES Y SISTEMAS 1

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

2021

Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - Convergencia
- Ejemplos

Resumen

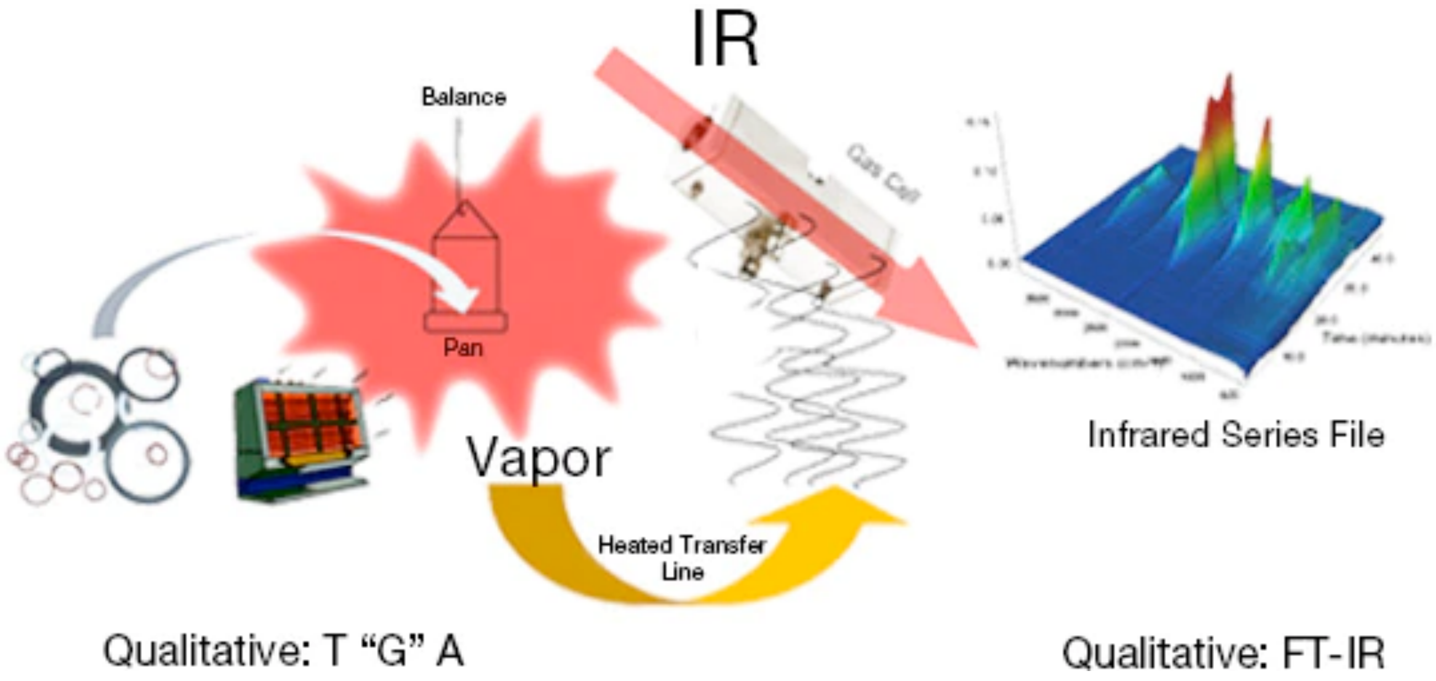
- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - convergencia
- Ejemplos

Transformada de Fourier

Ilustración de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático Frances y físico mejor conocido por iniciar la investigación de las series de Fourier y sus aplicaciones a problemas de transferencia de calor y vibraciones. La transformada de Fourier es una técnica para expresar formas de onda como sumas ponderadas de senos y cosenos.

“En 1820, Joseph Fourier descubre que la atmósfera es capaz de absorber el calor que emite la Tierra. Es en 1861, cuando el físico Irlandés John Tyndall descubre que el CO2 es un gas capaz de absorber el calor y aunque se encuentra en pequeñas cantidades, tiene un efecto importante en la temperatura de la Tierra. El Cambio Climático es el resultado de una alteración artificial del balance de gases de la atmósfera desde la Revolución Industrial.”

Transformada de Fourier



http://players.brightcove.net/665001591001/default_default/index.html?videoId=5331259763001

https://www.thermofisher.com/

Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - convergencia
- Ejemplos

Aplicaciones de la transformada de Fourier

Microscopic views of beer around the world
https://micro.magnet.fsu.edu/beershots/index.html

- ✓ **Filtrado**
- ✓ **Comunicaciones**
- ✓ **Algoritmos de reconocimiento músical**
- ✓ **Análisis de imágenes**
- ✓ **Compresion de imágenes, audio y video**
- ✓ **Espectroscopía, imágenes en resonancia magnética, computación cuántica**
- ✓ **Análisis en el dominio de la frecuencia**

Cuales son las principales aplicaciones de la transformada de Fourier?

Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - convergencia
- Ejemplos

Objetivos:

Entender relación de la transformada de Fourier con la serie de Fourier. Comprender las ecuaciones de análisis y síntesis. Comprender propiedades de la transformada Evaluar convergencia de la transformada

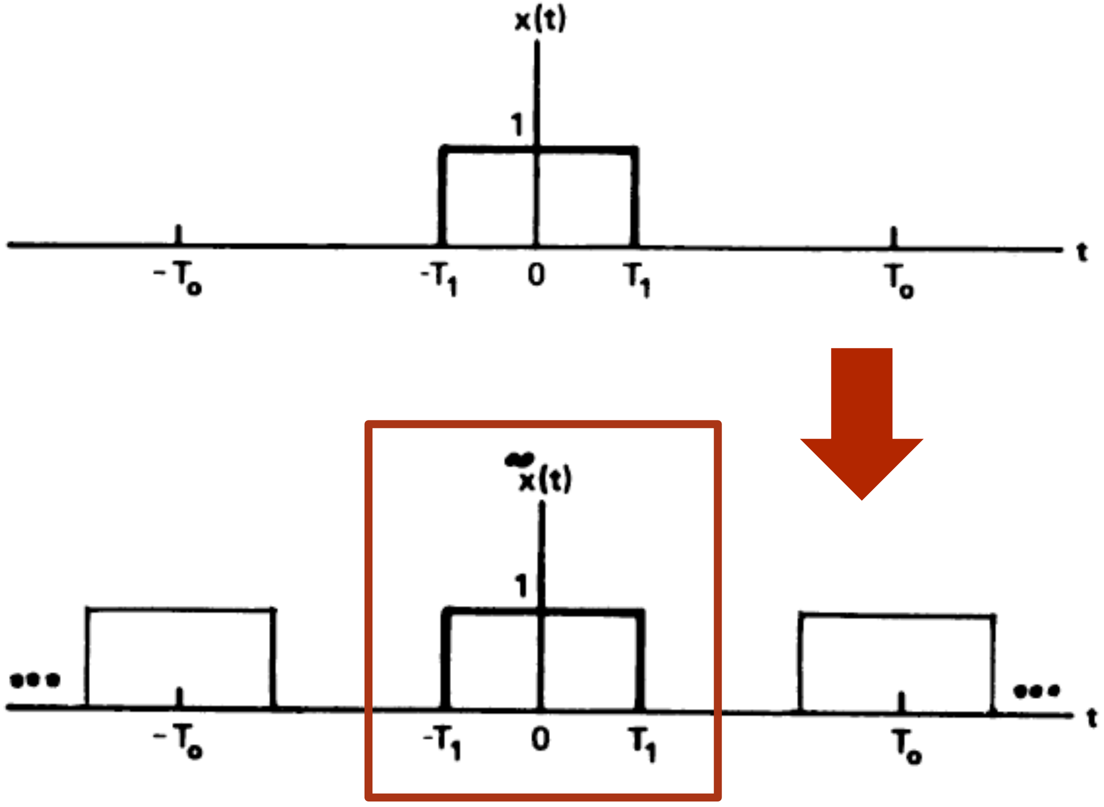
Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - convergencia
- Ejemplos

Transformada de Fourier

1. Represente una señal aperiódica como señal periódica con el periodo aumentando hacia infinito.
2. Use la serie de Fourier para representar la señal periódica aproximada $\tilde{x}(t)$
3. Haga que $T_0 \to \infty$ para representar $x(t)$

$x(t) = \tilde{x}\ (t)$ para $|t| \leq \frac{T_o}{2}$



Transformada de Fourier

Considere la serie de Fourier exponencial para la señal periódica $\tilde{x}(t)$ con periodo T_o

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{jk\omega_o t} \qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

Dentro de un periodo T_o los coeficientes de la serie están descritos por

$$a_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_o t} dt$$

estos coeficientes serán equivalentes a los coeficientes de la señal $x(t)$ entre $(-\infty, \infty)$

$a_k = \frac{1}{T_o}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt.$

Si definimos $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$ tal que $\boldsymbol{X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$

Entonces podemos decir que $X(\omega)$ es la envolvente de $T_o a_k$,

$$T_o a_k = X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_o}.$$

Reemplazando los coeficientes a_k en términos de $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{jk\omega_o t} = \frac{1}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(k\omega_o) e^{jk\omega_o t}.$$

Reemplazando $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ en $\tilde{x}(t)$,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(k\omega_o) e^{jk\omega_o t}\omega_o$$

Si $\omega_o \to 0, \tilde{x}(t) \to x(t), \omega_o \to d\omega, \sum \to \int$ entonces

