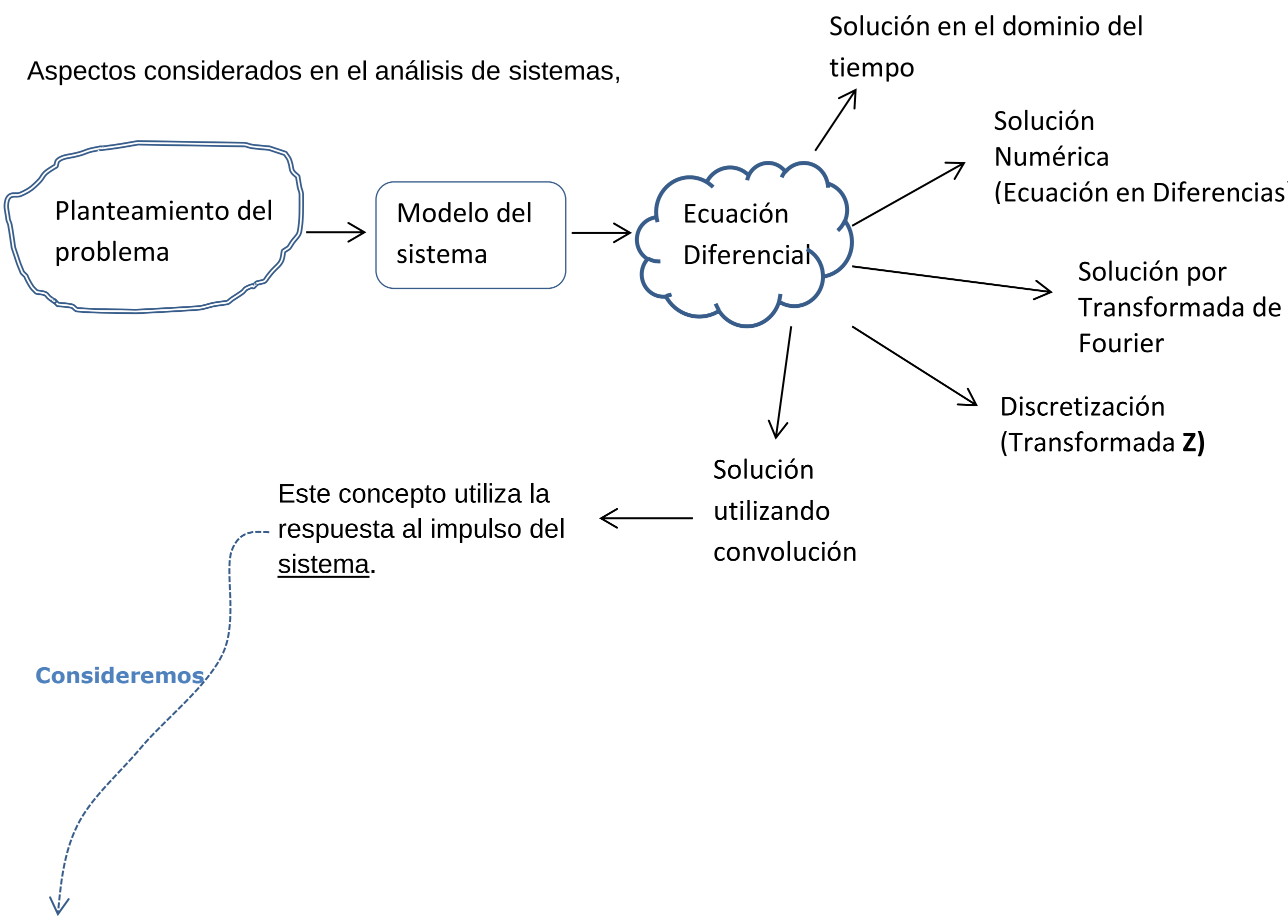
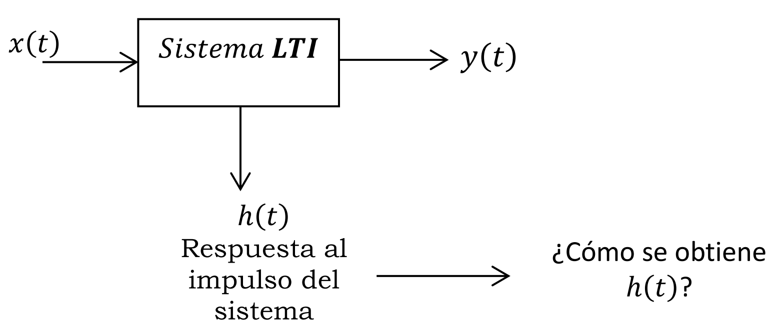
Transformada de Laplace – Función de Transferencia

