Señales y Sistemas I
cod: 2016506

Claudia Caro Ruiz

20 de octubre de 2021

Sistemas Continuos LTI

- El uso de sistemas LTI es común en el modelamiento de fenómenos físicos
  1. Muchos procesos pueden modelarse como sistema LTI si se limita el sistema a una región de operación
  2. Las herramientas para resolver problemas de tipo LTI son muy completas y producen soluciones cerradas.
  3. Las técnicas de diseño y análisis para sistemas LTI han tenido gran desarrollo y aplicación en la industria.

- Recuerde que la señal impulso cumple la siguiente propiedad

$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

- Utilizando la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

  y la ecuación anterior podemos concluir que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Lo interesante de esta ecuación es que la señal $x(t)$ se puede expresar en términos de la señal impulso.

Convolución

- Considere un mapa (LTI) $H : u(t) \to y(t)$ tal que

$$y(t) = H(u(t))$$

- Considere que la señal de entrada es un impulso unitario tal que (y debido a que el sistema es LTI)

$$\begin{aligned} \delta(t) &\to h(t) \\ \delta(t-\tau) &\to h(t-\tau) \\ \tau\delta(t-k\tau) &\to \tau h(t-\tau k) \end{aligned}$$

- La señal $h(t)$ se conoce como la **respuesta impulso** de un sistema.
- El objetivo es demostrar que la salida del sistema ante cualquier señal $u(t)$, se puede expresar como una integral que involucra la respuesta impulso del sistema.
- Esta interacción entre la entrada, la salida y la respuesta impulso del sistema, se conoce como la **convolución**.

- Considere un sistema con respuesta impulso

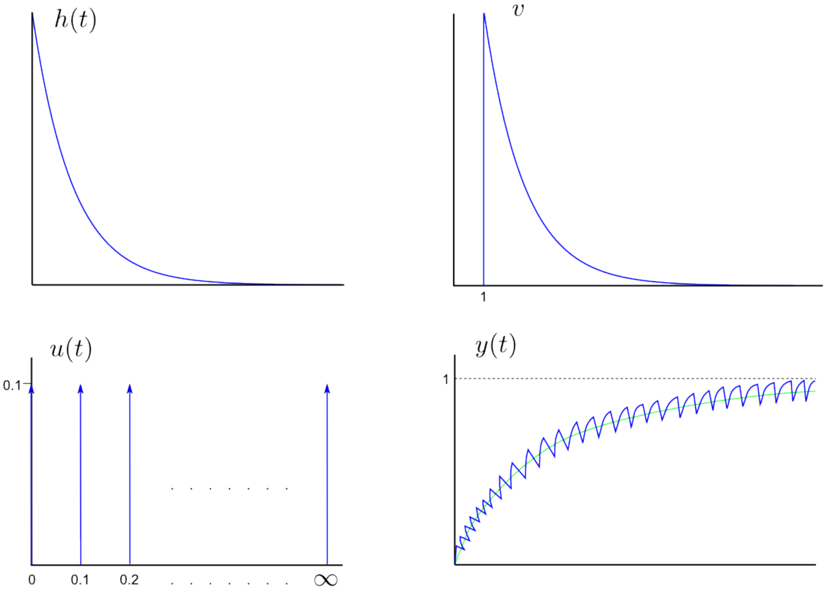
$$h(t) = e^{-t} \qquad t \geqslant 0$$

- La respuesta del sistema ante una entrada impulso corrido en tiempo, es la respuesta impulso corrido en tiempo

$$\hat{h}(t) = h(t-1) = e^{-(t-1)} \qquad \forall \quad t \geqslant 1$$

- Ahora considere que la entrada es una sumatoria de impulsos corridos una cantidad $k\Delta$ en el tiempo, $k \in [0, 1, ...\infty])$ (i.e. un tren de impulsos)

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}1\delta(t - k0{,}1) \qquad \Delta = 0{,}1sec$$


$h(t)$
v
1
$u(t)$
0.1
0
0.1
0.2
. . . .
∞
$y(t)$
1

- Ahora considere que el peso de la entrada es función del tiempo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta)[\Delta\delta(t-k\Delta)]$$

- Por linealidad

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta)[\Delta h(t-k\Delta)]$$

- Si tomamos el límite $\Delta \to 0$, la variable de tiempo $k\Delta \to \tau$ se vuelve continua, y $\Delta \to d\tau$

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k\Delta)h(t-k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = v(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Convolución para Sistemas Continuos

