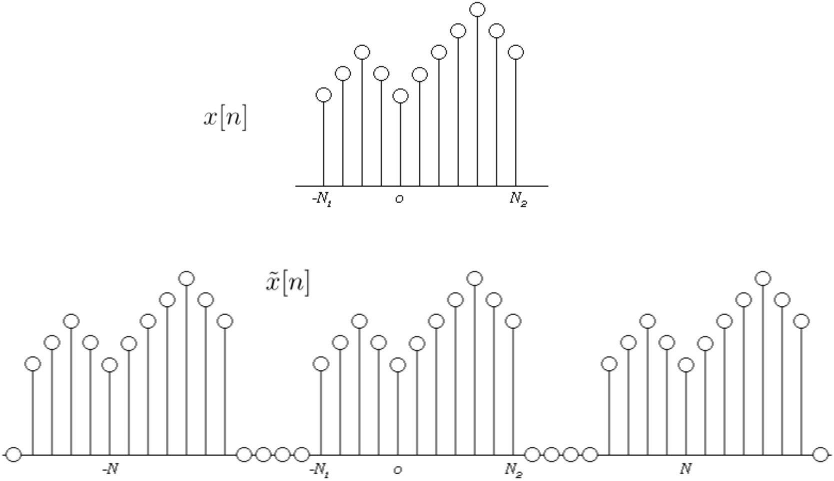
Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

- Para hallar la transformada de Fourier de una señal continua se partió de la de una señal periódica cuyo período aumentaba.
- Un enfoque similar se puede seguir en tiempo discreto.
- A partir de una secuencia finita de $N_1 + N_2 + 1$ muestras se construye una señal de período N y se hace aumentar progresivamente N.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto



Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- Para $\tilde{x}[n]$ se puede definir:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Pero $x[n] =$ entre $-N_1$ y N_2, entonces

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Ya que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $[-N_1, N_2]$

Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- Se define:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})$$

- Reemplazando a_k en la ecuación de síntesis:

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} N(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0 \end{aligned}$$

Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- Si ahora se hace $N \to \infty$, $\omega_0 \to d\omega$, la suma se convierte en una integral y $\tilde{x}[n] \to x[n]$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Es la transformada inversa discreta de Fourier, mientras que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Es la transformada discreta de Fourier

Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- $X(e^{j\omega})$ es el espectro de frecuencia de $x[n]$
- Los coeficientes de la serie de Fourier se pueden calcular a partir de la transformada.
- La transformada en tiempo discreto es periódica y de período 2π.
- La integral de la ecuación de síntesis se hace sobre un intervalo de longitud 2π

Ejemplo

- $x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$
- Aplicando la definición:

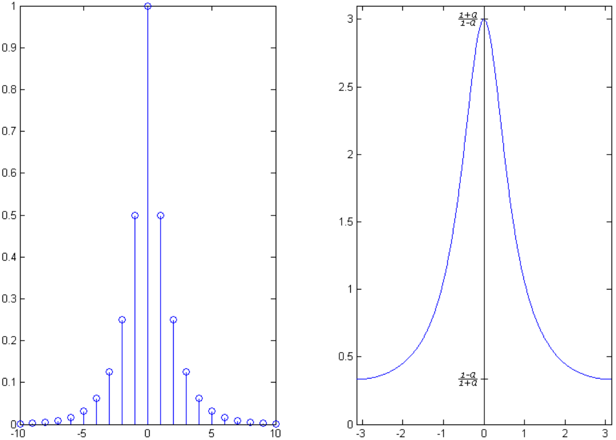
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Ejemplo

- $x[n] = a|n|, \quad |a| < 1$
- Aplicando la definición:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^m + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\
&= \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\
&= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-10
-5
0
5
10
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
$\frac{1+a}{1-a}$
$\frac{1-a}{1+a}$

Ejemplo

- Pulso rectangular $x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$
- Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{\sin\left(\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

