

Muestreo

Guía de estudio

Asignatura:

Señales y sistemas I (2016506)

Docente:

Dr. Claudia Caro Ruiz

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Bogotá, Colombia

2021

1. Representar una señal continua mediante muestras

Bajo ciertas condiciones, una señal continua en el tiempo puede ser completamente representada y recuperada del conocimiento de sus valores o muestras en puntos igualmente espaciados en el tiempo. Esta posibilidad surge como un resultado del teorema del muestreo. A lo largo de esta sección se desarrollan los modelos para muestreo de señales continuas con tren de impulsos y con retenedor de orden cero y el teorema de muestreo.

1.1. Muestreo con tren de impulsos

Una forma útil para representar el muestreo de una señal continua es el uso de un tren de impulsos periódico multiplicado por la señal continua en el tiempo que queremos muestrear. Esta representación es conocida como el muestreo por tren de impulsos. $p(t)$ es el tren de impulsos entendido como la señal de muestreo, el periodo T es el periodo de muestreo y la frecuencia de muestreo $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. El muestreo en el dominio del tiempo se ve de la forma

$$x_p(t) = x(t)p(t), \quad (1)$$

reemplazando $p(t)$ como un tren de impulsos infinito espaciados en t

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (2)$$

Al multiplicar la señal $x(t)$ por un impulso unitario en el valor de la señal, en el punto en el cual el impulso está localizado es $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$. Aplicando esto a $x_p(t)$ se obtiene un tren de impulsos con las amplitudes de los impulsos iguales a las muestras de $x(t)$ en intervalos espaciados por T como se muestra a continuación

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT). \quad (3)$$

La Figura 1 presenta un diagrama de bloques del sistema de muestreo y reconstrucción de la señal $x(t)$. El bloque $H(j\omega)$ representa un filtro pasabajos. La señal $x_r(t)$ es la señal reconstruida.

Por la propiedad de multiplicación tenemos que la transformada de Fourier de $x_p(t)$ es la convolución de las transformadas de Fourier de las señales $x(t)$ y $p(t)$.

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)]. \quad (4)$$

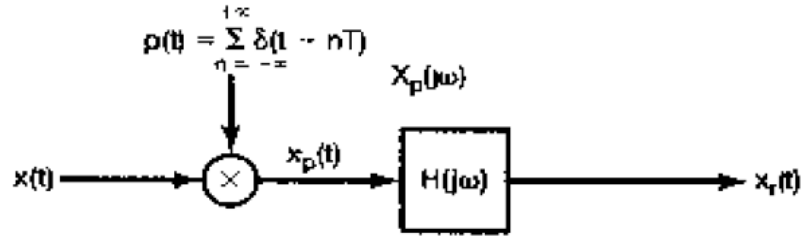


Figura 1: Sistema de muestreo por tren de impulsos y reconstrucción con filtro pasa bajos
Se tiene que la transformada de Fourier de un tren de impulsos es equivalente a un tren de impulsos en frecuencia con impulsos separados una distancia ω_s .

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s). \quad (5)$$

Dado que la convolución con un impulso desplaza la señal tal que $X(j\omega) * \delta(j(\omega - k\omega_s))$ se tendra entonces que la transformada de Fourier de $x_p(t)$ está dada por

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)). \quad (6)$$

De esta forma, $X_p(j\omega)$ es una función periódica de ω consistiendo de una superposición de réplicas desplazadas de $X(j\omega)$ escaladas en $1/T$.

En la Figura 2 a), se observa el espectro $X(j\omega)$ de la señal original $x(t)$. El ancho de banda de dicha señal es $2\omega_M$. La Figura 2 b) presenta el espectro $P(j\omega)$ de la función de muestreo $p(t)$. Consiste en un tren de impulsos distanciados una frecuencia ω_s . El espectro de la señal muestreada se presenta en la Figura 2 c) indicando que el espectro de $X_p(j\omega)$ replica el espectro de $X(j\omega)$ en cada múltiplo de la frecuencia ω_s . La Figura 2 d) presenta el caso en el que $\omega_M < \omega_s - \omega_M$, de forma equivalente $\omega_s > 2\omega_M$. En este caso no se presenta solapamiento entre las réplicas de los espectros, la señal puede recuperarse de forma precisa utilizando un filtro pasabajos de ganancia T y con frecuencia de corte mayor que ω_M y menor que $\omega_s - \omega_M$. En la Figura 2 e) se tiene que $\omega_s < 2\omega_M$ y por lo tanto existe un solapamiento en el espectro de la señal $X_p(j\omega)$ y la señal de $x(t)$ no puede recuperarse directamente de este espectro. Por tanto el teorema de muestreo establece el siguiente criterio:

Theorem 1.1 Sea $x(t)$ una señal limitada en banda con $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_M$. Entonces, $x(t)$ es determinada únicamente por sus muestras $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si