- Se puede concluir que la salida de un sistema debido a una señal de entrada $u(t)$, está dada por

Definición

Convolución La convolucion entre dos señales $u(t)$ y $h(t)$ se define como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

donde $h(t)$ es la respuesta impulso del sistema.
Esta se llama la integral de convolución y se denota por el operador "$*$"

$$\boxed{y(t) \triangleq u(t) * h(t) \; = h(t) * u(t)}$$

- Observe que

$$\begin{aligned} y(t) &= \delta(t) * h(t) = h(t) \\ y(t-t_0) &= \delta(t-t_0) * h(t) = h(t-t_0) * \delta(t) \end{aligned}$$

Ejemplo

- Considere el sistema

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

- Por definición, la respuesta impulso de un integrador es la señal escalón

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

- Utilizaremos la convolución para determinar la salida de este sistema ante una entrada rampa.

$$\begin{aligned} y &= h(t) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$u(t) = t\hat{u}(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

- Denotando la señal escalón como $\hat{u}(t)$, tenemos

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \tau \hat{u}(\tau)\hat{u}(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \tau \hat{u}(t-\tau)d\tau$$

- Por definición, $\hat{u}(t-\tau)$ es igual a cero si $(t-\tau) < 0$, por lo que la integral es no nula para $\tau < t$

$$\boxed{y(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^t = \frac{t^2}{2} \quad t \geq 0}$$

- Como era de esperarse, la salida es una parábola.

Ejemplo

- Ahora considere el sistema con respuesta impulso

$$h(t) = e^{-t} \qquad t \geq 0$$

- Para observar la salida debido a una entrada escalón realizamos la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

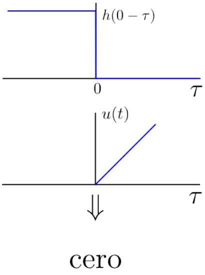
- Observando que la integral es no nula para $0 \leq \tau < t$, obtenemos

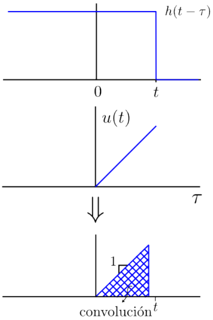
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{0}^{\infty} e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_{0}^{t} e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left(e^{\tau} \Big|_{0}^{t} \right) = e^{-t}(e^{t} - 1) = 1 - e^{-t} \qquad t > 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Interpretación de la Gráfica:

- Considere el ejemplo del integrador y una entrada tipo rampa.
- La respuesta impulso del sistema está dada por un escalón unitario.



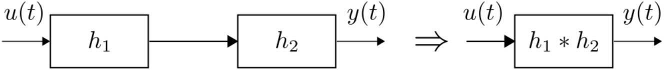


- El área del triángulo (con pendiente 1) esta dada por $y(y) = \frac{t^2}{2}$

Propiedades de la Convolución

Conmutativa: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

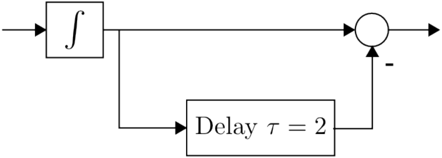
Asociativa: $[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$



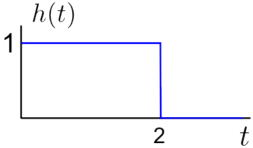
Distributiva: $x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$

Ejercicios

1. Considere el sistema



   a) Muestre que la respuesta impulso es un pulso de amplitud 1 y longitud “2”



b) Considere una entrada

$$\begin{aligned} u(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= \delta(t+3) + 3e^{-0,5t}\hat{u}(t) \end{aligned}$$

Encuentre la señal de salida del sistema.

2. Considere el sistema con una respuesta impulso igual a una exponencial con retardo

$$h(t) = e^t\hat{u}(t-1)$$

a) Encuentre la salida $y(t)$ si se considera una señal

$$u(t) = e^t\hat{u}(-1-t)$$

Propiedades de los Sistemas LTI

- Inicialmente se estudiaron las propiedades de los sistemas continuos.
- En esta sección se estudiarán las propiedades de los sistemas lineales invariantes ante el tiempo y continuos.
- Las propiedades de un sistema LTI están determinadas por su respuesta impulso.
- Recuerde que la salida del sistema está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Sistemas sin Memoria

- Un Sistema es "Sin Memoria" (estático) si el valor actual de la salida depende únicamente del valor actual de la entrada.
- Observe que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Utilizando la propiedad del impulso