Aspectos considerados en el análisis de sistemas,



Ejemplo 1:

Se tiene un sistema con una entrada (**x(t)**) y una salida (**y(t)**).



$$x_1(t) = u(t) \longrightarrow \boxed{Sistema\ \boldsymbol{LTI}} \longrightarrow y_1(t) = y_{1ZSR}(t) + y_{1ZIR}(t)$$

Como:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Entonces,

$$x_2(t) = \frac{du(t)}{dt} \longrightarrow \boxed{Sistema\ \boldsymbol{LTI}} \longrightarrow y_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} \longrightarrow$$

Esta respuesta al impulso se debe visualizar como una herramienta.

Como el sistema es LTI $\longrightarrow$ Si se deriva la entrada $x_1(t)$, la salida $y_1(t)$ también se deriva

Retomando,

$$y(t) = \int Entrada(\quad) \times sistema(\quad)\, d\tau$$

$$y(t) = \int Entrada(\tau) \times sistema\ d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Entrada(\tau) \times \underbrace{sistema(t,\tau)}_{h(t)}\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Adicionalmente, tomando $f(t) = e^{j\omega t}$ y haciendo $j\omega = s$, entonces….

Entonces $x(t) = f(t) = e^{st}$, es la entrada al sistema,

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s)$$

$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \longrightarrow$ Transformada de Laplace de $h(t)$

Para cualquier señal $x(t) = f(t)$, como entrada al sistema…..la Transformada de Laplace es…..

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \text{"Transformada bilateral"}$$

¿Podríamos resolver con Fourier? Si, haciendo s = jw

Por consiguiente, existen dos dificultades para que la transformada de Fourier de una señal $f(t)$ no exista:

- La transformada de Fourier solamente para una clase restringida de señales.
- La transformada de Fourier no puede ser utilizada para analizar sistemas inestables o sistemas marginalmente estables.

La razón

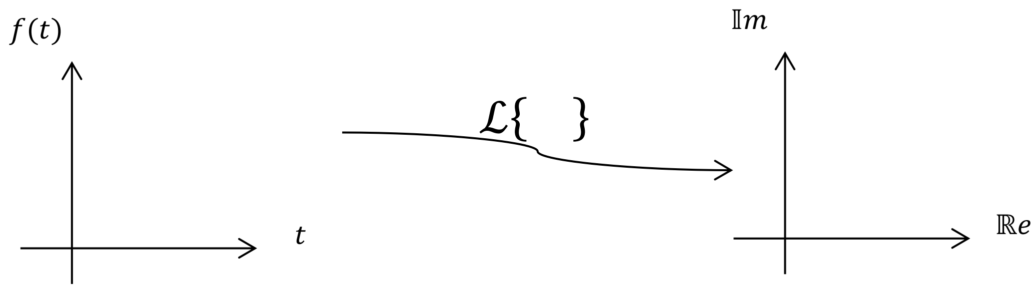
Las exponenciales de la forma $e^{j\omega t}$ no pueden sintetizar exponenciales que crecen con el tiempo.

El problema se resuelve

Utilizar e^{st} en lugar de $e^{j\omega t}$

Para $s \longrightarrow$ la frecuencia no se encuentra restringida solamente al eje "$j\omega$".

Lo que estamos haciendo es realizando una transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.



Comportamientos dependientes de variables de tiempo.

Este dominio tiene ciertas características.

