Señales y Sistemas I
cod: 2016506

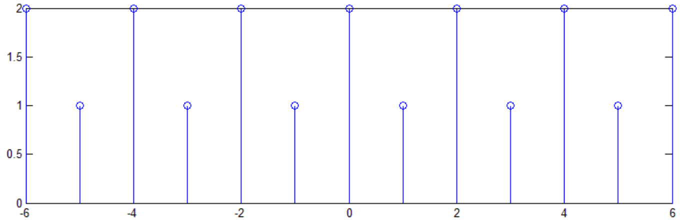
Docente Claudia Caro Ruiz

14 de diciembre de 2021

Señales Discretas

- La transformaciones de una señal en el mundo discreto son similares a transformaciones en el mundo continuo
  - Reflexión funciona igual (inversión).
  - Los corrimientos deben ser enteros.
  - El escalamiento funciona de manera diferente, debido al hecho de que la señal original solo está definida para valores enteros de la variable independiente.

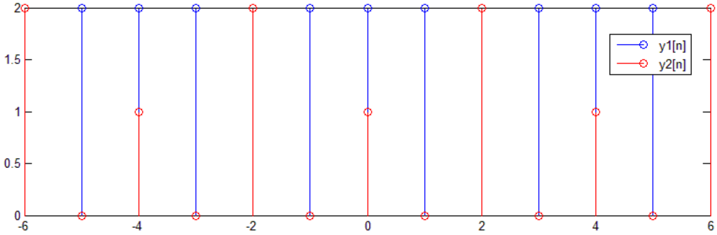
Ejemplo



- Dada x[n] en la figura, hallar $y_1[n] = x[2n]$
  - $y_1[-3] = x[2(-3)] = x[-6] = 2$
  - $y_1[-2] = x[2(-2)] = x[-4] = 2$
  - $y_1[-1] = x[2(-1)] = x[-2] = 2$

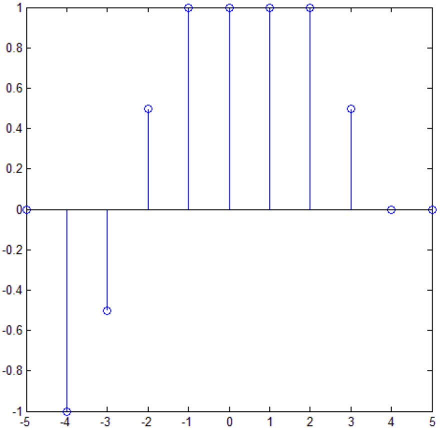
Ejemplo

- Dada $x[n]$ en la figura, hallar $y_2[n] = x[n/2]$
  - $y_2[-4] = x[-4/2] = x[-2] = 2$
  - $y_2[-3] = x[-3/2] = x[-1,5] = ?$
  - $y_2[-2] = x[-2/2] = x[-1] = 1$
  - $y_2[-1] = x[-1/2] = x[-0,5] = 0$



Ejercicio

Dada $x[n]$ en la figura hallar:



- $x[n-4]$
- $x[3-n]$
- $x[3n]$
- $x[3n+1]$
- $x[(n-1)^2]$
- $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$

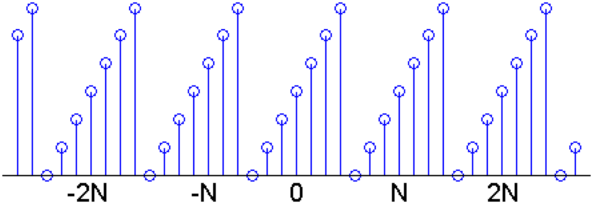
Señales Periódicas

- Para señales discretas:

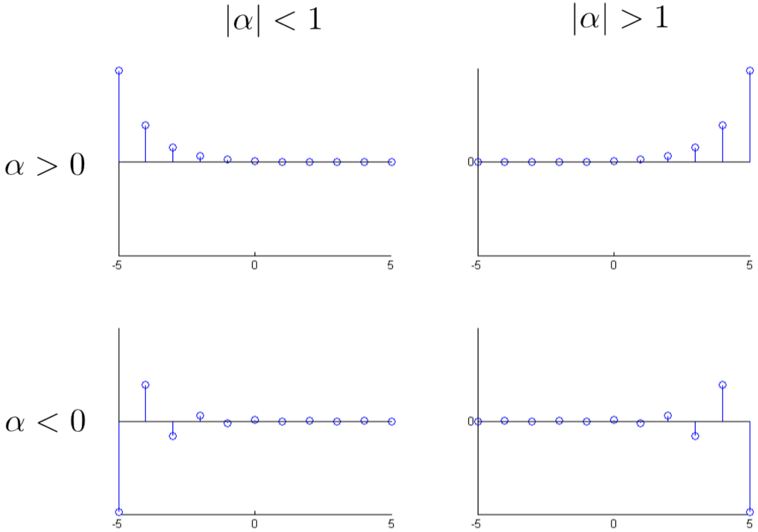
$$x[n] = x(n+N), \forall n \quad (*)$$

- N es el período de la señal
- Si una señal es periódica con período N entonces es periódica con período mN para m entero.
- El menor valor de N que cumple $(*)$ es el período fundamental de la señal

$$N_0 = \min_N x[n] = x[n+N] \; \forall n$$



Exponencial Real Discreta



Sinusoidal Discreta

- Sea $|\alpha| = 1$, $\beta = j\omega_0 \to x[n] = e^{j\omega_0 n}$
- Por la relación de Euler:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$

$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\omega_0 n + \phi} + \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 n + \phi}$$

- Son señales de potencia.

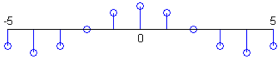
Exponenciales Complejas Generales

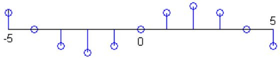
$$x[n] = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

- $\alpha = 1$, Las partes real e imaginaria de $x[n]$ son sinusoidales.
- $\alpha| > 1$, Las partes real e imaginaria de $x[n]$ son sinusoidales que crecen exponencialmente.
- $|\alpha| < 1$, Las partes real e imaginaria de $x[n]$ son sinusoidales amortiguadas.

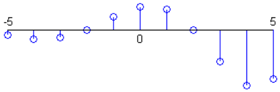
Exponenciales Complejas Generales

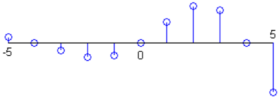
$|\alpha| = 1$



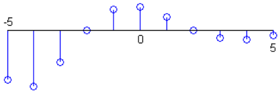


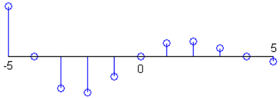
$|\alpha| > 1$



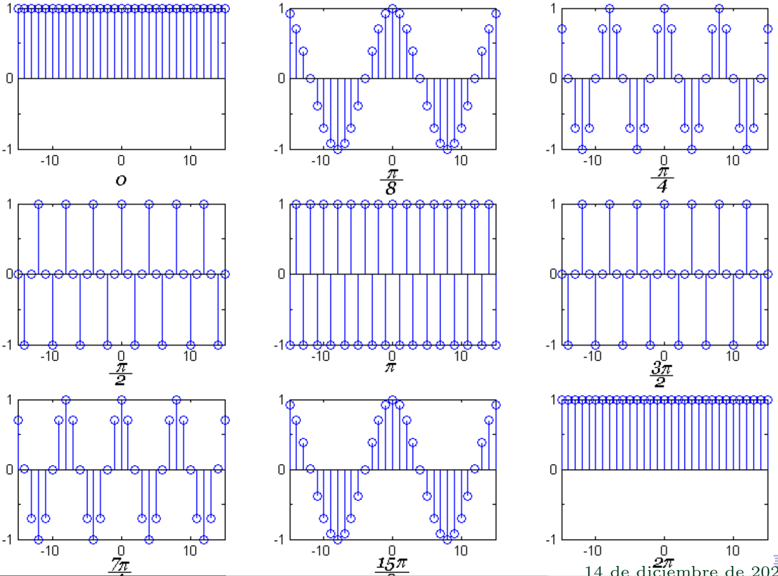


$|\alpha| < 1$





Periodicidad



Periodicidad

- Suponga que una exponencial compleja discreta es periódica con período N.

$$
\begin{aligned}
e^{j\omega_0 n} &= e^{j\omega_0 (n+N)} \\
e^{j\omega_0 N} &= 1 \\
\omega_0 N &= 2\pi m \\
\omega_0 &= 2\pi \frac{m}{N}
\end{aligned}
$$

- Para que la señal sea periódica, ω_0 debe ser un múltiplo racional de 2π

Periodicidad

$$\omega_0 = 2\pi \frac{m}{N}$$

- El período fundamental se halla simplificando la fracción m/N hasta que $\mathrm{MCD}(m, N) = 1$
- $N_0 = N$ es el período fundamental.
- La frecuencia fundamental de una señal discreta se calcula al igual que para una señal continua:
- Frecuencia fundamental:

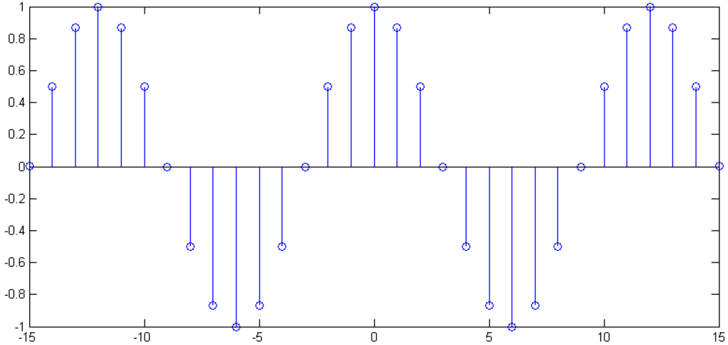
$$\frac{2\pi}{N_0} = \frac{\omega_0}{m_0}$$

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Señales distintas para valores distintos de ω_0	Señales iguales para frecuencias de la forma $\omega_0 \pm 2\pi k$
Periódica para cualquier ω_0	Periódica para $\omega_0 = 2\pi \frac{nm}{N}$
Frecuencia fundamental ω_0	Frecuencia fundamental ω_0/m_0
Período fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	Período fundamental $N_0 = m_0 \frac{2\pi}{\omega_0}$

Para el cálculo de ω_0 y N_0 se asume que $\mathrm{MCD}(m_0.N_0) = 1$

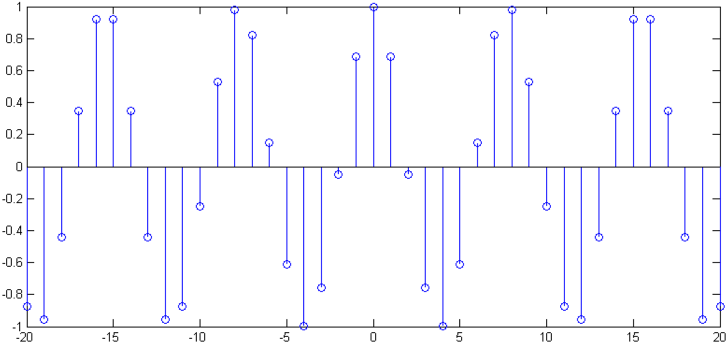
Ejemplos

- $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{12}\right)$
- $\text{MCD}(1, 12) = 1$, entonces $m_0 = 1$, $N_0 = 12$



Ejemplos

- $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$
- $\text{MCD}(4,31) = 1$, entonces $m_0 = 4$, $N_0 = 31$