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Transformada de Fourier

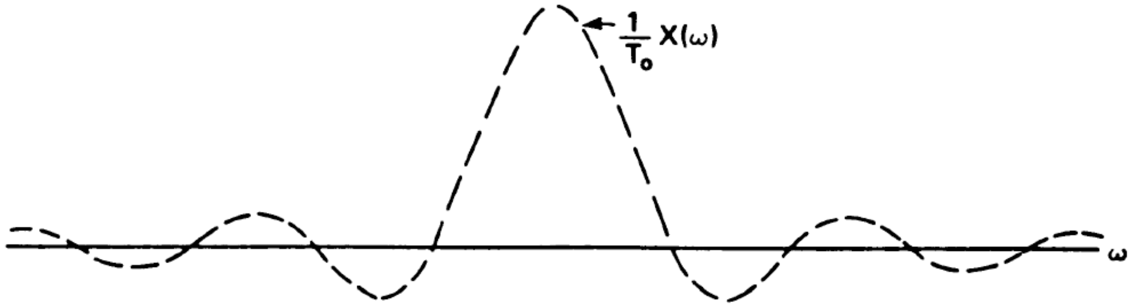
$T_o a_k = X(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_o}.$

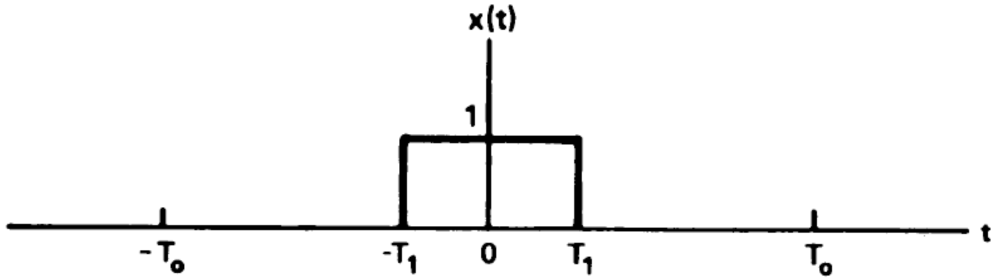
Transformada de Fourier

$$\Im\{x(t)\} = X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Transformada inversa de Fourier

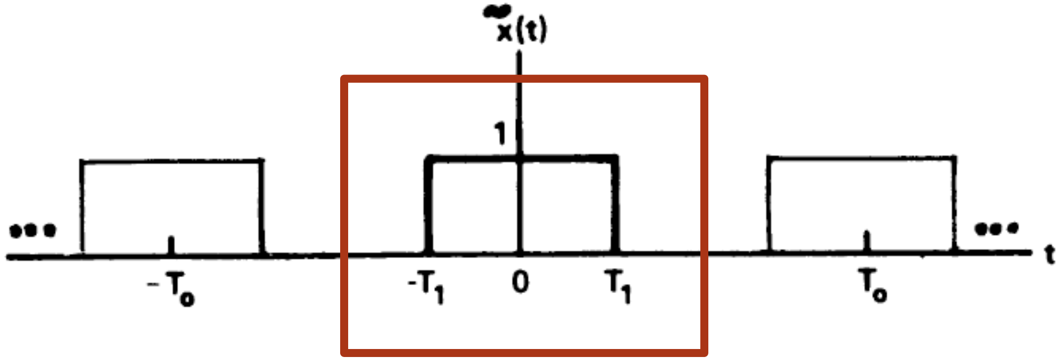
$$\Im^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