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\ \ \}} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$T.\,bilateral\ de\ Laplace$

Haciendo $s = j\omega$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad Transformada\ de\ Fourier$$

$$F(s)|_{s=j\omega} = \mathfrak{F}\{f(t)\} \qquad Transformada\ de\ Fourier$$

Si la variable compleja no es sólo imaginaria

$$s = \sigma + j\omega$$

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)e^{-\sigma t})e^{-j\omega t}dt$$

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt$$

Ejemplo 2:

Si se tiene,

$$f(t) = e^{2t}u(t) \longrightarrow$$ No tiene Transformada de Fourier

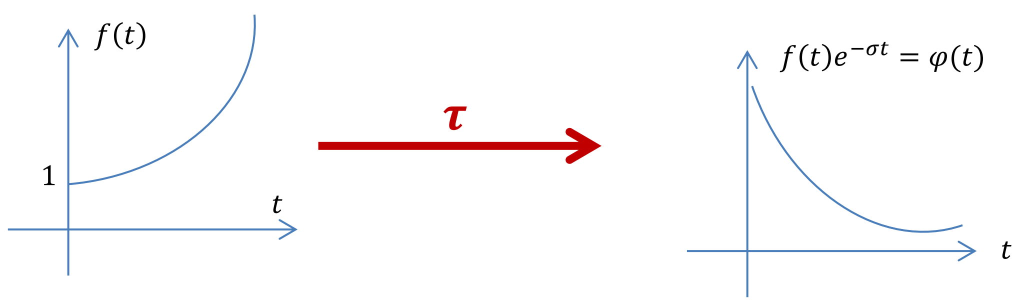
Aquí aparece el concepto de región de convergencia

Puede ser transformable por Fourier multiplicando $f(t)$ por una exponencial decreciente de la forma:

$$e^{-\sigma t}$$

Tal que $\sigma > 2$, tomando $\sigma = 5$

$$f(t)e^{-\sigma t} = e^{2t}u(t)e^{-5t} = e^{-3t}u(t)$$



Donde $\varphi(t)$ es una señal transformable por Fourier

$\downarrow$

Es decir

$\downarrow$

los componentes son de la forma $e^{j\omega t}$ con ω variando desde $-\infty$ a $+\infty$.

Tomando $\varphi(t) = f(t)e^{-\sigma t}$, implica que $f(t)$ es sintetizada con exponenciales que decaen exponencialmente situadas a lo largo de $\sigma + j\omega$ con ω variando desde $-\infty$ a $+\infty$.

El valor de σ es flexible.

Para el ejemplo,

si $f(t) = e^{2t}u(t)$ entonces $\varphi(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ el espectro de $f(t)$ no es único, ya que existen infinitas selecciones de σ.

No obstante,

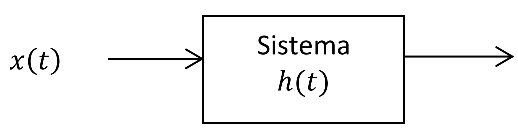
σ tiene un nivel único σ_0. Por ejemplo, $\sigma = 2$ para $f(t) = e^{2t}u(t)$

la región en el plano donde $\sigma > \sigma_0$ es llamada R.O.C

En el análisis típico de sistemas, las señales de alimentación pueden ser,

- Exponenciales en el dominio del tiempo.
- Escalón unitario
- Rampa con pendiente.
- Sinusoidales, las cuales se pueden manejar como exponenciales complejas.

Para un sistema con una entrada y una salida,



$y(t) = x(t) * h(t)$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} \\ Y(s) &= X(s)H(s) \end{aligned}\right\} \text{Propiedad de convolución}$$

<u>Ejemplo 3:</u>

Se tiene $f(t) = e^{-\propto t}u(t)$

Por definición

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\propto t} u(t) e^{-st} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\propto t} e^{-st} dt$$

Transformada unilateral de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\propto + s)t} dt = -\frac{1}{s+\propto}\left(e^{-(\propto + s)t}\right)_0^{\infty}$$

$$Re\{\propto + s\} > 0 \,???$$

Note que $s \in \mathbb{C}$ y en la medida que $t \to \infty$ el término $e^{-(\propto + s)t}$ no necesariamente se desvanece.