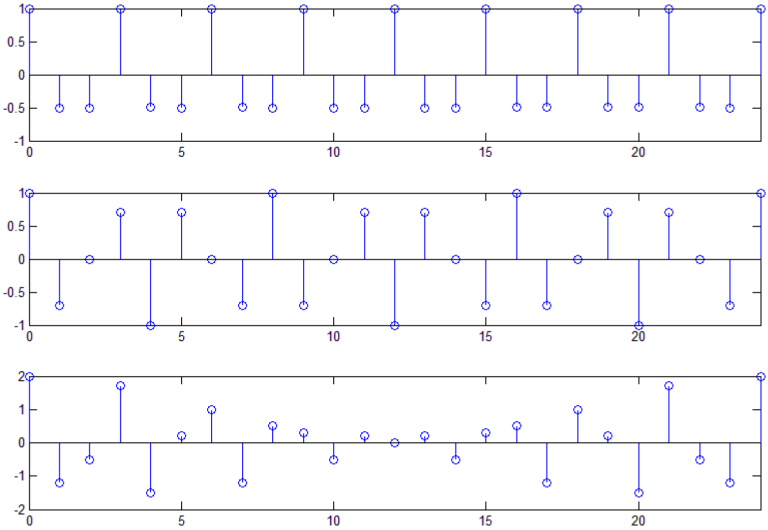
Ejemplos

- $x[n] = \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{3}n}}_{x_1[n]} + \underbrace{e^{j\frac{3\pi}{4}}}_{x_2[n]}$

$$x_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} \Rightarrow \omega_{0,1} = \frac{2\pi}{3} = 2\pi\frac{1}{3}$$

$$x_2[n] = e^{j\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow \omega_{0,2} = \frac{3\pi}{4} = 2\pi\frac{3}{8}$$

- $\mathrm{MCD}(1,3) = 1$, entonces $m_{0,1} = 1, N_{0,1} = 3$
- $\mathrm{MCD}(3,8) = 1$, entonces $m_{0,2} = 3, N_{0,2} = 8$


1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
2
1
0
-1
-2
0
5
10
15
20

Exponenciales Complejas Relacionadas Armónicamente

- Solo existen N_0 exponenciales complejas discretas relacionadas armónicamente.

$$\phi_0[n] = 1 \qquad \phi_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N_0}n} \qquad \phi_2[n] = e^{j2\frac{2\pi}{N_0}n}$$

$$\phi_{N_0-2}[n] = e^{j(N_0-2)\frac{2\pi}{N_0}n} \qquad \phi_{N_0-1}[n] = e^{j(N_0-1)2\frac{2\pi}{N_0}n}$$

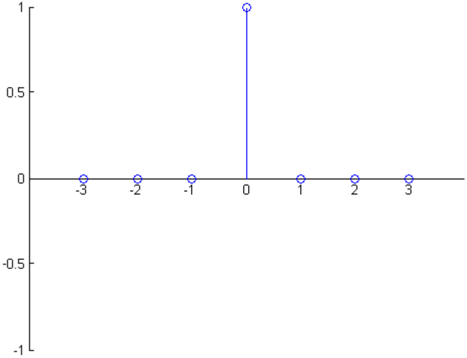
- Se define: $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}$, $k \in \mathcal{Z}$ como la k-ésima armónica de $e^{j\frac{2\pi}{N_0}n}$

$$\begin{aligned}\phi_{k+N_0}[n] &= e^{j(k+N_0)\frac{2\pi}{N_0}n} \\ &= e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}e^{j(N_0)\frac{2\pi}{N_0}n} \\ &= e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} = \phi_k[n]\end{aligned}$$

Función Impulso Unitario en Tiempo Discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

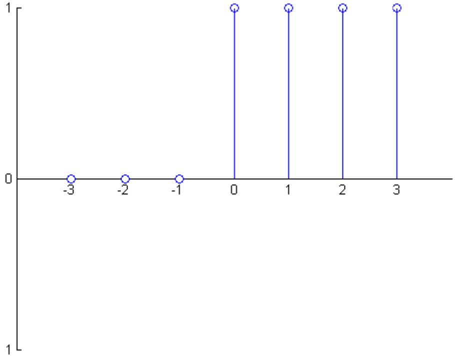
Muestra Unitaria



Función Escalón Unitario en Tiempo Discreto

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

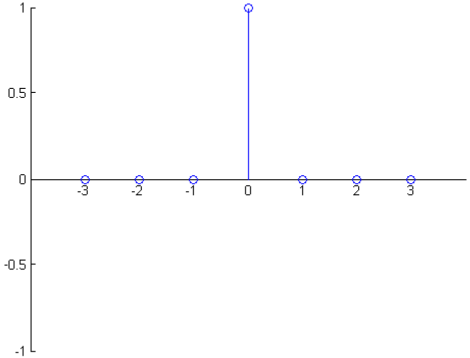
Paso Unitario



Funciones Impulso y Paso Discretas

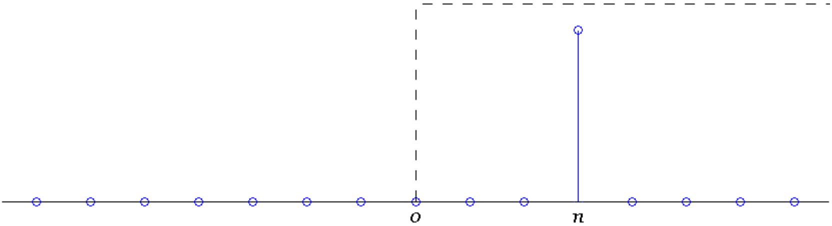
- Las funciones impulso y paso están relacionadas:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



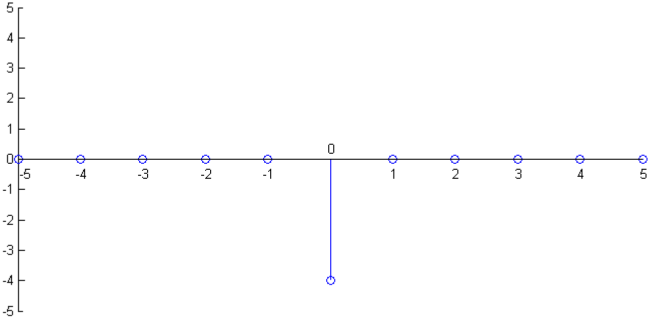
Funciones Impulso y Paso

Haciendo $m = n - k$: $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$



Propiedad de Selección del Impulso

- Dada una función $x[n]$, que ocurre cuando se multiplica por $\delta[n]$?
- $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$
- $x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$



Memoria

- Sin Memoria: La salida en un instante dado depende únicamente de la entrada en ese instante.
  - $y(t) = f(x(t))$
    - $y(t) = Rx(t)$(Resistencia)
    - $y(t) = x(t)$ (Sistema identidad)
  - $y[n] = f(x[n])$
    - $y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$

Memoria

- Con memoria: La salida en un instante dado depende de valores de la entrada diferentes al actual.
  - Voltaje de un condensador como función de la corriente:

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

  - Acumulador o sumador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - Retardo:

$$y[n] = x[n-1]$$

Invertibilidad

- Un sistema es invertible si SIEMPRE produce salidas diferentes para entradas diferentes
  - $x[n] \Rightarrow y_x[n]$
  - $z[n] \Rightarrow y_z[n]$
  - $x[n] \neq z[n] \Rightarrow y_x[n] \Rightarrow y_z[n]$
- Si el sistema S_1 es invertible $\Rightarrow$ existe un sistema S_2 tal que:
- Ejemplos:
  - $y(t) = 2x(t) \Rightarrow z(t) = \frac{y(t)}{2}$
  - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \Rightarrow z[n] = y[n] - y[n-1]$
  - No invertibles: $y[n] = k, y(t) = x^2(t)$
- Aplicaciones: Codificadores, Transmisores.

Causalidad

- Un sistema es causal o no anticipativo si la salida depende únicamente del valor actual y valores anteriores de la entrada.
  - Condensador
  - Acumulador
  - $y[n] = x[n] - x[n-1]$
  - $y(t) = x(t-1)$
- Todos los sistemas sin memoria son causales
- En un sistema no causal, la salida depende de valores “futuros” de la entrada.
  - Procesamiento de Imágenes
  - Procesamiento de datos pregrabados
  - Procesamiento de datos demográficos, económicos, etc.
- Promedios : $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$
- $y[n] = x[-n]$
- $y(t) = x(t)\cos(t+1)$

Estabilidad

- Un sistema es estable si su respuesta a una entrada limitada es una salida limitada (que no diverge)
- Tiempo Continuo

$$|x(t)| \leq B \quad \forall t \Rightarrow |y(t)| < \infty \quad \forall t$$

- Tiempo Discreto

$$\underbrace{y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]}_{Estable} \qquad \underbrace{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]}_{Inestable}$$

Invariancia en el Tiempo

- Un sistema es invariante en el tiempo si su comportamiento y características están fijos en el tiempo.
- Si $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$
- Para demostrar invariancia en el tiempo hay que hacerlo para todas las posibles entradas del sistema, para demostrar variancia es suficiente con un ejemplo

Invariancia en el Tiempo

- $y[n] = nx[n]$
- $x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = n\delta[n] = 0$
- $x_2[n] = \delta[n-1] \rightarrow y_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1]$
- En general:

$$\begin{aligned} y[n-n_0] &= (n-n_0)x[n-n_0] \\ &= nx[n-n_0] - n_0x[n-n_0] \end{aligned}$$

- Si

$$\begin{aligned} x_3[n] &= x[n-n_0] \rightarrow y_3[n] = nx_3[n] \\ &= nx[n-n_0] \end{aligned}$$

Linealidad

- Un sistema es lineal si posee la propiedad de superposición.
- Si una entrada consiste en la suma ponderada de varias señales, la salida es la suma ponderada de las salidas a cada una de esas entradas.
- Si

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \quad \text{y} \quad \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) \rightarrow \mathrm{y}_2(\mathrm{t})$$

  - $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$ (Aditividad)
  - $ax_1(t) \rightarrow ay_1(t) \quad a \in C$ (Escalamiento u Homogeneidad)

- Para demostrar no linealidad es suficiente con un ejemplo:
  - $y[n] = \mathbb{R}e\{x[n]\}$
  - Sea $x_1[n] = r[n] + js[n] \Rightarrow y_1[n] = r[n]$
  - Definamos

$$\begin{aligned} x_2[n] &= jx_1[n] \\ &= j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n] \end{aligned}$$

  $\Rightarrow y_2[n] = \mathbb{R}e\{x_2[n]\} = -s[n]$
  - Pero $jy_1[n] = jr[n] \Rightarrow$ NO LINEAL

Linealidad

- Asuma que

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

- Definamos

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 2 \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7 \\ x_2[n] &= 3 \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9 \\ x_3[n] &= x_1[n] + x_2[n] = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_3(t) &= 2x_3[n] + 3 \\ &= 2(5) + 3 = 13 \end{aligned}$$

Pero $y_1[n] + y_2[n] = 16 \Rightarrow$NO LINEAL
Este sistema es la suma de un sistema lineal más una constante y se llama Sistema Incrementalmente Lineal. La constante es la Respuesta a Entrada Cero del sistema.

Propiedades de los Sistemas

- Memoria: El cálculo de la salida requiere valores de la entrada diferentes al actual.
- Invertibilidad: Entradas diferentes SIEMPRE producen salidas diferentes.
- Causalidad: El cálculo de la salida no requiere valores futuros de la entrada.
- Estabilidad: Entradas limitadas producen salidas limitadas
- Invariancia en el tiempo: Las características del sistema están fijas en el tiempo
- Linealidad: Aditividad y Homogeneidad.