$$\omega_s > 2\omega_M, \quad (7)$$

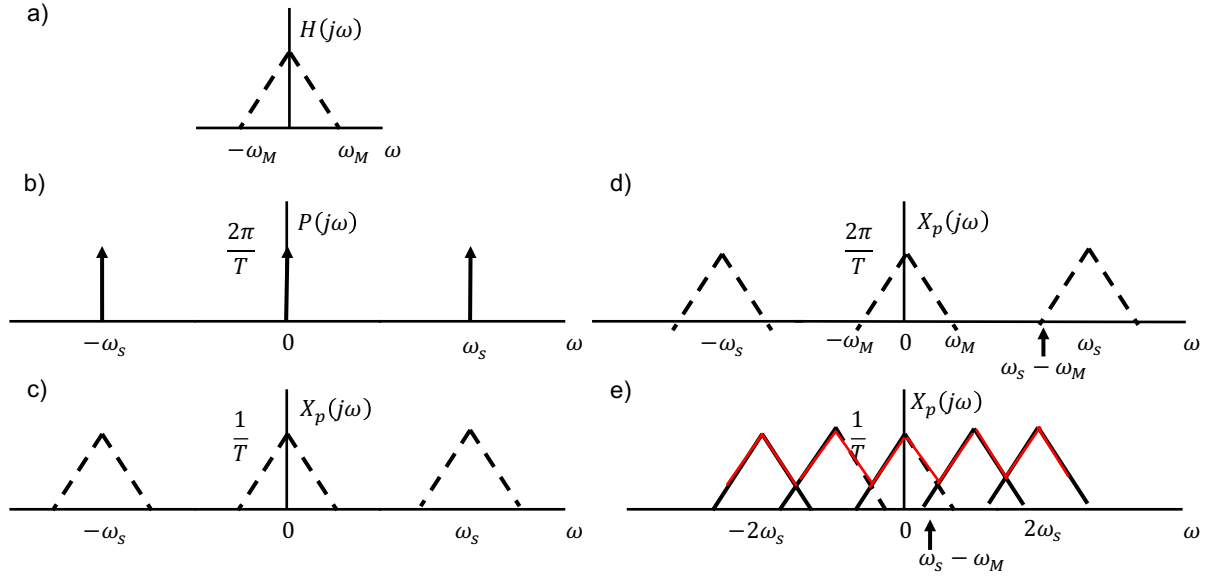


Figura 2: Efecto en el dominio de la frecuencia del muestreo en el dominio del tiempo. a) Espectro de la señal original $x(t)$. b) Espectro de la función de muestreo. c) Espectro de la señal muestreada d) Espectro de la señal muestreada con $\omega_s > 2\omega_M$. e) Espectro de la señal muestreada con $\omega_s < 2\omega_M$.

donde

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}. \quad (8)$$

La frecuencia $2\omega_M$ es conocida como la tasa de Nyquist. De acuerdo al teorema de muestreo la frecuencia de muestreo debe exceder este valor.

La Figura 3 presenta una señal en color naranja $x(t) = \sin(\omega_M t)$ con $\omega_M = 2\pi \times 10 \text{ kHz}$. En color azul se presenta la función tren de impulsos con frecuencia $\omega_s = 50 \text{ kHz}$. La señal amarilla representa la señal muestreada $x_p(t)$ compuesta por un conjunto de impulsos de magnitud $x(nT)$.

1.2. Muestreo con retenedor de orden cero

De acuerdo al teorema de muestreo, el muestreo es más fácil de explicar utilizando un tren de impulsos. Sin embargo generar y transmitir pulsos de gran amplitud que aproximen los impulsos puede ser complicado, por lo tanto es más conveniente generar la señal muestreada en la forma referida como retenedor de orden cero. Este sistema toma muestras de $x(t)$ en un instante dado y mantiene este valor hasta el siguiente instante en el que se tome una muestra. Esto se logra utilizando el sistema en la Figura 1. La Figura 5 presenta la representación de la señal muestreada con el retenedor de orden cero. La línea azul representa la señal $x_p(t)$ y la señal naranja representa la señal $x_0(t)$. La señal resultante es una señal continua escalonada.

