Señales y Sistemas I
cod: 2016506

Docente Claudia Caro Ruiz

14 de diciembre de 2021

El material que se presenta en estas diapositivas es de autoría de Jorge Iván Sofrony Esmeral.

Transformadas de Fourier

- La transformada de Fourier es un método para representar señales (modelos matemáticos) en el "dominio de la frecuencia".
- Comenzamos por introducir este concepto mediante la representación en frecuencia de señales periódicas y persistentes a través de la serie de Fourier.
- La transformada de Fourier es una extensión de este concepto.

Definición

- *Comencemos por revisitar la serie de Fourier de una señal tal que*
  - $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt} \qquad C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t}$
- *La idea detrás de la extensión de la serie de Fourier a la transformada de Fourier es hacer que el periodo de una señal tienda a infinito, tal que si $T_0 \to \infty$, la señal nunca se repetirá en la práctica.*

- Comience por considerar un "incremental" de la frecuencia de la forma
$$\Delta\omega = (k+1)\omega_0 - k\omega_0 = \omega_0$$
- Observe que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, y de $\Delta\omega$ decrece a medida que T_0 aumenta.
- Tomando el límite
$$\lim_{T_0\to\infty} \Delta\omega = \lim_{T_0\to\infty} \frac{2\pi}{T_0} = \delta\omega$$
- Ahora si consideramos que "k" puede variar infinitamente ($k \in \mathbb{Z}$), la variable $k\delta\omega$ se vuelve nuestra variable "continua" de frecuencia tal que en el límite $k\delta\omega = \omega$
- Así tenemos que
$$C_{k\infty} = \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-j\omega_0 kt}dt\right)$$

- En el límite esta expresión se vuelve

$$\frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}}_{\mathcal{F}}\right] d\omega$$

- La expresión en paréntesis se denomina la "Transformada de Fourier" de la señal $f(t)$ y se denota

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$$

- Bajo estas condiciones, sabemos que

$$f(t) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{2\pi}\sum_{k} F(\omega)e^{j\omega_0 t}$$

- Para el límite, sumatoria se vuelve la integral y

$$f(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega}_{\mathcal{F}^{-1}}$$

Lo cual se conoce como el par de transformación inversa de Fourier.

Ejemplo

Significado Físico

- Considere una señal periódica rectangular con serie de Fourier

$$f(t) = \sum_k C_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_k \frac{T}{T_0} V \sin\left(\frac{Tk\omega_0}{2}\right) e^{j\omega_0 kt}$$

- Ahora considere el espectro en frecuencia de $T_0 C_k$, tal como se muestra en la figura

- Ahora considere que aumentamos el periodo tal que el nuevo periodo $T_1 = 4T_0$
- Observe qye a medida que aumentamos el periodo, la envolvente es igual, pero las “muestras” de dicho espectro se encuentran cada vez más cerca.
- Observe que $C_k = \frac{T}{T_0}\text{sinc}\left(\frac{\text{Tk}\omega_0}{2}\right)$ es inversamente proporcional a T_0, por lo que inicialmente se espera que $C_k \to 0$ cuando $T_0 \to \infty$

- Adicionalmente observe que el cruce por cero está determinado por T, y no solo T_0, por lo que se espera que este sea igual sin importar T_0.
- Finalmente, podemos concluir que $\Delta\omega \to \delta\omega$ para $T_0 \to \infty$, y por lo tanto la transformada de Fourier de una señal rectangular entre $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ es una función "continua" dada por

$$F(\omega) = TV \operatorname{sinc}\left(\frac{\mathrm{T}\omega}{2}\right)$$

- Este resultado se puede confirmar realizando la transformada según la definición dada anteriormente

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} V\left[\hat{u}\left(t+\frac{T}{2}\right)-\hat{u}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Ve^{-j\omega t}dt = V\left[-\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= V\frac{\left[e^{-j\omega\frac{T}{2}}-e^{j\omega\frac{T}{2}}\right]}{j\omega} = \frac{TV}{\omega\frac{T}{2}}\cdot\left[\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right] \\
&= TV\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{\mathrm{T}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- La señal $\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)=\hat{\mathrm{u}}(\mathrm{t}+\frac{\mathrm{T}}{2})-\hat{\mathrm{u}}(\mathrm{t}-\frac{\mathrm{T}}{2})$ y el par transformado de Fourier es

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)\overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow}\mathrm{Tsinc}\left(\omega\frac{\mathrm{T}}{2}\right)$$

Condiciones de Existencia

- Igual que para el caso periódico, una señal $f(t)$ tiene transformada de Fourier si ("condiciones de Dirilecht")
  1.
     - $f(t)$ es acotada.
     - $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos.
     - $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades.
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$
- Es importante resaltar que estas condiciones son suficientes y no necesarias, motivo por el cual una señal que no cumple estas condiciones puede que tenga transformada de Fourier.
- Cualquier señal que cumpla las condiciones de Dirilecht es tal que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

- Esta es la "energía" del sistema, donde $p(t) = |f(t)|^2$ es la "potencia" de la señal.

- Si esto se aplica a señales eléctricas, tenemos que

$$p(t) = i(t) \cdot (t)v(t) = v^2(t)/R$$

- Una señal tal que $E < \infty$, se conoce como una señal de energía, la cual incluye señal no-periódicas que decaen en el tiempo.
- Algunas señales de interés no son señales de energía, y por lo tanto no son absolutamente integrables ejemplo (señales periódicas y escalón).
- Sin embargo, estas señales tienen $\mathcal{F}$ si son de potencia finita y cumplen las primeras condiciones de Dirilecht.

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^2 dt < \infty$$

- Una característica general de las señales de potencia es que su espectro en frecuencia contiene impulsos.

- Un para de transformación importantes es el que relaciona a un impulso y su representación en tiempo.
- Considere la señal
$$f(t) = A\delta(t - t_0)$$
donde A y T_0 son constantes reales.
- Ahora considere la transformada de Fourier de $f(t)$
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}(A\delta(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt \\ &= Ae^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$
- Observe que $F(\omega)tiene$ amplitud constante, y su ángulo va variando según la frecuencia y el retardo presente.

- Un caso particular es la transformada del impulso unitario.