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

Motivación:

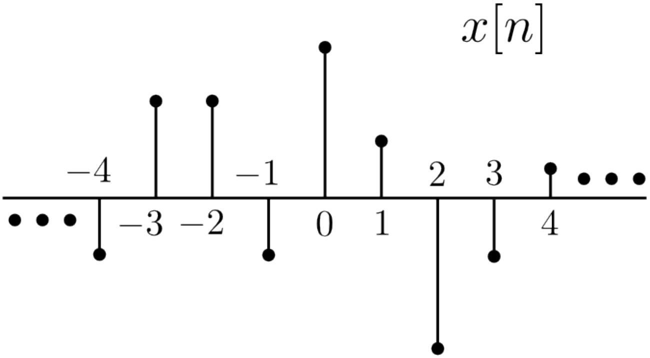
- Núcleo del análisis de sistemas y señales.
- Muchos procesos físicos, económicos, etc. se pueden modelar como SLIT.
- Cumplen la propiedad de superposición.
- Se pueden analizar en gran detalle.
- Se pueden caracterizar completamente por su respuesta a una entrada impulso unitario

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo SLIT

- Invariancia en el tiempo:
  - Un sistema es invariante en el tiempo si su comportamiento y características están fijos en el tiempo.
  - Si $x[n] \rightarrow y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \rightarrow y[n-N_0]$
- Linealidad:
  - Si una entrada consiste en la suma ponderada de varias señales, la salida es la suma ponderada de las salidas a cada una de esas entradas.
  - Si $x_1[n] \rightarrow y_1[n] \quad \text{y} \quad \mathrm{x}_2[\mathrm{n}] \rightarrow \mathrm{y}_2[\mathrm{n}]$
    - $x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n]$ (Aditividad)
    - $ax_1[n] \rightarrow ay_1[n]$, con a $\in \mathbb{C}$ (Escalamiento u Homogeneidad)

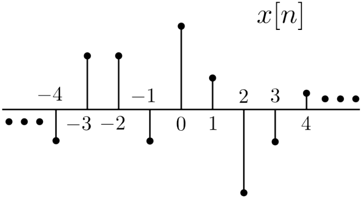
Representación de señales discretas en términos de impulsos

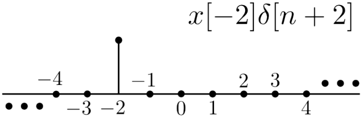
- Considere las señales discretas como una serie de impulsos individuales.



Representación de señales discretas en términos de impulsos

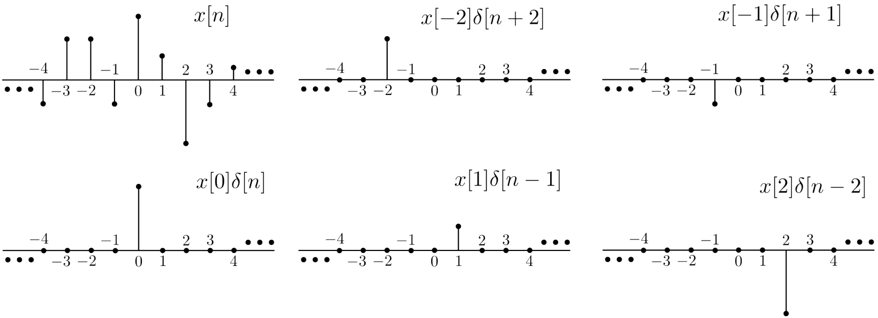
Propiedad de selección del impulso unitario





$$x[n]\delta[n+2] = x[-2]\delta[n+2] = \begin{cases} x[-2] & n = -2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

Representación de señales discretas en términos de impulsos



Representación de señales discretas en términos de impulsos

- Si queremos recuperar la señal original en términos de estas señales podemos escribir:

$$\begin{aligned} x[n] \;=\; \dots \quad & +x[-4]\delta[n+4] + x[-3]\delta[n+3] \\ & +x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ & +x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[1]\delta[n-1] \\ & + \dots \end{aligned}$$

- En general

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Representación de señales discretas en términos de impulsos

- Ejemplo: Hallar la representación en impulsos de $u[n]$.

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k]$$

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

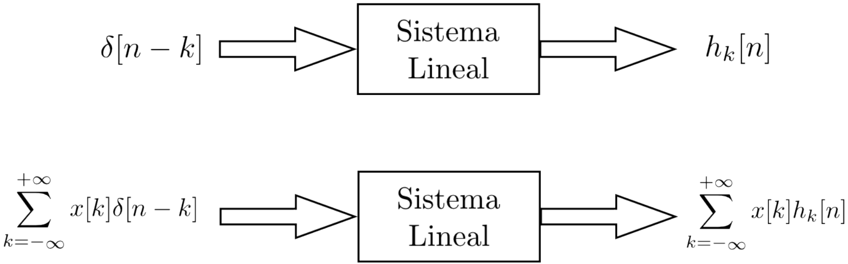
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Respuesta al Impulso Unitario

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

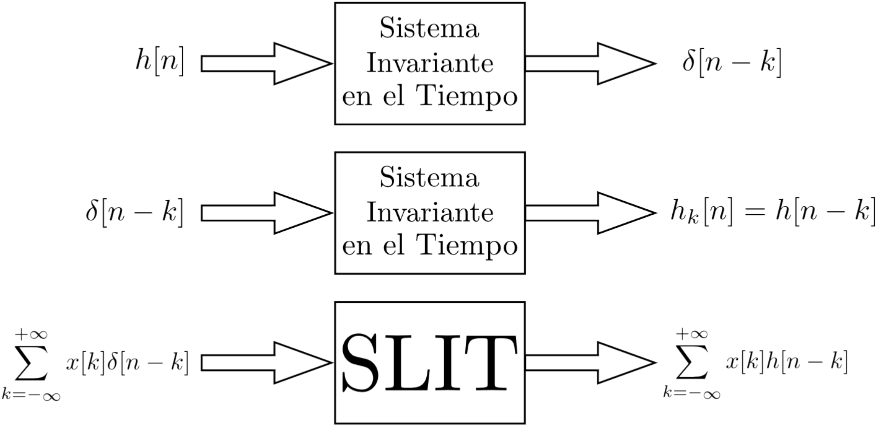
- Esta ecuación representa a x[n] como una superposición de impulsos escalados, desplazados.
- Si esa suma es la entrada de un sistema lineal, la respuesta es la suma de las respuestas a cada impulso desplazado.

Respuesta al Impulso Unitario



- Si el sistema es invariante en el tiempo, la respuesta a un impulso desplazado será igual a la respuesta a un impulso en el origen, desplazada

Respuesta al impulso Unitario



Respuesta al Impulso Unitario

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \Longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- $x[n]$ es una entrada arbitraria.
- La respuesta a cualquier entrada se puede obtener a partir de la secuencia $h[n]$.
- $h[n]$ es la respuesta al impulso unitario del sistema.

Suma de Convolución

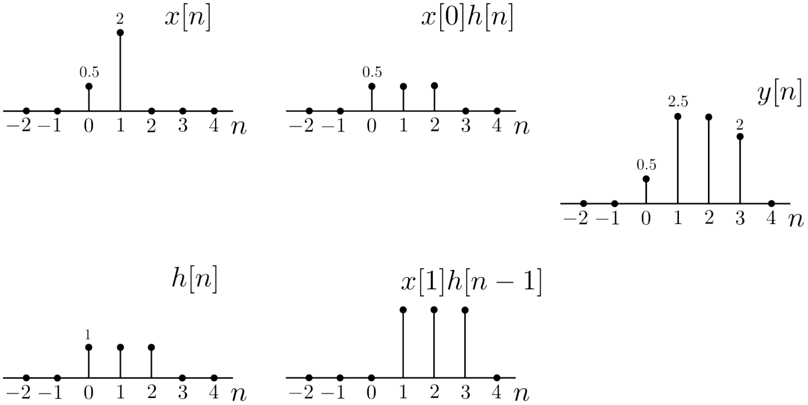
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Conociendo la respuesta impulso $h[n]$, el cálculo de la salida se realiza a través de la suma de convolución.

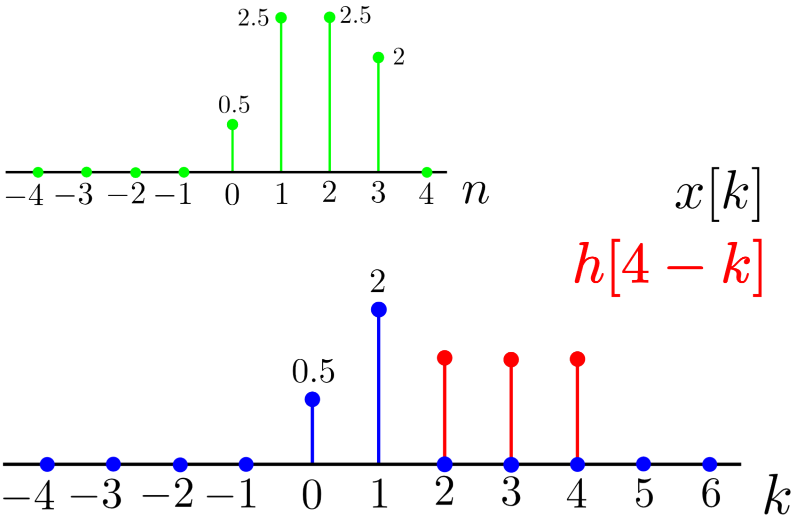
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Suma de Convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

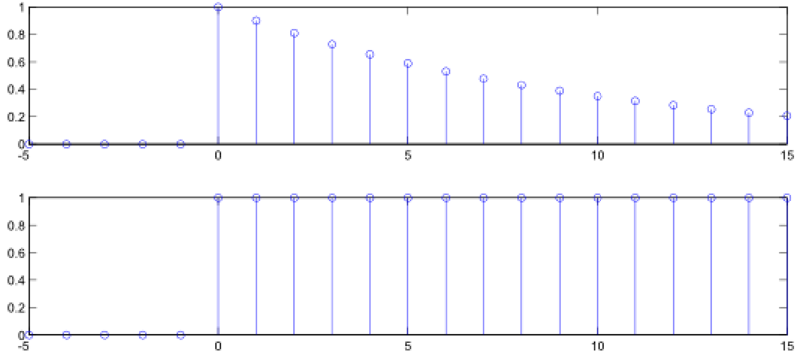


Suma de Convolución



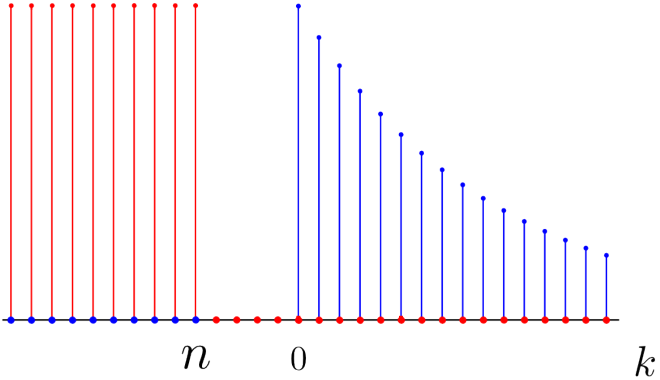
Ejemplo

- $x[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$
- $h[n] = u[n]$



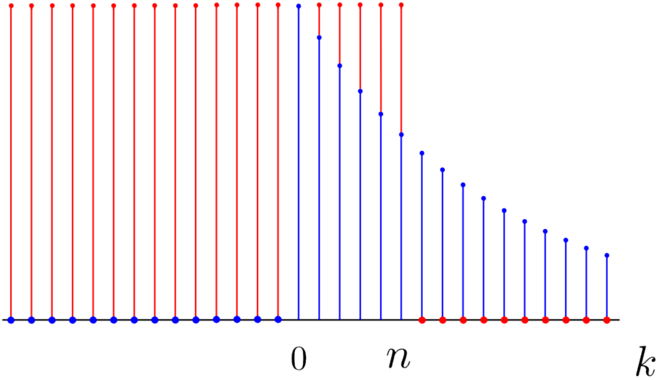
Ejemplo

$$n < 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



Ejemplo

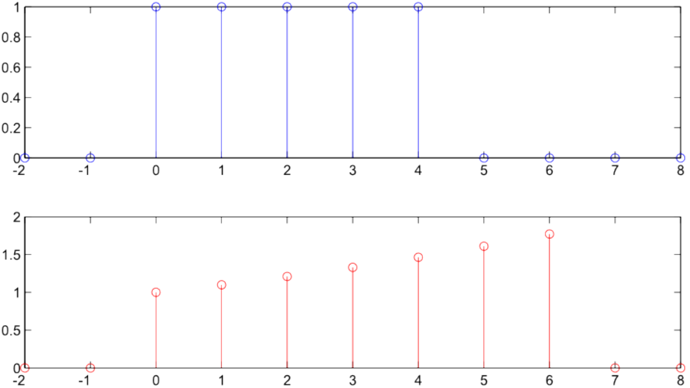
$$n \geq 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



