VALORES PROPIOS COMPLEJOS

Sea A una matriz con entradas reales

Sea K_1 un vector con valor propio $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

Entonces $K_1 e^{\lambda_1 t}$ y $\overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}$ son soluciones del sistema de ecuaciones

$X' = AX$

Teorema: Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ un valor propio de A y K_1 su vector propio sea

$\beta_1 = Re(K_1)$, $\beta_2 = Im(K_1)$

entonces $X_1 = (\beta_1 \cos\beta t - \beta_2 \operatorname{sen}\beta t)e^{\alpha t}$

$X_2 = (\beta_2 \cos\beta t - \beta_1 \operatorname{sen}\beta t)e^{\beta t}$

son soluciones del sistema $X' = AX$

Ejemplo: Resolver el problema de valor inicial

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X \qquad X(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1) Calcular los valores propios de la matriz de coeficientes A

Ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Conjugado: $\lambda = \alpha + \beta i$
$\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$

$(2-\lambda(-2-\lambda)+8=0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = 2i$

2) Vector propio $(A - \lambda I)K = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-2i & 8 \\ -1 & -2-2i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-K_1 + (-2-2i)K_2 = 0$

$K_1 = (-2-2i)K_2 \Rightarrow$ Si $K_2 = 1$, $K_1 = -2-2i$

Podemos tomar un valor arbitrario de K_2

Vector propio $K = \begin{pmatrix} -2-2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\beta_1 = Re(K) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \beta_2 = Im(K) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Soluciones L.I.

→ $X_1 = (\beta_1 \cos\beta t - \beta_2 \operatorname{sen}\beta t)e^{\alpha t}$

$$X_1 = \left[\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]e^{2t} = \begin{pmatrix}-2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X_2 = (B_2 \cos\beta t - \beta_2 \operatorname{sen}\beta t)\, e^{\alpha t}$$

$$X_2 = \left[\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right]e^{0t} = \begin{pmatrix}-2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t\\ -\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}$$

4) Solución general: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$

Ahora debemos encontrar C_1 y C_2 de tal manera que se cumpla el dato inicial

$$X(\vec{0}) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow X\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}-2C_1\cos 2t + 2C_1\operatorname{sen} 2t - 2C_2\cos 2t + 2C_2\operatorname{sen} 2t\\ C_1\cos 2t - C_2\operatorname{sen} 2t\end{pmatrix}$$

Evaluamos en 0

$$X(0) = \begin{pmatrix}-2C_1 - 2C_2\\ C_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}C_1 = -1\\ -2C_1 - 2C_2 = 2\end{matrix} \Rightarrow C_2 = 0$$

5) Solución del problema de valor inicial

$$X = -\begin{pmatrix}-2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix}2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}$$

DIAGRAMA DE FASE

Función vectorial

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow f(t) = (x(t), y(t))$$

Ejemplo: $f(t) = (4\cos t,\ 4\operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$ → parametrización de un círculo de radio 4

★ las funciones que son sol. del sist. de ecuaciones son: $\begin{cases} x = 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ y = -\cos 2t \end{cases}$

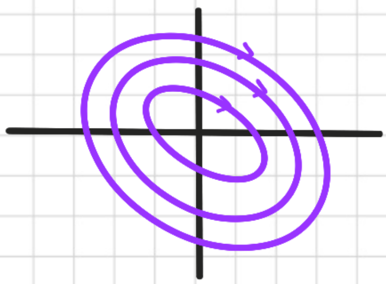
Estas funciones se pueden ver como la parametrización de una curva en el plano x-y
Este plano se conoce como el plano fase

y la de la parametrización $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ se llama una trayectoria

Si consideramos el sist. de ecua. $x' = Ax$ y si $x = C_1 X_1 + C_2 X_2 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

La gráfica para estas curvas parametrizadas para distintos valores de C_1 y C_2, se llama Diagrama de Fase

