Varianza total $= S_{11} + S_{22} + \dots + S_{pp}$

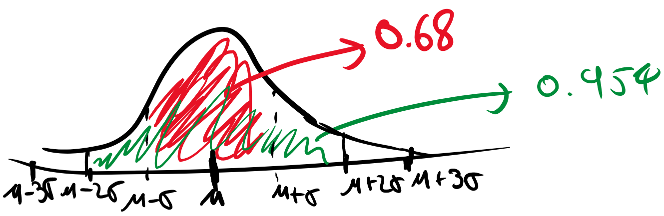
Varianza muestral generalizada $= |S|$

tarea $\rightarrow |R|$

Recordemos

La PDF de una variable normal con media μ y varianza σ^2 es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Denotaramos la distrib normal con media μ y varianza

$\rightarrow$ X sigue una distr. normal con media μ y varianza σ^2

Obs: $\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \rightarrow$ distancia estadística al cuadrado asociada a σ^2 entre X y μ.

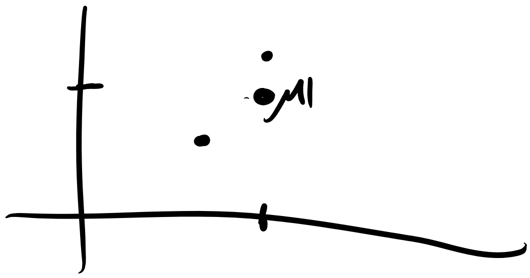
$= (X-\mu)(\sigma^2)^{-1}(X-\mu)$

Generalizando

X vector de observaciones $p \times 1$ de X, la distancia entre X y μ es:

$$(X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu)$$

→ inversa de la matriz de var-cov. de X



Podemos generalizar y obtener la PDF de la normal multivariada para p variables

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)}{2}}$$

Obs: si $\underset{2 \text{ variables}}{p=2}$ y $\rho_{12}=0$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0 \Longrightarrow X_1 \text{ y } X_2 \text{ son indep}$$

Sólo si X_1 y X_2 normales

→ lo denotaremos

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

Obs:

Si Σ def. positiva (Σ^{-1} existe) entonces

Si e es un vector propio de Σ con valor propio asociado λ, entonces e es un vector propio de Σ^{-1} con valor propio asociado $\frac{1}{\lambda}$. Además Σ^{-1} es def. positiva.

Obs: 1) $(\underline{x}-\underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}) \leq \chi^2_p(\alpha)$

tiene prob $1-\alpha$

2) El máximo de $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ ocurre cuando $\underline{x} = \underline{\mu}$

Proposiciones normal multivariada

1) Si $\underline{X}_{p\times 1}$ vector aleatorio normal multivariado

$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ entonces

Si $a \in \mathbb{R}^p$, $a'\underline{X} = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_pX_p$

$$a'\underline{X} \sim N(a'\underline{\mu}, a'\Sigma a)$$

2) Si $a'\underline{X} \sim N(a'\underline{\mu}, a'\Sigma a)$ $\forall a \in \mathbb{R}^p$ entonces

$$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$$

3) $\underline{X}_{p\times 1} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ sea A una matriz $q\times p$

$$A\underline{X} \sim N_q(A\underline{\mu}, A\Sigma A')$$

4) $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$ $\quad \underline{d} \in \mathbb{R}^p$

4) $\mathbb{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ $\quad d \in \mathbb{R}^p$

$$\mathbb{X} + d \sim N_p(\mu + d, \Sigma)$$

$$E(X) = \mu$$

$$Y = X + a \qquad E(Y) = E(X) + a$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X)$$

$$E(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix} \qquad E(\mathbb{X} + d) = \begin{pmatrix} E(X_1) + d_1 \\ \vdots \\ E(X_p) + d_p \end{pmatrix}$$

$$= \mu + d$$

5) todas las particiones de vectores normales resulta en vectores normales.

6) Si $\mathbb{X}^{(1)}$, $\mathbb{X}^{(2)}$ normales multivariadas indep. entonces $\text{cov}(\mathbb{X}^{(1)}, \mathbb{X}^{(2)}) = 0$

$$\Sigma_{12} = 0 \text{ matriz de ceros}$$

$\mathbb{X}^{(1)}_{q_1 \times 1}$, $\mathbb{X}^{(2)}_{q_2 \times 1}$ normales indep. sii

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}^{(1)} \\ \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & 0 \end{vmatrix} \right.$$

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}^{(1)} \\ \hline \underset{\sim}{X}^{(2)} \end{pmatrix} \sim N_{q_1+q_2}\left(\begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \hline \mu^{(2)} \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_{22} \end{array}\right) \right)$$

