Comienzo de temas metodológicos del curso

Usaremos lo aprendido en PyE1 y PyE2 y lo utilizaremos para estudiar p-variables de forma conjunta.

Recordemos

P.H. respecto a una media poblacional μ_0

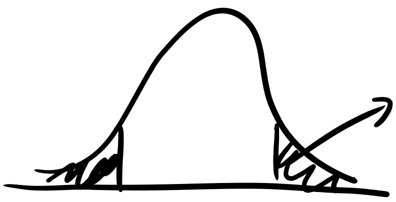
$H_0: \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_a: \mu \neq \mu_0$

$<$

$>$

Región rechazo

- Hipótesis
- Estadístico de contraste
- Región de rechazo.



Z, T → cuando no se conoce σ. Lo estimamos con S

Z → cuando se conoce la varianza poblacional

$\bar{X} \sim N_p(\mu, \frac{1}{n}\Sigma)$ → por el TLC

$\bar{X}$: media muestral

Volviendo al caso univariado.

Si H_0 es cierta, t tiene una distribución t-student con $n-1$ gl $\qquad t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Rechazamos H_0 si $t \in RR$, es decir, si

[illegible]

$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ (para el caso bilateral)

$t < -t_\alpha$ (para el caso de cola inferior)

$t > t_\alpha$ (para el caso cola superior)

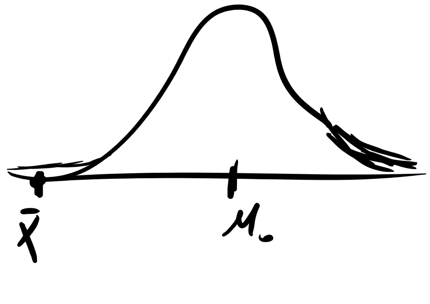
→ Rechazamos H_0 si $|t|$ es grande.

Esto es equivalente a rechazar H_0 si

$$t^2 = \left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right)^2 \text{ es grande.}$$

$$t^2 = n(\bar{X}-\mu_0)(S^2)^{-1}(\bar{X}-\mu_0)$$

Es decir, rechazamos H_0 si el cuadrado de la distancia entre $\bar{X}$ y μ_0 asociado a S es grande.



$\mu = \mu_0$

μ_0

23 - 170

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$\bar{X} = 23$

$H_0: \mu = 170$

$H_a: \mu \neq 170$

p-valor pequeño → más probable rechazar H_0.

Dada una muestra, se rechaza H_0 si

[illegible]

$$n(\bar{x}-\mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x}-\mu_0) > t_{n-1}^{2}(\alpha/2)$$

Si H_0 no se rechaza, μ_0 es un valor posible de μ.

Recordemos que no rechazar H_0 con nivel α, equivale a tener a μ_0 en un I.C. con confianza $1-\alpha$.

$$\bar{X} \pm t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Cualquier valor dentro del IC, será un valor para el cual no se rechazá H_0.

Obs: Antes de tomar la muestra, los extremos del I.C. son V.A.

La prob. de que el IC contenga el valor real de μ es $1-\alpha$

Luego, si tomamos muchas muestras $\simeq 1-\alpha \cdot 100\%$ contendrá el valor de μ.

Generalizando a p variables aleatorias

$$T^2 = (\bar{\mathbb{X}}-\mu_0)'\left(\frac{1}{n}S\right)^{-1}(\bar{\mathbb{X}}-\mu_0)$$

$$= n(\bar{\mathbb{X}}-\mu_0)'(S)^{-1}(\bar{\mathbb{X}}-\mu_0)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})'(X_j - \bar{X})$$

Obs:

1) T^2 se le llama T^2 de Hotelling

2) $\frac{1}{n} S$ es la estimación de la covarianza de $\bar{X}$

3) Si T^2 es muy grande, $\bar{X}$ está lejos de μ_0, por lo que se rechaza H_0.

4) $T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} \cdot F_{p,n-p}$

Entonces $\alpha = P\left(T^2 > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) \,\middle|\, H_0 \text{ cierta}\right)$

Si tenemos una PH de la forma

$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$

con un nivel α

rechazamos H_0 si

$$T^2 = n \underbrace{(\bar{x} - \mu_0)'}_{} \underbrace{(S^{-1})}_{} \underbrace{(\bar{x} - \mu_0)}_{} > \frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)$$

$p = 2$

$$T = n\underbrace{(\bar{x}-\mu_o)'}_{N_p}\underbrace{(S^{-1})}_{\text{Wishart } p,\, n-1}\underbrace{(\bar{x}-\mu_o)}_{N_p}$$

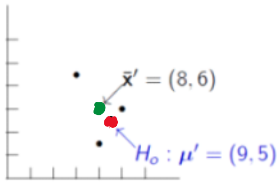
$p = 2$

$n-p = 3-2 = 1$

Example 1

$n = 3$ and $p = 2$

$$\text{Data: } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\boxed{H_o : \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Assuming data come from a multivariate normal distribution and independent observations,