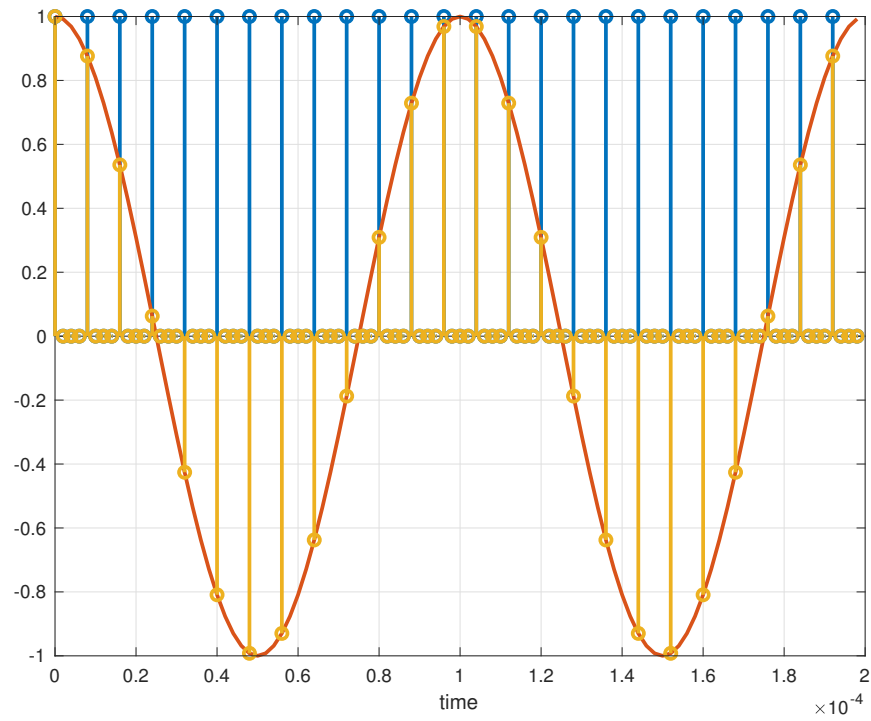


Figura 3: Muestreo con tren de impulsos a $F_s = 50KHz$

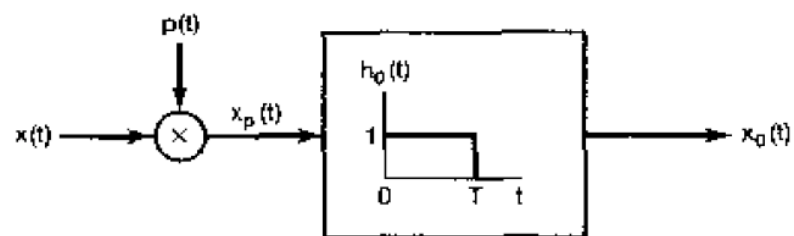


Figura 4: Sistema de muestreo con retenedor de orden cero

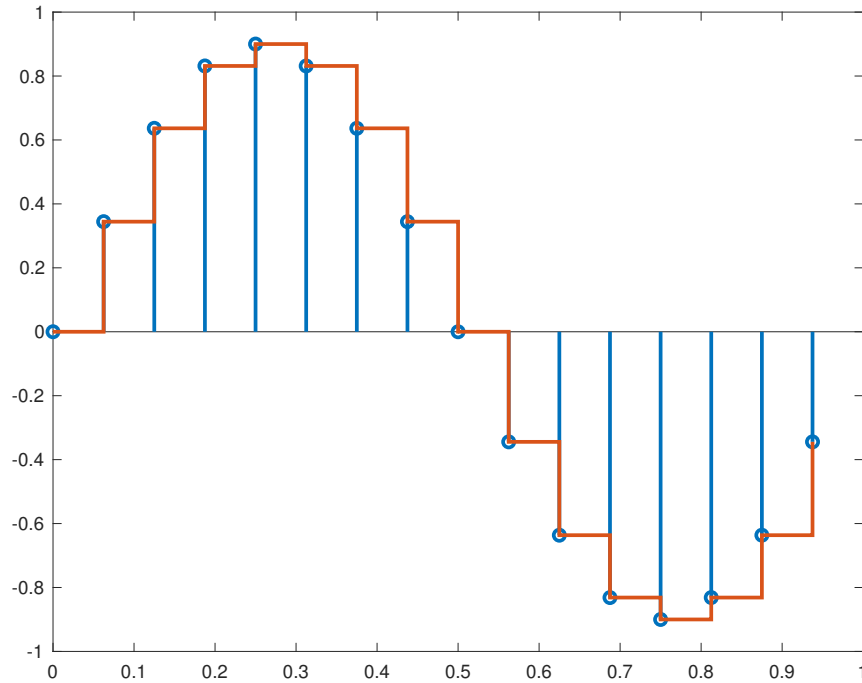
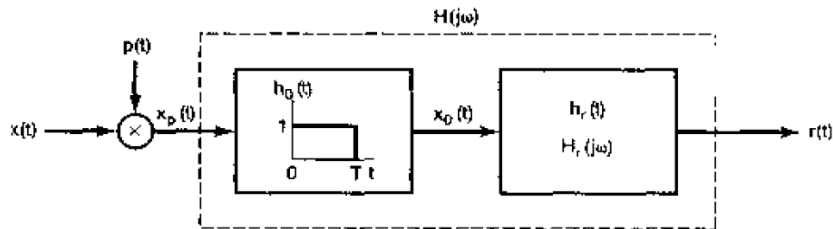


Figura 5: Señal seno muestreada con retenedor de orden cero

Figura 6: Sistema de muestreo con retenedor de orden cero y filtro de procesamiento de $x_0(t)$

La reconstrucción de la señal de salida de un retenedor de orden cero puede llevarse a cabo a través de un pasa bajos, sin embargo en este caso el pasabajos no tiene ganancia constante en la banda de paso. Para lograr las características deseadas del filtro, considere el sistema en la Figura 6.

El código para representar el muestreo por retenedor de orden cero en la figura se presenta a continuación.

La salida del retenedor de orden cero, x_0 se genera usando un tren de impulsos y luego un sistema lineal invariante en el tiempo con una respuesta impulso rectangular muestra. Para reconstruir $x(t)$ de $x_0(t)$ se procesa $x_0(t)$ con un sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta impulso $h_r(t)$ y respuesta en frecuencia $H_r(j\omega)$. Se desea especificar $H_r(j\omega)$ tal que $r(t)$ sea igual a $x(t)$. Esta combinación se cumple cuando la cascada de $h_0(t)$ y $h_r(t)$ es equivalente al filtro pasa bajas. Se

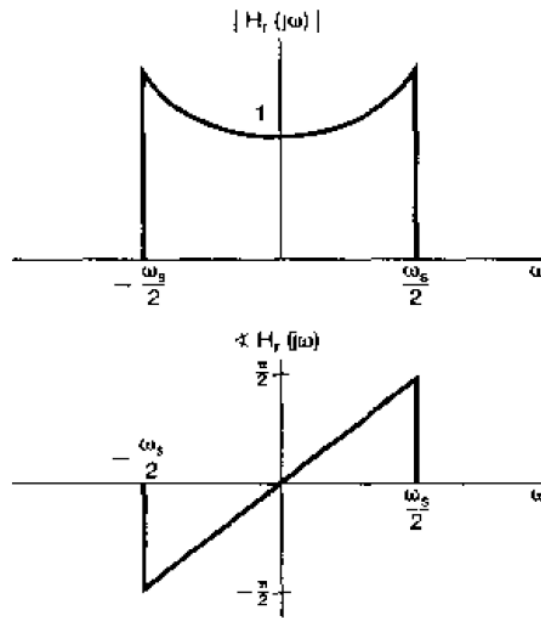


Figura 7: Espectro en frecuencia del filtro de procesamiento $H_r(j\omega)$ tiene que la transformada de Fourier de $h_0(t)$ es la transformada de Fourier de un pulso de amplitud 1 con un atraso en el tiempo de $T/2$. Entonces

$$H_0(j\omega) = e^{j\omega T/2} \left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} \right]. \quad (9)$$

