Tema: Distancias, Repaso Álgebra, Vectores y Matrices Aleatorios

1. Las siguientes son 5 medidas sobre las variables x_1, x_2, y x_3 :

x_1	9	2	6	5	8
x_2	12	8	6	4	10
x_3	3	4	0	2	1

   Encuentre las matrices $\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{S}_n$, y $\mathbf{R}$.

2. Sea $\mathbf{x}' = [5, \quad 1, \quad 3]$ y $\mathbf{y}' = \left[\ -1, \quad 3, \quad 1\ \right]$

   (a) Grafique los dos vectores.

   (b) Encuentre (i) la longitud de $\mathbf{x}$, (ii) el ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, y (iii) la proyección de $\mathbf{y}$ en $\mathbf{x}$.

   (c) Dado que $\bar{x} = 3$ y $\bar{y} = 1$, grafique $[5-3, 1-3, 3-3] = [2, -2, 0]$ y $[-1-1, 3-1, 1-1] = [-2, 2, 0]$

3. Sea
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

   (a) ¿Es $\mathbf{A}$ una matriz simétrica?

   (b) Muestre que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

   (c) Determine los valores y vectores propios de $\mathbf{A}$.

   (d) Encuentre la descomposición espectral de $\mathbf{A}$.

   (e) Determine la inversa de $\mathbf{A}$.

   (f) Encuentre los valores y vectores propios de $\mathbf{A}^{-1}$.

4. Verifique las relaciones $\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{\rho} = \left(\mathbf{V}^{1/2}\right)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\left(\mathbf{V}^{1/2}\right)^{-1}$, donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es el $p \times p$ matriz de covarianza poblacional, $\boldsymbol{\rho}$ es la matriz de correlación poblacional $p \times p$ y $\mathbf{V}^{1/2}$ es la matriz de desviación estándar de la población.

5. Derive las expresiones para la media y las varianzas de las siguientes combinaciones lineales en términos de las medias y covarianzas de las variables aleatorias X_1, X_2, y X_3.

   (a) $X_1 - 2X_2$

   (b) $-X_1 + 3X_2$

   (c) $X_1 + X_2 + X_3$

   (d) $X_1 + 2X_2 - X_3$

   (e) $3X_1 - 4X_2$ si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes.

   Tema: Geometria de la muestra y muestreo aleatorio

6. Dada la matriz de datos

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Grafique el diagrama de dispersión en $p = 2$ dimensiones. Localice la media de la muestra en su diagrama.

   (b) Dibuje la representación $n = 3$ -dimensional de los datos y trace los vectores de desviación $\mathbf{y}_1 - \bar{x}_1\mathbf{1}$ y $\mathbf{y}_2 - \bar{x}_2\mathbf{1}$

   (c) Dibuje los vectores de desviación en (b) que emanan del origen. Calcula las longitudes de estos vectores y el coseno del ángulo entre ellos. Relacione estas cantidades con $\mathbf{S}_n$ y $\mathbf{R}$

   (d) Calcular la varianza muestral generalizada $|\mathbf{S}|$

7. Demuestre que $|\mathbf{S}| = (s_{11}s_{22}\cdots s_{pp})\,|\mathbf{R}|$

   Tema: Densidad normal multivariante y sus propiedades

8. Sea $\mathbf{V}$ una variable aleatoria vectorial con un vector medio $E(\mathbf{V}) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{v}}$ y una matriz de covarianza $E\left(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{V}}\right)\left(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{V}}\right)' = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{v}}$. Demuestre que $E\left(\mathbf{V}\mathbf{V}'\right) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{V}}'$

9. Considere una distribución normal bivariada con $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1$ y $\rho_{12} = -.8$

   (a) Escriba la densidad normal bivariada.

   (b) Escriba la expresión de distancia estadística al cuadrado $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ como una función cuadrática de x_1 y x_2.

10. Sea $\mathbf{X}$ $N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu}' = [-3, 1, 4]$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   ¿Cuáles de las siguientes variables aleatorias son independientes? Explique.

   (a) X_1 y X_2

   (b) X_2 y X_3