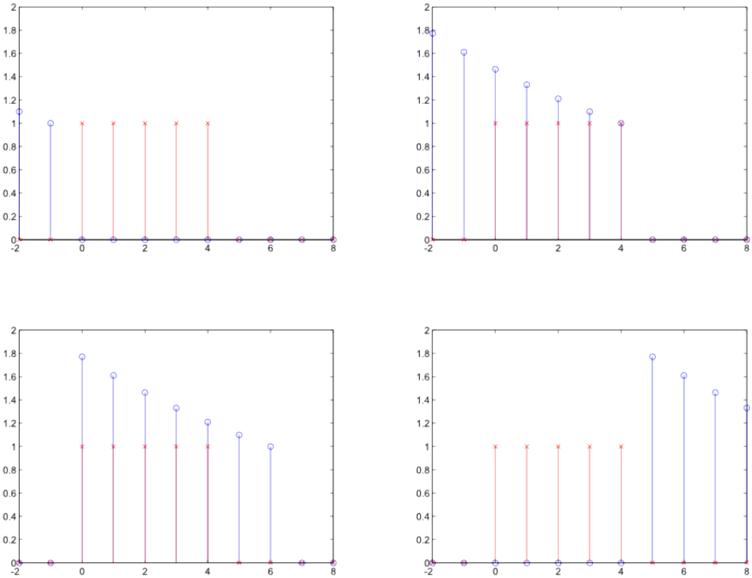
Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \le n \le 6 \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$

$$\alpha > 1$$



Ejemplo



Ejemplo

- Para $n < 0$ no hay sobrelapamiento $\Rightarrow y[n] = 0$
- Para $0 \leq n \leq 4$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

- Para $4 < n \leq 6$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Ejemplo

- Para $6 < n \leq 10$

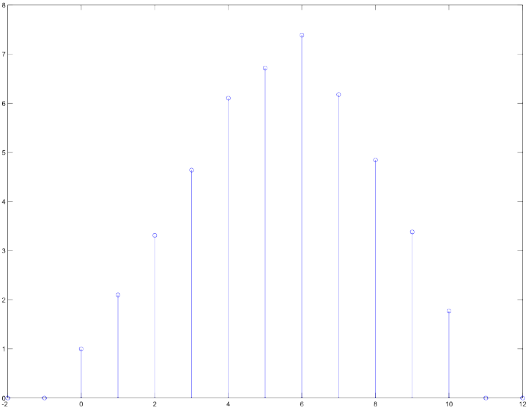
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & n-6 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

- Para $n > 10$ no hay sobrelapamiento $\Rightarrow y[n] = 0$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6 < n \leq 10 \\ 0 & 10 < n \end{cases}$$

Ejemplo

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha} & 6 < n \leq 10 \\ 0 & 10 < n \end{cases}$$



Suma/Integral de Convolución

- Un sistema lineal e invariante en el tiempo está completamente caracterizado por su respuesta impulso $h[n]/h(t)$.
- La salida a una entrada arbitraria $x[n]/x(t)$ se puede calcular a partir de la respuesta impulso usando la suma/integral de convolución.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Propiedades de los SLIT

- Gracias a su representación como sumas/ integrales de convolución los SLIT tienen propiedades que otros sistemas no tienen.
- Propiedad Conmutativa:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = h[n] * x[n]$$

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

Propiedad Conmutativa

- Demostración:

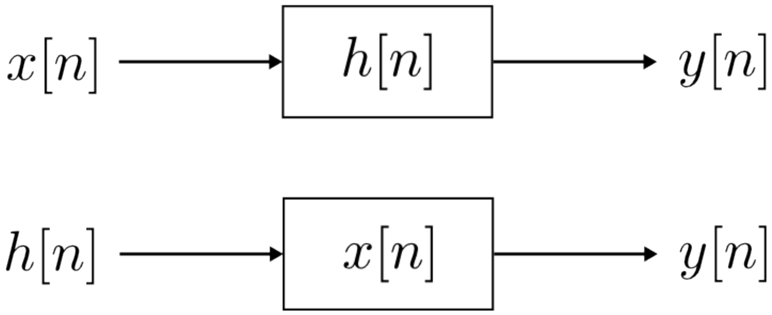
$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

  - Haciendo $k = n - r, n - k = r$

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[n] * x[n] \end{aligned}$$

Propiedad Conmutativa

- La salida de un sistema $h[n]$ para una entrada $x[n]$ es la misma que la de un sistema $x[n]$ a una entrada $h[n]$



Propiedad Distributiva

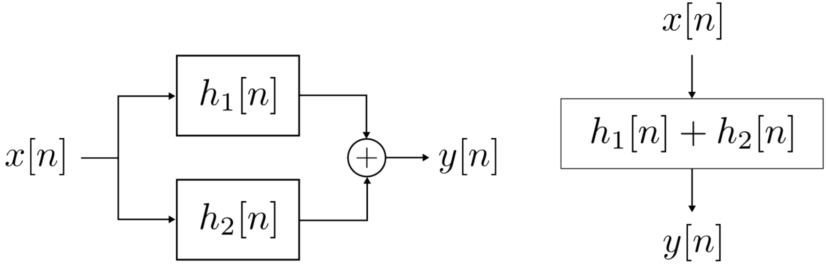
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- Demostración

$$\begin{aligned} x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t-\tau) + x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \\ &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

Propiedad Distributiva



- Análogamente

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h_2(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

Propiedad Distributiva

- Convoluciones complejas se pueden realizar como sumas de convoluciones más sencillas

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n] \quad y[n] = x[n] * h[n]$$

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad x_2[n] = 2^n u[-n]$$

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]u[n-k]$$

Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2-\frac{1}{2^n} \\ y_1[n] &= \left(2-\frac{1}{2^n}\right)u[n] \end{aligned}$$

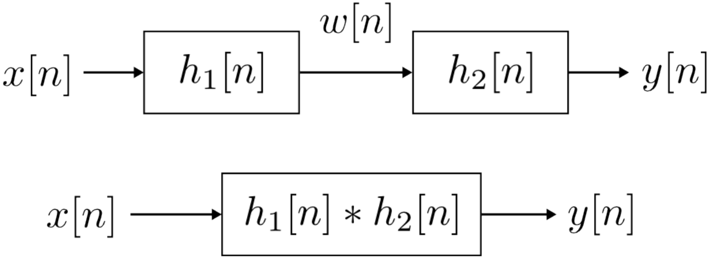
$$\begin{aligned} y_2[n] &= x_2[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u[-k]u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k \quad n \leq 0 \\ &= 2^{n+1}u[-n] \end{aligned}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \left(2-\frac{1}{2^n}\right)u[n] + 2^{n+1}u[-n]$$

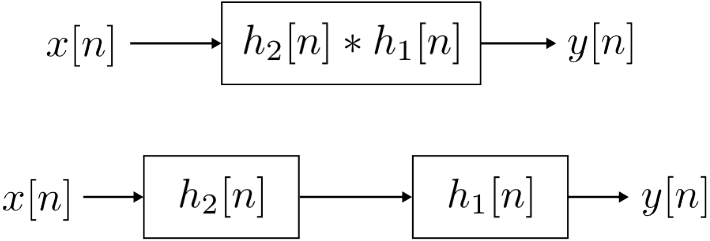
Propiedad Asociativa

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * (h_2[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$



Propiedad Asociativa



- El orden de conexión de dos o más SLIT conectados en serie no afecta la salida

Propiedad Distributiva

- El orden de conexión de sistemas no LIT no se puede cambiar.
- Asuma: $y_1(t) = 2x(t), \quad y_2(t) = x^2(t)$
    - Calculando primero y_1 y luego y_2 se obtiene $y(t) = 4x^2(t)$
    - Calculando primero y_2 y luego y_1 se obtiene $y(t) = 2x^2(t)$

Memoria

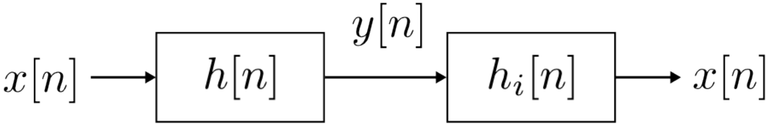
- Un sistema es "Sin Memoria" si la salida en un instante dado depende solo de la entrada en ese instante dado.
- Para un SLIT: $y[n] = x[n] * h[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$
- Para que la salida dependa solo de $x[n]$ se requiere $h[n] = 0 \quad \forall \quad n \neq 0$

Memoria

- $h[n] = k\delta[n], h(t) = k\delta(t)$
- $y[n] = kx[n], y(t) = kx(t)$
- Si $h[n]/h(t) \neq 0$ para algún $n/t \neq 0$ el sistema tiene memoria
- Si $k = 1$ el sistema es el sistema identidad.

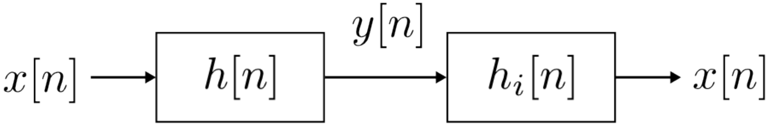
Invertibilidad

- Un sistema $h[n]$ es invertible si existe un sistema $h_i[n]$ tal que la conexión en serie de los dos produce la señal de entrada (sistema identidad).



Invertibilidad

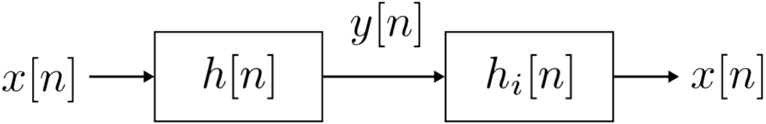
- Un sistema $h[n]$ es invertible si existe un sistema $h_i[n]$ tal que la conexión en serie de los dos produce la señal de entrada (sistema identidad).



- La conexión en serie de dos SLIT se puede reemplazar por su convolución.

Invertibilidad

- Un sistema $h[n]$ es invertible si existe un sistema $h_i[n]$ tal que la conexión en serie de los dos produce la señal de entrada (sistema identidad).



- La conexión en serie de dos SLIT se puede reemplazar por su convolución.
- $h[n] * h_i[n] = \delta[n] \quad h(t) * h_i(t) = \delta(t)$

Invertibilidad

- Considere el sistema $h[n] = u[n]$, es decir un acumulador

Acumulador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]u[n-k]$$

Primera Diferencia

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

NOTA: La primera diferencia es el sistema inverso de un acumulador

$$x[n] = \delta[n] \rightarrow h_i[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$\begin{aligned} h[n] * h_i[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

Causalidad

- La salida de un sistema causal depende solamente del valor actual y valores pasados de la entrada
- Para un SLIT: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$
- $h[n] = 0$ para $n < 0$
- La respuesta impulso del sistema debe ser cero antes de que el impulso ocurra (reposo inicial).

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k] \qquad y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Estabilidad

- Suponga $|x[n]| < B \quad \forall n$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h[k]\| B = B \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h[k]\|$$

- Por lo tanto

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h(t)\| < \infty \Leftrightarrow \|y(t)\| < \infty$$

Estabilidad

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} h[n] &= u[n] \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n-n_0] \\ y[n] &= x[n-n_0] \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k-n_0]| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Tiempo Discreto

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Orden: Máximo retardo de la salida $y[n]$
- La solución consta de dos partes:
  - Solución particular $yp[n]$: Solución a la ecuación de arriba.
  - Solución homogénea $y_h[n]$: Solución de:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

Tiempo Discreto

- Reorganizando términos:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right]$$

- Ecuación recursiva: Con las condiciones iniciales y los valores de la entrada se pueden calcular los $y[n]$ en forma consecutiva.
- Si $N = 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

Tiempo Discreto

- Esta ecuación describe un SLIT para el que

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$

- Reemplazando

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

- Sistema con Respuesta Impulso Finita (RIF/FIR)

Ejemplo

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \qquad y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

- Condiciones iniciales: Reposo inicial: $y[-1] = 0$
- Señal de entrada: $x[n] = K\delta[n]$

$$\begin{aligned} Y[0] &= x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K \\ y[1] &= x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K \\ y[2] &= x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K \end{aligned}$$

Ejemplo

- En general

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K$$

- De donde la respuesta impulso del sistema es

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- Sistema de Respuesta Impulso Infinita (RII/IIR)

Representación en Series de Fourier de Señales Periódicas Discretas

- El análisis es muy similar al caso continuo.
- Pequeñas diferencias surgirán de fenómenos como la periodicidad de exponenciales complejas discretas o el número finito de exponenciales armónicas en el dominio discreto.
- Las series de Fourier discretas son finitas por lo que no es necesario realizar análisis de convergencia.