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1$$

- Ahora considere que tenemos un impulso en el dominio de la frecuencia tal que

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

- Se puede obtener $f(t)$ a partir de la transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

- Observe que esta señal es un factor que rota a una frecuencia equivalente a $\underline{\omega_0}$.

- Este par de transformación es muy importante ya que, es el fundamento de la modulación en frecuencia de señales (FM).

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de Fourier cumple una serie de propiedades que simplifican el análisis de señales y sistemas.
- A continuación mencionaremos las propiedades más relevantes.

1. Linealidad:
   - Debido a que el par de transformación depende de la integral y ya que la integral es un funcional lineal, podemos inferir que el par $\mathcal{F}$ es lineal

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \qquad f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$$

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de Fourier cumple una serie de propiedades que simplifican el análisis de señales y sistemas.
- A continuación mencionaremos las propiedades más relevantes.

1. Linealidad:
   - Debido a que el par de transformación depende de la integral y ya que la integral es un funcional lineal, podemos inferir que el par $\mathcal{F}$ es lineal

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \qquad f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$$

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$$

Ejemplo

Demuestre que el siguiente par es verdadero

$$B\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi B\delta(\omega - \omega_0) + \pi B\delta(\omega + \omega_0)$$

2. Escalamiento en tiempo:
   - La propiedad de escalamiento en tiempo establece que si

$$f(t)F(\omega)$$

entonces

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

   - La prueba utiliza la definición de la transformada de Fourier y realiza un cambio de variable para obtener el resultado presentado

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &> 0 \\ at &= \tau \end{aligned}$$

2. Escalamiento en tiempo:
   - La propiedad de escalamiento en tiempo establece que si

$$f(t)F(\omega)$$

entonces

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

   - La prueba utiliza la definición de la transformada de Fourier y realiza un cambio de variable para obtener el resultado presentado

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &> 0 \\ at &= \tau \end{aligned}$$

$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

   - El valor absoluto se utiliza para poder aplicar este racionamiento a valores nagativos de "a"

Corrimiento en el Tiempo

- El corrimiento en el tiempo ya se estudio para el caso de un impulso , y el resultado se puede extender a señales en general

$$\mathcal{F}(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Ejemplo

Halle la transformada de una señal senoidal retardada.

$$x(t) = 10\cos(20\pi t - 2\pi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(\cos(20\pi t)10)e^{-j\omega_0 t_0}$$

$$F(\omega)10\delta(\omega+20\pi)e^{j2\pi} + 10\delta(\omega-20\pi)e^{-j2\pi}$$

Dualidad

- La Dualidad o "Simetría" del par de transformación se evidencia desde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t))) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}
$$

- Así se puede establecer la siguiente relación

$$F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega) \qquad \text{si} \qquad \mathrm{f(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{F}(\omega)$$

Ejemplo

- Considere que tenemos una señal cuyo espectro en frecuencia esta dado por
$$F(\omega) = A[\hat{u}(\omega + \beta) - \hat{u}(\omega - \beta)]$$
- Ahora asuma que deseamos encontrar la señal (en tiempo) que tiene dicho espectro,
- Sabemos que
$$A\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{TAsinc}\left(\frac{\omega \mathrm{T}}{2}\right)$$
- Utilizando el principio de Dualidad tenemos que

$$f(t) = \frac{A\beta}{\pi}\mathrm{sinc}(\beta \mathrm{t})$$

Convolución

- Si $f_1(t) \rightarrow F_1(\omega)$ y $\mathrm{f}_2(\mathrm{t}) \rightarrow \mathrm{F}_2(\omega)$, entonces

$$f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

- Aplicando la propiedad de dualidad, se puede demostrar que la multiplicación en tiempo es la convolución en frecuencia.

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

donde

$$F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda)F_1(\omega-\lambda)d\lambda$$

Corrimiento en el tiempo

- La propiedad de cambio en frecuencia se expresa como

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Ejemplo

- Considere las señales

$$g_1(t) = 2\cos(200\pi t) \quad \text{y} \quad \mathrm{y_2(t) = 5\cos(1000\pi t)}$$

- Ahora considere el problema de encontrar la transformada de Fourier de $g_3(t) = g_1(t)g_2(t)$
- Observe que $g_3(t) = 5\cos(200\pi t)e^{j1000\pi t} + 5\cos(200\pi t)e^{-j1000\pi t}$
- Aplicando la propiedad de corrimiento en frecuencia

- $$\begin{aligned} G_3(\omega) &= 5\pi\left[\delta(\omega-1200\pi)+\delta(\omega-800\pi)\right]\ldots \\ &\quad +5\pi\left[\delta(\omega+1200\pi)+\delta\omega+800\pi)\right] \end{aligned}$$

- El efecto de multiplicar una señal por otra senoidal pura de frecuencia ω_0 es el de "correr" el espectro de frecuencia y centrarlo (sistemáticamente en $\pm\omega_0$)

Diferenciación en tiempo

- Asuma que $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$ y considere la derivada en tiempo de la señal donde

$$\frac{df}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega F(\omega)$$

- De forma general

$$\frac{d^n f}{dt^n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n F(\omega)$$

Ejemplo

- Considere el problema de encontrar un $\mathcal{F}$ de $f(t) = \mathrm{sgn(t)}$.
- Podemos facilitar esta labor utilizando la propiedad de diferenciación.
- $\frac{df(t)}{dt} = 2\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega F(\omega) = 2$
- Así se obtiene

$$F(\omega) = \frac{2}{j\omega} + k\delta(\omega)$$

donde el tiempo $k\delta(\omega)$ considera el valor medio de la señal cuando $\omega = 0$.

