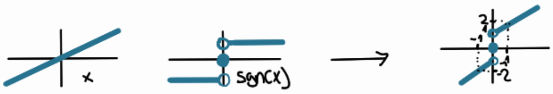
Taller 3: Limites y Continuidad

Laura Valentina González Rodríguez

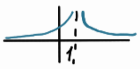
1. Por medio del teorema secuencial del límite, demuestre que los límites no existen:

a) $\lim_{x\to 0}[x+sgn(x)]$



Sea la sucesión $(x_n)=\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)=\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\dots\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, así $\lim_{n\to\infty}(x_n)=0$ y $x_n\neq 0$.
Ahora considerando $f(x_n)=\frac{(-1)^n}{n}+sgn(x_n)$, entonces la sucesión $\left(f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)=\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{4}{3},\frac{5}{4},-\frac{6}{5},\frac{7}{6},\dots\right)$
Como la sucesión $(f(x_n))$ no converge, $\lim_{x\to 0}(x+sgn(x))$ no existe
Particularmente, si $(y_n)=\left(\frac{1}{n}\right)\subseteq(x_n)$ y $(z_n)=\left(\frac{-1}{n}\right)\subseteq(x_n)$, sabemos que $\lim_{n\to\infty}(y_n)=\lim_{n\to\infty}(z_n)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
luego, $\lim_{n\to\infty}(f(y_n))=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+sgn\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(sgn\left(\frac{1}{n}\right)\right)=0+1=1$ y por el otro lado, tenemos $\lim_{n\to\infty}(z_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n}+sgn\left(\frac{-1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(sgn\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=0-1=-1$. Como $\lim_{n\to\infty}(y_n)\neq\lim_{n\to\infty}(z_n)$, $\lim_{x\to 0}(x+sgn(x))$ no existe.

b) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$



Sea la sucesión $(x_n)=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\left(0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\frac{7}{6},\dots\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, así $\lim_{n\to\infty}(x_n)=1$ y $x_n\neq 1$.
Ahora considerando $f(x_n)=\frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right)^2}=\frac{1}{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]^2}=\frac{1}{\frac{[(-1)^n]^2}{n^2}}=\frac{n^2}{[(-1)^n]^2}$. Sin embargo, note que si n es par, $[(-1)^n]^2=[1]^2=1$ y si n es impar, $[(-1)^n]^2=[-1]^2=1$, así $[(-1)^n]^2=1$, obteniendo que $f(x_n)=n^2$ y la sucesión $(f(x_n))=(1,4,9,16,25,\dots)$
Como la sucesión $(f(x_n))$ no converge, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ no existe.
Particularmente, sea $(y_n)=\left(\frac{1}{n}+1\right)\subseteq(x_n)$, sabemos que $\lim_{n\to\infty}(y_n)=1$ y $y_n\neq 1$. luego $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1-1\right)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)$ $=\lim_{n\to\infty}n^2$, este límite diverge al infinito. Como el límite no existe, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ no existe.

2. Demuestre por definición que $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{1}{2}$

Borrador:

$\left|\frac{x^2-x+1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2x^2-3x+1}{2(x+1)}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})}{2(x+1)}\right|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|\left|\frac{2x-1}{4(x+1)}\right|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|\cdot\left|\frac{1}{4}\right||2x-1|\cdot\left|\frac{1}{x+1}\right|<\varepsilon$

Si $|x-1|<1\to -1<x-1<1\to 0<x<2\to 0<2x<4\to -1<2x-1<3$ y $0<x<2\to 1<x+1<3\to\frac{1}{3}<\frac{1}{x+1}<1$.

Así $\frac{1}{4}|x-1||2x-1|\left|\frac{1}{x+1}\right|<|x-1|\cdot\frac{3}{4}<\varepsilon$

Formalmente

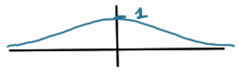
Sea $\varepsilon>0$, tomemos $\delta=\min\{1,\frac{4}{3}\varepsilon\}$. Si $|x-1|<\delta$, entonces:

1) $|x-1|<1\to -1<x-1<1\to 0<x<2\to 0<2x<4\to -1<2x-1<3$ y $0<x<2\to 1<x+1<3\to\frac{1}{3}<\frac{1}{x+1}<1$.
2) $\left|\frac{x^2-x+1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x^2-3x+1}{2(x+1)}\right|=\left|\frac{(x-1)(x-\frac{1}{2})}{2(x+1)}\right|=|x-1|\cdot\frac{1}{4}\cdot|2x-1|\cdot\left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{4}{3}\varepsilon\to|x-1|\cdot\frac{1}{4}\cdot 3<\frac{3}{4}\varepsilon\cdot 3\cdot\frac{1}{4}\to|x-1|<\varepsilon$.

luego si $0<|x-1|<\delta$, entonces $\left|\frac{x^2-x+1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{1}{2}$.

3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, tal que $f(x)>0$, para cada $x\in[a,b]$. Demuestre que existe $\alpha>0$ tal que $f(x)\geq\alpha$, para cada $x\in[a,b]$.

Note que f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, por el teorema de maximos-mínimos, f tiene un maximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a,b]$. Denotemos $\alpha = \min(f)$ el mínimo absoluto de f en $[a,b]$. Dado que $f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$, entonces $\alpha > 0$. Así, existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$, para cada $x \in [a,b]$.

4. Demuestre que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. 

Vamos a demostrar que $f(x)$ es una función de Lipschitz. Considerando $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $x, a \in \mathbb{R}$
$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+a^2}\right| = \left|\frac{1+a^2-1-x^2}{(1+x^2)(1+a^2)}\right| = \left|\frac{a^2-x^2}{(1+x^2)(1+a^2)}\right| = \left|\frac{x^2-a^2}{(1+x^2)(1+a^2)}\right| = \frac{|x-a|\,|x+a|}{(1+x^2)(1+a^2)} \leq \frac{|x-a|}{(1+x^2)(1+a^2)}(|x|+|a|) = |x-a|\left(\frac{|x|}{1+x^2} + \frac{|a|}{1+a^2}\right)$
$\leq |x-a|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = |x-a|$. Luego $|f(x) - f(a)| \leq 1 \cdot |x-a|$, note que por definición $f(x)$ es de Lipschitz.
Finalmente por teorema, como $f(x)$ es de Lipschitz entonces es uniformemente continua.