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Se puede observar que

$$y(t) = Ku(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

únicamente si

$$\boxed{h(t) = K\delta(t)}$$

Invertibilidad

- Un sistema es invertible si su entrada puede ser determinada a partir de la salida.
- En otras palabras, existe un sistema inverso $h_i(t)$ tal que

$$[u(t) * h(t)] * h_i(t) = u(t)$$

- Observe que $x(t) = x(t) * \delta(t)$ y por lo tanto el sistema es invertible si existe $h_i(t)$ tal que

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

- El sistema inverso es complejo de hallar en el dominio del tiempo y se prefiere utilizar la transformada de Fourier para esta labor.

Causalidad

- Un sistema es causal si su valor de salida actual depende exclusivamente del valor actual y valores pasados de la entrada.
- Si la señal de entrada ocurre para unicamente para $t \geq 0$, se dice que la señal es causal.
- Utilizando las propiedades de la convolución, un sistema es causal si

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

- Igualmente, si

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d(\tau) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d(\tau)$$

- Un sistema es causal si

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Estabilidad

- Recuerde que un sistema es BIBO estable si existen β y $\mathcal{B}(\beta)$ tal que
$$||u(t)|| < \beta \Rightarrow ||y(t)|| \leqslant \mathcal{B}(\beta)$$
- De esta manera se puede escribir

$$\begin{aligned} ||y(t)|| &= \left|\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau \right|\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} ||u(t-\tau)|| \cdot ||h(\tau)||d\tau \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \beta||h(\tau)d\tau|| \end{aligned}$$

- Esto implica que $y(t)$ es acotada si $h(t)$ es integrable en valor absoluto, i.e.
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$
- Si el sistema es causal, esto se reduce a $\int_0^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$

Ejemplo (*Estabilidad de un Sistema*)

- Considere el sistema descrito por la respuesta impulso

$$h(t) = e^{-3t}\hat{u}(t)$$

- Utilizando la definición de estabilidad BIBO

$$\int_0^{\infty} |h(t)|dt = \int_0^{\infty} e^{-3t}dt = \frac{1}{3} < \infty$$

Ejercicio

- Determine la estabilidad del sistema

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

Respuesta Escalón

- La salida y las propiedades de un sistema están determinadas por la respuesta impulso del sistema
- Sin embargo, a veces es de interés conocer la respuesta escalón del sistema.
- Defina $S(t)$ como la salida del sistema ante una entrada escalón $\hat{u}(t)$.

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(t-\tau)d\tau$$

- Si, adicionalmente, el sistema es causal

$$S(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)d\tau$$

Ejercicio

- Encuentre la respuesta escalón del sistema con respuesta impulso

$$h(t) = e^{-3t}\hat{u}(t)$$

- Verifique que

$$\frac{dS(t)}{dt} = h(t)$$

Ecuaciones Diferenciales

- Los sistemas continuos de tipo LTI sin usualmente modelados por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE's) con coeficientes constantes
- En esta sección se considerarán los sistemas representados por

$$\frac{dx(t)}{dt} \triangleq \dot{x}(t) = \alpha x(t)$$

  donde α es contante.
- Adicionalmente, un sistema puede estar sujeto a una entrada $u(t)$ tal que

$$\dot{x}(t) - \alpha x(t) = \beta u(t)$$

  donde (α, β) son constantes.

- El orden del sistema es el orden de la mayor derivada
- La ecuación es ordinaria, ya que no hay derivadas parciales.
- Es lineal, ya que la ecuación depende linealmente de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ y $u(t)$.

Ejercicio

- Demuestre que la ODE

$$\dot{x}(t) - \alpha x(t) = \beta u(t)$$

  es lineal.
  Nota: Utilice el principio de superposición.
- Pruebe que el sistema es invariante ante el tiempo.