Integración en tiempo

- Considere $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$, y asuma que queremos hallar la transformada de Fourier de

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

- La propiedad de integración dice que

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta\omega$$

- El término $F(0)$ tiene en cuenta el valor promedio de la señal

$$F(0) = F(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

- Observe que

$$k \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi k\delta(\omega)$$

- Esto significa que $g(t)$ tiene un valor promedio iguala $\frac{F(0)}{2}$
- Para probar que esta propiedad se mantiene, considere la señal $f(t)$ y el escalón unitario $\hat{u}(t)$ tal que

$$\begin{aligned} f(t) * \hat{u}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\hat{u}(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

- Utilizando la propiedad de la convolución tenemos que

$$f(t) * \hat{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

- Por la propiedad el "sitting" (colador)

$$g(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Ejemplo

- Considere la señal triangular $f(t)$ centrada en cero y $f(t) = 0$ $t \notin [-t_1, t]$
- Podríamos aplicar directamente la definición de transformada de Fourier para hallar $F(\omega)$
- Sin embargo, si conocemos la transformada de Fourier de una señal rectangular, podemos aplicar la propiedad de integración para hallar $F(\omega)$.
- Considere $x(t) = A\mathrm{rec}(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{t}_1}{2}, \mathrm{t}_1) - \mathrm{Arect}(\mathrm{t} + \frac{\mathrm{t}_1}{2}, \mathrm{t}_1)$

- Sabemos que

$$\mathcal{F}(A\mathrm{rect}(\mathrm{t}+\frac{\mathrm{t}_1}{2},\mathrm{t}_1)) = At_1\mathrm{sinc}\left(\mathrm{t}_1\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\mathrm{t}_1}{2}}$$
$$\mathcal{F}(A\mathrm{rect}(\mathrm{t}+\frac{\mathrm{t}_1}{2},\mathrm{t}_1)) = At_1\mathrm{sinc}\left(\mathrm{t}_1\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\mathrm{t}_1}{2}}$$

- Así podemos encontrar $F(\omega)$ como

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \quad \text{donde}$$

$$X(\omega) = j\omega A t_i^2 \mathrm{sinc}^2\left(\mathrm{t}_1\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{y} \quad \mathrm{X}(0) = 0$$

- Así $Y(\omega) = At_1^2\mathrm{sinc}^2\left(\mathrm{t}_1\frac{\omega}{2}\right)$

Diferenciación en frecuencia

- Similar a la diferenciación en tiempo. si $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, entonces

$$(-j\omega)^n f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

- Este resultado se puede comprobar mediante diferenciación directa de la definición de la transformada de Fourier.

Transformada de Fourier de señales en Tiempo

- A continuación realizaremos la transformada de Fourier de algunas señales de interés.
- Esto se hará utilizando nuestro conocimiento de la transformada de Fourier básicas y la aplicación de las propiedades de la transformada de Fourier.

1. Nivel D.C.
   - Considere el par de transformación

$$Ke^{j\omega_0 t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} K2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

   - Si asumimos el caso en particular donde $\omega_0 = 0$, tenemos

$$K \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi K\delta(\omega)$$

   - También podemos obtener este resultado utilizando la propiedad de dualidad

$$\delta(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1 \Leftrightarrow \delta(\omega) \rightarrow \frac{1}{2\pi}$$

Transformada de Fourier de señales en Tiempo

2. Escalón Unitario
   - Para hallar este resultado, podemos utilizar la transformada de la señal signo
   $$\mathrm{sgn(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$
   - La señal escalón unitario se puede expresar como una transformación de la señal signo
   $$\hat{u}(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn(t)}$$
   - Como resultado,
   $$\hat{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Transformada de Fourier de señales en Tiempo

3. Señal Senoidal acumulada
   - Considere una señal senoidal cuyo valor es 0 para $t < 0$; en otras palabras, la señal inicia ára $t \geq 0$ (no es persistente)
   - La señal a considerar está dada por

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \hat{u}(t)$$

   - Podemos utilizar la identidad de euler y la propiedad de corrimiento en frecuencia.
   - De esta manera

$$f(t) = \frac{1}{2}\hat{u}(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\hat{u}(t)e^{-j\omega_0 t}$$

   - Sabiendo que

$$x(t) = \hat{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Transformada de Fourier de señales en Tiempo

hallamos

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) \\
&= \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+omega_0)+\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega-\omega_o)+\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{j\omega 2}{\omega^2-\omega}\right)
\end{aligned}
$$

4. Señal Senoidal Pulsada
   - Considere una señal senoidal pulsada de la forma

$$f(t)=\cos(\omega_0 t)\mathrm{rect(t,T)}$$

   - Igual que en el caso anterior

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{rect(t,T)e^{j\omega_0 t}}+\mathrm{rect(t,T)e^{-j\omega_0 t}}\right]$$

- Sabiendo que

$$\mathrm{rect}(\mathrm{t},\mathrm{T}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Tsinc}\left(\omega\frac{\mathrm{T}}{2}\right)$$

podemos aplicar la propiedad de convolución sabemos que

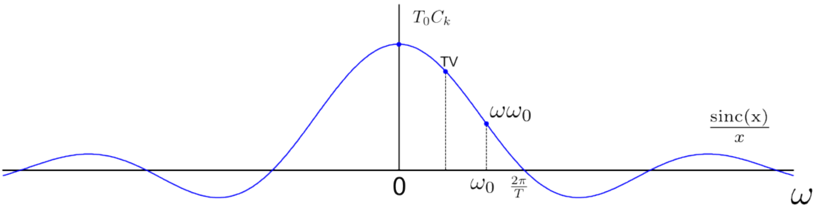
$$F(\omega) = \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\omega-\omega_0-\lambda)+\delta(\omega+\omega_0-\lambda))\mathrm{sinc}\left(\lambda\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\mathrm{d}\lambda$$

- Utilizando la propiedad de "sifting" tenemos que la integral solo es válida ($\neq 0$) cuando

$$\lambda = \omega - \omega_0$$

- Por lo tanto

$$\cos(\omega_0 t)\mathrm{rect}(\mathrm{t},\mathrm{T}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\mathrm{T}}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_0)\mathrm{T}}{2}\right)+\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_0)\mathrm{T}}{2}\right)\right]$$



5. Exponencial Pulsada
   - Considere la señal
$$f(t) = e^{-at}\hat{u}(t)$$
     donde $a \in \mathbb{R}^+$
   - Utilizando la definición de $\mathcal{F}$ tenemos que
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\hat{u}(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$
6. Transformada de las Señales Periódicas
   - Anteriormente vimos que una señal periódica persistente tiene una serie de Fourier donde
$$f(t) = \sum_k C_k e^{j\omega_0 t}$$
$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$
   - Ahora veremos como obtener la transformada de Fourier

- Aplicando la definición de $\mathcal{F}$ tenemos que

$$f(t) = \sum_k C_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k C_k e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$
$$= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

- De esta manera obtenemos

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_k C_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