Sea $Z = \propto + j\beta$

$$e^{-zt} = e^{-\propto t} e^{-j\beta t}$$

$\left|e^{-j\beta t}\right| = 1$ sin importar el valor de β

Por consiguiente,

en la medida que $t \to \infty$. Entonces:

$e^{-zt} \to 0$ si y solo si $\propto > 0$

$e^{-zt} \to \infty$ si $\propto < 0$

Claramente

$$\lim_{t\to\infty} e^{-zt} = \begin{cases} 0 & Re\ z > 0 \\ \infty & Re\ z < 0 \end{cases}$$

Por lo cual, para nuestro ejemplo…

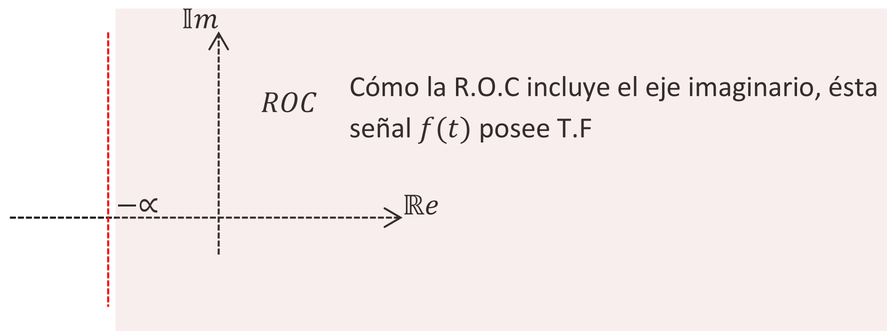
$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+\propto)t} = \begin{cases} 0 & Re\{s+\propto\} > 0 \\ \infty & Re\ \{s+\propto\} < 0 \end{cases}$$

Utilizando lo anterior,

$$F(s) = -\frac{1}{s+\propto} e^{-(s+\propto)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s+\propto\} > 0$$

$$e^{-\propto t}u(t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a$$



$$g(t) = -e^{-\propto t}u(-t) \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{\propto t}u(-t)e^{-st}dt$$

$$G(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-\propto t}e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-t(s+\propto)}\,dt$$

$$G(s) = \frac{1}{s+\propto} e^{-t(s+\propto)}\Big|_{-\infty}^{0}$$

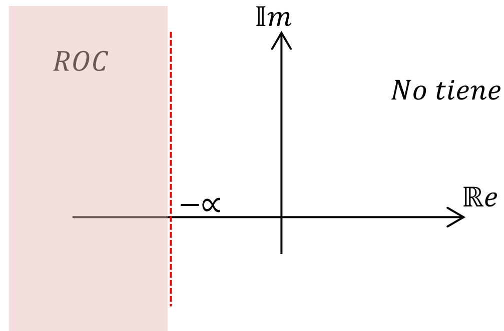
$$\lim_{t\to-\infty} e^{-(s+\propto)t} = \begin{cases} 0 & Re\{s+\propto\} < 0 \\ \infty & Re\,\{s+\propto\} > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ROC está dada por:

$$Re\{s+\propto\} < 0$$

$$Re\{s\} < -\propto$$

$G(s) = \frac{1}{s+\propto}$ con ROC $Re\{s\} < -\propto$



¿Dos señales pueden tener la misma T.L?

Ejemplo 4:

$$gm(t) = -e^{-\propto t} \quad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \quad M(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\propto t} e^{-st} dt$$

$$M(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(s+\propto)}\, dt = +\frac{1}{s+\propto} e^{-t(s+\propto)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Si $t \to \infty$, entonces:

$$e^{-t(s+\propto)} \to 0 \quad \text{Y} \quad Re\{s+\propto\} > 0$$

Si $t \to -\infty$, entonces:

$$e^{-t(s+\propto)} \to 0 \quad \text{Y} \quad Re\{s+\propto\} < 0$$

Si $Re\{s+\propto\} > 0$, entonces:

$$M(s) = -\frac{1}{s+\propto}\left(e^{-(s+\propto)\infty} - e^{(s+\propto)\infty}\right)$$

$$M(s) = \infty$$

Si $Re\{s+\propto\} < 0$, entonces:

$$M(s) = -\frac{1}{s+\propto}\left(e^{-(s+\propto)\infty} - e^{(s+\propto)\infty}\right)$$

$$M(s) = \infty$$

No converge

Por lo tanto, utilizar la función escalón unitario es adecuado en circuitos.

