Señales y Sistemas I
cod: 2016506

Docente Claudia Caro Ruiz

8 de noviembre de 2021

El material que se presenta en estas diapositivas es de autoría de Jorge Iván Sofrony Esmeral.

Series de Fourier

- La ingeniería tiende a plantear problemas complejos como la suma de problemas más pequeños (y por lo tanto menos complejos)
- Un ejemplo es la serie de Taylor, donde

$$f(t) \cong f(0) + \frac{df(0)}{dt} \cdot t + \frac{d^2 f(0)}{dt^2} \cdot t^2 + \cdots$$

- Observe que $f(t)$ puede ser aproximada mediante la suma de un escalón, una rampa y una parábola, y términos de mayor orden
- Sin embargo, para que nuestra aproximación sea aceptable, debemos cumplir tres requisitos.
  1. Factibilidad $\Rightarrow$ Existen derivadas.
  2. Linealidad
  3. Simplicidad $\Rightarrow$ si requerimos de un número infinito de problemas, esto puede complicar la solución.

Aproximación de Señales Periódicas

- En esta sección estudiaremos la “Serie de Fourier”, la cual permite expresar una señal periódica, como la suma de señales periódicas de menor complejidad.
- Se asume que las señales son función deltiempo (variable independiente) y son de tipo real

$$x(t) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Inicialmente se consideran señales senoidales puras, y posteriormente se aproximan señales periódicas no senoidales por medio de senos/cosenos.

Señales Periódicas

- Una señal es periódica si existe un T tal que

$$x(t) = x(t+T) \qquad \forall t$$

- Suposiciones y Definiciones
  1. La señal existe para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, la señal es *persistente*
  2. Una señal periódica tiene periodo nT, $n \in \mathbb{Z}$, i.e.

$$x(t) = x(t+nT) = x(t+T) \qquad \forall t$$

  3. El periodo fundamental este dado por el mínimo tiempo de "repetición" y la frecuencia fundamental de oscilación es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Aproximación de Señales Periódicas

- Considere un señal de entrada como se muestra en la Figura (señal tren de pulsos de amplitud 1, centrada en 0,5, ciclo útil del 50 % y periodo T_0).
- La salida de un sistema debido a esta entrada puede ser compleja de hallar, por lo cual se puede acudir a una aproximación "adecuada".

- Esta señal puede aproximarse por medio de una señal senoidal, lo cual facilitaría encontrar aproximadamente la señal $y(t)$.
- En este ejemplo asumimos que una señal seno es la "mejor" aproximación.
- Se puede obtener una solución **óptima** si se minimiza el error cuadrático en un periodo.

$$J[e(t)] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^2(t)dt \qquad e(t) = y(t) - B_1\sin(\omega_0 t)$$

donde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ y B_1 es un parámetro por determinar.

- Problema de Optimización

$$\min_{B_1>0} J[e(t)] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^2(t)dt$$

- Para de terminar el "mínimo" con respecto a B_1

$$\frac{\partial J(e)}{\partial B_1} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} -2[y(t) - B_1 \sin(\omega_0 t)]\sin(\omega_0 t)dt = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{T_0} y(t)\sin(\omega_0 t)dt &= B_1 \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) = \int_0^{T_0} \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)]dt \\ \Rightarrow \int_0^{T_0} y(t)\sin(\omega_0 t)dt &= B_1 \frac{T_0}{2} \end{aligned}$$

- Ahora debemos confirmar que es un mínimo (no un máximo).

$$\frac{\partial^2 J(e)}{\partial B_1^2} = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) > 0$$

- Utilizando la primera derivada, y las ecuaciones anteriores, podemos hallar B_1 tal que

$$B_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\sin(\omega_0 t)dt$$

- Este valor de B_1 garantiza el menor error de aproximación, asumiendo una aproximación senoidal.