- Este resultado soporta el hecho de que la $\mathcal{F}$ de una señal periódica es una serie de impulsos de magnitud $2\pi C_k$, localizados harmónicamente $(\omega = k\omega_0)$
- Este resultado se puede expresar de manera que se pueden hallar los coeficientes C_k a partir de la "muestra" de una función de generación cada $\omega = h\omega_0$

- Primero considere la función de generación

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [T_0], T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

- De esta manera podemos expresar

$$f(t) = \sum_n g(t - nT_0)$$

- Sabiendo que

$$g(t) * \delta(t - t_0) = g(t - t_0)$$

- tenemos que

$$f(t) = \sum_n g(t) * \delta(t - nT_0) = g(t) * \sum_n \delta(t - nT_0)$$

- Definimos la función "tren de impulsos" como $\sum \delta(t - nT_0)$, donde su $\mathcal{F}$ está dada por

$$\sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n C_{k\delta} e^{jk\omega_0 t}$$

$$C_{k\delta} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_n \delta(t - nT_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Se puede observar que para $t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ $\delta(t - nT_0) \neq$ solo si $n = 0$ y $t = 0$, y por lo tanto

$$C_{k\delta} = \frac{1}{T_0}$$

- La transformada de un tren de impulsos es un tren de impulsos

- Utilizando la propiedad de la convolución

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\sum_n g(t) * \delta(t - nT_0)) &= G(\omega) \cdot \mathcal{F}(\sum_n \delta(t - nT_0)) \\
&= G(\omega) \cdot \sum_n 2\pi C_k \delta(t - nT_0) \\
&= G(\omega) \cdot \sum_k \frac{2\pi}{T_0} C_k \delta(\omega - k\omega_0) \\
&= \omega_0 \sum_k \frac{2\pi}{T_0}
\end{aligned}$$

- Podemos observar que la transformada de una señal periódica es un "muestreo" (escalado por ω_0) de la $\mathcal{F}$ de solo un periodo de la señal.

Ejemplo

- Considere un tren de pulsos rectangulares de ancho T y periodo T_0 y amplitud 1
- Sabemos que

$$\mathrm{rect(t,T) = T\,sin(\frac{t\omega}{2}) \quad T < T_0}$$

- Utilizando lo que sabemos de la transformada de una señal periódica, tenemos

$$F(\omega) = \sum T\omega_0 \mathrm{sinc}\left(\mathrm{k}\omega_0 \frac{\mathrm{T}}{2}\right)\delta(\omega - \mathrm{k}\omega_0)$$

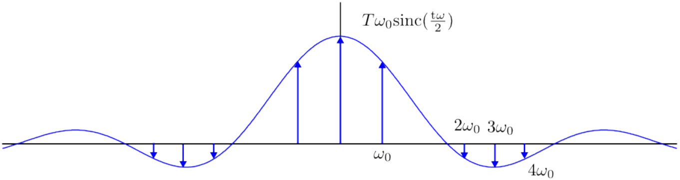
Ejemplo

- Considere un tren de pulsos rectangulares de ancho T y periodo T_0 y amplitud 1
- Sabemos que

$$\mathrm{rect}(\mathrm{t},\mathrm{T}) = \mathrm{T}\sin(\frac{\mathrm{t}\omega}{2}) \quad \mathrm{T} < \mathrm{T}_0$$

- Utilizando lo que sabemos de la transformada de una señal periódica, tenemos

$$F(\omega) = \sum T\omega_0 \mathrm{sinc}\left(\mathrm{k}\omega_0\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\delta(\omega - \mathrm{k}\omega_0)$$



Muestreo de Señales Continuas

- Uno de los temas más importantes en el tratamiento de señales es el muestreo de señales continuas.
- Considere una señal continua $f(t)$, donde queremos extraer "muestras" de dicha señal en tiempos específicos *i.e.* $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$
- Dicha aplicación es de suma importancia en el tratamiento digital de señales, y este proceso se conoce como conversión A/D.
- Podemos asumir que el tiempo de muestreoes constante y se denota T_s

Muestreo Ideal

- El muestreo ideal puede ser modelado matemáticamente como la multiplicación entre la señal $f(t)$ y un tren de impulsos.
- Teniendo la señal de muestreo

$$s(t) = \sum_n \delta(t - nT_s)$$

La señal muestreada está dada por

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \sum_n f(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_n f(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \end{aligned}$$

- Observe que este modelo matemático de una señal muestreada no es válido para implementación ya que contiene impulsos

Muestreo Ideal

- Para estudiar la consecuencia de muestrear una señal continua, analizaremos la $\mathcal{F}$
- Ya sabemos que

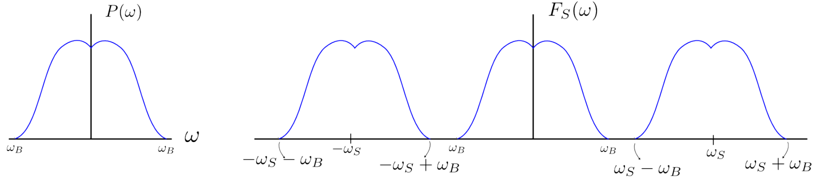
$$f(t)\sum_n \delta(t-nT_s) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) * S(\omega)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
F_s(\omega) &= F(\omega) * \left[\frac{1}{T_s}\sum_n \delta(\omega - n\omega_s)\right] \\
&= \frac{1}{T_s}\sum_n F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \\
&= \frac{1}{T_s}\left[\sum_n F(\omega - n\omega_s)\right]
\end{aligned}$$

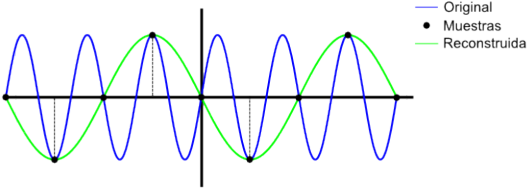
Muestreo Ideal

- Como se puede observar, el resultado en frecuancia de muestrear en tiempo una señal continua $f(t)$ es la "repetición" del espectro cada $\omega = k\omega_s$
- Para observar este fenómeno gráficamente considere una señal $f(t)$ cuyo espectro está limitado en frecuencia.