Combinaciones lineales de exponenciales complejas armónicas.

- $x[n]$ es periódica con periodo N si $x[n] = x[n+N] \quad \forall \quad n$.
- Período fundamental N_0: Entero más pequeño que cumple la relación anterior.
- Frecuencia fundamental: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$
- Señales armónicas: $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}}$, $k = 0, 1, ..., N_0 - 1$

$$\phi_{k+N_0}[n] = e^{j(k+N_0)\frac{2\pi}{N_0}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}e^{j2\pi n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} = \Phi_k[n]$$

Representación en Serie de Fourier de una Señal Periódica Discreta.

- Sólo existen N_0 exponenciales armónicas diferentes.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}$$

- Cálculo de los coeficientes:

$$\begin{aligned} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} &= e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} \\ \sum_{k=\langle N_0 \rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N_0}n} \end{aligned}$$

Representación en Serie de Fourier de una Señal Periódica Discreta.

$$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N_0}n}$$

- Se puede demostrar que, análogamente al caso continuo:

$$\sum_{k=\langle N_0 \rangle} e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}n} = \begin{cases} N_0 & k = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, ... \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$

Representación en Serie de Fourier de una Señal Periódica Discreta.

- Si $k = r$

$$\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} = a_r N_0$$

$$a_r = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} \quad \text{Ec. de Analisis}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k e^{jk\frac{2\oint}{N_0}n} \quad \text{Ec. de Sintesis}$$

- Como las $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}$ son periódicas, los a_k también lo son

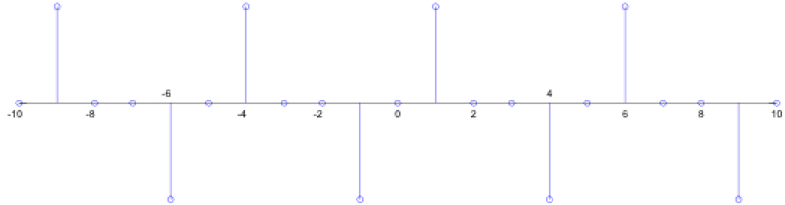
Ejemplo

- $x[n] = \sin(\omega n)$
- Si la señal es periódica $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{M}$ con M, N enteros.
- Si $MCD(M, N) = 1$, N es el período fundamental.
- Por la relación de Euler:

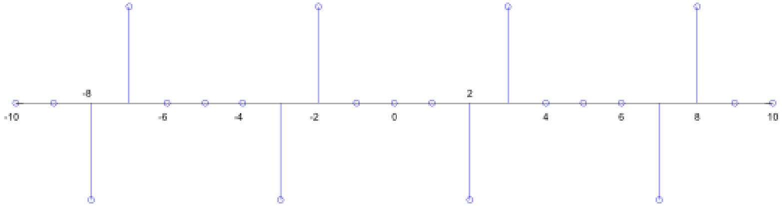
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = M \\ -\frac{1}{2j} & k = -M \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$

Ejemplo

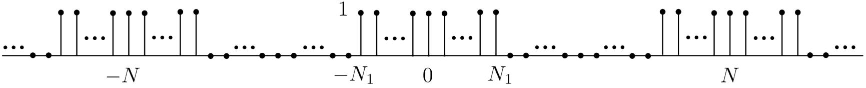
- Si $M = 1$, $N = 5$, $x[n] = \sin \frac{2\pi}{5} n$



- Si $M = 3$, $N = 5$, $x[n] = \sin \frac{6\pi}{5} n$



Ejemplo:Señal cuadrada periódica discreta



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Haciendo $m = n + N_1$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$$

Ejemplo:Señal cuadrada periódica discreta

- Los términos $e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}\Big|_{m=0}^{2N_1}$forman una serie geométrica de la forma αp^m con:
  - $\alpha = 1$
  - $p = e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

  La suma de los primeros N términos de dicha serie es:

$$s = \alpha \frac{1 - p^{N+1}}{1 - p}$$

Ejemplo:Señal cuadrada periódica discreta

- Reemplazando:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \frac{1-\left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^{2N_1+1}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}, \quad k \neq 0 \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left(e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}\right)}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}} \left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\right)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo:Señal cuadrada periódica discreta

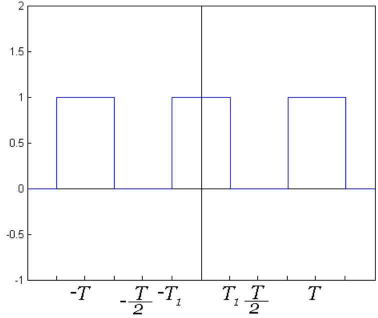
$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)}$$

- Para $k=0$:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j(0)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1 = \frac{2N_1+1}{N}$$

Ejemplo:Señal cuadrada periódica discreta

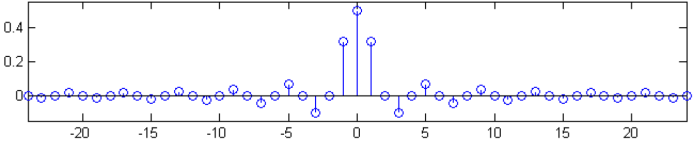
- Recordemos que para la señal cuadrada continua:



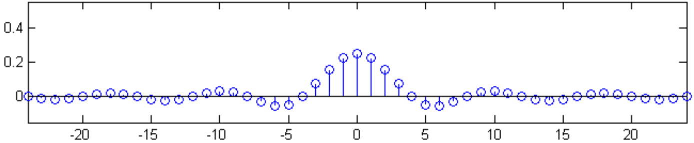
$$a_k = \begin{cases} \frac{2T_1}{T} & k = 0 \\ \frac{\sin(k\omega T_1)}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Señal cuadrada periódica continua

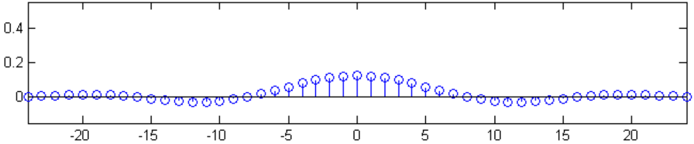
$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{8}$$

