Transformada de laplace

→ Tecnica nueva para resolver una ED

→ Es una ED lineal, no homogenea y coef. ctes.

→ Se tiene la ED $ay'' + by' + cy = g(t)$

→ Recordemos $y = y_c + y_p$ → con T.L. vamos a solucionar las mismas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} ay'' + by' + cy = g(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{La transformamos con Laplace}} \text{Ecuación algebraica}$$

$$\text{Ecuación algebraica} \xrightarrow{TL^{-1} \text{ la volvemos a transformar}} y$$

→ la trasformada de laplace va a cambiar de variable

> sea $f(t)$ es una función integrable en el intervalo $[0, +\infty)$
>
> Definimos la transformada de laplace como:
>
> $$L(f(t))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Ejemplos

1) Calcule la TL de la función: $f(t) = e^{3t}$

$$L(e^{3t})(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{3t}\, dt$$

$$\int_0^m e^{-st} e^{3t}\, dt = \int e^{(3-s)t}\, dt = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{\cancel{e^{(3-s)m}}^{\,0}}{\cancel{3-s}} - \frac{1}{3-s} \right] = \frac{1}{s-3} \quad \text{siempre que } s > 3$$

$$= \frac{e^{(3-s)t}}{3-s} \Big|_0^m = \frac{(e^{3-s})^m}{3-s} - \frac{1}{3-s}$$

Concluimos que la transformada de $L(e^{3t}) = \frac{1}{s-3}$

En general si $a \in \mathbb{R}$ $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$

2) Calcular la TL $f(t) = t^2$

$$L(t^2) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^2\, dt$$

$$\int_0^m e^{-st} t^2 \Big|_0^m = \lim_{m \to \infty} \int e^{-st} t^2\, dt$$

u	dv
t^2	e^{-st}
$2t$	$-e^{-st}/s$
2	e^{-st}/s^2
0	$-e^{-st}/s^3$

$$\int e^{-st} t^2\, dt = -\frac{t^2 e^{-st}}{s} - \frac{2t e^{-st}}{s^2} - \frac{2e^{-st}}{s^3} \Big|_0^m$$

$$= \frac{-m^2 e^{-sm}}{s} - \frac{2me^{-sm}}{s^2} - \frac{2e^{-sm}}{s^3} - \left(-\frac{2}{s^3}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{-m^2}{se^{sm}} - \frac{2m}{s^2 e^{sm}} - \frac{2}{s^3 e^{sm}} + \frac{2}{s^2} \right] = \frac{2}{s^3}$$

l'hopital

Concluimos que $L(t^2) = \frac{2}{s^3}$, si $s>0$

En general si $n \in \mathbb{N}$ $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

3) Calcular la TL $f(t)=1$

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{se^{sm}} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s} \qquad L(1) = \frac{1}{s}$$

Ejercicio: Demuestre que

→ $L(\text{sen}(kt)) = \frac{k}{s^2+k^2}$ → $L(\cos(kt)) = \frac{s}{s^2+k^2}$

Propiedades de TL (linealidad)

- $L(cf(t)) = c\,L(f(t))$
- $L(f(t)+g(t)) = L(f(t)) + L(g(t))$

Ejemplo (TL de un polinomio)

Calcule la TL de $f(t) = 5t^4 - 6t^3 + 4t + 8$

$$L(5t^4 - 6t^3 + 4t + 8) = L(5t^4) + L(4t) + L(8)$$

$$= 5\,L(t^4) - 6\,L(t^3) + 4\,L(t) + 8\,L(1)$$

$$= \frac{5\cdot 4!}{s^5} - \frac{6\cdot 3!}{s^4} + \frac{4\cdot 1}{s^2} + \frac{8\cdot 1}{s}$$

$$= \frac{120}{s^5} - \frac{36}{s^4} + \frac{4}{s^2} + \frac{8}{s}$$

Ejemplo:

$L(\text{sen } 6t) = \frac{6}{s^2+36}$ $\quad L(\cos(7t)) = \frac{s}{s^2+49}$ $\quad L(\text{sen}(\sqrt{5}t)) = \frac{\sqrt{5}}{s^2+5}$

$$L(\text{senh}(t)) = L\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[L(e^t) - L(e^{-t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+1-s+1}{(s-1)(s+1)}\right] = \frac{1}{s^2-1}$$

Ejercicios: Encuentre $L(f(t))$

19. $f(t) = 2t^4$

$$L(2t^4) = 2L(t^4) = 2\left(\frac{5!}{s^5}\right)$$

21. $f(t) = 4t - 10$

$$L(4t-10) = 4L(t) - 10L(1) = 4\ \frac{1!}{\ }$$

30. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

$$= e^{2t} - 2e^t \cdot e^{-t} + e^{-2t} = e^{2t} - 2 + e^{-2t}$$

$$L(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2}$$

$\text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ $\quad\frac{1}{2}\text{sen}(2\theta) = \text{sen}\,\theta\cos\theta$

37. $L(\text{sen}\,2t\cos 2t) = L\left(\frac{1}{2}\text{sen}(4t)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{s^2+16} = \frac{2}{s^2+16}$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 2t-2 & \text{si } 1 < t \end{cases}$$

$m = 2$

$0 = 2 + b \rightarrow b = -2$

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \int_0^1 e^{-2t}\cdot 0\,dt + \int_0^\infty e^{-2t}(2t-2)\,dt$$ calcular la integral

Tabla de TL elementales

$f(t)$	$L(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\text{sen}\,kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$

Transformada de Laplace Inversa

Sea $F(s)$ una función. La TL inversa de F es una función $f(t)$ tal que:

$$L(f(t)) = F(s)$$

Inversa se denota por $L^{-1}(F(s))$

Propiedades

$$\mathcal{L}^{-1}(c \cdot F(s)) = c\,\mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) + G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

Ejemplos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^6}\right) = \frac{t^5}{5!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s^3}\right) = 8\frac{t^2}{2!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s} + \frac{3}{s^2}\right) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 3\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = 5 + 3t$$

$$\frac{5s+3}{(s+4)(s-5)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-5}$$ → REPASAR FRACCIONES PARCIALES