TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $f(t)$ como función definida en $[0,\infty)$
la T.L. de f se define por:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Propiedades

$$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\,\mathcal{L}(f(t)) + b\,\mathcal{L}(g(t))$$

T.L. de funciones elementales

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
	1	$1/s$
	t	$1/s^2$
$n \in \mathbb{N}$	t^n	$n!/s^{n+1}$
$a \in \mathbb{R}$	e^{at}	$1/s-a$
	$sen(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
	$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$

Ejemplos:

1) $\mathcal{L}(5t^3-8t^4-6t+9)$

$$= 5\frac{3!}{s^4} - 8\frac{4!}{s^5} - \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}$$

2) $\mathcal{L}(e^{6t}) = \frac{1}{s-6}$

3) $\mathcal{L}(e^{-t/4}) = \frac{1}{s+\frac{1}{4}} = \frac{4}{4s+1}$

Laplace transforma una ED a una algebraica

4) $\mathcal{L}(6\,sen\,t - 8\cos(3t)) = 6\cdot\frac{1}{s^2+t} - \frac{8s}{s^2t+9}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Sea $F(s)$ una función. La TL inversa de $F(s)$ es la función $f(t)$ tal que

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

La TL inversa $f(t)$ se denota por: $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

Ejemplos:

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1$
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/s^2) = t$
3. $\mathcal{L}^{-1}(1/s^{n+1}) = t^n/n!$

Propiedad

$$\mathcal{L}^{-1}(c\,F(a) + d\,G(s)) = c\,\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + d\,\mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

Ejemplos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right) = \frac{\text{sen}(kt)}{k}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right) = \cos(kt)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}$$

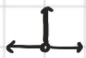
Ejemplo:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) = \frac{t^3}{3!}$ 2. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s}\right) = 6$ 3. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7}{s^2} + \frac{8}{s^6} - \frac{9}{s}\right) = 7t + 8\frac{t^5}{5!} - 9$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s^2+25}\right) = \frac{8}{5}\,\text{sen}(5t)$ 5. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+10}\right) = \frac{4}{\sqrt{10}}\,\text{sen}(\sqrt{10}\,t)$

6. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{s^2+5}\right) = 3\cos(\sqrt{5}\,t)$

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \qquad \delta(t)$$



7. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s+9}{s^2+13}\right)$

observe que $\frac{4s+9}{s^2+13} = \frac{4s}{s^2+13} + \frac{9}{s^2+13}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s+9}{s^2+13}\right) = 4\cos(\sqrt{13}\,t) + \frac{9}{\sqrt{13}}\,\text{sen}(\sqrt{13}\,t)$$

En general:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{as+b}{s^2+k^2}\right) = a\cos(kt) + \frac{b}{k}\,\text{sen}(kt)$$

Para hallar la TL inversa, en algunas ocasiones se necesita hacer una descomposición en factores parciales

Ejemplo: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7s+2}{s^2-36}\right)$

Aplicamos FP a $\frac{7s+2}{s^2-36}$

$$\frac{7s+2}{s^2-36} = \frac{7s+2}{(s-6)(s+6)} = \frac{A}{s-6} + \frac{B}{s+6}$$

$$\frac{7s+2}{(s-6)(s+6)} = \frac{A(s+2)+B(s-6)}{(s-6)(s+6)}$$

$$7s+2 = A(s+6) + B(s-6)$$

Si $s=6$ $\quad 7(6)+2 = A(6+6)+0 \Rightarrow A = \frac{44}{12} = \frac{11}{13}$

Si $s=-6$ $\quad 7(-6)+2 = B(-6+6) \Rightarrow B = \frac{-40}{12} = \frac{10}{3}$

Por lo tanto, $\frac{7s+2}{s^2-36} = \frac{11/3}{s-6}$

Luego $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7s+2}{s^2-36}\right) = \frac{11}{3}e^{6t} + \frac{10}{3}e^{-6t}$

Ejercicio: calcule la TL inversa $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2-3s+2}\right)$

$$\frac{s+4}{s^2-3s+2} = \frac{s+4}{(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

$$s+4 = A(s-1) + B(s-2)$$

Si $s=1$ $\quad 5=-B$, $B=-5$ $\qquad$ Si $s=2$ $\quad 6=A$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2-3s+2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s-2} - \frac{5}{s-1}\right) = 6e^{2t} - 5e^{t}$$

TEOREMA DE TRASLACIÓN 1

$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$ es decir $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \mathcal{L}(f(t))\Big|_{s\leftrightarrow s-a}$

calculo la transformada de la función solita

intercambiar s por $s-a$

Ejemplo 1:

$\mathcal{L}(e^{2t}\operatorname{sen}(\pi t))$

→ TL de $\operatorname{sen}(\pi t)$ $\quad \mathcal{L}(\operatorname{sen}(\pi t)) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2}$

como se esta multiplicando por e^{2t},
cambiamos la variable s por $s-2$

$$\mathcal{L}(e^{2t}\operatorname{sen}(\pi t)) = \frac{1}{(s-2)^2+\pi^2}$$

Ejemplo: $\quad \mathcal{L}(e^{-3t}t^6)$

$\mathcal{L}(t^6) = \frac{6!}{s^7}$ $\qquad$ por teo. de Traslación 1

$$\mathcal{L}(e^{-3t}t^6) = \mathcal{L}(t^6)\Big|_{s\leftrightarrow s-(-3)} = \frac{6!}{s^2}\Big|_{s\leftrightarrow s+3} = \frac{6!}{(s+3)^7}$$

Ejemplo 1: $\quad \mathcal{L}(e^{4t}\cos(2t))$

$$\mathcal{L}(\cos 2t)\Big|_{s\leftrightarrow s-4} = \frac{s}{s^2+4}\Big|_{s\leftrightarrow s-4} = \frac{s-4}{(s-4)^2+4}$$

TEOREMA DE TRASLACIÓN VERSIÓN INVERSA

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

Ejemplo: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)^6}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^6}\Big|_{(s-4)\Leftrightarrow s}\right) = e^{4t}\frac{t^5}{5!}$

→ Caso Fracciones Parciales repetidas

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s-1)^2(s-3)}\right)$$

1. Descomposición FP

$$\frac{s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-3}$$

$$s+2 = A(s-1)(s-3) + B(s-3) + C(s-1)^2$$

- Si $s=1$ $\quad 3 = B(1-3)$, $\quad \frac{-3}{2} = B$ $\quad$ | Si $s=3$ $\quad 5 = C(3-1)^2$, $\quad C = \frac{5}{4}$

- Si $s=0$ $\quad 2 = A(-1)(-3) - \frac{3}{2}(-3) + \frac{5}{4}(-1)^2$

$$2 = 3A + \frac{4}{2} + \frac{5}{4}$$

$$2 = 3A +$$

$$A = \frac{-15}{12}$$

$$\frac{s+2}{(s-1)^2(s-3)} = \frac{\frac{-15}{12}}{s-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{(s-1)^2} + \frac{\frac{5}{4}}{s-3}$$

TL inversa $\quad = \frac{-15}{12}e^{t} - \frac{3}{2}e^{t}t + \frac{5}{4}e^{3t}$

→ Otro caso: Fracciones parciales

$$\frac{s+4}{\underbrace{s^2+4s+12}_{\text{completar cuadrados}}} = \frac{s+4}{(s+2)^2+8}$$

↗ seno trasladado y hay que cuadrarlo

$$\frac{s+4}{s^2+4s+12} = \frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+8} \xrightarrow[\text{inversa}]{} e^{-2t}\cos(\sqrt{8}t) + \frac{2}{\sqrt{8}}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{8}\,t$$