

Actividad de Aprendizaje: Propiedades de los sistemas

Asignatura: Procesamiento de Señales

Universidad del Rosario - Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Objetivo:

- Verificar propiedades de un sistema (Linealidad, Invarianza en el Tiempo, Estabilidad y Causalidad) utilizando Simulink
- Esta actividad debe ser entregada / subida a e-aulas

Procedimiento:

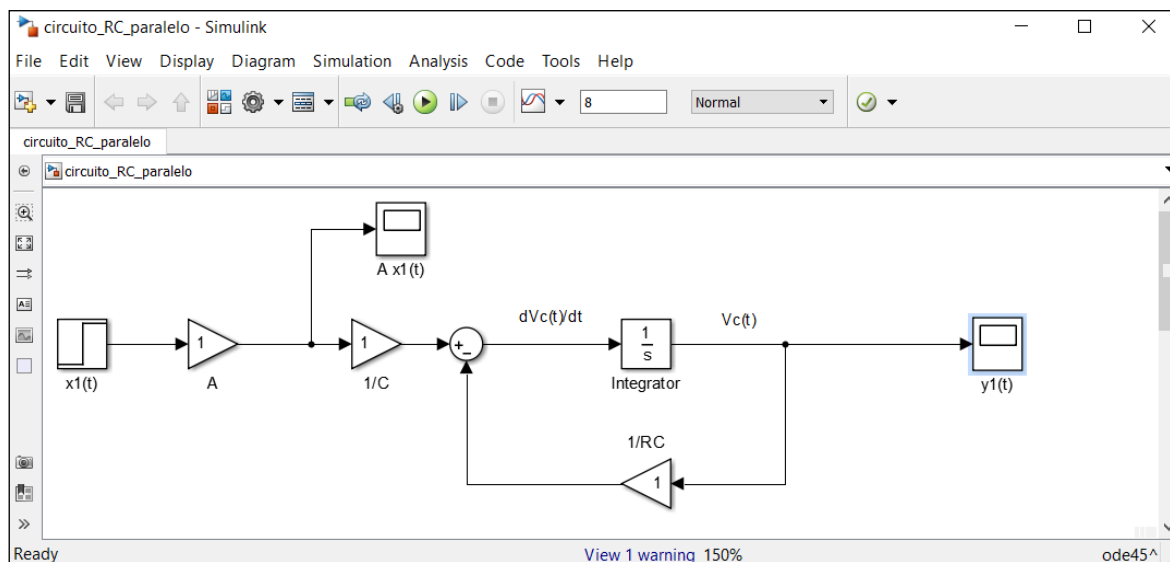
Considere la siguiente ecuación diferencial,

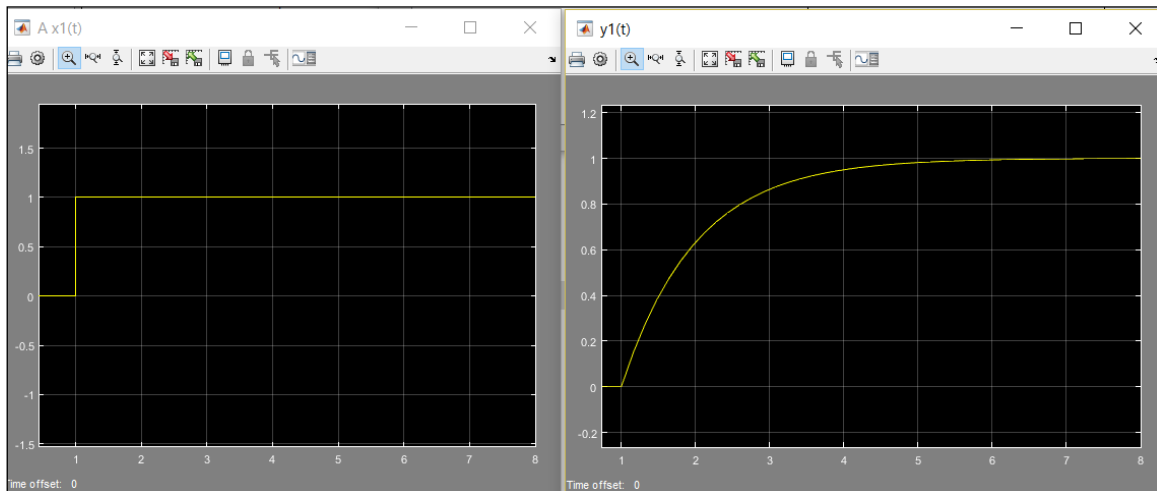
$$x1(t) = \frac{v_c(t)}{R} + C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Ordenando,