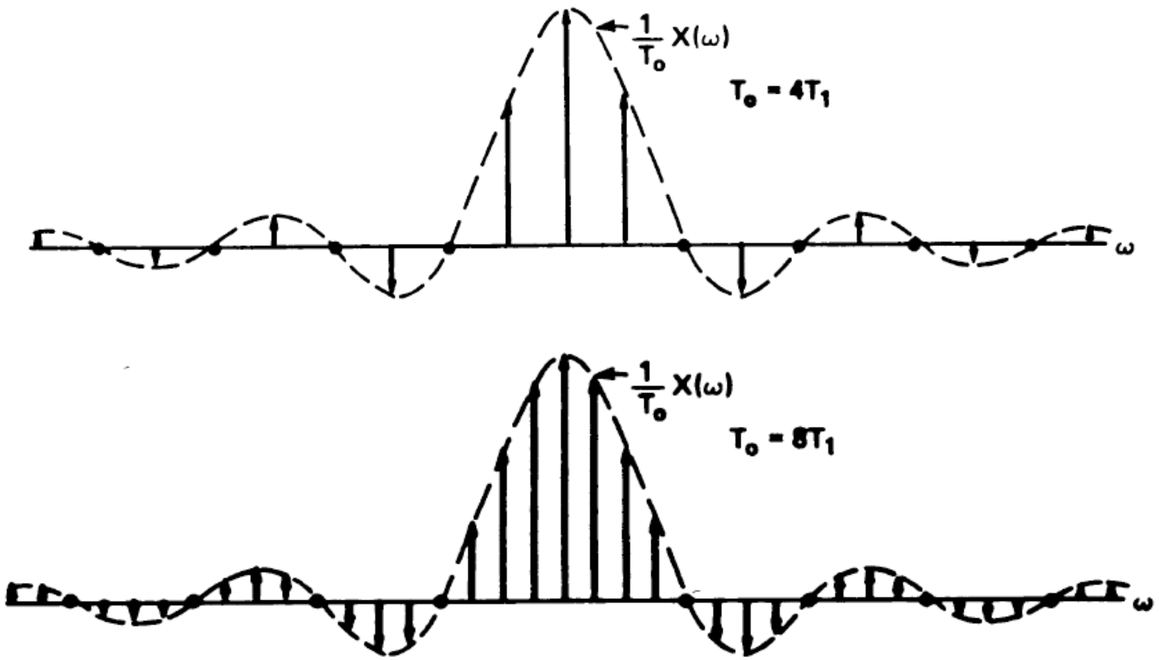




$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}\right) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega T_1) = \frac{2T_1}{\omega T_1}\sin(\omega T_1) = 2T_1 sinc(\omega T_1)$$

Transformada de Fourier





$$T_o a_k = X(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_o}.$$

Al aumentar el periodo disminuye el espacio entre coeficientes, cuando el periodo se hace infinito, los coeficientes convergen al continuo de la transformada.

Transformada de Fourier de una señal periódica

Considere una señal cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_o)$$

La transformada inversa de Fourier sería entonces

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_o t}$$

Ahora pensemos en una señal $\tilde{x}(t)$ con coeficientes de Fourier tal que $\tilde{x}(t) \leftrightarrow a_k$

Para este sistema la transformada de Fourier es

$$\tilde{x}(t) \leftrightarrow \tilde{X}(\omega)$$

Dicha transformada se puede escribir como una sumatoria de impulsos escalados con la amplitud del coeficiente *k*

$$\tilde{X}(\omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_o)$$

Para dicha transformada tendríamos una transformada inversa de la forma

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}(\omega)\, e^{j\omega t}d\omega$$

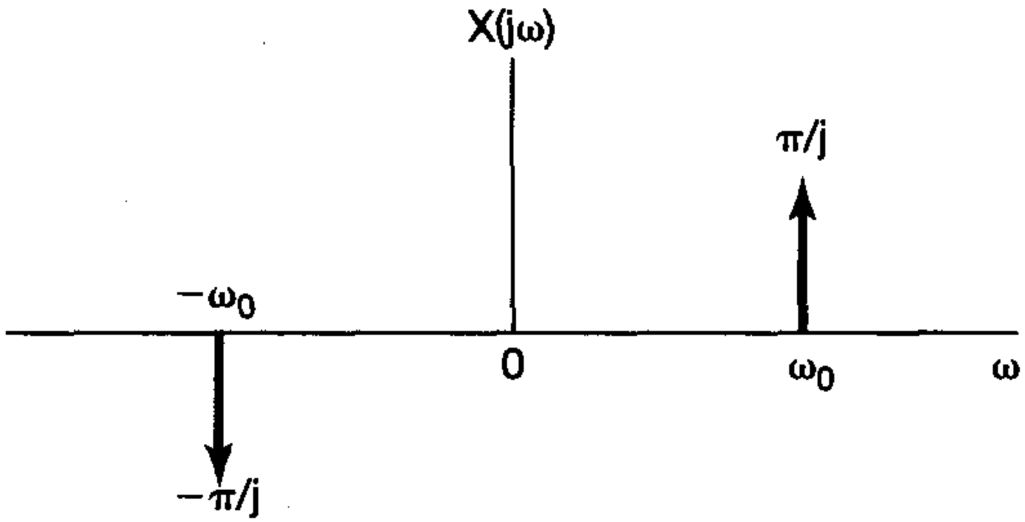
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2\pi\, a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Esta transformada corresponde con la serie de Fourier de la señal periódica

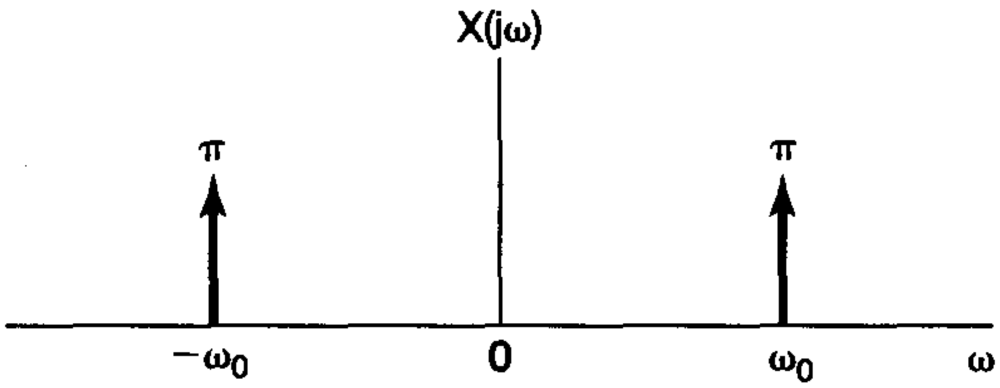
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k\, e^{jk\omega_o t}$$

