Taller 4: Derivada

Laura Valentina González Rodríguez

1. Demuestre usando la definición de derivada que:

a) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ es diferenciable en todo su dominio.

Sea $a\in\mathbb{R}$, se tiene $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{x}{1+x^2}-\frac{a}{1+a^2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{x(1+a^2)-a(1+x^2)}{(1+x^2)(1+a^2)}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x+xa^2-a-ax^2}{(x-a)(1+x^2)(1+a^2)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)(1-ax)}{(x-a)(1+x^2)(1+a^2)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1-ax}{(1+x^2)(1+a^2)}=\frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}=f'(a)\in\mathbb{R}$
Así, $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=2x+|x|$ no es diferenciable en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2+\frac{|x|}{x}$. Note que $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x}=1, & x>0\\ -\frac{x}{x}=-1, & x<0\end{cases}$. Por lo cual, $\lim\limits_{x\to 0^+}2+\frac{|x|}{x}=3$ y $\lim\limits_{x\to 0^-}2+\frac{|x|}{x}=1$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+|x|}{x}$ no existe y en consecuencia $f(x)=2x+|x|$ no es diferenciable en 0.

2. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones y $c\in\mathbb{R}$. Demuestre que si f y g son diferenciables en c, entonces:

a) fg es diferenciable en c.

$\lim\limits_{x\to c}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\frac{[f(x)-f(c)]g(x)+f(c)[g(x)-g(c)]}{x-c}=$
$\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x)+\lim\limits_{x\to c}f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$, como f y g son diferenciables en c, $\lim\limits_{x\to c}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c}=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$.
Así, fg es diferenciable en c y $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

b) $\frac{f}{g}$ es diferenciable en c, siempre que $g(c)\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to c}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(c)}}{x-c}$. Como $g(c)\neq 0$, $=\lim\limits_{x\to c}\frac{\frac{f(x)g(c)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)}}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)(x-c)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)(x-c)}=$
$\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{-f(x)}{g(x)g(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right)+\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{g(x)}{g(x)g(c)}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)$, como f y g son diferenciables en c, se tiene $\lim\limits_{x\to c}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c}=\frac{-f(c)g'(c)}{g(c)^2}+\frac{g(c)f'(c)}{g(c)^2}$
$=\frac{f'(c)g(c)-g'(c)f(c)}{g(c)^2}$. Así $\frac{f}{g}$ es diferenciable en c y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

3. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $\frac{x-1}{x}<\ln(x)<x-1$, para $x>1$.

Si $x>1$, se define $f(x)=\ln(x)$ en $(1,x)$, f es continua y derivable en el intervalo. Luego por el teorema del valor medio, existe $c\in(1,x)$ donde $f'(c)=\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=\frac{\ln(x)}{x-1}$. Note que $f'(x)=\frac{1}{x}$, así $f'(c)=\frac{1}{c}$.
Como $1<c<x\to\frac{1}{x}<\frac{1}{c}<1\to\frac{1}{x}<\frac{\ln(x)}{x-1}<1\to\frac{x-1}{x}<\ln(x)<x-1$ $\forall x>1$.