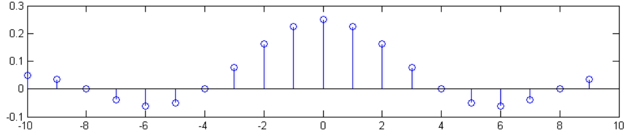


$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{16}$$

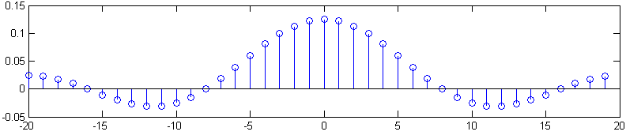


Ejemplo : Señal Cuadrada Periódica Discreta

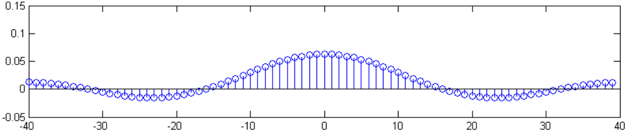
$$\frac{2N_1+1}{N} = \frac{1}{4}$$



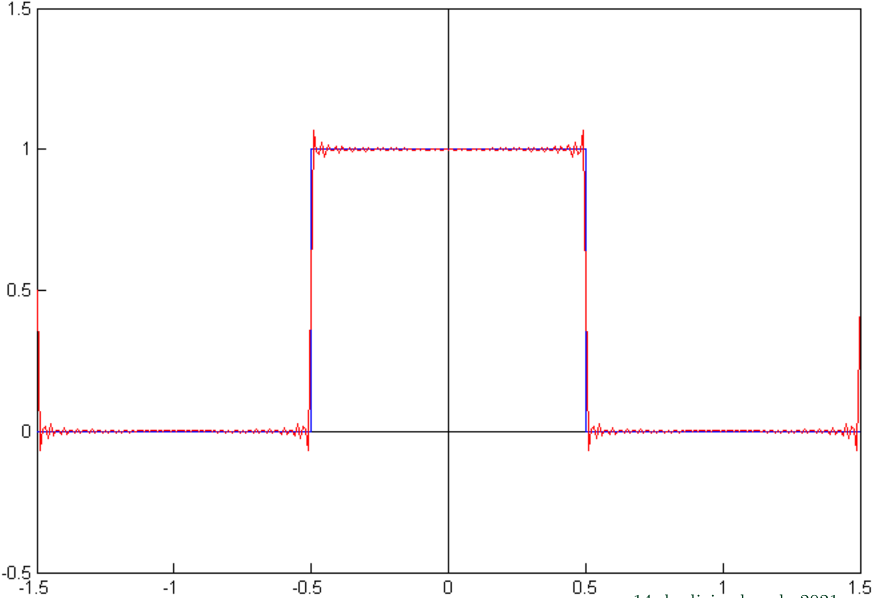
$$\frac{2N_1+1}{N} = \frac{1}{8}$$



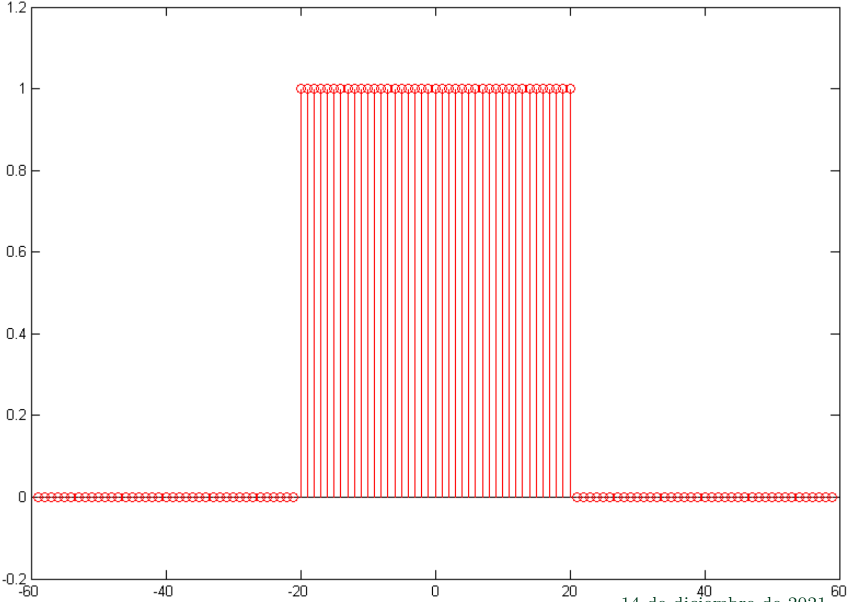
$$\frac{2N_1+1}{N} = \frac{1}{16}$$



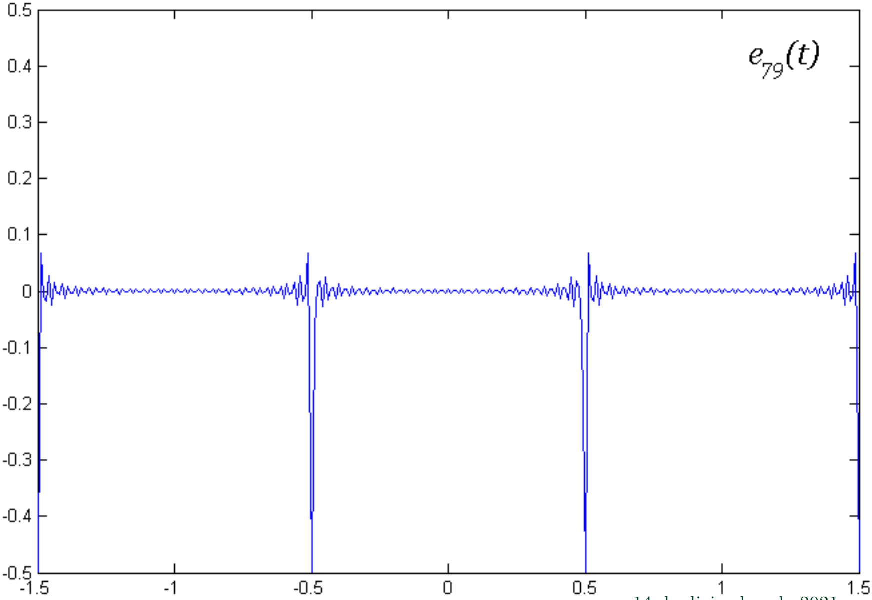
Ejemplo : Señal Cuadrada



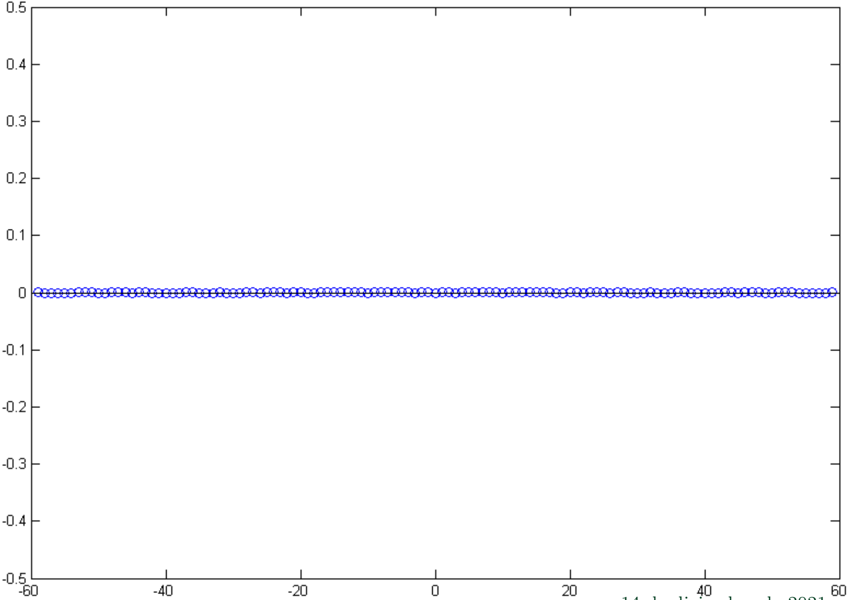
Ejemplo : Señal Cuadrada Periódica Discreta



Ejemplo : Señal Cuadrada



Ejemplo : Señal Cuadrada Periódica Discreta



Propiedades de la Serie Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] = \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k$
  - $y[n] = \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_k$
  - $Ax[n] + By[n] = z[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$
- Desplazamiento en tiempo
  - $x[n - n_0] = w[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} d_k = a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$

Desplazamiento en Frecuencia

- $a_{k-M} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{jM\frac{2\pi}{N}n}x[n] = y[n]$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\
a_{k-M} &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j(k-M)\frac{2\pi}{N}n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}e^{jM\frac{2\pi}{N}n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{jM\frac{2\pi}{N}n}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} y[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}
\end{aligned}
$$

Inversión en Tiempo

$$y[n] = x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} b_k = a_{-k}$$

Escalamiento en Tiempo

- $y[n] = x\left[\frac{n}{M}\right] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{M}\right] & \text{si n es múltiplo de M} \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$
- Periódica con período MN
- $y[n] = \xleftrightarrow{\mathcal{F}} b_k = \frac{1}{M} a_k$

Multiplicación

- $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k, \quad y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_k$
- $x[n], \quad y[n]$ periódicas con período N
- $z[n] = x[n]y[n]$es periódica con periodo N y
- $x[n]y[n] = z[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_k b_{k-l}$

Convolución Periódica

- $\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r] = z[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_k = N a_k b_k$

Acumulador y Primera Diferencia

Primera Diferencia

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_k$$

$$b_k = a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}} a_k = a_k \left(1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)$$

Acumulador

- $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_k = \frac{a_k}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$
- $y[n]$ es finita y periódica solo si $a_0 = 0$

Relación de Parseval

- $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k$
- $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$
- El término de la izquierda es la potencia promedio de $x[n]$
- $|a_k|^2$ es la potencia promedio de la k-ésima componente armónica de $x[n]$

Resumen

Linealidad $Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Corrimiento en tiempo $x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$
Corrimiento en frecuencia $x[n]e^{jM\omega_0 n}$	a_{k-M}
Inversión del tiempo: $x[-n]$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & \text{n múltiplo de m} \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$ Periódo nM	$\frac{a_k}{m}$
Convolución periódica	Na_kb_k

Multiplexación	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
Primera diferencia	$a_k(1-e^{-jk\omega})$
Acumulador	$\frac{a_k}{1-e^{-jk\omega_0}}$ Solo si $a_0=0$
Relación de Parseval	$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\|x[n]\|^2=\sum_{n=\langle N\rangle}\|a_k\|^2$
Conjugación $x^*[n]$	a^*_{-k}
Simetría para señales reales	$a_k=a^*_{-k}$
Señales reales pares	a_k real y par
Señales reales e impares	a_k real e impar

Series de Fourier y Sistemas LIT

- Tiempo Continuo:
  - La salida de un sistema LIT con respuesta impulso $h(t)$ se puede calcular como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  - Si $x(t) = e^{st}$

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}d\tau = e^{st}H(s)$$

  - Si $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Series de Fourier y Sistemas LIT

- Sea $x(t)$ una señal periódica arbitraria con:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- Por superposición, la salida a una entrada $x(t)$ sería:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

- $y(t)$ es periódica con la misma frecuencia fundamental de $x(t)$.
- Los coeficientes de la serie de Fourier de y(t) serán

$$a_k H(jk\omega_0)$$

Series de Fourier y Sistemas LIT

- Análogamente para tiempo discreto, sea

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- La salida de un sistema LIT a una entrada x[n] sería:

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

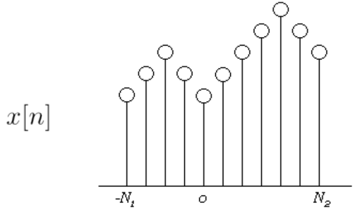
- Los coeficientes de la serie de Fourier de y[n] serán

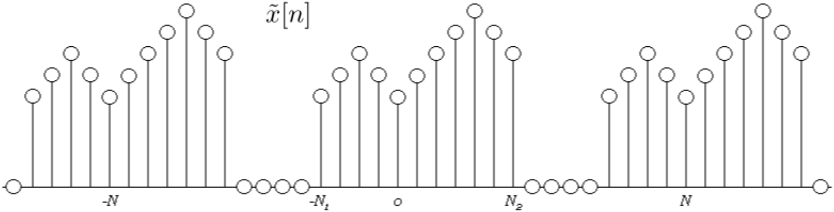
$$a_k H\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

- Para hallar la transformada de Fourier de una señal continua se partió de la de una señal periódica cuyo período aumentaba.
- Un enfoque similar se puede seguir en tiempo discreto.
- A partir de una secuencia finita de $N_1 + N_2 + 1$ muestras se construye una señal de período N y se hace aumentar progresivamente N.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto





Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- Para $\tilde{x}[n]$ se puede definir:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Pero $x[n] =$ entre $-N_1$ y N_2, entonces

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Ya que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $[-N_1, N_2]$

Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- Se define:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})$$

- Reemplazando a_k en la ecuación de síntesis:

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} N(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0\end{aligned}$$

Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- Si ahora se hace $N \to \infty$, $\omega_0 \to d\omega$, la suma se convierte en una integral y $\tilde{x}[n] \to x[n]$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Es la transformada inversa discreta de Fourier, mientras que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Es la transformada discreta de Fourier

Transformada de Fourier en tiempo Discreto

- $X(e^{j\omega})$ es el espectro de frecuencia de $x[n]$
- Los coeficientes de la serie de Fourier se pueden calcular a partir de la transformada.
- La transformada en tiempo discreto es periódica y de período 2π.
- La integral de la ecuación de síntesis se hace sobre un intervalo de longitud 2π

Ejemplo

- $x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$
- Aplicando la definición:

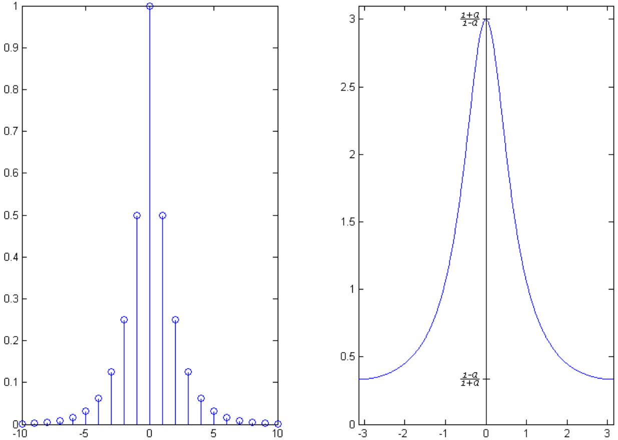
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Ejemplo

- $x[n] = a|n|, \quad |a| < 1$
- Aplicando la definición:

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^{n} \\
&= \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\
&= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-10
-5
0
5
10
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
$\frac{1+a}{1-a}$
$\frac{1-a}{1+a}$

Ejemplo

- Pulso rectangular $x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$
- Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{\sin\left(\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

Convergencia

- El argumento usado para deducir $X(e^{j\omega})$ se basó en señales de duración finita.
- Las ecuaciones encontradas aplican para un conjunto mucho más amplio de señales.
- La ecuación de análisis incluye una suma infinita cuya convergencia no está garantizada.
- Esta sumatoria convergerá si la secuencia $x[n]$ es absolutamente sumable o tiene energía finita

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Convergencia

- La integral de la ecuación de síntesis se calcula sobre un intervalo finito (2π).
- No presenta problemas de convergencia.
- La señal se puede aproximar integrando sobre un intervalo más pequeño.
- El error obtenido tenderá a cero a medida que el intervalo de frecuencias crece hasta su valor máximo.