Transformada de Fourier de una señal periódica

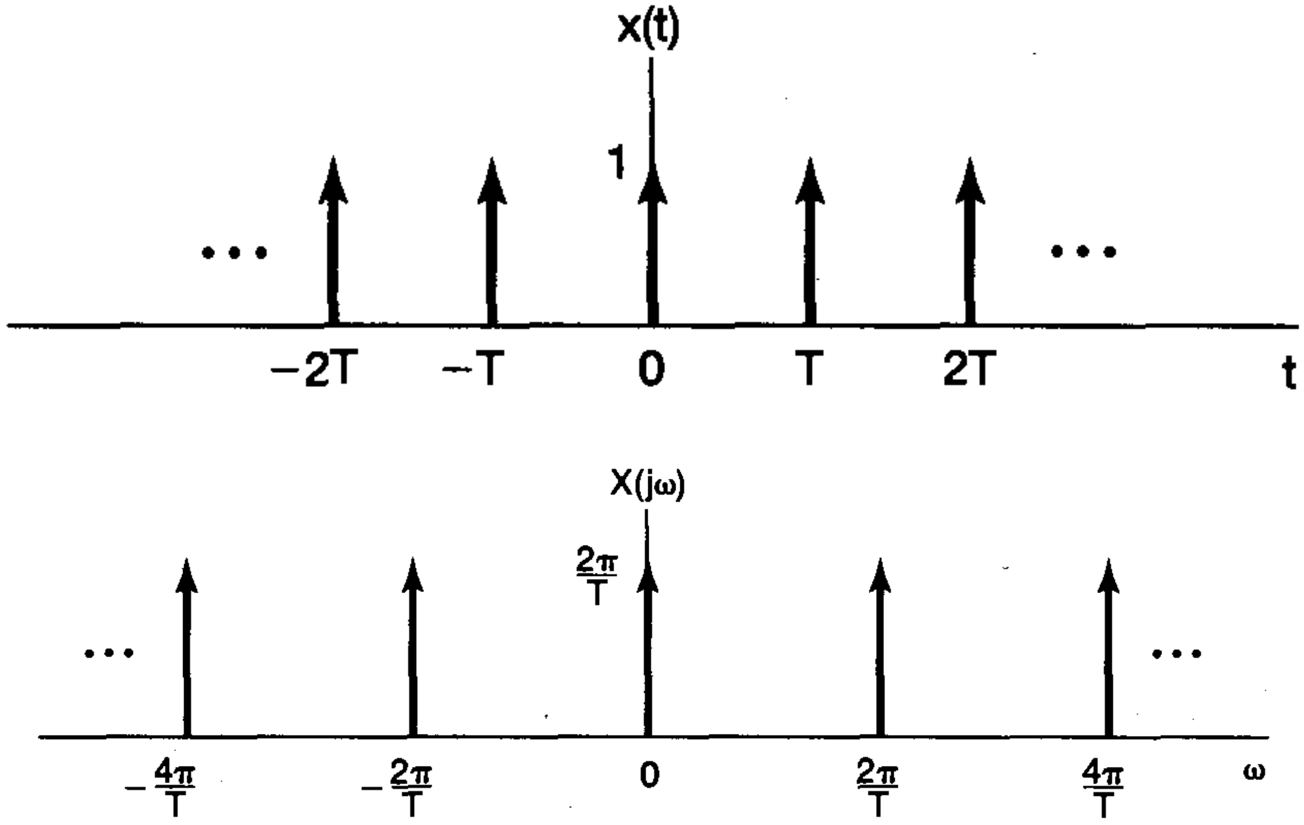
$$\boldsymbol{x(t) = \sin(\omega_o t)}$$



$$\boldsymbol{x(t) = \cos(\omega_o t)}$$



Transformada de Fourier de una señal periódica



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$a_k = \frac{1}{T_o}$$

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T_o} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_o}\right).$$

Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - convergencia
- Ejemplos

Propiedades de la transformada de Fourier

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$x(t - t_o) \leftrightarrow e^{-j\omega t_o} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$$

$$\mathfrak{Ev}\{x(t)\} \leftrightarrow \mathbb{Re}\{X(j\omega)\}$$
$$\mathfrak{Od}\{x(t)\} \leftrightarrow \mathbb{Im}\{x(t)\}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

