UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Elementos de física
Clase 6

David González, PhD.
Profesor Principal
Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

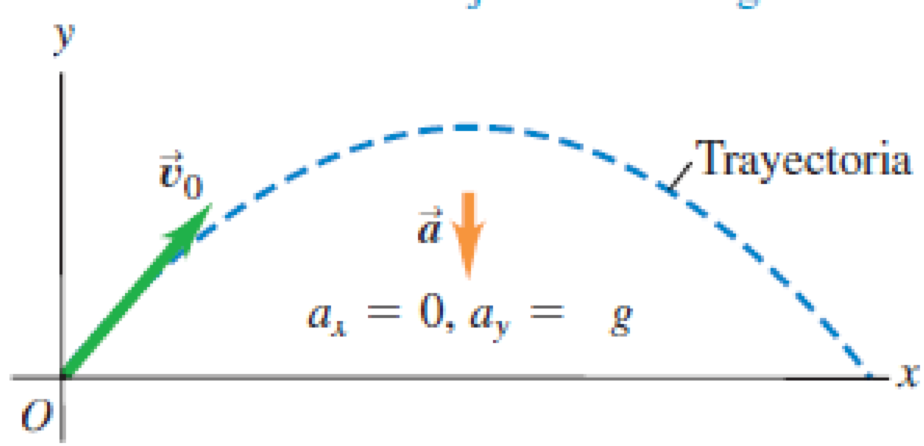
Febrero 15, 2023

Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

Un **proyectil** es un cuerpo que recibe una velocidad inicial y, luego, sigue una trayectoria determinada completamente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón de fútbol lanzado y una bala disparada por un rifle son proyectiles. El camino que sigue un proyectil se conoce como su **trayectoria.**

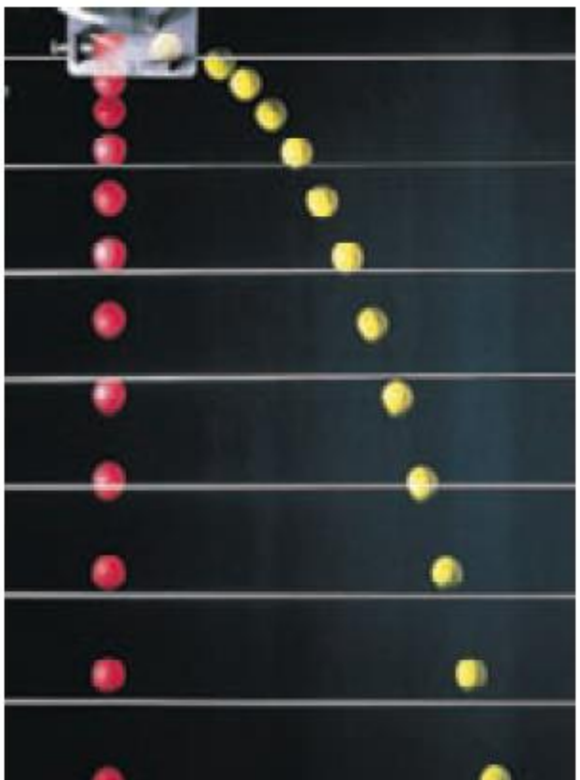
3.15 Trayectoria idealizada de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición *y*, velocidad *y* y aceleración *y*, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en *x*.



La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que ***podemos tratar por separado las coordenadas x y y***. En la figura 3.16 se ilustra esto para dos proyectiles: una pelota roja que cae a partir del reposo y una pelota amarilla proyectada horizontalmente desde la misma altura. La figura muestra que el movimiento horizontal del proyectil amarillo no tiene efecto sobre su movimiento vertical. Para ambos proyectiles, la componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a –g.

Podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante

Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

Como las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en el tiempo $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este instante sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento en x, sustituimos a_x por 0 en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.14}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.15}$$

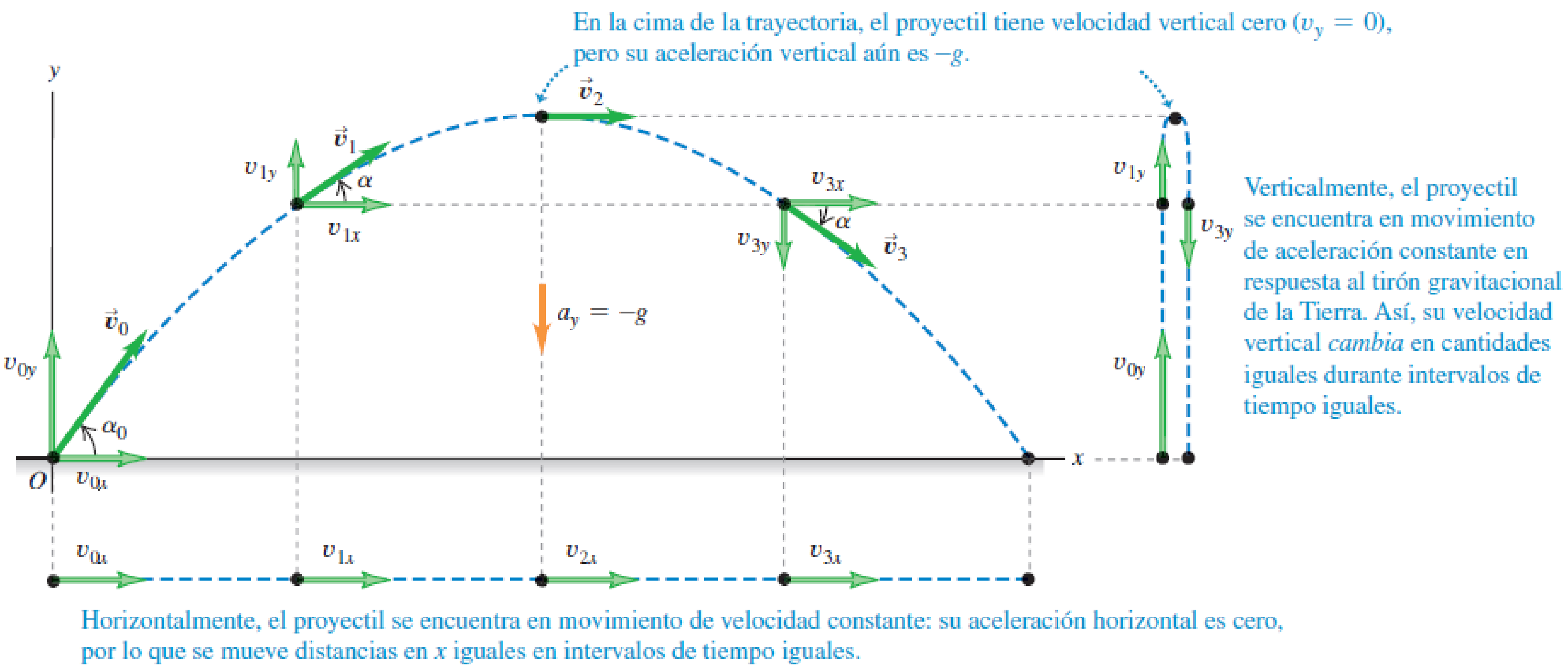
Para el movimiento en y, sustituimos x por y, v_x por v_y, v_{0x} por v_{0y}, y a_x por $a_y = -g$:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.16}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.17}$$

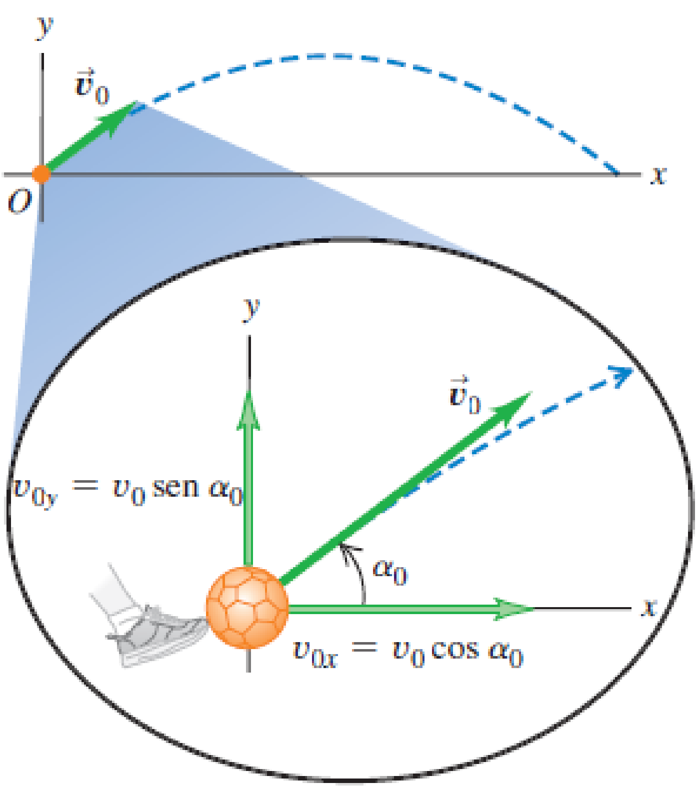
Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