Solución de la ODE

- La forma general de una ecuación diferencial de orden “n” es

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

- La solución presentada es el método de coeficientes indeterminados, donde se asume que la solución es de la forma

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t)$$

- $y_n(t)$ se denomina la respuesta complementaria o “respuesta natural”.
- $y_f(t)$ es la respuesta particular o “respuesta forzada”.
- La solución se presenta en tres etapas

1. Respuesta Natural: Se asume que $y_n(t) = Ce^{st}$, y es la solución a la ecuación homogénea.
2. Respuesta Forzada: Es una suma ponderada de la entrada $u(t)$ y sus derivadas diferentes en forma a $u(t)$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 5 \Rightarrow y_f = k \\
u(t) &= 5e^{-7t} \Rightarrow y_f = ke^{-7t} \\
u(t) &= \cos(t) \Rightarrow y_f = k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t)
\end{aligned}
$$

3. Cálculo de los Coeficientes: Primero asuma que $y(t) = y_f(t)$, y utilice la ecuación general de ODE para determinar los coeficientes k_i. Una vez estos hayan sido determinados, utilice la ecuación $y(t) = y_n + y_f$ y determine los coeficientes C_i utilizando las condiciones iniciales.

Ejemplo

- Considere el sistema descrito por

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + u(t)$$

donde $u(t) = 2 \; \forall t \geqslant 0$

Paso 1: Asumimos que $y_n = Ce^{st}$. Esta solución se reemplaza en la ecuación homogénea y se determina s.

$$\begin{aligned} \frac{dy_n}{dt} + 2y_n = 0 \quad &\Rightarrow \quad sCe^{st} + 2Ce^{st} = 0 \\ &\Rightarrow \quad s = -2 \end{aligned}$$

Paso 2: Como la entrada es constante, y su derivada es cero, la respuesta forzada está dada por

$$\begin{aligned} y_f = K \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy_f}{dt} + 2y_f = 2 \\ &\Rightarrow \quad 0 + 2K = 2 \Rightarrow K = 1 \end{aligned}$$

Paso 3: Se asume que $y(t) = y_n + y_f$, y utilizando las condiciones iniciales determinamos C
Asuma que $y(0) = 4$

$$\begin{aligned} y(t) = 1 + e^{-2t} \quad &\Rightarrow \quad y(0) = 1 + C = 4 \\ &\Rightarrow \quad C = 3 \end{aligned}$$

- Por último obtenemos la solución a la ODE, donde

$$\boxed{y(t) = 1 + 3e^{-2t}}$$

- Ahora se puede verificar la solución mediante la comprobación de la ODE

$$\frac{dy}{dt} + 2y = (-6e^{-2t}) + 6e^{-2t} + 2 = 2$$

- Para el caso general, la ecuación homogénea está dada por

$$\alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = 0$$

- Asuma que $\alpha_n \neq 0$ y que la salida es de la forma $y(t) = Ce^{st}$
- Observando que

$$\frac{d^n y}{dt^n} = s^n C e^{st}$$

  la ecuación homogénea se reduce a

$$(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + ...\alpha_1 s + \alpha_0) C e^{st} = 0$$

- Para el caso no trivial $C \neq 0$, dicha ecuación se cumple si

$$\boxed{(\alpha_n s^n + ... + \alpha_1 s + \alpha_0) = 0}$$

- Esta ecuación se denomina la ecuación característica, la cual es un polinomio en la variable "s".
- Esta ecuación se puede factorizar de la siguiente manera

$$\alpha_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=0$$

  donde λ_i son las raíces del sistema.
- Por tal motivo existen "n" soluciones posibles, $s=\lambda_i$, $i\in[1,n]$, tal que

$$y_{n_i}(t)=C_i e^{\lambda_i t} \qquad i\in[1,n]$$

  es una solución de la ecuación homogénea.
- De hecho, cualquier combinación lineal de señales $y_{n_i}(t)$ es una solución de la ecuación homogénea.

- Considerando que no existen polos de multiplicidad mayor a 1, la respuesta natural del sistema está dada por

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$$

- Los factores $e^{\lambda_i t}$ se denominan los modos del sistema.
- La respuesta natural depende únicamente de la estructura del sistema y no la entrada, por lo cual se denomina *"zero-input response"*.
- La respuesta forzada depende de la estructura y la entrada, pero no de las condiciones iniciales, por lo cual esta respuesta se denomina *"zero-state response"*.

- Debido a que la respuesta natural del sistema decae a cero si el sistema es BIBO estable, se dice que:
  - Respuesta transiente es la respuesta natural del sistema y se espera decaiga a cero.
  - La respuesta en estado estacionario o estable está determinada por la respuesta forzada del sistema.
- La constante de tiempo para un sistema de primer orden se entiende como el tiempo en el cual el modo transiente decae hasta a $e^{-1} \cong 30\,\%$ de su valor original.