7) Sea $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $|\Sigma| > 0$

entones

$$(\underset{\sim}{X}-\mu)' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}-\mu) \sim \chi^2_p$$

y la prob del evento

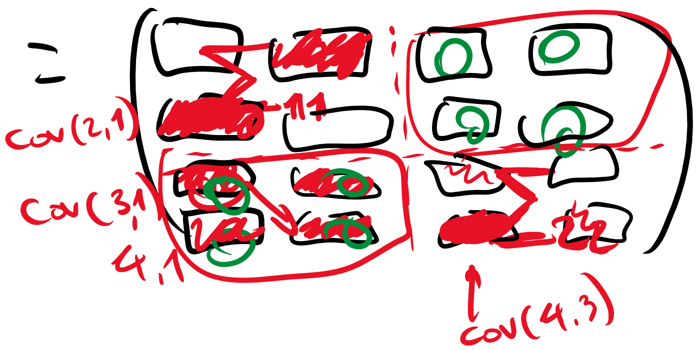
$$\left\{ (\underset{\sim}{X}-\mu)' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{X}-\mu) \leq \chi^2_p(\alpha) \right\} \text{ es } 1-\alpha$$

4 variables

1, 2 → grupo 1

3, 4 → grupo 2

$\Sigma =$



Muestreo de la normal multivariada

Supongamos que $\underset{\sim}{X}_1, \dots, \underset{\sim}{X}_n$ son una muestra aleatoria de una población normal multivariada con media μ y cov Σ

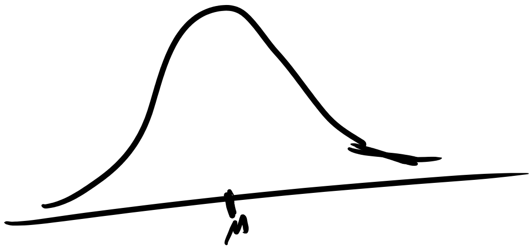
la densidad conjunta de $\underset{\sim}{X}_1 \dots \underset{\sim}{X}_n$ sería:

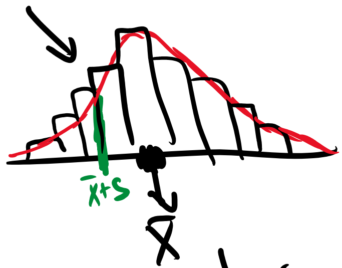
$$\prod^{n} \left(\frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_j-\mu)' \Sigma^{-1} (x_j-\mu) \right]} \right)$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-} \right)$$

función de verosimilitud: función de μ y Σ dadas las observaciones $x_1 \dots x_n$: $L(\mu, \Sigma)$

Método de maxima verosimilitud.





Utilizar como estimaciones de parámetros poblacionales desconocidos los valores que maximizan
$L(\mu, \Sigma)$

Los valores que "mejor expican" los datos.

teorema:
Sean $X_1 \dots X_n$ una muestra aleatoria de una población normal con media μ y cov Σ, entonces MLE son:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})'\right)$$

$$= S_n = \frac{n-1}{n} S$$

Sesgado

insesgado

Distribuciones de $\bar{X}$ y de S_n y S.

Si $X_1 \dots X_n$ una mestra aleatoria de una población normal con media μ y cov Σ, la distribución de $\bar{X}$ y de S se puede determinar completamente

1) si $p=1$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ → siempre, incluso cuando la X no son normales y n es grande.

en el caso general con p variables

$$\bar{X} \sim N_p\left(\mu, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

2) si $p=1$

$$(n-1)S^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$$ → tiene una distribución χ^2_{n-1}

si $p>1$

$(n-1)S$ (matriz) tiene una distribución Wishart con $n-1$ gl.

3) $\bar{X}$ y S son independientes.

propiedades asintóticas

1) $\bar{X}$ converge en probabilidad a μ

($\bar{X}$ es un estimador consistente de μ)

2) S y S_n convergen en probabilidad

a Σ (S y S_n son consistentes)

Teorema de límite central multivariado

Sean $X_1 \dots X_n$ una muestra aleatoria de una población (cualquiera) con media μ y cov Σ, entonces la distribución de

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \text{ converge a la distribución } N_p(0,\Sigma) \text{ cuando } n \to \infty$$

$$n(\bar{X}-\mu)' S^{-1}(\bar{X}-\mu) \to \text{aprox } \chi^2_p$$

si $n-p$ es grande.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$ Sin importar la distrib. de las X_i's

95%