Ejemplo

- Considere una señal cuadrada, periódica e impar
- Para encontrar la aproximación óptima

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\sin(\omega_o t)dt \\
&= \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2}\sin(\omega_o t)dt + \int_{T_0/2}^{T_0} -\sin(\omega_o t)dt\right] \\
&= \frac{2}{T_0}\left[\left.\frac{-\cos\omega_0 t}{\omega_0}\right|_0^{\frac{T_0}{2}} + \left.\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0}\right|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\cos(\pi) + 1 + \cos(2\pi) - \cos(\pi)\right] = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

Series de Fourier

- Para introducir el uso de las series de Fourier, considere la señal

$$x(t) = 10 + 3\cos(\omega_0 t) + 5\cos(2\omega_0 t + 30^\circ) + 4\sin(3\omega_0 t)$$

- Es fácil demostrar que dicha señal es periódica y que se puede expresar como

$$\begin{aligned} x(t) &= 10 + \frac{3}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] + \frac{5}{2}\left[e^{2j\omega_0 t} + e^{-2j\omega_0 t}\right] e^{j30^\circ} + \frac{4}{2j}\left[e^{3j\omega_0 t} - e^{3j\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{k=-3}^{3} C_k e^{j\omega_0 k t} \end{aligned}$$

- Acá se puede observar que la suma de señales senoidales se puede expresar como la suma de exponenciales complejas.

- De forma general, una señal **periódica** real $x(t)$ puede expresarse como una serie armónica

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt} \qquad C_k = C_{-k}^*$$

- La frecuencia fundamental ω_0 es considerada como el primer armónico, y la frecuencia $k\omega_0$ son el k-esimo armónico.
- Decimos que esta serie armónica es una serie de Fourier si los coeficientes C_k son los coeficientes de Fourier.
- En general los coeficientes de Fourier son números complejos que se pueden expresar de la forma

$$C_k = |C_k|e^{j\theta_k} \qquad C_{-k} = |C_k|e^{-j\theta_k}$$

- Si consideramos la suma de las serie para "k" fijo, sabemos que

$$C_{-k}e^{-j\omega_0 kt} + C_k e^{j\omega_0 kt} = |C_k|\cos(\omega_0 kt + \theta)$$

- De esta manera, si conocemos los coeficientes C_k, la señal periódica (real) está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k|\cos(\omega_0 kt + \theta_k) \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k|\left[\cos(\theta_k)\cos(\omega_0 kt) - \sin(\theta_k)\sin(\omega_0 kt)\right] \end{aligned}$$

- Asumiendo que C_k es un número complejo tal que.

$$2C_k = 2|C_k|e^{j\theta_k} = 2|C_k|\cos(\theta_k) + 2j|C_k|\sin(\theta_k)$$

y definiendo

$$A_k = 2|C_k|\cos(\theta_k) \qquad B_k = 2|C_k|\sin(\theta_k)$$

- La serie de Fourier se define (implícitamente)como

$$X(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(\omega_0 kt) + B_k \sin(\omega_0 kt)\right]$$

Coeficientes de Fourier

- Para determinar los coeficientes de Fourier, asumimos que la respuesta armónica exponencial se cumple tal que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}$$

- Ahora post-multiplique ambos lados de la ecuación por $e^{-j\omega_0 nt}$ e integre ambos lados sobre un periodo

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \int_0^{T_0} C_k e^{j\omega_0 (k-n)t}dt$$

- Tomando la parte derecha de esta expresión y utilizando la respuesta de Euler, tenemos

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \int_0^{T_0} C_k(\cos((k-n)\omega_0 t) + j\sin((k-n)\omega_0 t))dt$$

donde podemos observar que

- $\int_0^{T_0} \sin((k-n)\omega_0 t)dt = 0 \qquad \forall k \neq n$
- $\int_0^{T_0} \cos((k-n)\omega_0 t)dt = 0 \qquad \forall k \neq n$
- $\int_0^{T_0} \cos((k-n)\omega_0 t)dt = T_0 \qquad \forall k = n$
- Por tal motivo, podemos obtener la siguiente expresión

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 nt}dt$$

- Considerando que

$$C_k \int_0^{T_0} e^{j\omega_0 kt}e^{-j\omega_0 nt}dt = 0 \qquad \forall k \neq n$$

- Este tipo de funciones se llaman ortogonales ente $(0, T_0)$
- Considere el coeficiente $C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt$ lo cual representa el promedio de la señal sobre un periodo, o el valor **D.C.**

Espectro de Frecuencia

- Ahora encontremos la serie de Fourier de una señal tipo tren de pulsos (square wave signal)
- Considere que la señal está centrada en 0 y tiene una frecuencia T_0 tal como se muestra en la Figura