Investigar: Encuentre dos señales que sean utilizadas en sistemas físicos, que poseen igual T.L y diferente ROC.

Aquí aparece un concepto que permite analizar los sistemas…..**Función de transferencia**

Sea un sistema,

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) = X(s)G(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \frac{Salida}{Entrada}$$

Transformada de Laplace de la función impulso

En general es una función racional $\frac{Polinomio(s)}{Polinomio(s)}$

Existe

Valores de "s" para los cuales G(s)=0 (Zeros)

Valores de "s" para los cuales G(s) → ∞ (Zeros)

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Zeros de F(s)

Polos de F(s)

Es decir, si tengo la F.T de $G(s)$ y la entrada $X(s)$, puedo encontrar la respuesta $y(t)$, *entonces*, es bueno hablar de la T.I.L(transformada Inversa de Laplace).

Ejemplo 5:

Encuentre $m(t)$ de… $M(s) = \frac{7s-6}{s^2-s-6}$

Factorizando denominador…

$$M(s) = \frac{7s-6}{s^2-s-6} = \frac{7s-6}{(s-3)(s+2)}$$

$$M(s) = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s-3}$$

$$\frac{7s-6}{(s-3)(s+2)} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s-3}$$

$$7s - 6 = a(s-3) + b(s+2)$$

Si $s = -2$,

$$-14 - 6 = a(-2-3) + b(0)$$

$$-20 = -5a$$

$$a = 4$$

Si $s = 3$,

$$21 - 6 = a(0) + b(3+2)$$

$$15 = 5b$$

$$b = 3$$

Luego,

$$M(s) = \frac{7s-6}{(s-3)(s+2)} = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

$$m(t) = (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)$$

Ejemplo 6:

Para $F(s) = \frac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

Al sacar las raíces del término cuadrático del numerador se tiene:

$$S_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4(34)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-136}}{2}$$

$$S_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-36}}{2} = -5 \pm 3j$$

Entonces,

$$F(s) = \frac{6(s+34)}{s(s+5+3j)(s+5-3j)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+5+3j} + \frac{c}{s+5-3j}$$

$$6(s+34) = a(s+5+3j)(s+5-3j) + bs(s+5-3j) + cs(s+5+3j)$$

Si $s = 0$,

$$6(34) = a(5+3j)(5-3j)$$

$$204 = a(25+9)$$

$$a = 6$$

Si $s = -5+3j$,

$$6(-5+3j+34) = c(-5+3j)(-5+3j+5+3j)$$

$$6(29+3j) = c(-5+3j)(6j)$$

$$6(29+3j) = c(-18-30j)$$

$$c = \frac{6(29+3j)}{-18-30j} = -3+4j$$

Si $s = -5-3j$,

$$6(-5-3j+34) = b(-5-3j)(-5-3j+5-3j)$$

$$6(29-3j) = b(-5-3j)(-6j)$$

$$6(29-3j) = b(-18+30j)$$

$$b = \frac{6(29-3j)}{-18+30j} = -3-4j$$

$$b = c^*$$

Tenemos,

$$\frac{6(s+34)}{s(s+5+3j)(s+5-3j)} = \frac{6}{s} + \frac{-3-4j}{-3+5j} + \frac{-3+4j}{s+5-3j}$$

$$f(t) = 6 + (-3-4j)e^{-(5+3j)t} + (-3+4j)e^{-(5-3j)t}$$

$$f(t) = 6 + (-3 - 4j)e^{-5t}e^{-3j} + (-3 + 4j)e^{-5t}e^{3j}$$

$$f(t) = 6 + (-3 - 4j)e^{-5t}(cos3t - jsin3t) + (-3 + 4j)e^{-5t}(cos3t + jsin3t)$$

$$f(t) = 6 - 6e^{-5t}cos3t - 8e^{-5t}sin3t$$

Propiedades de la T.L.