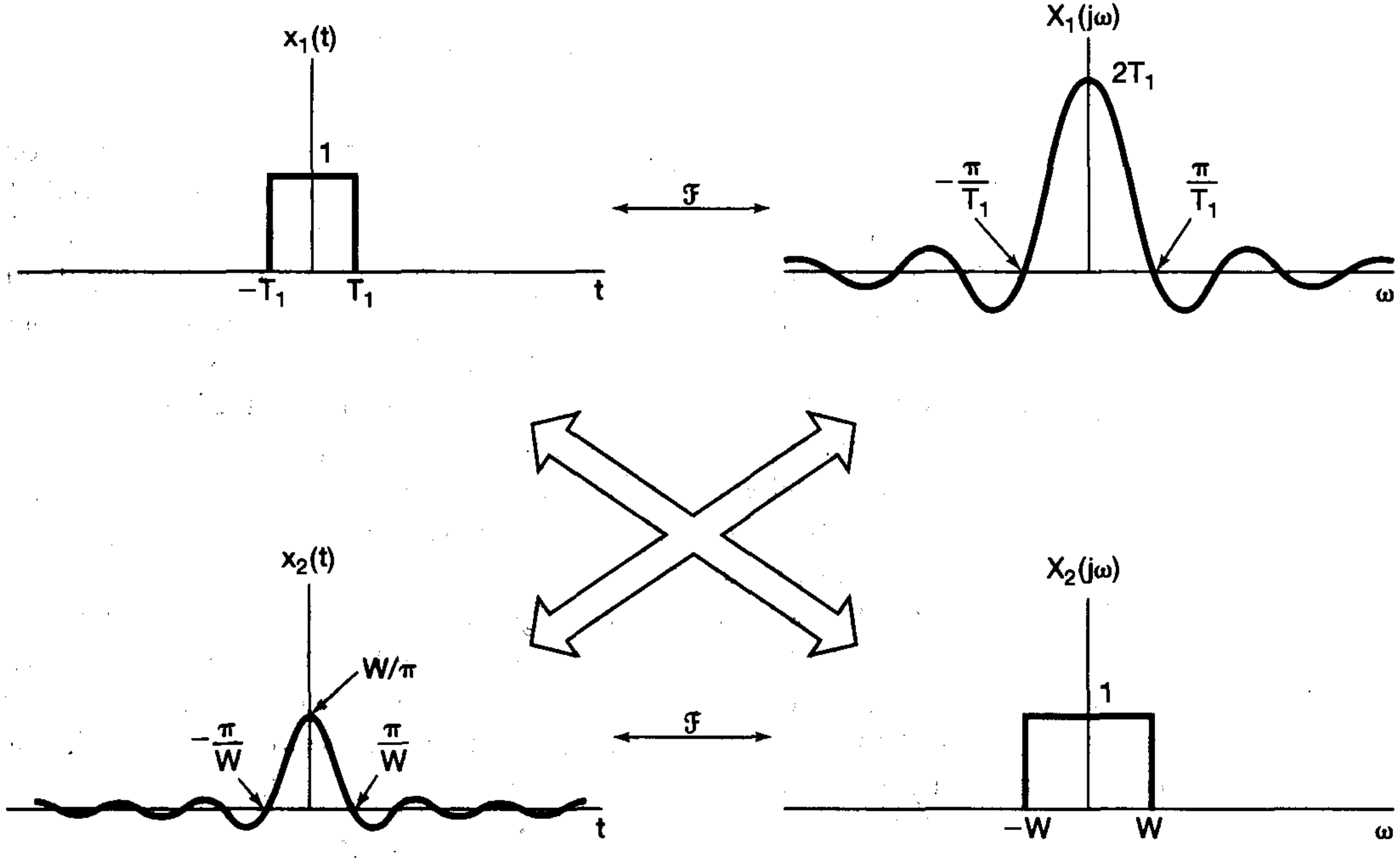
$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Propiedades de la transformada de Fourier

Dualidad

Para cualquier par de transformadas hay un par dual
con las variables de tiempo y frecuencia intercambiadas

$$e^{j\omega_o t}x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_o))$$



Propiedades de la transformada de Fourier

Pares básicos de transformadas

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes serie de Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_o)$	a_k
$e^{j\omega_o t}$	$2\pi\delta(\omega - k\omega_o)$	$a_1 = 1, \quad a_k = 0, k \neq 1$
$cos(\omega_o t)$	$\pi[\delta(\omega + k\omega_o) + \delta(\omega - k\omega_o)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0, k \neq 1$
$\sin(\omega_o t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega + k\omega_o) - \delta(\omega - k\omega_o)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2j},$ $a_k = 0, k \neq 1$
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_o = 1, a_k = 0, k \neq 1$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}\ para\ todo\ k$