3.17 Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.



Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

3.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol que se patea) se relacionan con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0.



$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$x = (v_0 \cos \alpha_0) t$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - g t$$

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

Podemos obtener mucha información de las ecuaciones (3.19) a (3.22). Por ejemplo, en cualquier instante t, la distancia r del proyectil al origen está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.23}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.24}$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje positivo x (vea la figura 3.17), está dada por

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.25}$$

El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

3.19 Las trayectorias casi parabólicas de una pelota que rebota

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), obtenemos $t = x/(v_0 \cos \alpha_0)$ y

$$y = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}x^2 \tag{3.26}$$

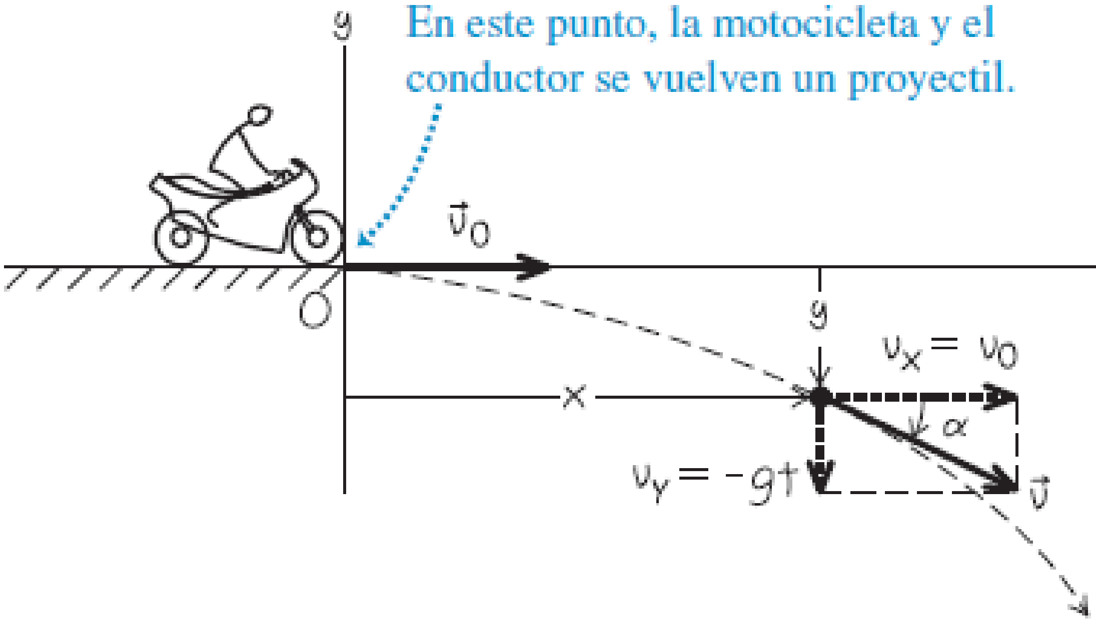
No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Como v_0, $\tan \alpha_0$, $\cos \alpha_0$ y g son constantes, la ecuación (3.26) tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Ésta es la ecuación de una *parábola*. En el modelo simplificado de movimiento de proyectiles, la trayectoria siempre es una parábola (**figura 3.19**).

Ejercicio en clase:

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.



EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y en $t = 0.50$ s son

$$x = v_{0x}t = (9.0\text{ m/s})(0.50\text{ s}) = 4.5\text{ m}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 = -\tfrac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)(0.50\text{ s})^2 = -1.2\text{ m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está por debajo de su punto inicial.

De acuerdo con la ecuación (3.24), la distancia de la motocicleta al origen en $t = 0.50$ s es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5\text{ m})^2 + (-1.2\text{ m})^2} = 4.7\text{ m}$$

Según las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en $t = 0.50$ s son

$$v_x = v_{0x} = 9.0\text{ m/s}$$
$$v_y = -gt = (-9.80\text{ m/s}^2)(0.50\text{ s}) = -4.9\text{ m/s}$$

La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$, pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). El vector velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0\text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.9\text{ m/s})\hat{\jmath}$$

A partir de la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en $t = 0.50$ s es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(9.0\text{ m/s})^2 + (-4.9\text{ m/s})^2} = 10.2\text{ m/s}$$

De acuerdo con la ecuación (3.26), el ángulo α del vector velocidad es

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-4.9\text{ m/s}}{9.0\text{ m/s}}\right) = -29°$$

La velocidad está dirigida 29° por abajo de la horizontal.

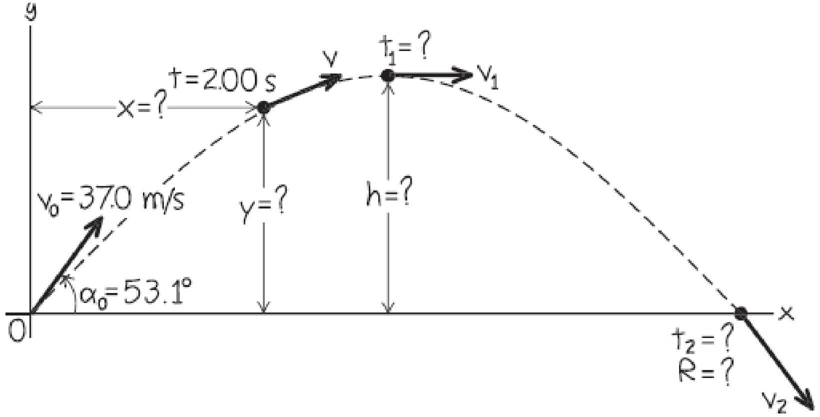
Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

Ejercicio en clase:

Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que ésta sale del bate con una rapidez $v_0 = 37.0$ m/s y un ángulo $\alpha_0 = 53.1°$. *a*) Calcule la posición de la pelota y su velocidad (magnitud y dirección) cuando $t = 2.00$ s. *b*) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto de su vuelo y su altura *h* en ese punto. *c*) Obtenga el *alcance horizontal R*, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo, y la velocidad de la pelota justo antes de caer.

Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

3.23 Diagrama de este problema.



EJECUTAR: *a*) Queremos obtener x, y, v_x y v_y en $t = 2.00$ s. La velocidad inicial de la pelota tiene las componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0\ \text{m/s})\cos 53.1° = 22.2\ \text{m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0 = (37.0\ \text{m/s})\,\text{sen}\, 53.1° = 29.6\ \text{m/s}$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.19) a (3.22),

$$x = v_{0x}t = (22.2\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) = 44.4\ \text{m}$$

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= (29.6\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})^2 = 39.6\ \text{m}$$

$$v_x = v_{0x} = 22.2\ \text{m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6\ \text{m/s} - (9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s}) = 10.0\ \text{m/s}$$

La componente y de la velocidad es positiva en $t = 2.00$ s, de modo que la pelota todavía va en ascenso (figura 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.24) y (3.25):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2\ \text{m/s})^2 + (10.0\ \text{m/s})^2} = 24.4\ \text{m/s}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0\ \text{m/s}}{22.2\ \text{m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$

La pelota se mueve a 24.4 m/s en una dirección 24.2° arriba de la horizontal.

