Corrección Parcial 2 - Análisis Real UR

① Sean $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones, tales que $f(x) \le g(x) \le h(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$.

Como $f(x) \to L$ y $h(x) \to L$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tq:

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

1.5

si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

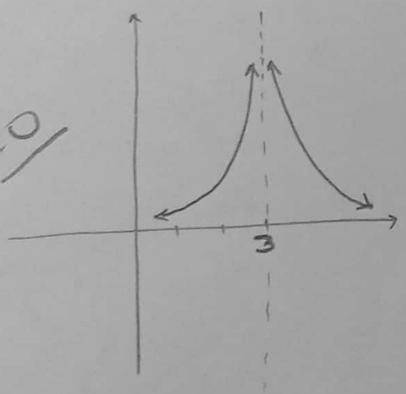
$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \begin{array}{l} L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \\ L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon \end{array}$$; como $f(x) \le g(x) \le h(x)$

tenemos que, $L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

$\Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

Conclusión: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tq $0 < |x-c| < \delta \to |g(x) - L| < \varepsilon$,
Por lo tanto, $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

② $f(x) = \dfrac{4}{(3-x)^4}$



1.0

Considere la sucesión $\left(3 + \frac{1}{n}\right)$; para la cual:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3.$$

$$f\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{\left(\cancel{3} - \cancel{3} - \frac{1}{n}\right)^4} = \frac{4}{\frac{1}{n^4}} = 4n^4$$

$\lim_{n\to\infty} f\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 4n^4 = +\infty$, luego por el teorema secuencial del límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ NO existe.

③ $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-9}$. Demuestre que f es continua en $x = 3$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta = \min\{1/2, \varepsilon/10\}$

si $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 0 < |x-3| < 1/2 \Rightarrow -1/2 < x-3 < 1/2 \Rightarrow 2.5 < x < 3.5 \Rightarrow 1 < 4x-9 < 5$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4x-9} < 1$

1.5

$$\left|\frac{2x+3}{4x-9} - f(3)\right| = \left|\frac{2x+3}{4x-9} - 3\right| = \left|\frac{-10x+30}{4x-9}\right| = |x-3| \cdot 10 \cdot \frac{1}{(4x-9)} < \frac{\varepsilon}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} \cdot 1 = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

luego f es continua en $x = 3$

(4) a) Teorema del valor intermedio de Bolzano: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $f(a) < k < f(b)$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tq $f(c) = k$.

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $[3, 24]$

$f(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$f(24) = \sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$

;

$f(3) < k < f(24)$

$2 < k < 5$

Por el teorema del valor intermedio de Bolzano existe $c \in [3, 24]$ tq

$f(c) = k \Rightarrow \sqrt{c+1} = k \Rightarrow$

$c+1 = k^2 \Rightarrow c = k^2 - 1$