T. Laplace

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(C_1 f(t) + C_2 g(t)) = C_1 \mathcal{L}(f(t) + C_2 \mathcal{L}(f(t))$$

Transformadas elementales poner tabla

Teorema de traslación

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = \mathcal{L}(f(t))\big|_{s \leftrightarrow s-a} = F(s-a)$$

Transformada inversa de Laplace

Sea $F(s)$, decimos que $f(t)$ es la TL inversa de F si:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

Denotamos $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$

→ **Prop linealidad**

$$\mathcal{L}^{-1}(C_1 F(s) + C_2 G(s)) = C_1 \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + C_2 \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

TL inversa elementales

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} kt}{k}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ejemplos:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{3s+8}\right) = \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+8/3}\right) = \frac{4}{3} e^{-8t/3}$

Teorema de traslación forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\big|_{s-a \leftrightarrow s}\right) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

Ejemplo:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s-4)^2+12}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2+12}\Big|_{s \leftrightarrow s-a}\right)$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-9}{(s-9)^2+36}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+36}\Big|_{s \leftrightarrow s-9}\right) = e^{9t}\cos(6t)$

3. Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+4}{s^2+3s+10}\right)$

$$\frac{2s+4}{s^2+3s+10} = \frac{2s+4}{s^2+3s+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+10} = \frac{2s+4}{(s+3/2)^2+\frac{31}{4}}$$

completar cuadrados

$$= 2\cdot\frac{s+2}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}} = 2\left[\frac{s+3/2-3/2+2}{(s+3/2)^2+31/4}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{s+3/2}{(s+3/2)^2+31/4} + 2\,\frac{1/2}{(s+3/2)^2+31/4}$$

T. L. inversa

$$2e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{31}}{2}t\right) + \frac{e^{-3t/2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{31}{4}}\,t\right)}{\sqrt{31}/2}$$

Transformada de Laplace de la Derivada de una función

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt \qquad u=e^{-st} \quad du=-se^{-st} \qquad dv=f'(t) \quad v=f(t)$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \qquad f(t)e^{-st} = \frac{f(t)}{e^{st}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

porque la exponencial crece más rápido

$$\mathcal{L}(f'(t)) = 0 - f(0) + s\mathcal{L}(f(t))$$

Ahora para $f''(t)$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = \int_0^\infty e^{-at} f''(t)\,dt \qquad u=e^{-st} \quad du=-se^{-st} \qquad dv=f''(t) \quad v=f'(t)$$

$$= f'(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = 0 - f'(0) + s\mathcal{L}(f'(t))$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = -f'(0) + s(s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)]$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - f(0)s - f'(0)$$

Ejercicio: Muestre que si $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ tiene crecimiento a lo más exponencial entonces $\forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s^{(n-2)}f(0) - f^{(n-1)}(0)$$

1. $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$

2. $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

3. $\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$

Solución ED usando TL

Ejemplo 1: Resolver el PVI $\begin{cases} y'' + y = \sqrt{2}\,\text{sen}\, t \\ y(0) = 10 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Paso 1) Aplicar la T.L. en ambos de la ED

$$\mathcal{L}(y'' + y) = \mathcal{L}(\sqrt{2}\,\text{sen}\,\sqrt{2}\,t)$$
$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{2}{s^2+2}$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\,y(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2+2}$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\,10 + \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2+2}$$

(2) Ecuación algebraica, donde la incognita es $Y = \mathcal{L}(y)$

$$s^2 Y - 10s + Y = \frac{2}{s^2+2}$$

(3) Ahora, despejamos Y en términos de s

$$s^2 Y + Y = \frac{2}{s^2+2} + 10s \qquad Y(s^2+1) = \frac{2 + 10s^3 + 20s}{s^2+2}$$

$$Y = \frac{10s^3 + 20s + 2}{(s^2+2)(s^2+1)} = \frac{As + B}{s^2+2} + \frac{Cs + D}{s^2+1}$$

(4) Finalmente, calculamos la TL inversa. Utilizaremos fracciones parciales

$$\frac{-2}{s^2+2} + \frac{10s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$$

Sol. de la ED. $y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{-2}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\sqrt{2}\,t + 10\cos t + 2\,\text{sen}(t)$