Esto requiere entonces que $H_r(j\omega)$

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega T/2} H(j\omega)}{\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}}. \quad (10)$$

La Figura 7 presenta la magnitud y fase para un filtro de reconstrucción con frecuencia de corte igual a $\omega_s/2$

2. Reconstrucción de señal partiendo de un conjunto de muestras

La reconstrucción de señales a partir de un conjunto de muestras se realiza mediante interpolación. Este proceso consiste en ajustar una señal continua a un conjunto de muestras. Un proceso simple de interpolación es el que se presentó en el retenedor de orden cero. La reconstrucción de la señal

para un sistema interpolador lineal es vista como

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t), \quad (11)$$

con $x_p(t)$ dado en (3), se tiene que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t - nT). \quad (12)$$

$h(t)$ es la respuesta impulso de un filtro pasabajos,

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t}. \quad (13)$$

Utilizando $h(t)$ es posible reconstruir la señal de la siguiente manera

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t - nT))}{\omega_c(t - nT)}. \quad (14)$$

A continuación la demostración del teorema de muestreo nos muestra como si la frecuencia de muestreo cumple con la tasa de Nyquist la señal $x_r(t)$ reconstruye la señal $x(t)$.

Theorem 2.1 *Si la transformada de Fourier $X(\omega)$ de una señal $x(t)$ es cero para todas las frecuencias por arriba de $|\omega| \geq \omega_c$ entonces $x(t)$ puede ser únicamente determinado usando los valores muestreados $x_n = x(nT)$. Estos valores son una secuencia de muestras equidistantes espaciadas en $\frac{1}{2f_c} = \frac{T_c}{2} = T$. La función señal $x(t)$ entonces está dada por $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)}$.*

Proof 2.1 *Usando la fórmula para la transformada inversa de Fourier, la señal $x(t)$ limitada en banda es*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (15)$$

Ahora si x_n es $x_n = f\left(n \frac{\pi}{\omega_c}\right)$ entonces puede ser escrito en función de la transformada inversa de Fourier

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} X(\omega) e^{j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}} d\omega. \quad (16)$$

Expresando $X(\omega)$ como una serie de fourier en el intervalo $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ se obtiene

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}}, \quad (17)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(\omega) e^{j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}} d\omega, \quad (18)$$

manipulando la ecuación anterior

$$c_n = \frac{2\pi}{2\omega_c} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(\omega) e^{j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}} d\omega. \quad (19)$$

c_n puede ser escrita como

$$c_n = \frac{\pi}{\omega_c} x_n. \quad (20)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de $X(\omega)$ como serie de Fourier se obtiene

$$X_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} x_n e^{-j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}}. \quad (21)$$

Usando la fórmula de suma de Poisson, $X(\omega)$ puede escribirse como

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2n\omega_c). \quad (22)$$

Para el intervalo $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$, la función periódica $X_T(\omega)$ es igual a $X(\omega)$. De la misma forma si $X_T(\omega)$ fuera multiplicado por un pulso rectangular definido como $H(\omega) = 1$ para $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ y $H(\omega) = 0$ para $|\omega| \geq \omega_c$ entonces

$$X(\omega) = H(\omega) X_T(\omega) = H(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} x_n e^{-j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}}. \quad (23)$$

Resolviendo para $x(t)$ la transformada inversa de Fourier en función de la ecuación anterior

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} x_n e^{-j\omega \frac{n\pi}{\omega_c}} \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (24)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t - \frac{n\pi}{\omega})} d\omega. \quad (25)$$

por lo tanto

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{\sin\left(\omega_c\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)\right)}{\omega_c\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)}. \quad (26)$$

3. El efecto del submuestreo: Aliasing

Como hemos visto en el teorema de muestreo con $\omega_s > 2\omega_o$, el espectro de la señal muestreada consiste en replicas escaladas del espectro de $x(t)$. Cuando ocurre que $\omega_s < 2\omega_o$ el espectro de $x(t)$, $X(\omega)$ no se replica en $X_p(\omega)$ y $x(t)$ no se puede recuperar con un filtro pasa bajos. En este caso los espectros se solapan. Este efecto se conoce como aliasing. En la Figura 2 e) se presenta el caso donde $\omega_s < 2\omega_M$. Las réplicas del espectro se solapan. Sin embargo la señal original y la señal reconstruida serán siempre iguales en los instantes de muestreo. Esto es

$$x_r(nT) = x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Para estudiar el efecto de Aliasing considere una señal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$. la transformada de Fourier de la señal muestreada es $X_p(j\omega)$. Observemos que pasa con el espectro de $X_p(t)$ para cambios en la frecuencia ω_o con respecto a ω_s . Considere además para la reconstrucción un filtro pasabajos con frecuencia de corte $\omega_c = \omega_s/2$. El espectro de la señal muestreada $X_p(j\omega)$ se presenta en la Figura 8. Cada uno de los recuadros indica la relación entre ω_0 y ω_s para la señal. La figura es construida utilizando la función transformada rápida de Fourier en MATLAB. En el primer y segundo recuadro la relación de frecuencias cumple el teorema de muestreo y no se presenta solapamiento entre los espectros. El pico alrededor de f_0 y el pico en $f_s - f_0$ se observan en todos los recuadros. En los primeros dos recuadros la señal puede recuperar con un filtro pasabajos que solo permite pasar el pico alrededor de f_0 dado que $f_s - f_0$ está por encima de la frecuencia de corte f_c . Para el recuadro en donde $2f_0 = f_s$ el espectro en f_0 y $f_s - f_0$ se solapan. Dado que la frecuencia de corte es igual a la frecuencia del pico del espectro, la señal no se recupera completamente. En el caso en el que $f_0 = \frac{4}{6}f_s$ y $f_0 = \frac{5}{6}f_s$ no se cumple el teorema de muestreo, la frecuencia f_0 empieza a estar por encima de $f_s - f_0$ y el filtro pasabajos ya no está en posibilidad de dejar pasar f_0 por lo tanto la señal que se recupera es la