Muestreo Ideal

- Observe que el espectro $F(\omega)$ se repite cada $k\omega_s$, $k \in \mathbb{Z}$, y si deseamos que los espectros no se "confundan" debemos muestrear a una frecuencia tal que $\omega_s > 2\omega_b$
- Esta frecuencia se conoce como la "frecuencia de Nyquist"
- El teorema de "Shannon" establece que una señal $f(t)$ cuyo máximo componente frecuencial está dado por $\frac{1}{T_B}$ Hz, debe muestrearse cada $\frac{T_B}{2}$ para poder ser reconstruida.



Muestreo Ideal

- En la figura se puede observar la consecuencia del “aliasing” ó enmascaramiento.
- La señal original es
$$f(t) = \sin(0{,}9\pi t)$$
donde $T_B = \frac{2\pi}{0{,}9\pi} = \frac{20}{9}$
- Si tomamos muestras a una frecuencia de $\omega_S = 0{,}8\pi$, $T_S = \frac{20}{8} > 2T_B$, La señal reconstruida está dada por
$$g(t) = 0{,}3\sin(0{,}3\pi t)$$

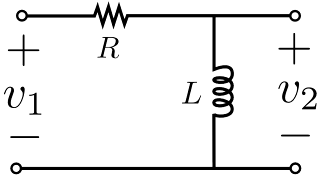
Aplicaciones de $\mathcal{F}$ a sistemas LTI

- La transformada de $\mathcal{F}$ y sus propiedades nos ayuda a simplificar el cálculo de la respuesta de sistemas LTI
- Para observar esto, considere un circuito RL, donde la relación entrada salida puede ser hallada utilizando $F(\omega)$

Ejemplo

$$v_1 = R_i + L\frac{d_i}{dt} \tag{1}$$

$$v_2 = L\frac{di}{dt} \tag{2}$$



- Ahora tomando $\mathcal{F}$ y reemplazando $I(j\omega)$ de (1) en (2) obtenemos

$$\begin{aligned} V_2(j\omega) &= \frac{jL\omega}{R + j\omega L} V_1(j\omega) \\ &= H(j\omega) V_1(j\omega) \end{aligned}$$

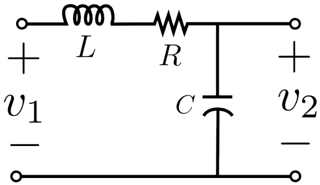
- Ya que $H(j\omega)$ se debe a las "dinámicas" del sistema, esta se denomina la respuesta en frecuencia del sistema.
- Una forma de expresar esto es utilizando diagramas de Bode y cartas de Nichols.
- La idea de ambas representaciones es utilizar herramientas gráficas para resaltar la relación que existe entre la magnitud/fase de $H(j\omega)$ y la frecuencia.

Diagramas de Bode

- Hacer el ejemplo anterior

Ejercicio

- Encuentre $H(j\omega)$ para y haga un bosquejo del diagrama de Bode

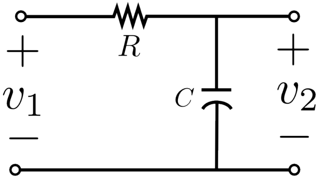


Ejemplo

$$H(j\omega) = \frac{(TS+1)}{(\alpha TS+1)}$$

- Experimentalmente, podemos identificar el sistema utilizando un barrido en frecuencia.
- También podemos utilziar $\mathcal{F}$ para hallar la respuesta de un sistema sujeto a una entrada $u(t)$
- Considere el sistema R-C y asuma que está sujeto a una entrada

$$v_1(t) = \hat{u}(t)$$



- Para hallar la respuesta en tiempo del sistema, podemos hacer la convolución

$$y(t) = v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Esta tarea puede ser simplificada mediante el uso de la propiedad de “multiplicación” en frecuencia

$$y(t) = v_1(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} V(j\omega) \cdot H(j\omega) = Y(\omega)$$

- Conocemos $H(j\omega)$ y $V(j\omega)$ donde

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \qquad V_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

- Haciendo la multiplicación

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot V_1(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{j\omega(1 + j\omega RC)}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\pi\delta(\omega)}{1 + j\omega RC}}_{(2)}$$

- Podemos encontrar la respuesta en tiempo haciendo la transformada inversa de Fourier.
- Aplicando fracciones parciales a (1) y la propiedad de "sifting" de (2) obtenemos

$$\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \frac{-RC}{1+j\omega RC} + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \\
\mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-RC}{1+j\omega RC}\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{j\omega + \left(\frac{1}{RC}\right)}\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) \\
&= -e^{\frac{-t}{RC}}\hat{u}(t) + \hat{u}(t) \\
&= (1 - e^{\frac{-t}{RC}})\hat{u}(t)
\end{aligned}$$

Espectro de Energía o Densidad Espectral de Potencia

- El análisis de la potencia y su energía transmitida como función de la frecuencia es muy importante en comunicaciones

Espectro de Energía

- Una señal se dice que pertenece al conjunto de señales de energía si su integral cuadrática es finita *i.e.*

$$\mathcal{E} = \left\{ f(t) \in \mathbb{C} \mathrm{x} \mathbb{R}^{+} : \mathrm{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{f(t)}|^2 \mathrm{dt} < \infty \right\}$$

- La cantidad "E" es la energía de la señal
- Observe que las señales de energía, son señales aperiódicas, de duración finita o exponencialmente decrecientes.
- Ahora considere una señal

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Calculando la energía de la señal tenemos

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}F(\omega)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt\right]}_{F(-\omega)=F^*(\omega)}d\omega \\
E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt
\end{aligned}
$$

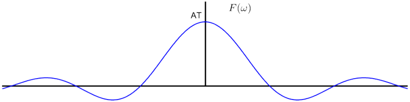
- Esta equivalencia enfatiza el hecho de que la "E" de una señal puede calcularse en tiempo ó en frecuencia.

