Solución segundo parcial
análisis real

(1) A, B conjuntos disyuntos e infinito numerables. Entonces, $A \cup B$ es numerable.

Dem: Como A y B son numerables, existen funciones biyectivas $f: A \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g: B \longrightarrow \mathbb{N}$. Como $2\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}+1$ son numerables, existen $f_1: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$ y $g_1: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}+1$ biyectivas.
Se define $h: A\cup B \longrightarrow \mathbb{N}$, como sigue:

$$
\begin{aligned}
A\cup B &\xrightarrow{\ h\ } \mathbb{N}\\
x &\longmapsto f_1[f(x)],\ x\in A\\
x &\longmapsto g_1[g(x)],\ x\in B
\end{aligned}
$$

; Esta función está bien definida porque $A\cap B=\phi$.

Veamos que h es 1-1:

- Sean $x,y \in A \subseteq A\cup B$ tq $h(x)=h(y)$. Entonces $f_1[f(x)] = f_1[f(y)]$ $\underset{f_1 \text{ es } 1-1}{\Longrightarrow} f(x)=f(y) \underset{f_1 \text{ es } 1-1}{\Longrightarrow} \underline{x=y}$.
- Sean $x,y \in B \subseteq A\cup B$. tq $h(x)=h(y)$. Entonces $g_1[g(x)] = g_1[g(y)]$ $\underset{g_1 \text{ es } 1-1}{\Longrightarrow} g(x)=g(y) \underset{g \text{ es } 1-1}{\Longrightarrow} \underline{x=y}$.
- Sea $x\in A$ y $y\in B$. Como $A\cap B=\phi \Rightarrow x\neq y$. $h(x) = f_1[f(x)] \in 2\mathbb{N}$ y $h(y)=g_1[g(x)] \in 2\mathbb{N}+1 \Rightarrow h(x)\neq h(y)$.

Como, $h: A\cup B \longrightarrow \mathbb{N}$ es 1-1 $\Rightarrow$ $A\cup B$ es numerable.

1.0

(2) $x_1=4$, $x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n - 1}$, $n\geq 1$.

n	x_n
1	4
2	2.73
3.	2.31
4	2.14
5	2.07
6	2.03

b) (x_n) es monótona decreciente (por inducción):

Caso base: $x_1 = 4 \geq 2.73 = x_2$

HI: $x_n \geq x_{n+1}$

Veamos que $x_{n+1} \geq x_{n+2}$:

por HI, $x_n \geq x_{n+1} \Rightarrow x_n - 1 \geq x_{n+1} - 1 \Rightarrow$
$\sqrt{x_n - 1} \geq \sqrt{x_{n+1}-1} \Rightarrow 1+\sqrt{x_n-1} \geq 1+\sqrt{x_{n+1}-1}$
$\Rightarrow \underline{x_{n+1} \geq x_{n+2}}$

0.5

a) (x_n) es acotada:

- Como $4 \geq x_1$ y (x_n) es decreciente $\Rightarrow$ 4 es cota superior de (x_n).

0.5

- Veamos por inducción que 2 es cota inferior de (x_n):

caso base: $4 = x_1 \geq 2$.

HI: $x_n \geq 2$.

Debemos probar que $x_{n+1} \geq 2$:

por HI $x_n \geq 2 \Rightarrow x_n - 1 \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x_n - 1} \geq \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow 1 + \sqrt{x_n - 1} \geq 1 + 1 \Rightarrow x_{n+1} \geq 2$ //

$\alpha \neq 1$

como $x_n \to \alpha$: $\alpha = 1 + \sqrt{\alpha - 1} \to (\alpha - 1)^2 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha - 1 = 1 = \alpha = 2$

punto de convergencia

3) Si $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy, entonces (x_n) converge.

Dem: Como (x_n) es de Cauchy, (x_n) es acotada. Entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ convergente; sea α el punto de convergencia de (x_{n_k}). Veamos que $x_n \to \alpha$.

1.0

Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $\varepsilon/2 > 0$:

Como (x_n) es de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $n, m \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/2$

Como $x_{n_k} \to \alpha$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $k \geq \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon/2$

Si $n, k \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que:

$|x_n - \alpha| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - \alpha| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_n - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ //

Por lo tanto, $x_n \to \alpha$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serie infinita.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a α si la sucesión de sumas

0.5

parciales (S_n), donde $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, converge a α.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ converge

Dem: Sea S_n^x la sucesión de sumas parciales de $\sum x_n$

0.5

S_n^y la " " " " $\sum y_n$ y

S_n^{x+y} " " " " " $\sum (x_n + y_n)$

$S_n^{x+y} = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$

$= S_n^x + S_n^y$. Como $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen, entonces S_n^x y S_n^y convergen $\Rightarrow S_n^{x+y}$ converge al ser suma de sucesiones convergentes. Por lo tanto, $\sum (x_n + y_n)$ converge]