Universidad del Rosario

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. Sea ese instante t_1; entonces,

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}$$

La altura h en el punto más alto es el valor de y cuando $t = t_1$:

$$\begin{aligned} h &= v_{0y}t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 \\ &= (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2 = 44.7 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, determinamos el tiempo t_2 cuando $y = 0$ (la pelota está en el suelo):

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \tfrac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt_2\right)$$

Ésta es una ecuación cuadrática en t_2, con dos raíces:

$$t_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6 \text{ m/s})}{9.80 \text{ m/s}^2} = 6.04 \text{ s}$$

La pelota está en $y = 0$ en estos dos tiempos. La pelota *abandona* el suelo en $t_2 = 0$, y en $t_2 = 2v_{0y}/g = 6.04$ s es cuando regresa al suelo.

El alcance horizontal R es el valor de x cuando la pelota vuelve al suelo, en $t_2 = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2 \text{ m/s})(6.04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

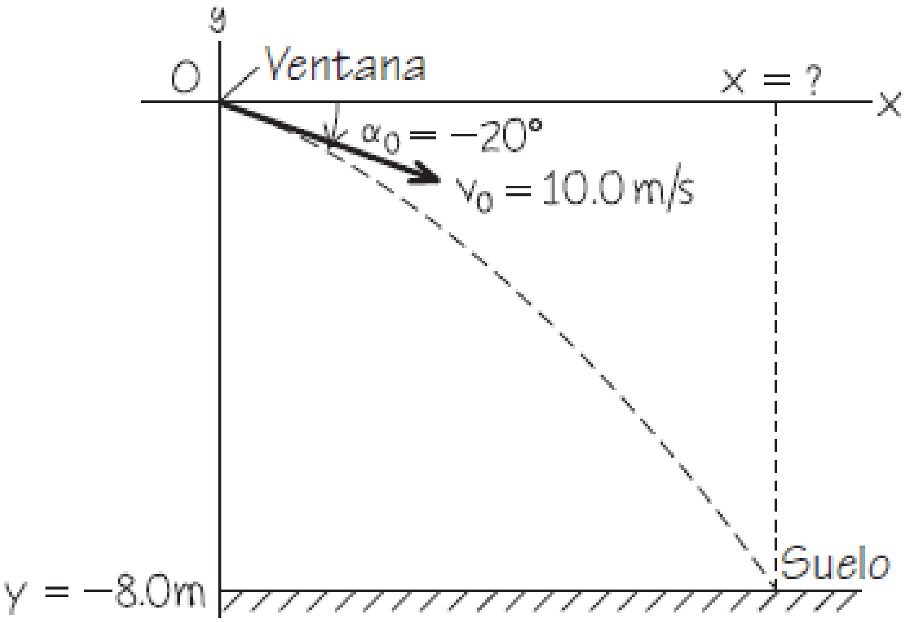
La componente vertical de la velocidad cuando la pelota toca el suelo es

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt_2 = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(6.04 \text{ s}) \\ &= -29.6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Como v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1°$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$.

Ejercicio en clase:

Usted lanza una pelota desde una ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° abajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana llegará la pelota al piso? Ignore la resistencia del aire.



Capítulo 3 – Movimiento de proyectiles

EJECUTAR: Para determinar t, rescribimos la ecuación (3.21) en la forma normal de una ecuación cuadrática en t:

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t + y = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)} \\ &= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g} \\ &= \frac{\left[\begin{array}{l}(10.0\ \mathrm{m/s})\ \operatorname{sen}(-20^\circ) \\ \quad \pm\sqrt{(10.0\ \mathrm{m/s})^2\ \operatorname{sen}^2(-20^\circ) - 2(9.80\ \mathrm{m/s^2})(-8.0\ \mathrm{m})}\end{array}\right]}{9.80\ \mathrm{m/s^2}} \\ &= -1.7\ \mathrm{s} \qquad \mathrm{o} \qquad 0.98\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Desechamos la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota llega al suelo en $t = 0.98$ s. De acuerdo con la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha_0)t = (10.0\ \mathrm{m/s})[\cos(-20^\circ)](0.98\ \mathrm{s}) \\ &= 9.2\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

Bibliografía

[1] Sears & Zemansky's University Physics (13th ed.); H.D. Young, R.A. Freedman. Addison-Wesley (2012)

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

¿Preguntas?

David González, PhD.
Profesor Principal
Davidfeli.gonzalez@urosario.edu.co
Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología
Universidad del Rosario

Universidad del Rosario