Transformada de Fourier para Señales Periódicas Discretas

- Las funciones periódicas se pueden representar como sumas de exponenciales complejas.
- Teniendo la transformada de la exponencial compleja se podría calcular las de otras señales periódicas.
- En el caso continuo, la transformada de la exponencial compleja es un impulso en la frecuencia de la exponencial.
- La transformada de señales discretas es periódica.
- Supongamos que será un tren de impulsos de período 2π

Transformada de Fourier de la Exponencial Compleja Discreta

- Considere $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
- La correspondiente señal en tiempo sería:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)e^{j\omega n}d\omega \end{aligned}$$

- Un intervalo de longitud 2π contiene uno solo de los impulsos del tren

Transformada de Fourier de la Exponencial Compleja Discreta

- Tomemos el intervalo $[-\pi, \pi]$, este contendría el impulso correspondiente a $l = 0$.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier para Señales Periódicas

- Si ahora tenemos $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$

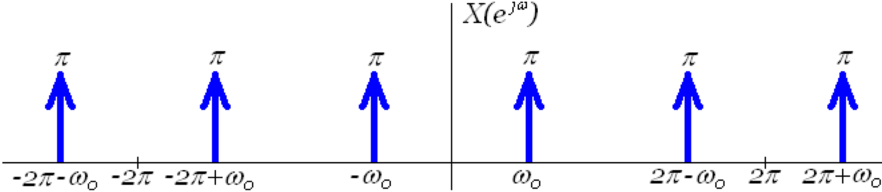
$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)\right] e^{j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- $x[n] = \cos(\omega_0 n)$

$$\cos(\omega_o n = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

$$X(e^{j\omega})\pi \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega - 2\pi l) \right)$$

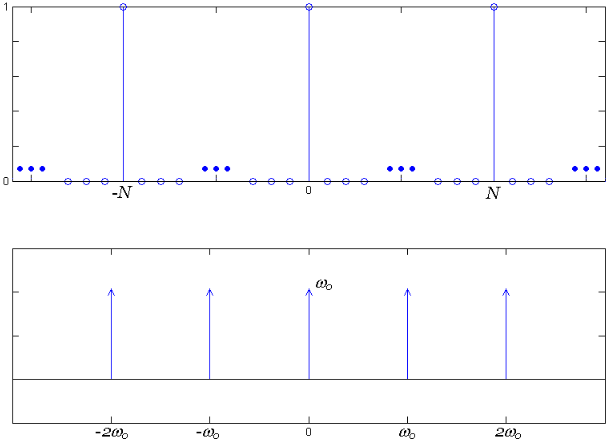


Ejemplo

- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[n - lN] \right] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\
&= \frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$


1
0
-N
0
N
ω_o
-2ω_o
-ω_o
0
ω_o
2ω_o

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\omega})$

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\omega})$
  - $y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})$

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega})$
  - $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$
  - $Ax[n] + By[n] = z[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega}) = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\omega})$
  - $y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})$
  - $Ax[n] + By[n] = z[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\omega}) = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$
- Periodicidad

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

- Linealidad:
  - $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega})$
  - $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$
  - $Ax[n] + By[n] = z[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Z(e^{j\omega}) = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$
- Periodicidad
  - $X(e^{(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

Desplazamientos en Tiempo y Frecuencia

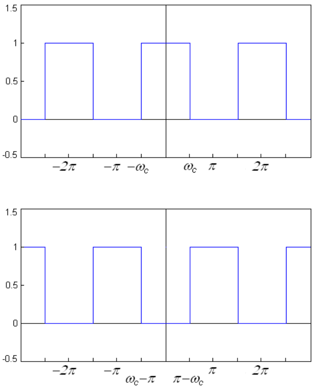
$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

$$x[n-n_0] = w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$Z(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} z[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$$

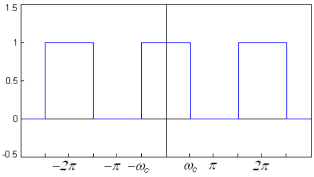
- Estas relaciones se pueden demostrar fácilmente reemplazando $x[n]$ por $x[n-n_0]$ en la ecuación de análisis y $X(e^{j\omega})$ por $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ en la ecuación de síntesis

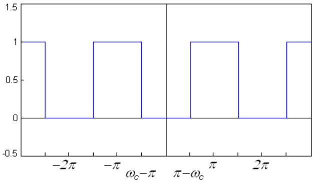
Ejemplo: Filtro ideal pasa-altos discreto



- Filtro pasabajos con frecuenci corte ω_c

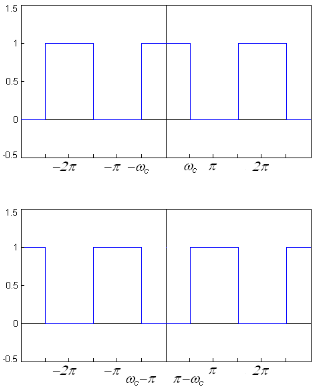
Ejemplo: Filtro ideal pasa-altos discreto





- Filtro pasabajos con frecuenci corte ω_c
- Un corrimiento de π lo convie un filtro pasaaltos con frecuen corte $\pi - \omega_c$

Ejemplo: Filtro ideal pasa-altos discreto



- Filtro pasabajos con frecuenci corte ω_c
- Un corrimiento de π lo convie un filtro pasaaltos con frecuen corte $\pi - \omega_c$
- En tiempo:

$$
\begin{aligned}
h_{hp}[n] &= e^{j\pi n} h_{lp}[n] \\
&= (-1)^n h_{lp}[n
\end{aligned}
$$

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

Conjugación

- $x*[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X*/e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
    - $X(e^{j\omega}) = X*/e^{-j\omega})$
    - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X*/e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$

Conjugación

- $x * [n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X * e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X * /e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X*/e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x * [n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X * e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X * /e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x * [n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X * e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

  - $x[n] \in \mathcal{R}$, par

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X * /e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x * [n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X * e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

  - $x[n] \in \mathcal{R}$, par
    - $X(e^{j\omega}) \in \mathcal{R}$, par

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X * /e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x * [n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X * e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathcal{R}$, par
  - $X(e^{j\omega}) \in \mathcal{R}$, par
- $x[n] \in \mathcal{R}$, impar

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X * /e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X*/e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

- $x[n] \in \mathcal{R}$, par
  - $X(e^{j\omega}) \in \mathcal{R}$, par
- $x[n] \in \mathcal{R}$, impar
  - $X(e^{j\omega}) \in \mathcal{I}$, impar

Conjugación

- $x*[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X*e^{-j\omega})$
- Simetría conjugada para señales reales:

- $x[n] \in \mathbb{R}$
  - $X(e^{j\omega}) = X*/e^{-j\omega})$
  - $\mathbb{R}\{X(e^{j\omega)}\} = \mathbb{R}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathbb{I}\{X(e^{-j\omega})\}$
  - $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$
  - $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

- $x[n] \in \mathcal{R}$, par
  - $X(e^{j\omega}) \in \mathcal{R}$, par
- $x[n] \in \mathcal{R}$, impar
  - $X(e^{j\omega}) \in \mathcal{I}$, impar
- $x[n[\in \mathcal{R}$

$$\mathcal{P}\{x[n]\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$\mathcal{I}\{x[n]\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\mathbb{I}\{X(e^{j\omega})\}$$

Primera Diferencia en Tiempo

$$x[n] - x[n-1] = y[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

Acumulación en Tiempo

$$z[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\omega})$$

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Ejemplo

- Hallar la transformada de Fourier de $u[n]$.

Ejemplo

- Hallar la transformada de Fourier de $u[n]$.
- Sabemos que

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \quad \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Delta(e^{j\omega}) = 1$$

Ejemplo

- Hallar la transformada de Fourier de $u[n]$.
- Sabemos que

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \quad \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Delta(e^{j\omega}) = 1$$

- Por propiedad de acumulación:

$$\begin{aligned} U(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\Delta(e^{j\omega}) + \pi\Delta(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) \\ &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) \end{aligned}$$

Expansión en Tiempo

- Para el caso continuo se tenía

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Expansión en Tiempo

- Para el caso continuo se tenía

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

- En discreto, el resultado de multiplicar la variable independiente por un valor a no es inmediato ya que el índice de la señal debe ser entero

Expansión en Tiempo

- Para el caso continuo se tenía

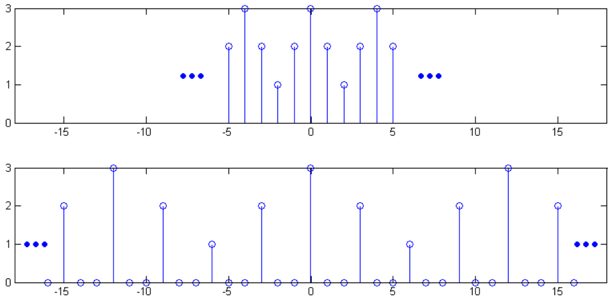
$$x(at) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

- En discreto, el resultado de multiplicar la variable independiente por un valor a no es inmediato ya que el índice de la señal debe ser entero
- Por ejemplo, $x[2n]$ es una señal que toma las muestras pares de $x[n]$ únicamente

Expansión en Tiempo

- Sea k un entero positivo, definamos:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \text{si n múltiplo de k} \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$



Expansión en Tiempo

- La transformada de Fourier de $x_{(k)}[n]$ se puede encontrar como:

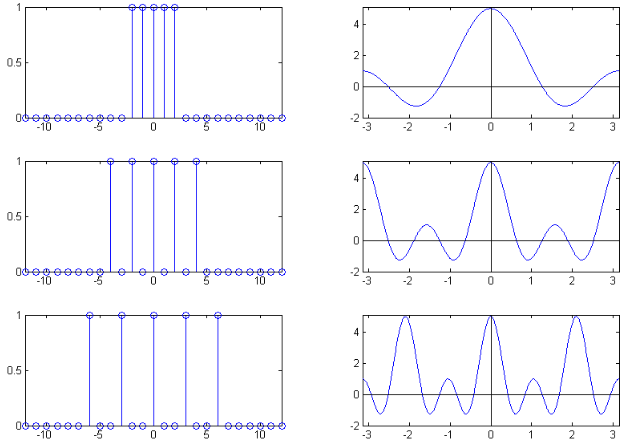
$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{r=-\omega}^{\omega} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} \\ &= X(e^{jk\omega}) \end{aligned}$$

Expansión en Tiempo

- La transformada de Fourier de $x_{(k)}[n]$ se puede encontrar como:

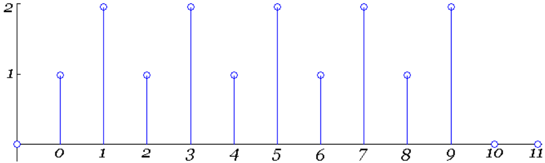
$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{r=-\omega}^{\omega} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega k} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} \\ &= X(e^{jk\omega}) \end{aligned}$$

- Que es un versión comprimida de $X(e^{j\omega})$ por un factor k.


1
0.5
0
-10
-5
0
5
10
4
2
0
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3

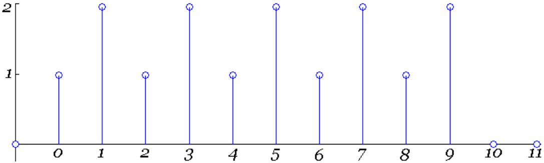
Ejemplo

- Hallar la transformada de x[n]:

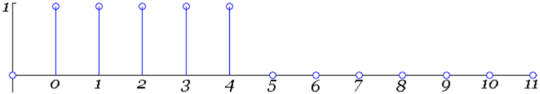


Ejemplo

- Hallar la transformada de x[n]:



- Esta señal se puede construir a partir de un pulso rectangular $y[n]$.