Ejercicio

Considere el sistema descrito por

$$\frac{d^2}{dt}y + 1{,}25\frac{dy}{dt} + 0{,}375 = u(t)$$

Tipos de raíces en la respuesta natural

Hasta el momento hemos estudiado la respuesta del sistema de forma general y sin hacer distinción entre los “tipos” de modos del sistema.

Tipos de raíces en la respuesta natural

Hasta el momento hemos estudiado la respuesta del sistema de forma general y sin hacer distinción entre los "tipos" de modos del sistema.

Raíces Reales:

- Como ya se ha visto, si las raíces "λ_i" de la función característica son reales, la respuesta natural está dada por términos del tipo $C_i e^{\lambda_i t}$

Raíces Complejas:

- Si las raíces de la función característica son complejas sabemos que vienen en pares de complejos conjugados, donde $\lambda_i = \sigma + j\omega$ y $\hat{\lambda}_i = \lambda_i^* = \sigma - j\omega$.
- Así sabemos que la respuesta natural contendrá términos tal que.

$$\begin{aligned} y_n &= C_i e^{\lambda_i t} + \hat{C}_i e^{\hat{\lambda}_i t} \qquad\qquad C_i = \hat{C}_i = |C_i| e^{j\theta} \\ &= |C_i|[e^{\sigma t}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] e^{j\theta} \\ &= 2|C_i| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

- Observe que las raíces complejas producen salidas con componentes senoidales.
- Como se vio anteriormente las señales de este tipo tienen tres "tipos" de respuesta

$$\begin{aligned} \sigma > 0 \quad &\rightarrow \quad \text{desacotada} \\ \sigma = 0 \quad &\rightarrow \quad \text{constante} \\ \sigma < 0 \quad &\rightarrow \quad \text{amortiguada} \end{aligned}$$

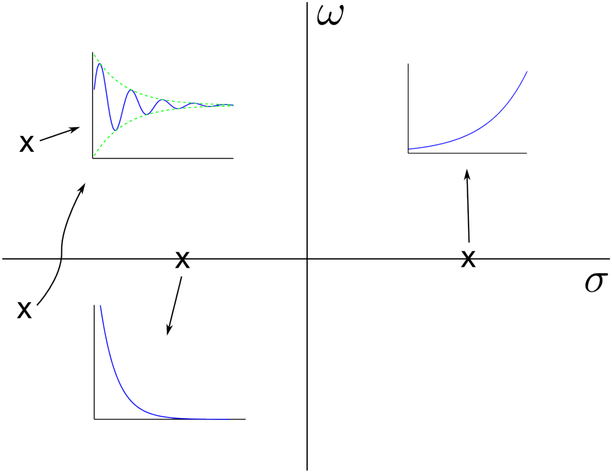
Estabilidad

- Ahora consideramos la estabilidad de los sistemas causales LTI continuos.
- Recuerde que la solución de una ecuación diferencial con coeficientes constantes está dada por

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t)$$

- Debido a la que respuesta forzada tiene la misma forma de la entrada $u(t)$, y sus derivadas.
- Por tal motivo, si $u(t)$ es acotada, $y_f(t)$ es acotada.
- Ahora bien, si las raíces de la función característica tiene raíces con su parte "real" determinada po σ_i, si $\sigma_i < 0 \; \forall i$, entonces la respuesta del sistema es acotada.

- Por el otro lado si $\sigma_i > 0$ para algún "i" el sistema será desacotado, **No será BIBO estable**.



Ejemplo

1. Asuma que un sistema está dado por

$$\ddot{y}(t) + 1{,}25\dot{y}(t) + 0{,}375y(t) = u(t)$$

   - La ecuación característica del sistema está dada por

$$\lambda_c = s^2 + 1{,}25s + 0{,}373$$

   - Sus raíces se pueden hallar mediante ecuación

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1{,}25 \pm \sqrt{(1{,}25)^2 - 4(0{,}375)}}{2} = [-0{,}75, -0{,}5]$$

- La respuesta natural del sistema está dada por

$$y_n(t) = C_1 e^{-0{,}75t} + C_2 e^{-0{,}5t}$$

- Como $\mathbb{R}e[\lambda_i] = [-0{,}75, -0{,}5] < 0$, el sistema es estable.

2. Ahora asuma un sistema determinado por

$$\ddot{y}(t) + 0{,}25\dot{y}(t) - 0{,}375\dot{y}(t) = u(t)$$

- La función característica está dada por

$$\lambda_c = s^2 + 0{,}25s + 0{,}375s$$

- $\lambda_{1,2} \frac{-0{,}25 \pm \sqrt{(0{,}25)^2 + 4(0{,}375)}}{2} = [-0{,}75, +0{,}5]$
- Ya que $\mathbb{R}e[\lambda_2] = \sigma_2 > 0$, el sistema es inestable.