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{4(9)-(-3)(-3)} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4\ 27 \end{pmatrix}$$

Example 1

$$\begin{aligned} T^2 &= n(\bar{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}_o)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}_o) \\ &= 3((8-9), (6-5)) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (8-9) \\ (6-5) \end{pmatrix} \\ &= 3(-1, 1) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3(7/27) = 7/9 \end{aligned}$$

Value we need for $\alpha = .05$ is $\mathcal{F}_{2,1}(.05) = 199.51$.

$$\frac{(3-1)2}{3-2} 199.51 = 4(199.51) = 798.04.$$

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} \cdot 199.51 = 798.04$$

Since $T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)}\mathcal{F}_{p,n-p}$, we can compare our T^2 to 798.04.

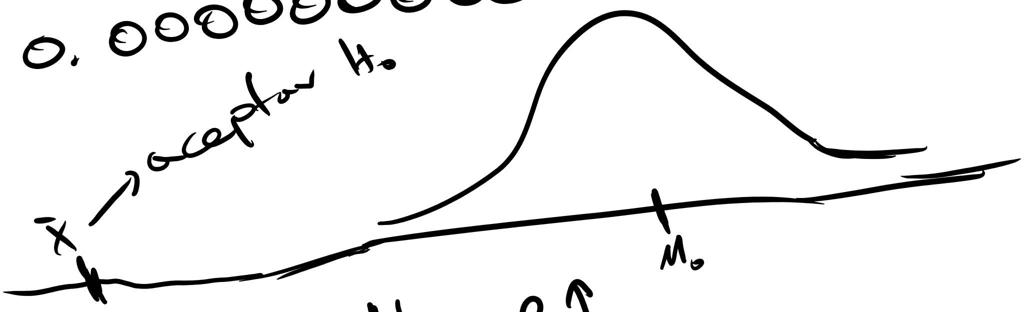
Alternatively, we could compute p-value: compare $.25(7/9) = 0.194$ to $\mathcal{F}_{2,1}$ and we get p-value $= .85$.

Do not reject H_o. ($\bar{x}$ and $\boldsymbol{\mu}$ are "close" in the figure).

Métodos de razón de verosimilitud.

más potente.

$\alpha = 0.000000001 \rightarrow$ área de la RR.



$\alpha \Downarrow \quad \beta \uparrow$

Potencia $= 1-\beta$

$$\max_{\mu,\Sigma} L(\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}\,|\Sigma|^{n/2}} \cdot e^{-np/2}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})'$$

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

Asumiendo que $H_0: \mu = \mu_0$

$$L(\mu_0,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}\,|\Sigma|^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\sum (x_j-\mu_0)'\Sigma^{-1}(x_j-\mu_0)\right]}$$

Si μ_0 fijo, el valor más posible con las observaciones se tiene con:

$$\max_{\Sigma} L(\mu_0,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}\,|\hat{\Sigma}_0|^{n/2}} \cdot e^{-np/2}$$

$$\hat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu_0)(x_j-\mu_0)' \qquad \mu_0 \approx \bar{x}$$

↳ Asumiendo $\mu_0 = \mu_0$

Para determinar si μ_0 es un valor posible de μ, se comparan los máximos $L(\mu_0,\Sigma)$ y de $L(\mu,\Sigma)$

Razón de verosimilitud:

lambda de Wilk $\longrightarrow \Lambda = \dfrac{\max\limits_{\Sigma} L(\mu_0, \Sigma)}{\max\limits_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}$

$$= \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} \right)^{n/2}$$

Si Λ pequeño, entonces $H_0 : \mu = \mu_0$ es poco probable y H_0 se rechaza

Más concretamente H_0 se rechaza si

$\Lambda < C_\alpha$ α percentil izquierdo de la distribucion de Λ

Teorema:
Sea $X_1, \ldots X_n$ una muestra aleatoria de una $N_p(\mu, \Sigma)$ la prueba usando T^2 es equivalente a usar Λ si

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_a : \mu \neq \mu_0$

dado que $\Lambda^{2/n} = \left(1 + \frac{T^2}{(n-1)}\right)^{-1}$

En general:

Sea θ un vector de parámetros poblacion.

Sea $L(\theta)$ la función de verosimilitud de $X_1, \dots X_n$ teniendo $x_1, \dots, x_n$ → muestra

θ toma valores en Θ

Si tenemos $H_0: \theta = \theta_0$ equivale a $\theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$

En este caso, la prueba de razón de verosimilitud es:

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)} < C_\alpha$$

Si n es grande, H_0 cierta,

$$-2 \ln \Lambda = -2 \ln \left(\frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)} \right)$$

tiene una distrib aprox. $\chi^2_{v-v_0 \, gl}$

v: dimensión de Θ v_0: dimensión de Θ_0