Ejemplo

- $x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$y_{(2)[n]} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j2\omega})$$

$$2y_{(2)}[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2e^{-j\omega}Y(e^{j2\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = Y(e^{j2\omega}) + 2e^{-j\omega}Y(e^{j2\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1+2e^{-j\omega})\left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}\right)$$

Inversión en Tiempo

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \quad y[n] = x[-n]$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} \quad n = -m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(-\omega)m} \end{aligned}$$

$$y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

Derivación en Frecuencia

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -jnx[n]
$$

Relación de Parseval

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Convolución

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}), y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega})$$

$$z[n] = x[n] * y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Z(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

- Al igual que en tiempo continuo, $y[n]$ se puede reemplazar por la respuesta impulso de un sistema LIT $h[n]$

Ejemplo

- Sea $h[n] = \delta[n - n_0]$

Ejemplo

- Sea $h[n] = \delta[n – n_0]$
- Su respuesta en frecuencia es:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega n_0} \end{aligned}$$

Ejemplo

- Sea $h[n] = \delta[n – n_0]$
- Su respuesta en frecuencia es:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega n_0} \end{aligned}$$

- La salida del sistema para una entrada x[n] se podrá calcular como:

$$y[n] = F^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = F^{-1}\{e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})\} = y[n-n_0]$$

Ejemplo

- Sea un sistema LIT con $h[n] = \alpha^n u[n], |\alpha| < 1$

Ejemplo

- Sea un sistema LIT con $h[n] = \alpha^n u[n], |\alpha| < 1$
- Sea una entrada $x[n] = \beta^n u[n], |\beta| < 1$

Ejemplo

- Sea un sistema LIT con $h[n] = \alpha^n u[n], |\alpha| < 1$
- Sea una entrada $x[n] = \beta^n u[n], |\beta| < 1$
- Sus transformadas son:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

Ejemplo

- Sea un sistema LIT con $h[n] = \alpha^n u[n], |\alpha| < 1$
- Sea una entrada $x[n] = \beta^n u[n], |\beta| < 1$
- Sus transformadas son:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

- De donde:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{(1-\beta e^{-j\omega})}}$$

Ejemplo

- Por fracciones parciales:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\beta}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

Ejemplo

- Por fracciones parciales:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

- Resolviendo para A y B

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

Ejemplo

- Por fracciones parciales:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\beta}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

- Resolviendo para A y B

$$A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \quad B = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

- De donde:

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n]$$

Ejemplo

- Si $\alpha = \beta$

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

Ejemplo

- Si $\alpha = \beta$

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

- Por propiedad de derivación:

$$n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

Ejemplo

- Si $\alpha = \beta$

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

- Por propiedad de derivación:

$$n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

- El factor $e^{j\omega}$ indica un adelanto de 1

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1]$$

Multiplicación

$$z[n] = x[n]y[n]$$

$$\begin{aligned} Z(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} Y(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

- El último término es una convolución periódica de $X(e^{j\omega})$ y $Y(e^{j\omega})$

Dualidad

- Dualidad en la serie de Fourier en tiempo discreto:

Dualidad

- Dualidad en la serie de Fourier en tiempo discreto:
  - Los coeficientes a_k de la serie de Fourier de una señal periódica discreta $x[n]$ forman una serie

Dualidad

- Dualidad en la serie de Fourier en tiempo discreto:
  - Los coeficientes a_k de la serie de Fourier de una señal periódica discreta $x[n]$ forman una serie
  - Se puede calcular una serie de Fourier en tiempo discreto a partir de la secuencia a_k.

Dualidad

- Dualidad en la serie de Fourier en tiempo discreto:
  - Los coeficientes a_k de la serie de Fourier de una señal periódica discreta $x[n]$ forman una serie
  - Se puede calcular una serie de Fourier en tiempo discreto a partir de la secuencia a_k.
  - Definamos $f[k] = a_k$.

Dualidad

- Dualidad en la serie de Fourier en tiempo discreto:
  - Los coeficientes a_k de la serie de Fourier de una señal periódica discreta $x[n]$ forman una serie
  - Se puede calcular una serie de Fourier en tiempo discreto a partir de la secuencia a_k.
  - Definamos $f[k] = a_k$.
  - Por definición:

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

Dualidad en la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

- Por la ecuación de síntesis:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} f[k] e^{jk\omega_0 n}$$

Dualidad en la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

- Por la ecuación de síntesis:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} f[k] e^{jk\omega_0 n}$$

- Evaluando en $n = -n$ y dividiendo por N.

$$\frac{1}{N} x[-n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} f[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

Dualidad en la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

- Por la ecuación de síntesis:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} f[k] e^{jk\omega_0 n}$$

- Evaluando en $n = -n$ y dividiendo por N.

$$\frac{1}{N} x[-n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} f[k] e^{-jk\omega_0 n}$$

- Que es la ecuación de análisis para la secuencia $f[k]$

Dualidad en la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k = f[k]$$

$$f[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_k = \frac{1}{N} x[-k]$$

- Como resultado de la dualidad se pueden deducir relaciones como:

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} \Rightarrow e^{jm\frac{2\pi}{N}n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a_{k-m}$$

$$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]x[n-r] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} N a_k b_k \Rightarrow x[n]y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$$

Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} \frac{5}{9} & \text{n mũltiplode9} \\ \frac{1}{9}\frac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & \text{otros casos} \end{cases}$$

- Una onda cuadrada en tiempo tiene coeficientes de Fourier de la forma de $x[n]$

Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} \frac{5}{9} & \text{n mũltiplode9} \\ \frac{1}{9}\frac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & \text{otros casos} \end{cases}$$

- Una onda cuadrada en tiempo tiene coeficientes de Fourier de la forma de $x[n]$
- Por dualidad, los coeficientes de Fourier de $x[n]$ deberán tener la forma de una onda cuadrada

Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} \frac{5}{9} & \text{n m\~ultiplode9} \\ \frac{1}{9}\frac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & \text{otros casos} \end{cases}$$

- Una onda cuadrada en tiempo tiene coeficientes de Fourier de la forma de $x[n]$
- Por dualidad, los coeficientes de Fourier de $x[n]$ deberán tener la forma de una onda cuadrada
- Para dicha onda $N = 9$, $N_1 = 2$

Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} \frac{5}{9} & \text{n mũltiplode9} \\ \frac{1}{9}\frac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & \text{otros casos} \end{cases}$$

- Una onda cuadrada en tiempo tiene coeficientes de Fourier de la forma de $x[n]$
- Por dualidad, los coeficientes de Fourier de $x[n]$ deberán tener la forma de una onda cuadrada
- Para dicha onda $N = 9$, $N_1 = 2$
- Por dualidad, su amplitud será $1/9$

Dualidad entre la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto y la Serie de Fourier de Tiempo Continuo

- La transformada de Fourier de una señal discreta es una señal continua de período 2π.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad |x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}$$

Dualidad entre la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto y la Serie de Fourier de Tiempo Continuo

- La transformada de Fourier de una señal discreta es una señal continua de período 2π.
- Esta señal se puede aproximar por una serie de Fourier en tiempo continuo.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad |x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}$$

Dualidad entre la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto y la Serie de Fourier de Tiempo Continuo

$$x[-k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jt})e^{-jkt}dt$$

- Se puede interpretar como un serie de Fourier de una señal continua $X(e^{jt})$, de período 2π, $\omega_0 = 1$

Dualidad entre la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto y la Serie de Fourier de Tiempo Continuo

$$x[-k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jt})e^{-jkt}dt$$

- Se puede interpretar como un serie de Fourier de una señal continua $X(e^{jt})$, de período 2π, $\omega_0 = 1$
- La correspondiente ecuación de síntesis sería:

$$X(e^{jt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]e^{jkt}$$

Ejemplo

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

- Para usar dualidad se debe construir una señal con período 2π cuyos coeficientes de Fourier sean $a_k = x[k]$.

Ejemplo

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

- Para usar dualidad se debe construir una señal con período 2π cuyos coeficientes de Fourier sean $a_k = x[k]$.
- Para este caso, esa señal es una señal cuadrada periódica.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 \leq |t| < \pi \end{cases} \Rightarrow a_k = \frac{\sin(kT_1)}{k\pi}$$

Ejemplo

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

- Para usar dualidad se debe construir una señal con período 2π cuyos coeficientes de Fourier sean $a_k = x[k]$.
- Para este caso, esa señal es una señal cuadrada periódica.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 \leq |t| < \pi \end{cases} \Rightarrow a_k = \frac{\sin(kT_1)}{k\pi}$$

- De donde $T_1 = \pi/2$, entonces $X(e^{j\omega}) = g(\omega)$

Sistemas descritos por E. de Diferencias Lineales con Coeficientes Constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] (*)$$

- Objetivo: Determinar la respuesta en frecuencia del sistema descrito por esta ecuación.

Sistemas descritos por E. de Diferencias Lineales con Coeficientes Constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] (*)$$

- Objetivo: Determinar la respuesta en frecuencia del sistema descrito por esta ecuación.
- Análogamente al caso continuo:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Sistemas descritos por E. Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

- La transformada de Fourier de $(*)$ es:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left\{y[n-k]\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left\{x[n-k]\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{-j\omega})$$

Sistemas descritos por E. Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes

$$Y(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

- $H(e^{j\omega})$ es una función racional.

Ejemplo

$$y[n] - ay[n-1] = x(n), |a| < 1$$

- $a_0 = 1$, $a_1 = -a$, $b_0 = 1$, de donde:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Ejemplo

$$y[n] - ay[n-1] = x(n), |a| < 1$$

- $a_0 = 1$, $a_1 = -a$, $b_0 = 1$, de donde:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

- La respuesta impulso del sistema será:

$$h[n] = a^n u[n]$$

Ejemplo

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

- $a_0 = 1$, $a_1 = -3/4$, $a_2 = 1/8$, $b_0 = 2$, de donde:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{\frac{1}{8}e^{-j2\omega} - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + 1}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

Ejemplo

- Expandiendo en fracciones parciales:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

Ejemplo

- Expandiendo en fracciones parciales:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

- La respuesta impulso será:

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Ejemplo

- Suponga ahora que ese sistema se alimenta con la entrada

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right) \\ &= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo

- Aplicando fracciones parciales:

$$
\begin{aligned}
y(e^{j\omega}) &= \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{C}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \\
&= \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Aplicando fracciones parciales:

$$
\begin{aligned}
y(e^{j\omega}) &= \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{C}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \\
&= \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}
\end{aligned}
$$

- De donde la salida en tiempo será:

$$
y[n] = \left[8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]
$$

La Transformada Z

- Contraparte discreta de la transformada de Laplace.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \quad = z^n H(z)$$

La Transformada Z

- Contraparte discreta de la transformada de Laplace.
- Las exponenciales complejas de la forma Z^n son vectores propios de los sistemas LIT discretos.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \quad = z^n H(z)$$

La Transformada Z

- Contraparte discreta de la transformada de Laplace.
- Las exponenciales complejas de la forma Z^n son vectores propios de los sistemas LIT discretos.
- La salida de un SLIT con respuesta impulso $h[n]$ para una entrada exponencial compleja $x[n] = z^n$ se puede calcular como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} \quad = z^n H(z)$$

La Transformada Z

- En general podemos definir:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

La Transformada Z

- En general podemos definir:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

- Si $z = e^{j\omega}$, esta ecuación corresponde a la transformada de Fourier de $x[n]$.

La Transformada Z

- En general podemos definir:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

- Si $z = e^{j\omega}$, esta ecuación corresponde a la transformada de Fourier de $x[n]$.
- Para z complejo ($z = re^{j\omega}$), es la Transformada Z de $x[n]$.

La Transformada Z

- En general podemos definir:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

- Si $z = e^{j\omega}$, esta ecuación corresponde a la transformada de Fourier de $x[n]$.
- Para z complejo ($z = re^{j\omega}$), es la Transformada Z de $x[n]$.
- El operador "Transformada Z" se puede escribir como: $\mathcal{Z}\{x[n]\}$.

La Transformada Z

- En general podemos definir:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

- Si $z = e^{j\omega}$, esta ecuación corresponde a la transformada de Fourier de $x[n]$.
- Para z complejo ($z = re^{j\omega}$), es la Transformada Z de $x[n]$.
- El operador "Transformada Z" se puede escribir como: $\mathcal{Z}\{x[n]\}$.
- La relación entre $x[n]$ y $X(z)$ se denota:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(z)$$

La Transformada Z

- Si reemplazamos z por su representación polar

$$
\begin{aligned}
X(re^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(re^{j\omega}\right)^{-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[x[k]r^{-k}\right] e^{-j\omega k} \\
&= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}
\end{aligned}
$$

La Transformada Z

- Si reemplazamos z por su representación polar

$$
\begin{aligned}
X(re^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(re^{j\omega}\right)^{-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[x[k]r^{-k}\right]e^{-j\omega k} \\
&= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}
\end{aligned}
$$

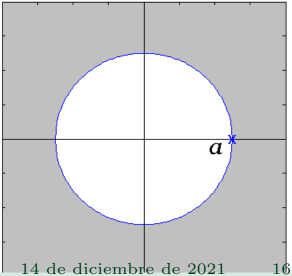
- La transformada Z de $x[n]$ se puede interpretar como la Transformada de Fourier de $r^{-n}x[n]$.

Ejemplo

- Sea $x[n] = a^n u[n]$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$



Ejemplo

- Sea $x[n] = a^n u[n]$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

- Que converge si $|az^{-1}| < 1$

$$|a| < |z|$$

$$X(z) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} \right.$$