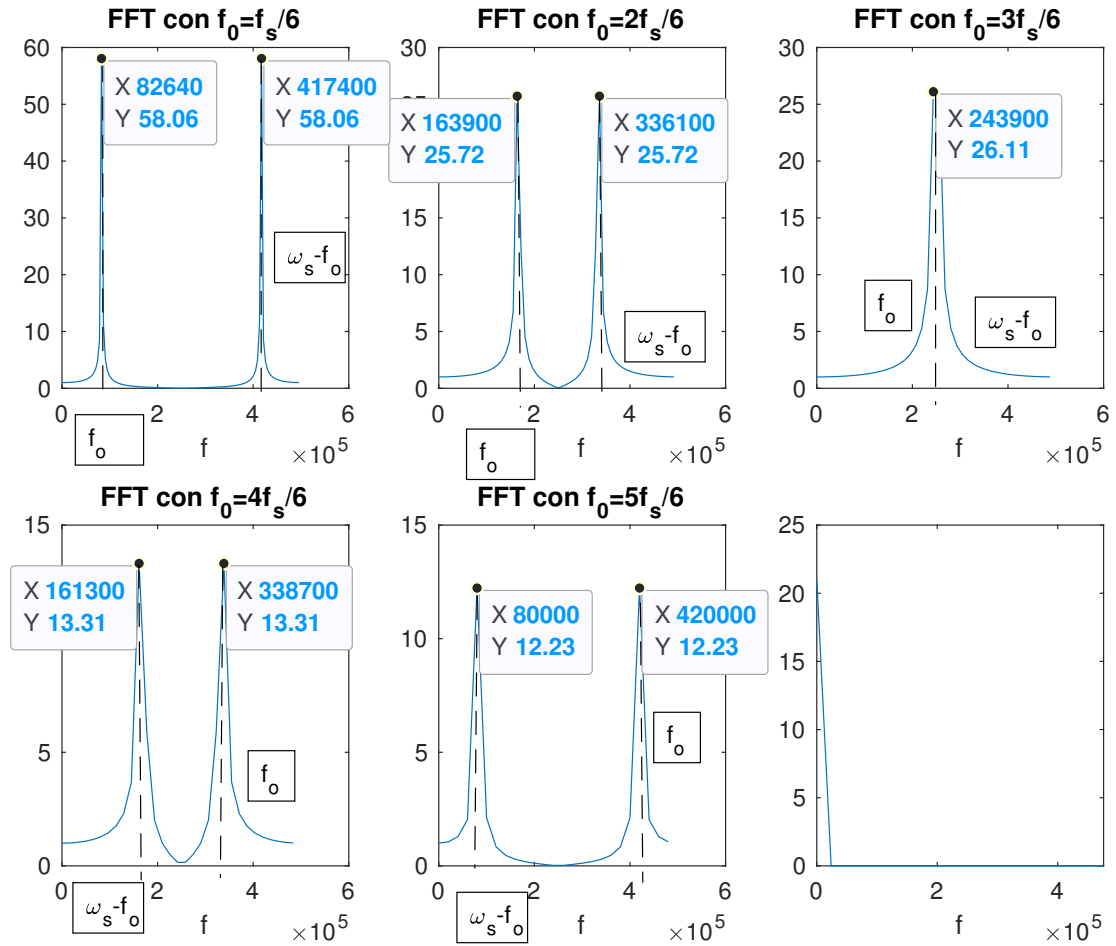


Figura 8: Espectro de frecuencia de la señal $X_p(j\omega)$ para diferentes relaciones de f_0 con f_s correspondiente al pico en $f_s - f_0$ quien ahora tiene una frecuencia menor a la frecuencia de corte del pasabajos. La señal $x(t)$ ya no se puede recuperar directamente de $x_p(t)$ y queda encubierta en una señal de frecuencia diferente $f_s - f_0$. En el caso en el que $f_s = f_0$ la señal se pierde y se recupera únicamente un valor constante correspondiente a tomar una muestra por ciclo. La Figura 9 presenta como la señal reconstruida después del filtro pasabajos cambia de acuerdo a la relación entre f_0 y f_s y como la señal queda encubierta en una señal diferente de menor frecuencia.

4. Ejemplos

A continuación se presentan un conjunto de ejemplos que permiten revisar conceptos de muestreo. Por favor siga el desarrollo.

