CONVOLUCIÓN

Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[0,\infty)$ definimos la

$$f * g(t) = \int_0^t f(y)\, g(t-y)\, dy$$

Teorema de convolución

$$\mathcal{L}(f(t)\cdot g(t)) = \mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g) \qquad \mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\cdot \mathcal{L}(g)$$

→ Forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) * \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

Ejemplo: Calcular la TL inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} * \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}$$

$$= \int_0^t \frac{\operatorname{sen} 2y}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2(t-y))}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^t \cos(2y-(2t-2y)) + \cos(2y+(2t-2y))\, dy$$

Identidad trigonometrica $\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$$\frac{1}{8}\int_0^t \cos(4y-2t) + \cos(2t)\, dy$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}(4y-2t)}{4} + \cos(2t)\, y \Big|_0^t\right]$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + t\cos(2t) - \frac{\operatorname{sen}(-2t)}{4}\right]$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{2\operatorname{sen}(2t)}{4} + t\cos(2t)\right]$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + t\cos(2t)\right]$$

→ Por el teorema de convolución

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(y)\, dy\right) = \mathcal{L}(f(t))\cdot\mathcal{L}(1) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{s}$$

→ Forma inversa

$$\int_0^t f(y)\, dy = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) \quad \text{donde} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y^3\,dy\right) = \frac{\mathcal{L}(t^3)}{s} = \frac{\frac{3!}{s^4}}{s} = \frac{6}{s^5}$$

Verifiquemos.

$$\int_0^t y^3\,dy = \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^t = \frac{t^4}{4}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y^3\,dy\right) = \mathcal{L}\left(\frac{t^4}{4}\right) = \frac{4!}{4\,s^5} = \frac{6}{s^5}$$

Ejemplo: utilice el teorema de convolución para encontrar:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) \quad \text{donde} \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \operatorname{sen}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^t f(y)\,dy = \int_0^t \operatorname{sen}(y)\,dy$$

$$= -\cos(y)\Big|_0^t = -\cos(t) + \cos(0) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = 1-\cos(t)$$

Ejemplo: calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s(s^2+1)}}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right)$$

donde $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ $\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = 1-\cos(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^t f(y)\,dy = \int_0^t 1-\cos(y)\,dy = y - \operatorname{sen}(y)\Big|_0^t = t - \operatorname{sen}(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = t - \operatorname{sen}(t)$$

ECUACIONES INTEGRALES (DE VOLTERRA)

Una función integral es de la forma: $f(t) = g(t) + \int_0^t f(y)\,h(t-y)\,dy$

donde g y h son funciones conocidas y se quiere encontrar la función f que cumple con la ecuación.

Para resolver esta ecuación, utilizamos la técnica de transformada de Laplace para EDO.

Ejemplo: Resolver la ecuación integral

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(y)\,e^{t-y}\,dy$$

Solución:

1) TL en ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(3t^2) - \mathcal{L}(e^{-t}) - \mathcal{L}\left(\int_0^t f(y)\,e^{t-y}\,dy\right)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{3\cdot 2!}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \mathcal{L}(f * e^t)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s^2+1} - \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(e^t)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \mathcal{L}(f)\cdot\frac{1}{s-1}$$

Ahora, despejar $\mathcal{L}(f)$ en términos de s

$$\mathcal{L}(f)\left[1 + \frac{1}{s-1}\right] = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(f)\left[\frac{s}{s-1}\right] = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{(s-1)}{s}\left[\frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{(s-1)}{s}\left[\frac{6s+6-s^3}{s^3(s+1)}\right]$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{(s-1)(6s+6-s^3)}{s^4(s+1)}$$ utilizamos F. P.

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} + \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s+1}$$

La TL inversa: $f(t) = 1 + 6\frac{t^2}{2!} - 6\frac{t^3}{3!} - 2e^t$

Sol. de la ecuación integral

Ejercicios:

- Demuestre que $f * g = g * f$

- 7.4.2. ejer. 41 y 42

42) $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau$

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\cos t) + \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$\mathcal{L}(\cos t) + \mathcal{L}(f(t-\tau) * e^{t}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(y)\, dy\right) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(1) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{s}$$