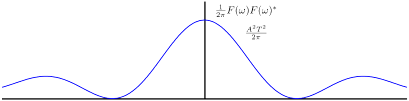
- Esta relación se conoce como el **Teorema de Parseval**, y dice que es lo mismo calcular la energía en frecuencia o en tiempo.
- Por definición, se define el espectro de energía de una señal $f(t)$, como el integrando de "E" en "ω"

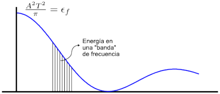
$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{\pi} F(\omega) F^*(\omega) \quad \omega > 0$$

Ejemplo

- Considere una señal rectangular y determine su espectro de energía







Espectro de Potencia

- Existen muchas señales que no son señales de energía.
- Aunque estas señales tienen energía infinita, su potencia si es finita

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 < \infty$$

- Dichas señales pertenecen al conjunto de señales de potencia finita y se denominan señales de potencia.
- Las señales periódicas, la señal escalón, y la señal signo son ejemplos de señales de potencia.
- El principal problema de las señales de potencia es que la $\mathcal{F}$ no esta garantizada, ya que estas no cumplen las condiciones de Dirilect
- Este problema se sobrepasa truncando la señal a una "ventana" T tal que

$$f_T(t) = f(t) \cdot \mathrm{rect(t, T)}$$

- Esta señal truncada tiene energía finita y su potencia está dada por

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f_T(t)|^2 dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |f_T(t)|^2 dt = \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Parseval}}
\end{aligned}
$$

- Para que "P" sea finito en el límite cuando T tiende a ∞, es que la energía del sistema no crezca más rápido que T

- Bajo esta condición

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|F(\omega)|^2 d\omega$$

- El espectro de potencia está dado por

$$\mathcal{P}_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|F(\omega)|^2$$

- Para el caso de una señal periódica, la potencia promedio, normalizada está dada por

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = C_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \qquad 2\pi|C_k| = |F(k\omega_0)|$$

$$P = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k} |F(k\omega_0)|^2$$

Transmisión de "E" y "P"

- Resulta de importancia conocer la energía/potencia transmitida por un canal (sistema)
- Considere la salida de un sistema

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) \qquad Y^*(j\omega) = H(j\omega)^*F(j\omega)^* \tag{3}$$

- Si multiplicamos (1) y (2) y dividimos por π obtenemos

$$E_y = |H(j\omega)|^2 E_f \qquad P_y = |H(j\omega)|^2 P_f$$

Aplicación de la Transformada de Fourier

Filtros Ideales

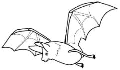
- La principal aplicación de la transformada de $\mathcal{F}$ es para el análisis de filtros y multiplexación de señales en un mismo canal de comunicación.
- La idea de los filtros es utilizar la descripción de los sistemas como funciones de transferencia y su $\mathcal{F}$ para realizar ciertos "acondicionamientos" de la señal.
- De aquí surge la idea de diseñar "sistemas" (FT) especiales para el filtraje de señales

Filtros Ideales

- Aunque la idea de filtros ideales no es aplicable a la realidad, el estudio de estos ayuda a afianzar ciertos conceptos básicos.
- Estudiaremos cuatro tipos básicos de filtros
    1. Pasa bajas
    2. Pasa altos
    3. Pasa bandas
    4. Quita banda
- En el estudio de filtros ideales, se asume que no existe desfase entre la señal de entrada y la salida, *i.e.* $\sphericalangle H)j\omega) = 0 \ \forall\omega$

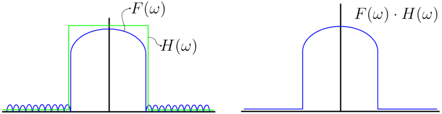
Pasa bajas

- Los filtros pasabajas son muy utilizados en el tratamiento de señales para suprimir ruido dentro de la señal
- Considere el problema donde una cantante está grabando y al lado se encuentra una fuente de ruido (murciélago)



$$\Rightarrow y(t) = y_n(t) + y_m(t)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = Y_n(\omega) + y_m(\omega)$$



- Observe que la implementación *práctica* de un filtro ideal no es posible
- Para probar este hecho, considere un filtro ideal pasa-bajas con $\mathcal{F}$ dada por una señal rectangular (con fase constante)
- De la propiedad de dualidad dicho filtro tiene una respuesta impulso de la forma

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{\omega_i}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_\mathrm{i}\mathrm{t})$$

- Como pueden observar este filtro es un "sistema" no-causal, el cual necesita información futura de la señal; i.e. necesita conocer la señal antes de filtrarla.
- Este tipo de sistemas no son implementables en el mundo real.

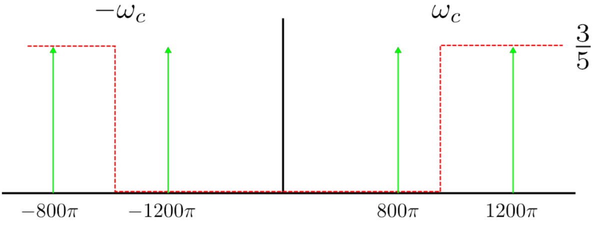
Ejemplo

- Considere el caso donde las señales $g_1 = 2\cos(800\pi t)$ y $g_2 = 5\cos(1200\pi t)$ son multiplicadas tal que el resultado es una señal
$$g_3 = 5\cos(800\pi t) + 5\cos(1200\pi t)$$
- Ahora asuma que deseamos extraer una señal $g_4 = 3\cos(1200\pi t)$
- Sabemos que el espectro de frecuencia de G_3 y g_4 están dados por

$$\begin{aligned} G_3(\omega) &= 5^{\pi}[\delta(\omega + 1200\pi) + \delta(\omega + 800\pi) \ldots \\ &\quad +\delta(\omega - 1200\pi) + \delta(\omega + 8\omega) \\ G_4(\omega) &= 3^{\pi}[\delta(\omega + 1200\pi) + \delta(\omega - 1200\pi) \end{aligned}$$

- Para extraer G_4 de G_3 podemos utilizar un filtro (ideal) pasa altos, de la forma $H = \frac{3}{5}(1 - \mathrm{rect}(\omega, 2\omega_c)) \quad \omega_c \in (800\pi, \frac{1200}{\pi})$

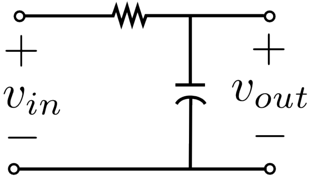
Filtros Reales



- Se observó que los filtros ideales no son implementables dado que estos son el producto de un sistema no-causal.
- Por tal motivo estudiaremos filtros reales, y utilizaremos los diagrmas de Bode para entender el efecto que este tiene sobre la señal tratada.
- Para ver el efecto de tener filtros reales, consideraremos el siguiente ejemplo