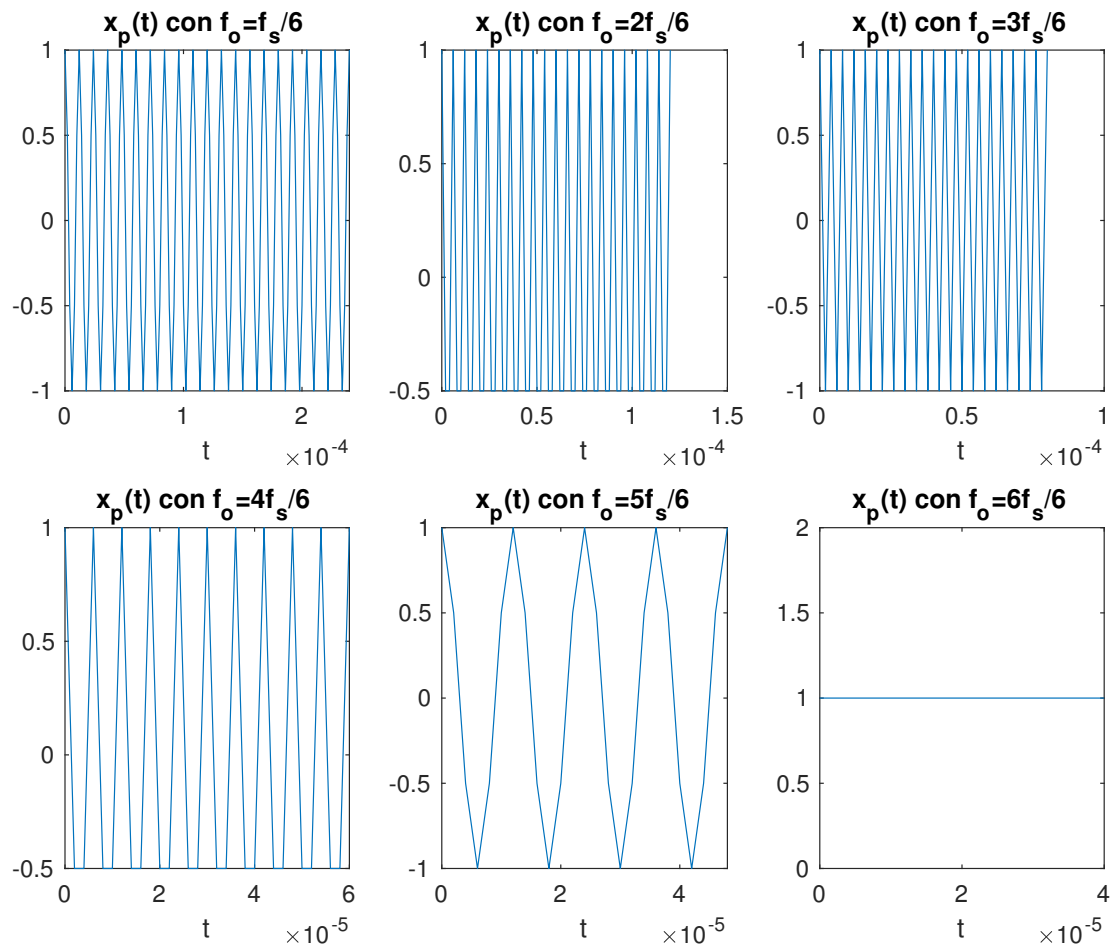


Figura 9: Señal reconstruida con efecto de Aliasing. Los resultados de cada recuadro corresponden con los espectros de frecuencia en la figura 8

4.1. Ejemplo 1

De acuerdo con el teorema de muestreo, la frecuencia a la cual debe ser excedida la frecuencia de muestreo es llamada la tasa de Nyquist. Determine la tasa de Nyquist correspondiente a cada una de las siguientes funciones

(a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

(b) $x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$

(c) $x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t} \right)^2$

Solución (a) 8000π , (b) 8000π (c) 16000π

4.2. Ejemplo 2

Sea $x(t)$ una señal con una tasa de Nyquist ω_0 . Determine la tasa de Nyquist para cada una de las siguientes señales

(a) $x(t) + x(t - 1)$

(b) $\frac{dx(t)}{dt}$

(c) $x^2(t)$

(d) $x(t)\cos(\omega_0 t)$

Solución (a) ω_0 , (b) ω_0 , (c) $2\omega_0$, (d) $3\omega_0$

4.3. Ejemplo 3

En el sistema de la figura 10, $x(t)$ es muestreada con un tren de impulsos periódico, y una señal reconstruida $x_r(t)$ es obtenida de las muestras mediante la aplicación de un filtro pasa bajas. El periodo de muestreo T es 1ms, y $x(t)$ es una señal coseno de la forma $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$. Para cada una de las siguientes condiciones de f_0 y θ , determine $x_r(t)$

(a) $f_0 = 250Hz, \theta = \pi/4$

(b) $f_0 = 750Hz, \theta = \pi/2$

(c) $f_0 = 500Hz, \theta = \pi/2$

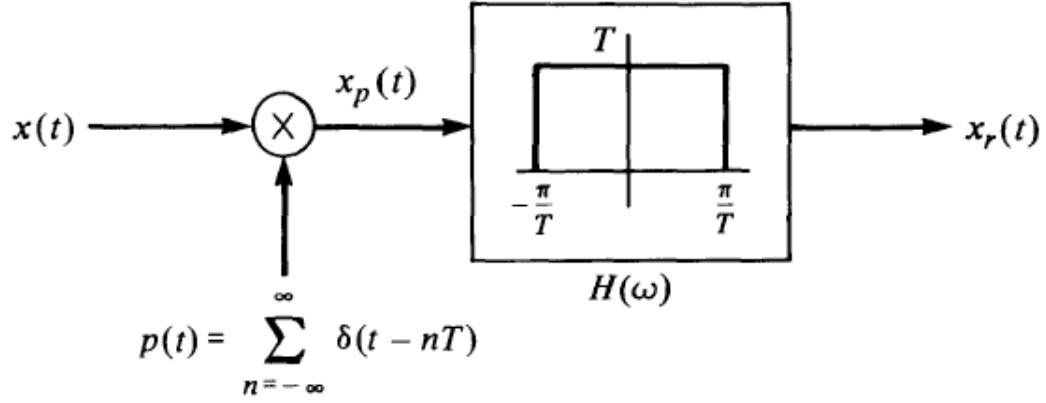


Figura 10: Esquema del muestreo con tren de impulsos periódico para el Ejemplo 3

Solución: la señal $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$, where $\omega_0 = 2\pi f_0$ puede ser escrita como