Pares básicos de transformadas

Señal	Transformada de Fourier	Señal	Transformada de Fourier
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0 & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_o T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_o)$	$e^{-at}u(t), \mathbb{Re}\{u\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0 & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2sin(\omega T_1)}{\omega}$	$te^{-at}u(t), \mathbb{Re}\{u\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$		
$\delta(t)$	1		
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$		
$\delta(t - t_o)$	$e^{-j\omega t_o}$		

Propiedades de la transformada de Fourier

Relación de Parseval

La energía de una señal puede determinarse de dos formas, calculando la energía por unidad de tiempo ($|x(t)|^2$) e integrando sobre el tiempo, o calculando la energía por unidad de frecuencia ($|X(j\omega)|^2/2\pi$) e integrando sobre todas las frecuencias

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega$$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}$$

Propiedades de la transformada de Fourier

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propiedad de convolución

La transformada de Fourier mapea la convolución de dos señales en el producto de sus transformadas.

$H(j\omega)$ es la transformada de Fourier de la respuesta impulso.

Esta transformada carácteríza completamente el SLIT.

$H(j\omega)$ es la respuesta en frecuencia del sistema

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)d\tau = H(j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)}$$

Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad de multiplicación – Propiedad de modulación

$$\boxed{r(t) = s(t)p(t) \leftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]}$$

Debido a la dualidad entre tiempo y frecuencia, multiplicación en el dominio de tiempo corresponde con una convolución en el dominio de la frecuencia.

La multiplicación de una señal por otra puede ser entendido como usar una señal para escalar y modular la magnitud de la otra, de esta manera usualmente la multiplicación de dos señales se llama modulación de amplitud

Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - Convergencia
- Ejemplos

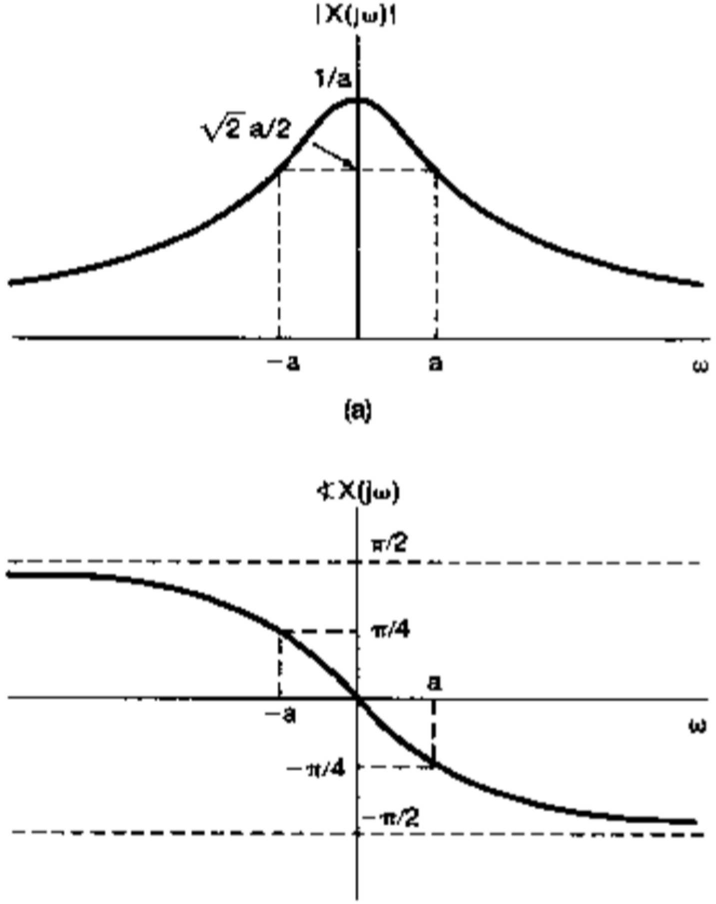
Convergencia de la transformada de Fourier

- $x(t)$ sea absolutamente integrable
  $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$
- $x(t)$ tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
- $x(t)$ tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además, cada una de estas discontinuidades debe ser finita