Ejemplo: Filtros R-C

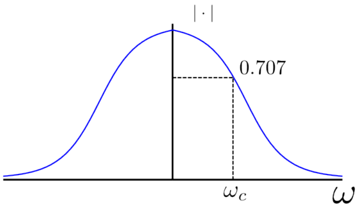
- Considere el circuito pasabajas que se muestra en la figura



- Este sistema tiene un FT dada por

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

y su espectro se muestra en la figura



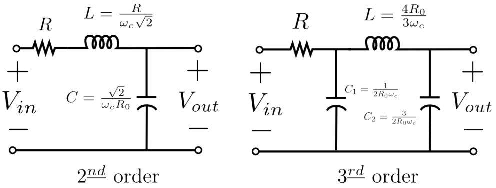
- Vale la pena resaltar el hecho que $|H(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- La relación de potencia normalizada está dada por $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$. Por tal motivo se llama la frecuencia de media-potencia.
- Adicionalmente a los cambios en amplitud del espectro, también existe un corrimiento en tiempo, ó desfase del espectro.
- Por lo general, un filtro que se aproxima a un filtro ideal en ganancia, tiende a tener grandes desfases, por lo cual debe existir un compromiso entre magnitud/fase

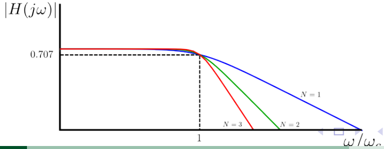
Filtro Butterworth

- Una representación general de filtros pasa-bajos es la de Butterworth, donde

$$H(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

  donde N es el orden del filtro
- Un PB-RC es un filtro BW al primer orden
- La figura muestra unos circuitos RLC para filtros BW de segundo y tercer orden





Ejercicio

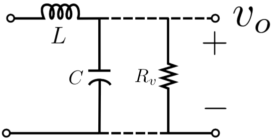
- Considere un filtro de segundo orden tal que

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$$

- Ahora considere que se conecta la señal de salida a una carga R_i
- La FT del sistema se verá afectada y

$$\begin{aligned}|H(j\omega)| &= \left|\frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega\frac{L}{R}}\right| \\ &= \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\omega^4+\left(\frac{1}{LC}\right)^2+\omega^2\left(\frac{1}{(RC)^2}-\frac{2}{LC}\right)}}\end{aligned}$$

Ejercicio



- Observe que para obtener un filtro de BW, $\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ y $L = 2R^2C$
- Si asumimos $R_L = 1$ KΩ y $\omega_c = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ cual es el valor de L y C Answer $= L = 14{,}14$ H $C = 7{,}07\ \mu$F
- Una característica atractiva de la síntesis de filtros BW, es que podemos obtener filtro P.A. reemplazando las inductancias por capacitores y vice-versa, tal que

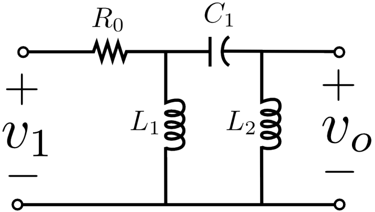
$$L_i = \frac{1}{C_i\omega_c^2} \quad \text{y} \quad \mathrm{C_j} = \frac{1}{\mathrm{L_j}\omega_\mathrm{c}^2}$$

Ejemplo

- Diseñe un filtro de BW $N = 3$, pasa-altas con $R_0 = 1$ KΩ y ω_c de 2KHz

$$L_1 = \frac{2R_0}{\omega_c} = 0{,}159\,\mathrm{H} \quad \mathrm{L_2} = \frac{\mathrm{2R_0}}{\mathrm{3\omega_c}} = 0{,}053\,\mathrm{H}$$

$$C_1 = \frac{3}{4}R_0\omega_c = 60\,\mathrm{nF}$$



Filtros de Chebychev/Elipticos

- Los filtros de Chebychev/Elipticos son una mejor representación de filtros ideales ya que tiene una mayor pendiente de caída.
- El problema es que su implementación es más compleja.
- Los filtros de Chebychev son aquellos con magnitud

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 C_n^2(v)}}$$

donde $\epsilon < 1$ $v = \frac{\omega}{\omega_c}$

- C_n es el polinomio de Chebychev de orden "n" y están dados por

$$C_n = \cos(n\cos^{-1}(v))$$

donde los casos especiales $C_0 = 1$ $C_1 = v$

- Para hallar filtro de mayor orden considere

$$\cos([n+1]\phi) + \cos([n-1]\phi) = 2\cos(n\phi)\cos(\phi)$$

$\phi = \cos^{-1}(v)$

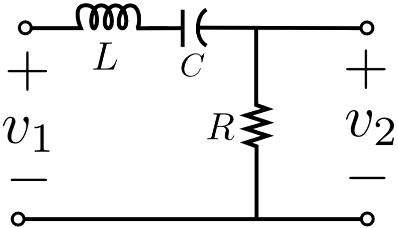
- de aquí concluimos que

$$C_{n+1}(v) = 2vC_n(v) - C_{n-1}(v)$$

Filtros Pasa Banda

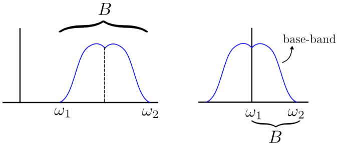
- Una forma de obtener filtros pasabandas es realizar la transformación no-lineal

$$\hat{\omega} = \frac{\omega_c(\omega^2 - \omega_u\omega_L)}{\omega(\omega_u - \omega_L)}$$

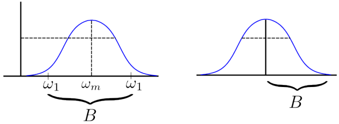


Ancho de Banda

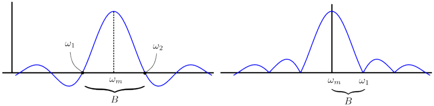
- Absoluto: Rango completo donde la magnitud $\neq 0$



- 3dB / half power: Cuando la magnitud está 3 dB por debajo del máximo/$\frac{1}{\sqrt{2}}$ del máximo/$\frac{1}{2}$ potencia máxima de la señal

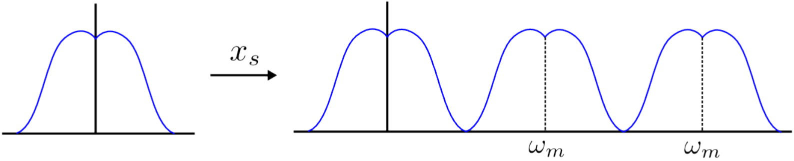


- Null-2-Null/Zero-crossing BW: Entre los primeros cruces por cero



Reconstrucción de Señales Muestreadas

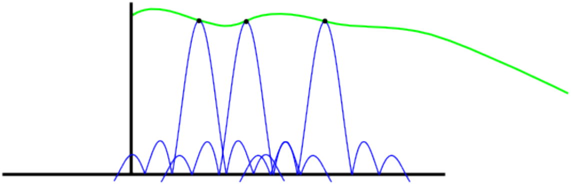
- Considere que se tiene una señal muestreada que se quiere reconstruir, por ejemplo, un CD para ser reproducido.