1) Desplazamiento de tiempo.
2) Desplazamiento en frecuencia.
3) Diferenciación en el tiempo.
4) Integración en el tiempo.
5) Convolución en el tiempo.

Ejemplo 7

Supongamos que tenemos un circuito representado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \frac{df}{dt} + f(t)$$

Derivadas
a la salida.

Derivadas
en la entrada.

Las condiciones iniciales son:

$$y(0^-) = 2$$

$$y'(0^-) = 1$$

y la entrada al sistema es:

$$f(t) = e^{-4t}u(t)$$

Existe una forma de resolver esto,

$$y(t) = y(t)_{ZSR} + y(t)_{ZIR}$$

Condiciones
iniciales cero.

Entrada cero.

Este sistema se puede resolver,

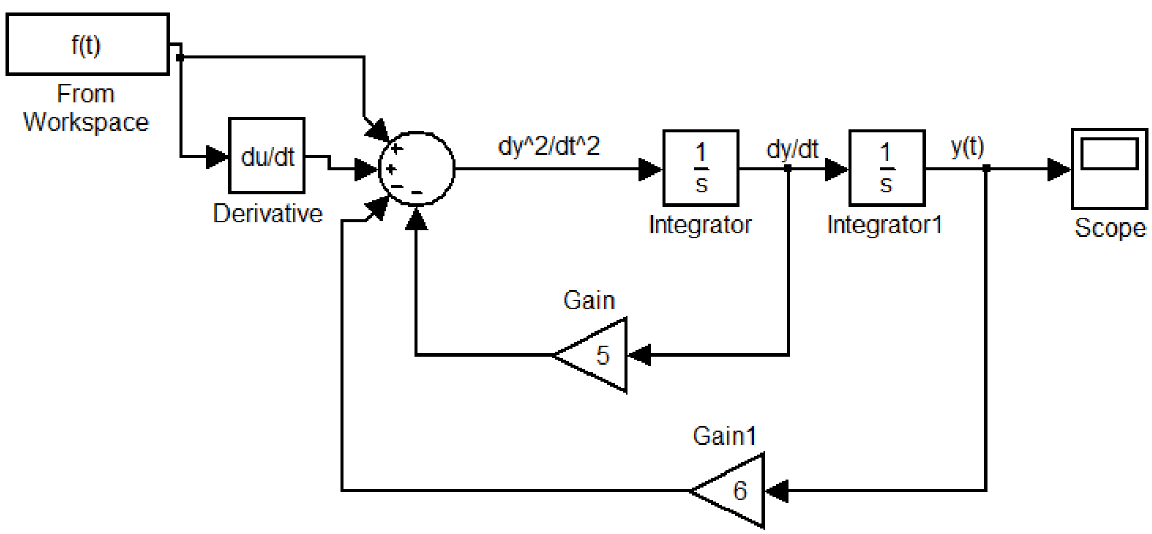
$$f(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y(t)=\frac{df}{dt}+f(t)} \longrightarrow y(t)$$

Cuando la entrada es cero, aparece la respuesta del sistema únicamente a condiciones iniciales,

$$\underbrace{\frac{d^2y_{ZIR}}{dt^2}+5\frac{dy_{ZIR}}{dt}+6y_{ZIR}}_{\text{Modos de operación.}}=0$$

Por otro lado, el sistema representado por la ecuación diferencial utilizando *simulink*, se resuelve dejando al lado izquierdo de la igualdad la mayor de las derivadas en la ecuación diferencial. Para este caso, se tiene un sistema de segundo orden. Adicionalmente, este es un sistema que posee derivadas en la entrada, lo cual es una ventaja ya que se conoce la entrada al sistema.

$$\frac{dy^2}{dt^2}=-5\frac{dy}{dt}-6y(t)+\frac{df}{dt}+f(t)$$



Utilizando Laplace,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{d^2y}{dt^2} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & sY(s) - y(0^-) \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{d\left\{\frac{dy}{dt}\right\}}{dt} &= s\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - y'(0^-) \\ &= s[sY(s) - y(0^-)] - y'(0^-) \\ &= s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \end{aligned}$$