Convergencia

- El argumento usado para deducir $X(e^{j\omega})$ se basó en señales de duración finita.
- Las ecuaciones encontradas aplican para un conjunto mucho más amplio de señales.
- La ecuación de análisis incluye una suma infinita cuya convergencia no está garantizada.
- Esta sumatoria convergerá si la secuencia $x[n]$ es absolutamente sumable o tiene energía finita

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Convergencia

- La integral de la ecuación de síntesis se calcula sobre un intervalo finito (2π).
- No presenta problemas de convergencia.
- La señal se puede aproximar integrando sobre un intervalo más pequeño.
- El error obtenido tenderá a cero a medida que el intervalo de frecuencias crece hasta su valor máximo.

Transformada de Fourier para Señales Periódicas Discretas

- Las funciones periódicas se pueden representar como sumas de exponenciales complejas.
- Teniendo la transformada de la exponencial compleja se podría calcular las de otras señales periódicas.
- En el caso continuo, la transformada de la exponencial compleja es un impulso en la frecuencia de la exponencial.
- La transformada de señales discretas es periódica.
- Supongamos que será un tren de impulsos de período 2π

Transformada de Fourier de la Exponencial Compleja Discreta

- Considere $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
- La correspondiente señal en tiempo sería:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)e^{j\omega n}d\omega
\end{aligned}
$$

- Un intervalo de longitud 2π contiene uno solo de los impulsos del tren

Transformada de Fourier de la Exponencial Compleja Discreta

- Tomemos el intervalo $[-\pi, \pi]$, este contendría el impulso correspondiente a $l = 0$.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier para Señales Periódicas

- Si ahora tenemos $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$

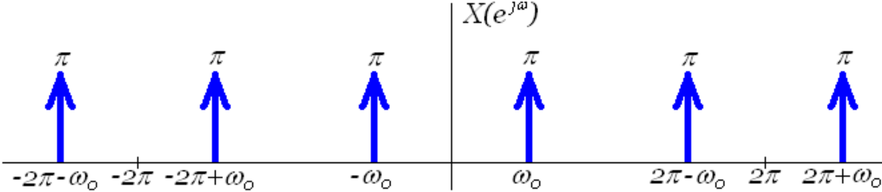
$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)\right] e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- $x[n] = \cos(\omega_0 n)$

$$\cos(\omega_o n = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

$$X(e^{j\omega})\pi \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega - 2\pi l) \right)$$

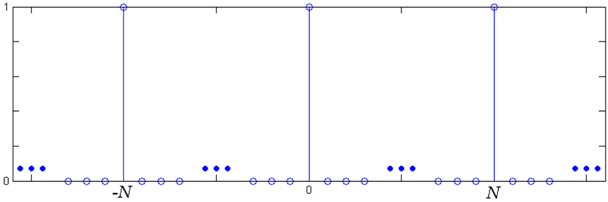


Ejemplo

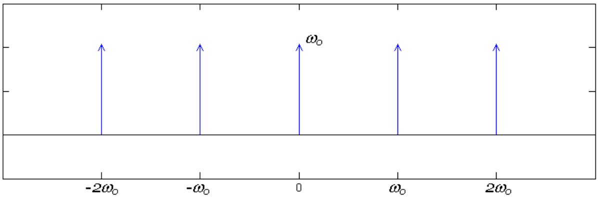
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-lN]\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\delta[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\sum a_k\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$



1
0
-N
0
N



ω_o
$-2\omega_o$
$-\omega_o$
0
ω_o
$2\omega_o$

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega})$
  - $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$
  - $Ax[n] + By[n] = z[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega}) = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$
- Periodicidad
  - $X(e^{(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

Desplazamientos en Tiempo y Frecuencia

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

$$x[n-n_0] = w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$Z(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} z[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$$

- Estas relaciones se pueden demostrar fácilmente reemplazando $x[n]$ por $x[n-n_0]$ en la ecuación de análisis y $X(e^{j\omega})$ por $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ en la ecuación de síntesis