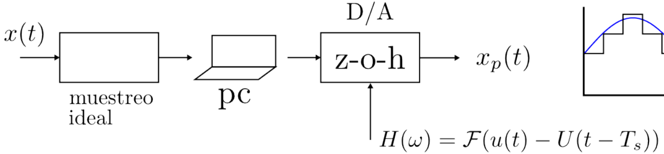
- El espectro de la señal muestreada esté dado por una repetición del espectro continuo
- Observe que si utilizamos u filtro ideal pasa-bajas hasta ω_B de la señal discreta, podemos obtener el espectro de la señal continua.

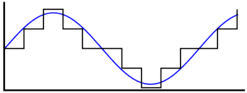
- Si consideramos un filtro ideal

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(X_s(\omega)\cdot \mathrm{rect}(\omega, 2\omega_\mathrm{B})) \\
&= X_s(t) * \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_\mathrm{B}\mathrm{t}}{2}\right) \\
X_s &= \sum x(t)\delta(t-nT_B) \\
&= \sum x(nT_B)\delta(t-nT_B) \\
x(t) &= \sum x(nT_B)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_\mathrm{B}(\mathrm{t}-\mathrm{nT_B})}{2}\right)
\end{aligned}
$$



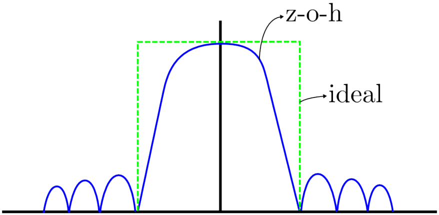
- Para implementar se utiliza un retenedor de orden cero (zero-order-hold)





$$H(\omega) \Rightarrow \frac{1 - e^{-jT_s\omega}}{j\omega} = T_s \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\omega}{\omega_\mathrm{s}}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi\frac{\omega}{\omega_\mathrm{s}}}$$

- Observe que en la realidad, el z-o-h es un filtro real con $|\cdot|$



Modulación Senoidal de Amplitud

- La modulación es el proceso de correr el espectro de frecuencia de una señal tal que este se ubica en la banda deseada.
- Esto es deseable ya que permite transmitir señales de manera adecuada y eficiente.
- La razón puede ser doble
    1. Tamaño de antena Para radiación eficiente, la antena debe ser de una longitud $\frac{\lambda}{10}$ donde "λ" es la longitud de la onda

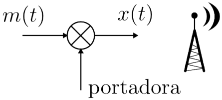
Nota

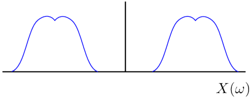
Observe que la voz humana está por debajo de 1 KHz lo cual requeriría una antena de

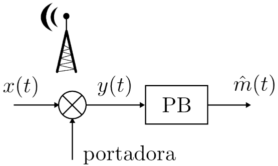
$$\lambda = \frac{c}{f_c} = \frac{3 \cdot 10^8}{1\,\mathrm{K}} = 300\,\mathrm{Km}$$

- Deseamos aprovechar el y "multiplexar" varias señales en un mismo canal
- La modulación más común es la DSB/SC-Am (*Double Sideband - Supressed Carrier Amplitude Modulation*)

$$X(\omega) = \frac{1}{2}(M(\omega+\omega_c) + M(\omega-\omega_c))$$

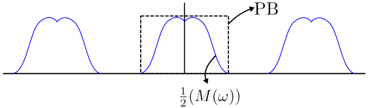






$$Y(\omega) = \frac{1}{2}(X(\omega-\omega_c) + (X(\omega+\omega_c))$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}M(\omega+\omega_c)\right]$$

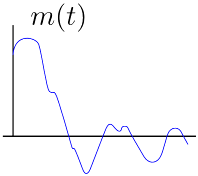


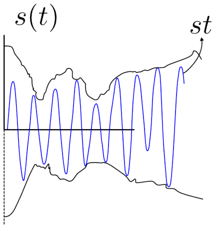
- DSB-WC-AM Un portador

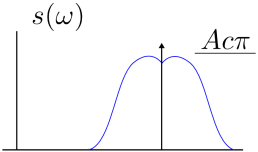
$$S(t) = (1 + K_a m(t))C(t)K_a \quad \text{tq} \quad \begin{matrix} S(t) > 0 \quad \forall t \\ C(t) = A\cos(\omega_c t) \end{matrix}$$

$$S(\omega) = A_c \pi(\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)) + \frac{K_a A_c}{2}\left[M(\omega - c) + M(\omega + c)\right]$$

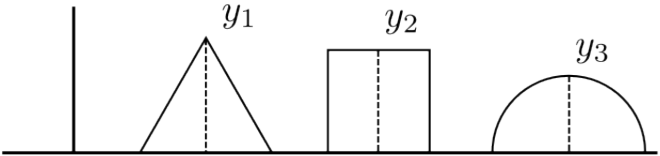
- Ventaja: No necesita oscilador local ya que la portadora nos da esta señal
- Desventaja: Potencia que no contiene información







- Multiplexación:



- Otro término común de modulación es la modulación por amplitud de pulso
- Ahora considere que

$$S(t) = m(t)c(t) = m(t) \cdot C_0 + 2\sum_{1}^{\infty} |C_k| x(t) \cos(k\omega_c t + \phi_c)$$

- Observe que la segunda parte es una multiplexación en frecuencia
- Esto es análogo a un muestreo "no-ideal" donde el espectro de $m(t)$ se repetirá cada $k\omega_c$, y multiplicado por $|C_k|$