- Ahora debemos encontrar la serie Fourier, lo cual implica hallar los coeficientes C_k

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt = \frac{V}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\omega_0 nt} dt - \frac{V}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j\omega_0 nt} dt \\ &= \frac{V}{T_0(-j\omega_0 n)}\left[e^{-j\omega_0 nt}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} - e^{j\omega_0 nt}\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \right] \end{aligned}$$

- Observando que $\omega_0 t\big|_{t=\frac{T_0}{2}} = \frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2} = \pi$ y $\omega_0 t\big|_{t=T_0} = 2\pi$, tenemos

$$\begin{aligned} C_k &= \left(\frac{jV}{2\pi k}\right)\left[e^{-jk\pi} - e^{j0} - e^{-jk2\pi} + e^{-jk\pi} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{2jV}{k\pi} & k \Rightarrow \text{impar} \\ 0 & k \Rightarrow \text{par} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^{-jk\pi} &= 2(\cos(k\pi) - j\sin(k\pi)) \\ e^{j0} &= 1 \\ e^{2\pi jk} &= \cos(2\pi k) - j\sin(2\pi k) \end{aligned}$$

Espectro en Frecuencia

- En el ejemplo anterior, se obtuvo la respuesta en serie de Fourier de una señal cuadrada periódica.
- Una forma de representar esta señal es mediante un gráfico de su espectro en frecuencia.
- Para el ejemplo anterior

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{k_{odd}} \frac{2}{k\pi} \cdot e^{\frac{-j\pi}{2}} \cdot e^{j\omega_0 k t} \\
&= \sum_{k_{odd}} \frac{4}{k\pi} \cdot \cos(k\omega_0 t - 90^\circ)
\end{aligned}
$$

- Gráficamente, esta descomposición se puede representar por medio de diagramas de magnitud y fase de cada armónico de la señal.

Ejemplo

- La serie de Fourier de un tren de impulso es bastante utilizada en ingeniería.
- Considere la ecuación que determina los coeficientes de $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t)e^{-j\omega_0 kt} = \frac{1}{T_0}e^{-j\omega_0 kt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} \end{aligned}$$

- Esto se debe a las propiedades de la señal impulso y la continuidad de $x(t)$en $t=0$.
- Por último, la señal se puede representar como

$$x(t) = \sum_k \frac{1}{T_0}e^{+j\omega_0 kt} = \frac{1}{T_0} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{T_0}\cos(\omega_0 kt)$$

- Como pueden observar, es una señal con espectro constante y desfase 0

Ejemplo

- Considere un tren de pulsos rectangulares.
- Esta señal es muy utilizada en comunicaciones y su aplicación puede ser la de AM (Amplitude Modulated)
- La señal que se considera es la señal rectangular con amplitud X_0, ancho de pulso T y periodo T_0

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k \frac{T}{T_0} X_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{Tk\omega_0)}{2}\right)}{\frac{Tk\omega_0)}{2}} \right] e^{j\omega_0 tk} \\ &= \sum_k \frac{T}{T_0} X_0 \mathrm{sinc}\left(\frac{\mathrm{Tk}\omega_0}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 \mathrm{tk}} \end{aligned}$$

La función sinc, definida como

$$\mathrm{sinc(x)} = \frac{\mathrm{sin(x)}}{\mathrm{x}}$$

tiene un valor de 1 para $x \to 0$ (utilizando L'hopita)

- El espectro de esta señal rectangular se puede representar mediante un gráfico de amplitud y fase de los coeficientes C_k

Propiedades de las Series de Fourier

- Una señal periódica $x(t)$ que cumpla las condiciones de "Dirilecht" puede ser expandida en series de $\mathcal{L}$.
- Las condiciones de "Dirilecht" son las siguientes.
  1. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
  2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en la señal
  3. $x(t)$ es acotada y AI

$$\int_{T_0} |x| dt < \infty$$

- Ahora estudiaremos algunas propiedades de las series de Fourier.