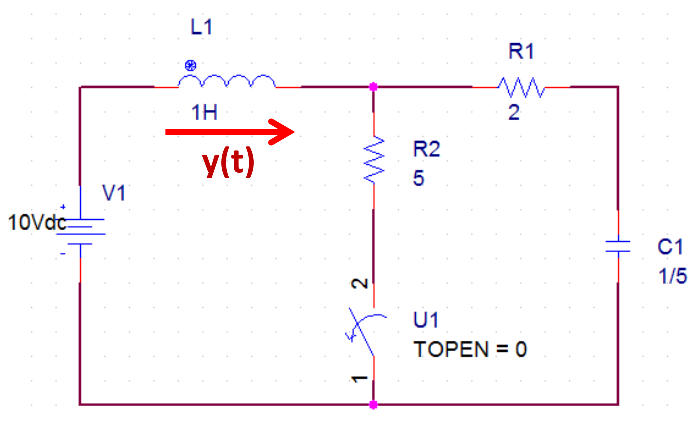
$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sF(s) - f(0^-) + F(s)$$

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = \{sF(s) + F(s)\} + \{sy(0^-) + y'(0^-) + 5y(0^-)\}$$

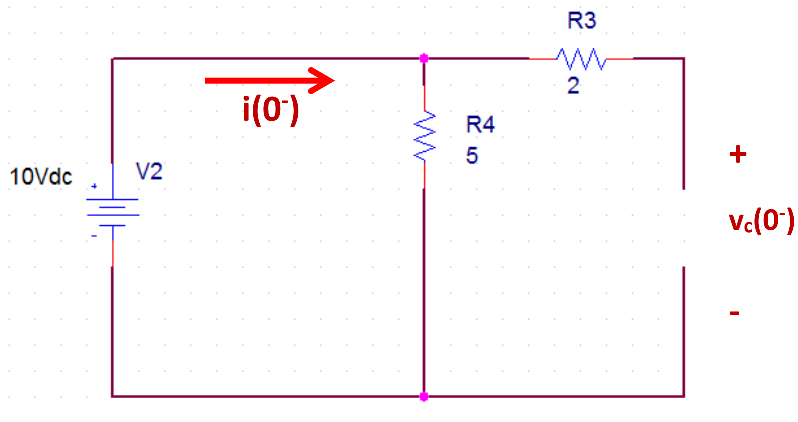
$$Y(s)\{s^2 + 5s + 6\} = \underbrace{\boxed{F(s)\{s+1\}}}_{\textbf{ZSR.}} + \underbrace{\boxed{\{sy(0^-) + y'(0^-) + 5y(0^-)\}}}_{\textbf{ZIR.}}$$

$$Y(s) = F(s)\frac{(s+1)}{s^2 + 5s + 6} + \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 5y(0^-)}{s^2 + 5s + 6}$$

Ejemplo 8:



Para $t < 0$, conectado desde hace mucho tiempo.



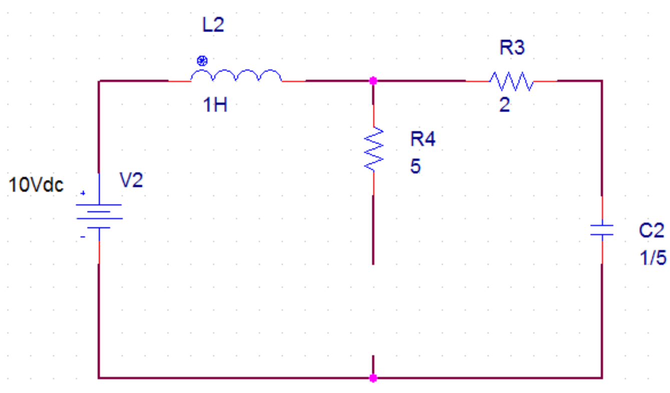
Condiciones iniciales:

$$i_L(0^-) = \frac{10V}{5\Omega} = 2A$$

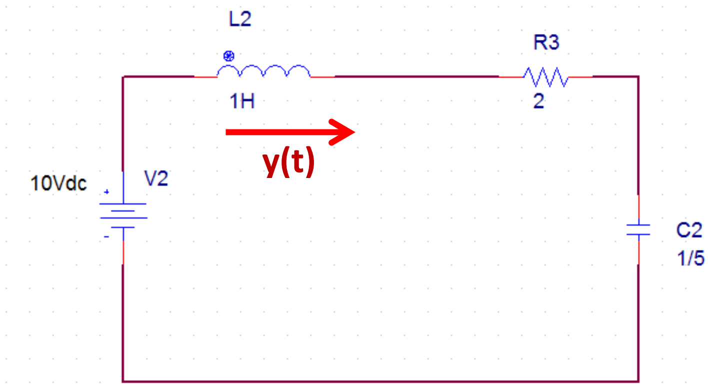
$$V_C(0^-) = V_{5\Omega}(0^-) = 10V$$

$$\mathrm{i}_2(0^-) = 0A$$

Para $t > 0$



La fuente de voltaje es 10V en $t = 0$



La ecuación diferencial es

$$-f(t)+L\frac{dy}{dt}+2y(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=0$$

$$\frac{dy}{dt}+2y(t)+5\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=10u(t)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+2\mathcal{L}\{y(t)\}+5\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau\right\}=\mathcal{L}\{10u(t)\}$$

$$sY(s)-y(0^-)+2Y(s)+5\left\{\frac{Y(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0^-}y(\tau)d\tau}{s}\right\}=\frac{10}{s}$$

La integral de la corriente es la carga.

$$\int_{-\infty}^{0^-}y(\tau)d\tau=q(0^-)=CV_C(0^-)=\frac{1}{5}(10)=2$$

$$sY(s)-y(0^-)+2Y(s)+\frac{5Y(s)}{s}+\frac{10}{s}=\frac{10}{s}$$

$$Y(s)\left\{s+2+\frac{5}{s}\right\}=\frac{10}{s}+\left(-\frac{10}{s}+y(0^-)\right)$$

$$Y(s)=\frac{10/_s}{s+2+5/_s}+\frac{y(0^-)-10/_s}{s+2+5/_s}$$

$$Y(s) = \frac{{}^{10}/_{s}}{s + 2 + {}^{5}/_{s}} + \frac{2 - {}^{10}/_{s}}{s + 2 + {}^{5}/_{s}}$$

$$Y(s) = \boxed{\underbrace{\boxed{\frac{10}{s^2+2s+5}}}_{\text{ZSR.}} + \underbrace{\boxed{\frac{2s-10}{s^2+2s+5}}}_{\text{ZIR.}}} \rightarrow$$

Respuesta del circuito a la entada $f(t)$

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4 - 20}}{2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm 2j$$

$$\frac{10}{(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)} = \frac{a}{s + 1 + 2j} + \frac{b}{s + 1 - 2j}$$

$$10 = a(s + 1 - 2j) + b(s + 1 + 2j)$$

Si $s = -1 - 2j$,

$$10 = a(-1 - 2j + 1 - 2j)$$

$$10 = a(-4j)$$

$$a = \frac{-10}{4j} = \frac{10j}{4}$$

$$b = a^* = \frac{-10j}{4}$$

$$\frac{2s - 10}{(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)} = \frac{c}{s + 1 + 2j} + \frac{d}{s + 1 - 2j}$$

$$2s - 10 = c(s + 1 - 2j) + d(s + 1 + 2j)$$

Si $s = -1 - 2j$,

$$2(-1 - 2j) - 10 = c(-1 - 2j + 1 - 2j)$$

$$-2-4j-10=c(-4j)$$

$$c=\frac{-12-4j}{-4j}=1-3j$$

$$d=c^{*}=1+3j$$

Resumiendo,

$$Y(s)=\frac{\frac{10j}{4}}{s+1+2j}-\frac{\frac{10j}{4}}{s+1-2j}+\frac{1-3j}{s+1+2j}+\frac{1+3j}{s+1-2j}$$

$$y(t)=\frac{10j}{4}e^{-(1+2j)t}-\frac{10j}{4}e^{-(1-2j)t}+(1-3j)e^{-(1+2j)t}+(1+3j)e^{-(1-2j)t}$$

$$y(t)=-e^{-t}sin2t+2e^{-t}cos2t$$