Ejercicio

- Determine la ecuación diferencial que describe un circuito eléctrico MRA teniendo como entrada la fuerza; y como salida la posición $x(t)$.
- Halle la función característica que describe el sistema.
- Cual es la respuesta ante una entrada escalón unitario.
- Para que valoresde k/B, el sistema tendrá una respuesta sobreamortiguada, (sus raíces son reales)? Para que valores tendrá una respuesta subamortiguada (raíces complejas)?
- Determine la estabilidad del sistema.

Respuesta de un Sistema ente Entrada Exponencial Compleja

- Considere que tenemos un sistema LTI tal que

$$u(t) \to y(t)$$

- Considerando que

$$y(t) = \int u(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

se puede observar que si $u(t)$, $h(t)$ son reales, entonces $y(t)$ es real.

$\rightarrow$ Señales reales producen salidas reales si los coeficientes de la función característica son reales.

- Ahora, aplicando el principio de superposición

$$a_1u_1(t) + a_2u_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

donde $u_1(t)$y $u_2(t)$ son señales reales.

- Sin embargo, no hay restricciones sobre los coeficientes y escogiendo

$$a_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{a}_2 = \sqrt{-1} = \mathrm{j}$$

$u_1 + ju_2 \rightarrow y_1 + jy_2$

→ Un sistema LTI (con coeficientes reales) produce señales $\mathbb{R}$ ante entradas $\mathbb{R}$, y produce señales complejas ante entrada complejas.

Entrada Complejas

- Ahora considere que la entrada del sistema está dada por

$$u(t) = Xe^{st}$$

  donde s es un valor constante, real o complejo.

- Asuma que el sistema está determinado, de forma general, por la siguiente ODE.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k u}{dt^k}$$

- Sabemos que el sistema tiene dos tipos de respuesta, la natural (transiente) y la forzada (régimen de estado estacionario)

- Ahora considere solo el régimen de estado estable, y denote $y_{ee}(t) = y_f(t)$ donde sabemos que $y_{ee}(t) = Ye^{st}$, donde debemos determinar Y.
- Observe que

$$\begin{array}{rcl} a_0 y_{ee}(t) & = & a_0 Y e^{st} \\ a_1 \dot{y}_{ee}(t) & = & a_1 s Y e^{st} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_n \dot{y}_{ee}^{(n)}(t) & = & a_n s^n Y e^{st} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b_0 u(t) & = & b_0 X e^{st} \\ b_1 \dot{u}(t) & = & b_1 s x e^{st} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ b_m \dot{u}^{(m)}(t) & = & b_m s^m X e^{st} \end{array}$$

- Sustituyendo estos términos en la ODE que describe el sistema y factorizando los términos $y_{ee}(t) = Ye^{st}$ y $u(t) = Xe^{st}$

$$(a_n s^m + a_{n-1} s^{n-1} + ...a_0) y_{ee}(t) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ...b_0) u(t)$$

- De esta manera observamos que

$$\begin{aligned} Y &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \\ &= H(s)X \end{aligned}$$

- La función $H(s)$ se denomina la función de transferencia de un sistema y se dice que es de orden "n".
- Ahora consideremos que $s = s_u$, entonces podemos observar que

$$u(t) = Xe^{s_u t} \rightarrow y_{ee}(t) = H(s_u)X$$

- Ahora considere el caso en el cual $s = j\omega$ tal que

$$\begin{aligned} u(t) &= Xe^{j\omega t} \\ &= |X|\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

- Como $H(j\omega)$ es por lo general, un número complejo $H(j\omega) = H(j\omega)|\sphericalangle H(j\omega)$
- Si denotamos $\sphericalangle H(j\omega) = \theta$, podemos observar que

$$\begin{aligned} y_{ee}(t) &= |H(j\omega)Xe^{j\omega t} = |X||H(j\omega)|e^{j\theta}e^{j\omega t} \\ &= |X||H(j\omega)|\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t + \theta)\right] \end{aligned}$$

- Como sabemos que la parte $\mathbb{R}$ de la entrada, produce la parte $\mathbb{R}$ de la salida, podemos observar que

$$\cos(\omega t) \Rightarrow |H(j\omega)|\cos(\omega t + \theta)$$