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t} \quad (28)$$

y el espectro de $x(t)$ esta dado por

$$X(\omega) = \pi e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0) \quad (29)$$

El espectro de $p(t)$ esta dado por

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (30)$$

por lo tanto, el espectro de $x_p(t)$ esta dado por

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi^2}{T} \right) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\theta} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T} - \omega_0\right) + e^{-j\theta} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T} + \omega_0\right) \right] \quad (31)$$

y el espectro de $X_r(\omega)$ esta dado por $X_r(\omega) = H(\omega)X_p(\omega)$.

(a) En este caso se tiene que $\omega_0 = 2\pi \times 250$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $T = 10^{-3}$, entonces

$$X_p(\omega) = \frac{\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k - 2\pi \times 250) + e^{-j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 10^3 + 2\pi \times 250) \right] \quad (32)$$

Solamente el término $k = 0$ es pasado por el filtro.

$$X_r(\omega) = \pi [e^{j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 250) + e^{-j\theta} \delta(\omega + 2\pi \times 250)] \quad (33)$$

y

$$x_r(t) = \frac{1}{2} e^{j\theta} e^{j2\pi \times 250t} + \frac{1}{2} e^{-j\theta} e^{-j2\pi \times 250t} \quad (34)$$

$$= \cos\left(2\pi \times 250t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (35)$$

(b) En este caso $\omega_0 = 2\pi \times 750Hz$, $T = 10^{-3}$ entonces

$$X_p(\omega) = \frac{\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k - 2\pi \times 750) + e^{-j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k + 2\pi \times 750)] \quad (36)$$

Sólo los términos $k = \pm 1$ tienen contribuciones diferentes de cero

$$X_r(\omega) = \pi [e^{j\theta} \delta(\omega + 2\pi \times 250) + e^{-j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 250)] . \quad (37)$$

Entonces

$$x_r(t) = \cos(2\pi \times 250t - \theta) \quad (38)$$

$$= \cos(2\pi \times 250t - \frac{\pi}{2}) \quad (39)$$

(c) En este caso $\omega_0 = 2\pi \times 500Hz$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, y $T = 10^{-3}$, entonces

$$X_p(\omega) = \frac{\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k - 2\pi \times 500) + e^{-j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 10^3 k + 2\pi \times 500)] \quad (40)$$

Since $H(\omega) = 0$ at $\omega = 2\pi \text{ times } 500$, the output is zero; $x_r(t) = 0$

4.4. Ejemplo 4

Considere el sistema de la Figura 11

(a) Si $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > W$, encuentre el valor máximo de T , W_c y A tal que $x_r(t) = x(t)$.

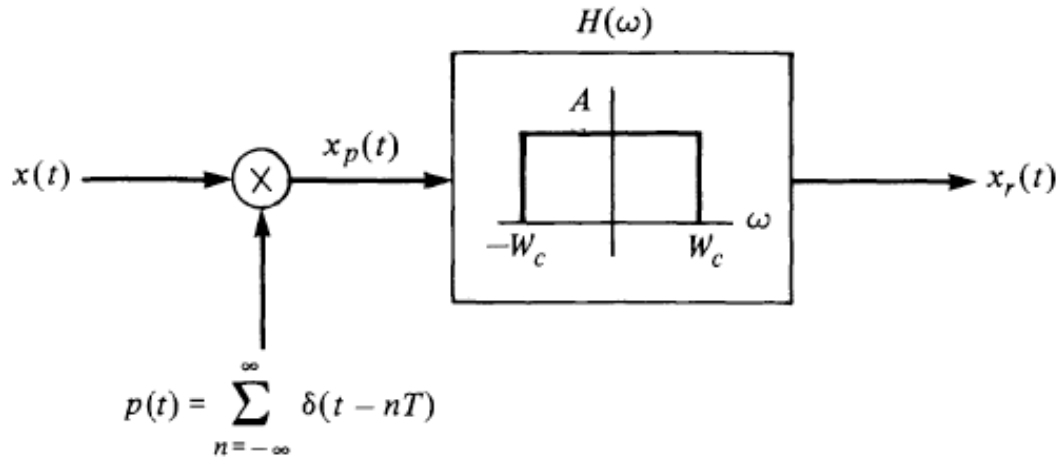


Figura 11: Esquema de muestreo con tren de impulsos periódico para el Ejemplo 4.

(b) Si $X_1(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2W$ y $X_2(\omega) = 0$ for $|\omega| > W$. Repita la parte (a) para las señales a continuación

- (i) $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$
- (ii) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$
- (iii) $x(t) = x_1(t)x_2(t)$
- (iv) $x(t) = x_1(10t)$

Solución:

(a) Del teorema de muestreo se tiene que $2\pi/T \geq 2W$. Por lo tanto,

$$T \geq \frac{\pi}{W} \rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{W} \quad (41)$$

Dado que

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \quad (42)$$

se requiere que $A = T$ para que $x_r(t) = x(t)$. El mínimo valor de W_c es W de tal forma que no perdemos información. El máximo valor de W_c es $(2\pi/T) - W$ para evadir contribuciones espectrales periódicas.

