Representación en Series de Fourier de Señales Periódicas Discretas

- El análisis es muy similar al caso continuo.
- Pequeñas diferencias surgirán de fenómenos como la periodicidad de exponenciales complejas discretas o el número finito de exponenciales armónicas en el dominio discreto.
- Las series de Fourier discretas son finitas por lo que no es necesario realizar análisis de convergencia.

Combinaciones lineales de exponenciales complejas armónicas.

- $x[n]$ es periódica con periodo N si $x[n] = x[n+N] \quad \forall \quad n.$
- Período fundamental N_0: Entero más pequeño que cumple la relación anterior.
- Frecuencia fundamental: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$
- Señales armónicas: $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}}$, $k = 0, 1, ..., N_0 - 1$

$$\phi_{k+N_0}[n] = e^{j(k+N_0)\frac{2\pi}{N_0}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}e^{j2\pi n} = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} = \Phi_k[n]$$

Representación en Serie de Fourier de una Señal Periódica Discreta.

- Sólo existen N_0 exponenciales armónicas diferentes.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}$$

- Cálculo de los coeficientes:

$$\begin{aligned} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} &= e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} \\ \sum_{k=\langle N_0 \rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} &= \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N_0}n} \end{aligned}$$

Representación en Serie de Fourier de una Señal Periódica Discreta.

$$\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} = \sum_{k=\langle N_0\rangle} a_k \sum_{n=\langle N_0\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N_0}n}$$

- Se puede demostrar que, análogamente al caso continuo:

$$\sum_{k=\langle N_0\rangle} e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}n} = \begin{cases} N_0 & k = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, ... \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$

Representación en Serie de Fourier de una Señal Periódica Discreta.

- Si $k = r$

$$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} = a_r N_0$$

$$a_r = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jr\frac{2\pi}{N_0}n} \quad \text{Ec. de Analisis}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\frac{2\oint}{N_0}n} \quad \text{Ec. de Sintesis}$$

- Como las $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n}$ son periódicas, los a_k también lo son

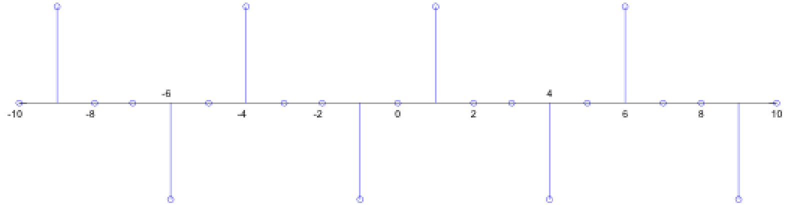
Ejemplo

- $x[n] = \sin(\omega n)$
- Si la señal es periódica $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{M}$ con M, N enteros.
- Si $MCD(M, N) = 1$, N es el período fundamental.
- Por la relación de Euler:

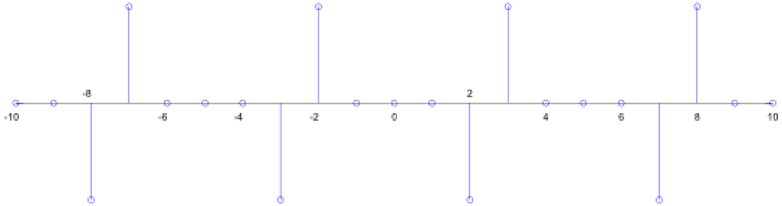
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = M \\ -\frac{1}{2j} & k = -M \\ 0 & \text{Otros valores} \end{cases}$$

Ejemplo

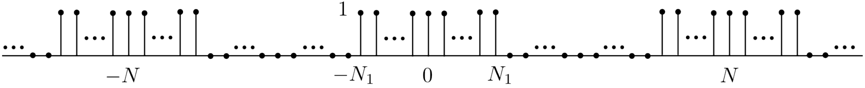
- Si $M = 1,\ N = 5,\ x[n] = \sin \frac{2\pi}{5} n$



- Si $M = 3,\ N = 5,\ x[n] = \sin \frac{6\pi}{5} n$



Ejemplo:Señal cuadrada periódica discreta



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Haciendo $m = n + N_1$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N}e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$$

Resumen

Linealidad $Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Corrimiento en tiempo $x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$
Corrimiento en frecuencia $x[n]e^{jM\omega_0 n}$	a_{k-M}
Inversión del tiempo: $x[-n]$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & \text{n múltiplo de m} \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$ Periódo nM	$\frac{a_k}{m}$
Convolución periódica	$Na_k b_k$

Multiplexación	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
Primera diferencia	$a_k(1-e^{-jk\omega})$
Acumulador	$\frac{a_k}{1-e^{-jk\omega_0}}$ Solo si $a_0=0$
Relación de Parseval	$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{n=\langle N\rangle} \lvert a_k\rvert^2$
Conjugación $x^*[n]$	a^*_{-k}
Simetría para señales reales	$a_k = a^*_{-k}$
Señales reales pares	a_k real y par
Señales reales e impares	a_k real e impar

Series de Fourier y Sistemas LIT

- Tiempo Continuo:
  - La salida de un sistema LIT con respuesta impulso $h(t)$ se puede calcular como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  - Si $x(t) = e^{st}$

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}d\tau = e^{st}H(s)$$

  - Si $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Series de Fourier y Sistemas LIT

- Sea $x(t)$ una señal periódica arbitraria con:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- Por superposición, la salida a una entrada $x(t)$ sería:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

- $y(t)$ es periódica con la misma frecuencia fundamental de $x(t)$.
- Los coeficientes de la serie de Fourier de y(t) serán

$$a_k H(jk\omega_0)$$

Series de Fourier y Sistemas LIT

- Análogamente para tiempo discreto, sea

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- La salida de un sistema LIT a una entrada x[n] sería:

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Los coeficientes de la serie de Fourier de y[n] serán

$$a_k H\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)$$