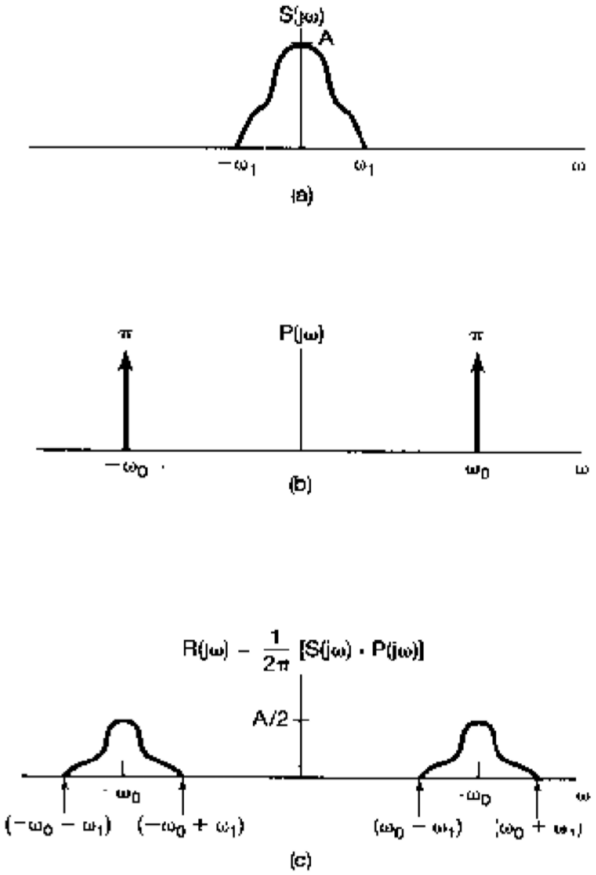
Resumen

- Introducción
  - Planteamiento
  - Aplicaciones
- Transformada de Fourier
  - Ecuaciones de síntesis y análisis
  - Propiedades
  - Convergencia
- Ejemplos

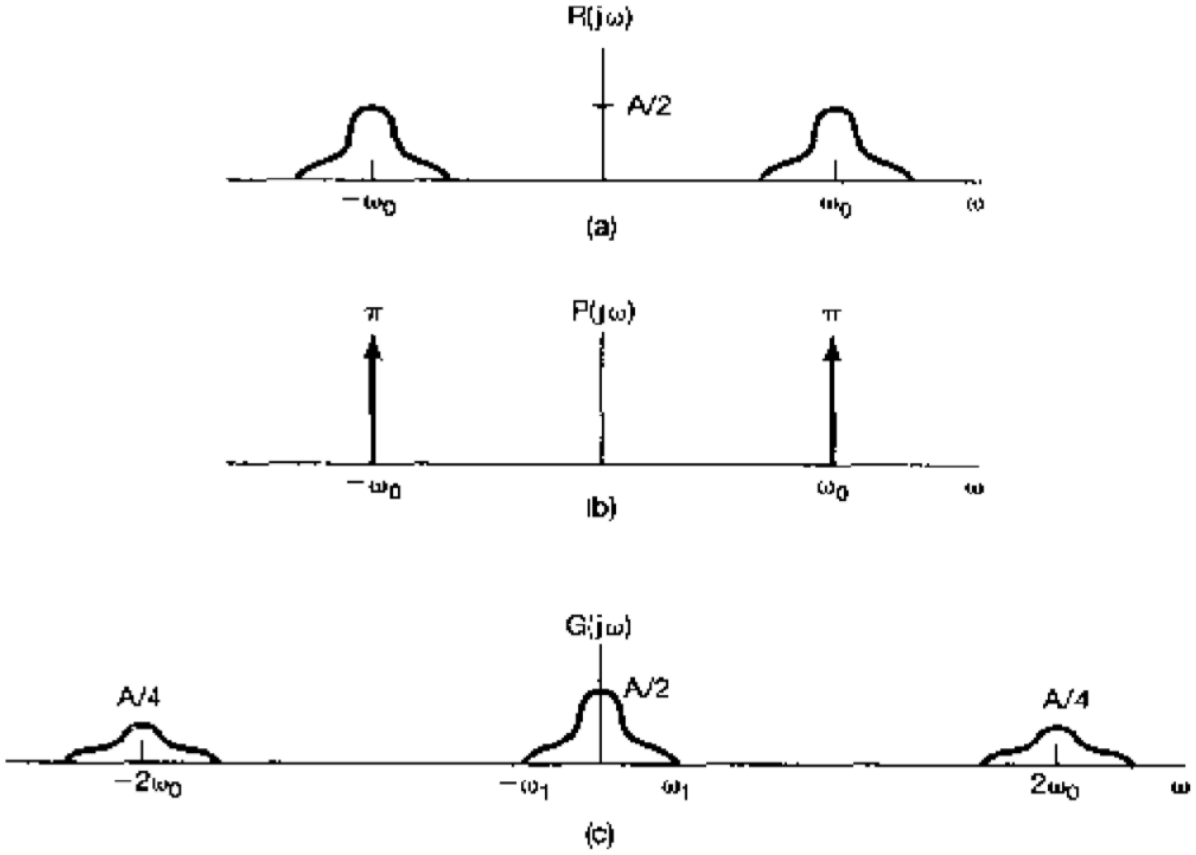
Ejemplo 1 – Transformada de Fourier



Ejemplo 2 – Modulación



Ejemplo 3 – Demodulación



Ejemplo 4 - Filtrado