(b) (i) $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > W$. Entonces se tiene que $T_{max} = \frac{\pi}{W}$, $A = T$, $W < W_c < \frac{2\pi}{T} - W$

- (ii) $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2W$. Entonces se tiene que $T_{max} = \frac{\pi}{2W}$, $A = T$, $2W < W_c < \frac{2\pi}{T} - 2W$
- (iii) $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > 3W$. Entonces se tiene que $T_{max} = \frac{\pi}{3W}$, $A = T$, $3W < W_c < \frac{2\pi}{T} - 3W$
- (iv) $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > W/10$. Entonces se tiene que $T_{max} = \frac{10\pi}{W}$, $A = T$, $\frac{W}{10} < W_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{W}{10}$

5. Actividad

A continuación se presenta un conjunto de ejercicios a desarrollar. Por favor desarrolle los ejercicios para estudiar los conceptos de clase.

5.1. Ejercicio 1 (3.0)

Ejecute el siguiente comando en MATLAB y estudie el ejemplo propuesto de identificación de fallas basada en el espectro de señal de instrumentación.

```
openExample('signal/RotatingMachineryv2Example')
```

Realice un reporte resumen del ejemplo incluyendo un diagrama de flujo del sistema de detección de fallas y esquemas de los algoritmos utilizados para realizar el análisis. En el ejemplo se utiliza un proceso conocido como *resample* de la señal discreta. Desarrolle este concepto dentro del reporte.

5.2. Ejercicio 2 (2.0)

Es frecuentemente requerido graficar en la pantalla de un osciloscopio formas de onda que tienen estructuras muy cortas en tiempo, por ejemplo en la escala de miles de nanosegundos. Dado que el tiempo de subida del osciloscopio más rápido no es más alta que esta, estos osciloscopios no pueden alcanzarla directamente. Si la forma de onda es periódica el resultado deseado puede ser obtenido indirectamente usando un instrumento llamado el osciloscopio de muestreo.

La idea, como lo muestra la Figura 12, es muestrear la forma de onda rápida $x(t)$ una vez cada periodo, pero en puntos laterales sucesivos en periodos sucesivos. El incremento Δ debe seleccionarse de forma adecuada en relación con el ancho de banda de $x(t)$. Si el tren de impulsos resultante del muestreo se pasa a través de un filtro de interpolación pasa bajos, la salida $y(t)$ será proporcional a la forma de onda rápida original, extendida en el tiempo es decir $y(t)$ es proporcional a $x(at)$ donde $a < 1$. Para $x(t) = A + B\cos[(2\pi/T)t + \theta]$, encuentre un rango de valores de Δ

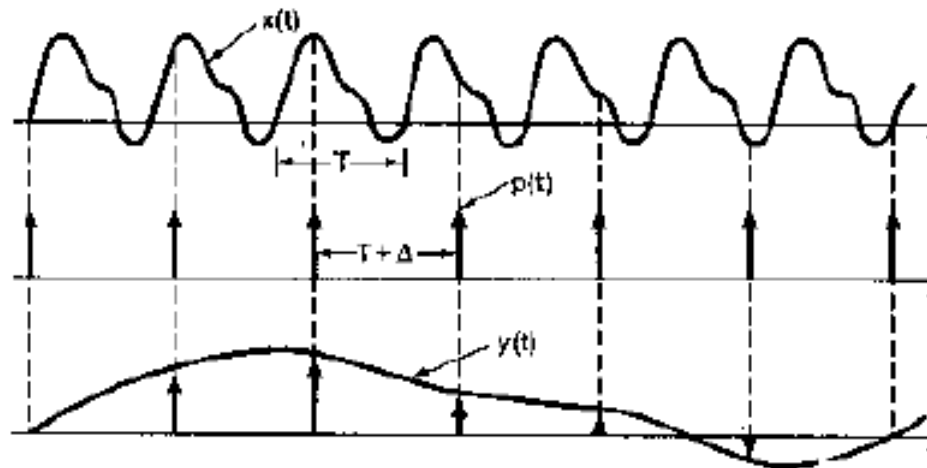


Figura 12: Funcionamiento del osciloscopio de muestreo.

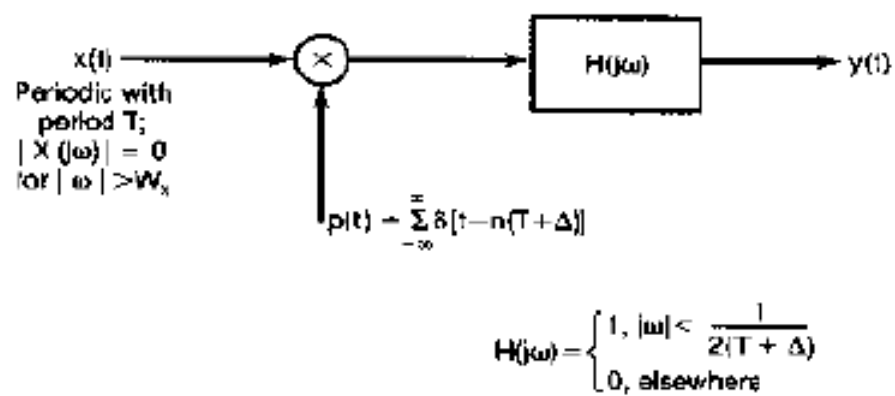


Figura 13: Diagrama de bloques del sistema de osciloscopio de muestreo.

tales que $y(t)$ es proporcional a $x(at)$ con $a < 1$. Además, determine el valor de a en función de T y Δ . Demuestre el funcionamiento del sistema mediante simulación.