1. La serie de Fourier converge al valor x(t) para $t = t_a$ si $x(t_a)$ es continua en ese punto, y sus derivadas existen, sin importar que estas sean distintas para $t \to t_a^-$ (izquierda) y $t \to t_a^+$ (derecha).
2. Si $x(t)$ es discontinua en $t = t_a$ la serie de Fourier converge al promedio de la señal en $t = t_a$ para los valores mientras $t \to t_a^-$ y $t \to t_a^+$.

$$\sum_k C_k e^{j\omega_0 k t_a} = \frac{x(t_a^-) + x(t_a^+)}{2}$$

Nota

Esta propiedad se cumple para todo $t = t_a$ donde $x(t_a)$ es continuo

3. Casi cualquier señal continua x(t) con periodo T_0, puede aproximarse uniformemente a una serie de Fourier truncada, donde

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} C_k e^{j\omega_0 k t}$$

y el error de aproximación está dado por $e(t) = x(t) - x_N(t)$ donde $\lim_{N\to\infty} e(t) = 0$

4. Los coeficientes C_k son óptimos en el sentido que

$$\mathrm{ISE} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T_0}} \mathrm{e}^2(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

es mínimo

5. La sumatoria de señales trigonométricas a frecuencia $\omega_0 t$, es su serie de Fourier por definición.

6. La magnitud de los coeficientes C_k para una señal $x(t)$ decrece a medida que k aumenta, a una velocidad mínima $\dfrac{1}{T}$ para k los suficientemente grande.
   - Si $x(t)$ contiene una o más discontinuidades, su velocidad máxima es $\dfrac{1}{k}$.
   - Si $x(t)$ es continuamente diferenciable hasta n, donde la *n-esima* derivada cumple las condiciones de Dirilecht, entonces para k grande la velocidad aproximada e $\left(\frac{1}{k}\right)^{n-t}$.

7. La serie de Fourier de una suma de señales periódicas, es igual a la suma de la serie de Fourier de cada una de las señales.

Nota

Es evidente que la suma debe eser periódica, de lo contrario no existe la serie de Fourier.

- La propiedad 1 se observa para el caso para una señal triangular.
- La segunda propiedad se observa para el caso de una señal cuadrada donde

$$x(t) = \sum_{k} \frac{4X_0}{k\pi} \sin(k\omega_0)$$

Las discontinuidades de $x(t)$ se presentan en $t = n\frac{T_0}{2}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Se puede observar que la serie de Fourier es igual a 0 (*i.e.* $\sin(nk\pi) = 0 \quad \forall, k, n)$), lo cual es equivalente al promedio propuesto.

- La tercera propiedad es una de las más importantes y es clave para entender el comportamiento A.C. de los filtros.
  - Para el caso de una señal cuadrada con nivel D.C. igual a 0, podemos observar que esta señla se aproxima de la siguiente manera

$$C_k = \begin{cases} \frac{2X_0}{k\pi}\sphericalangle 90^\circ & k \quad \text{impar} \\ 0 & k \quad \text{par} \end{cases}$$

1. $N = 2 \Rightarrow \frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t) = x_N(t)$

Nota

Observe que el coeficiente $C_1 = \frac{4}{\pi}$ lo cual es equivalente a lo que hallo en problemas anteriores. Puede argumentarse que C_k es óptimo en un sentido ISE.

2. $N = 3 \Rightarrow x_N(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega_o t)$

- Observen que a medida que se suman términos, el "ripple" de la aproximación se reduce en el centro de la señal. Sin embargo, la amplitud de esta aproximación cerca a la discontinuidad no se aproxima a cero, sino al 1 % del valor de este salto.
- Esto se conoce como el fenómeno de **Gibbs**.

- Observen que a medida que se suman términos, el "ripple" de la aproximación se reduce en el centro de la señal. Sin embargo, la amplitud de esta aproximación cerca a la discontinuidad no se aproxima a cero, sino al 1 % del valor de este salto.
- Esto se conoce como el fenómeno de **Gibbs**.

Ejercicios

1. Encuentre los C_k para

$$x(t) = \cos(2\omega_0 t) + 3\cos(4\omega_0 t)$$

   y muestre que se cumple la propiedad 6.

2. Encuentre los coeficientes de la señal rectangular discontinua anteriormente nombrada.
3. Encuentre la serie de Fourier de una señal A.C. rectificada

$$x(t) = |\sin(\omega_0 t)|$$