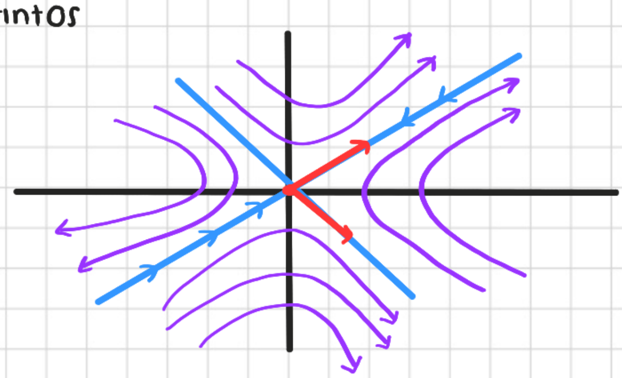
→ Si tenemos valores complejos y la parte $\mathbb{R}$ es negativa o 0 las trayectorias son elipses



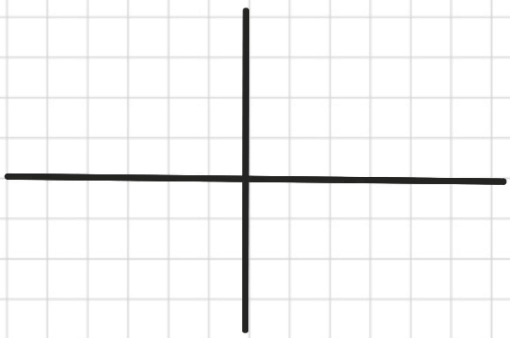
→ Si tenemos 2 valores propios distintos

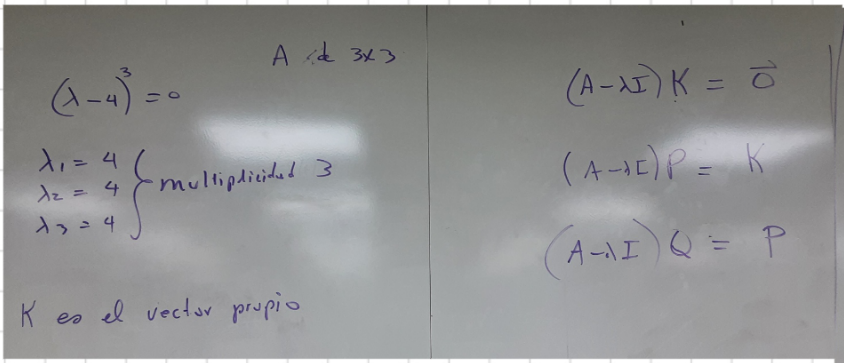
el origen es un atractor o sumidero

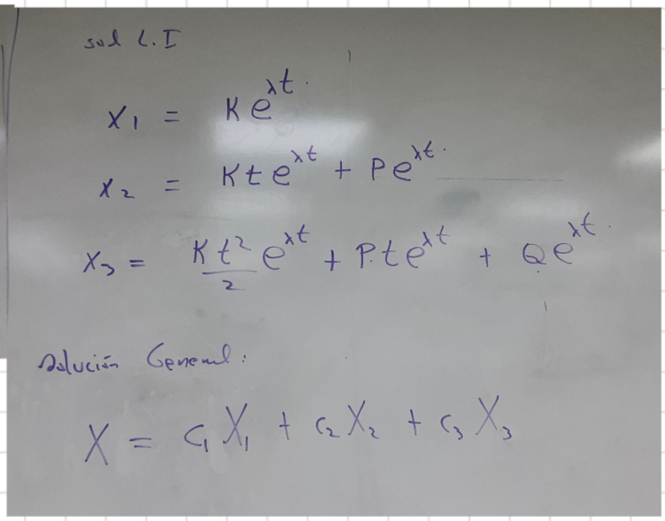
↳ Análisis cualitativo de un sist. de ecuaciones



→ Si tenemos un valor propio







TAREA: Realizar ejercicio 29.

QUIZ LUNES 24/ABRIL

Dentro de 15 días hay que entregar el proyecto. De a 3 personas.

Ejercicio 29: Resuelva el problema de valores iniciales

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} X \quad , \quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$