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} x1(t) - \frac{1}{RC} v_c(t)$$

Se ubica el diagrama de bloques en Simulink,





Con base en el modelo de este sistema, se comprueban las propiedades,

1. Linealidad.

El sistema es lineal si:

- (*Aditividad*). La respuesta a una entrada conformada por la suma de dos señales

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \Longrightarrow \quad x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

- (*Escalamiento - homogeneidad*). La respuesta a una entrada escalada en magnitud por “a” es,

$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

Estas dos propiedades se pueden considerar en una sola,

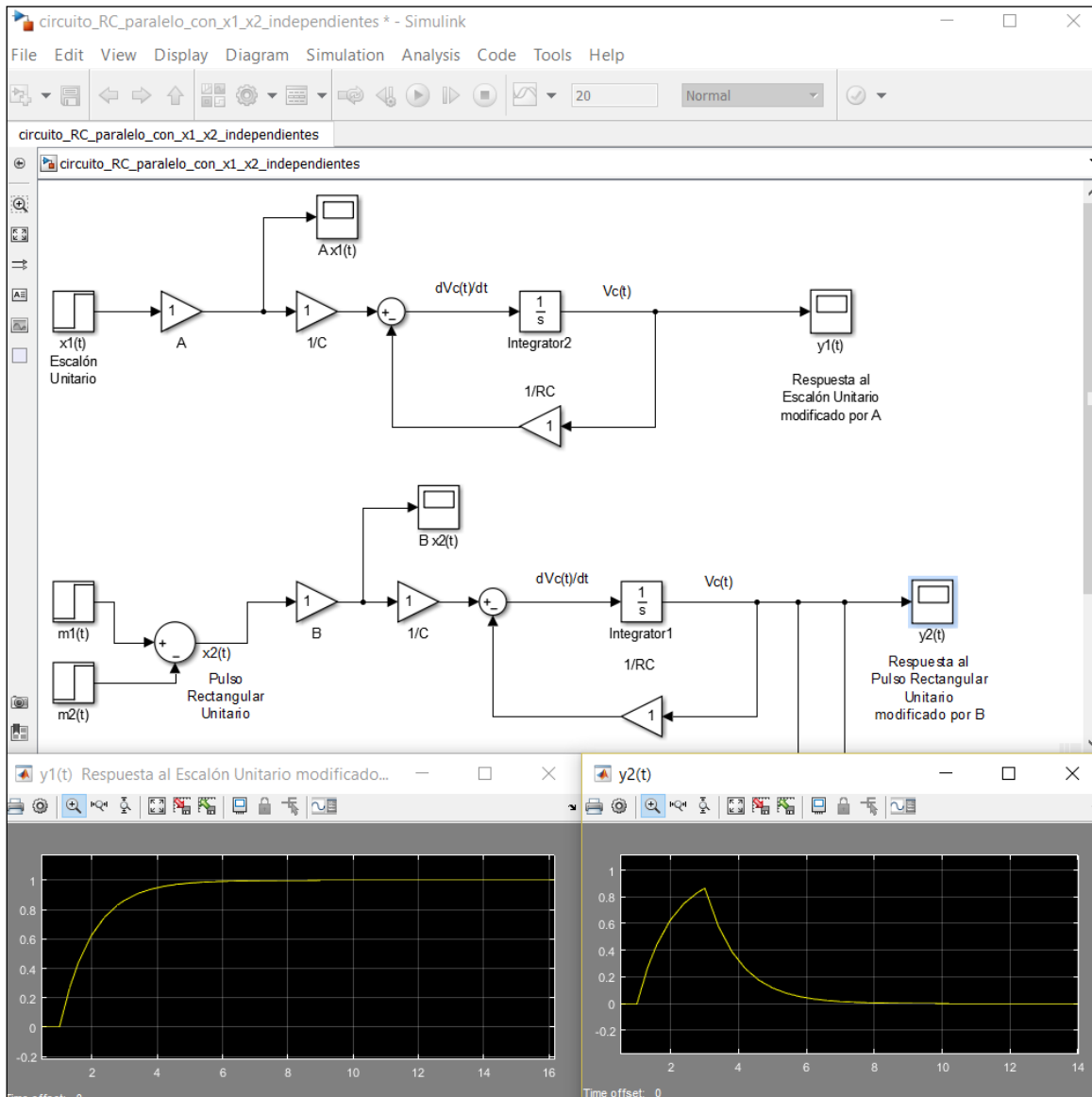
$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

- Se toman dos entradas independientes al sistema,

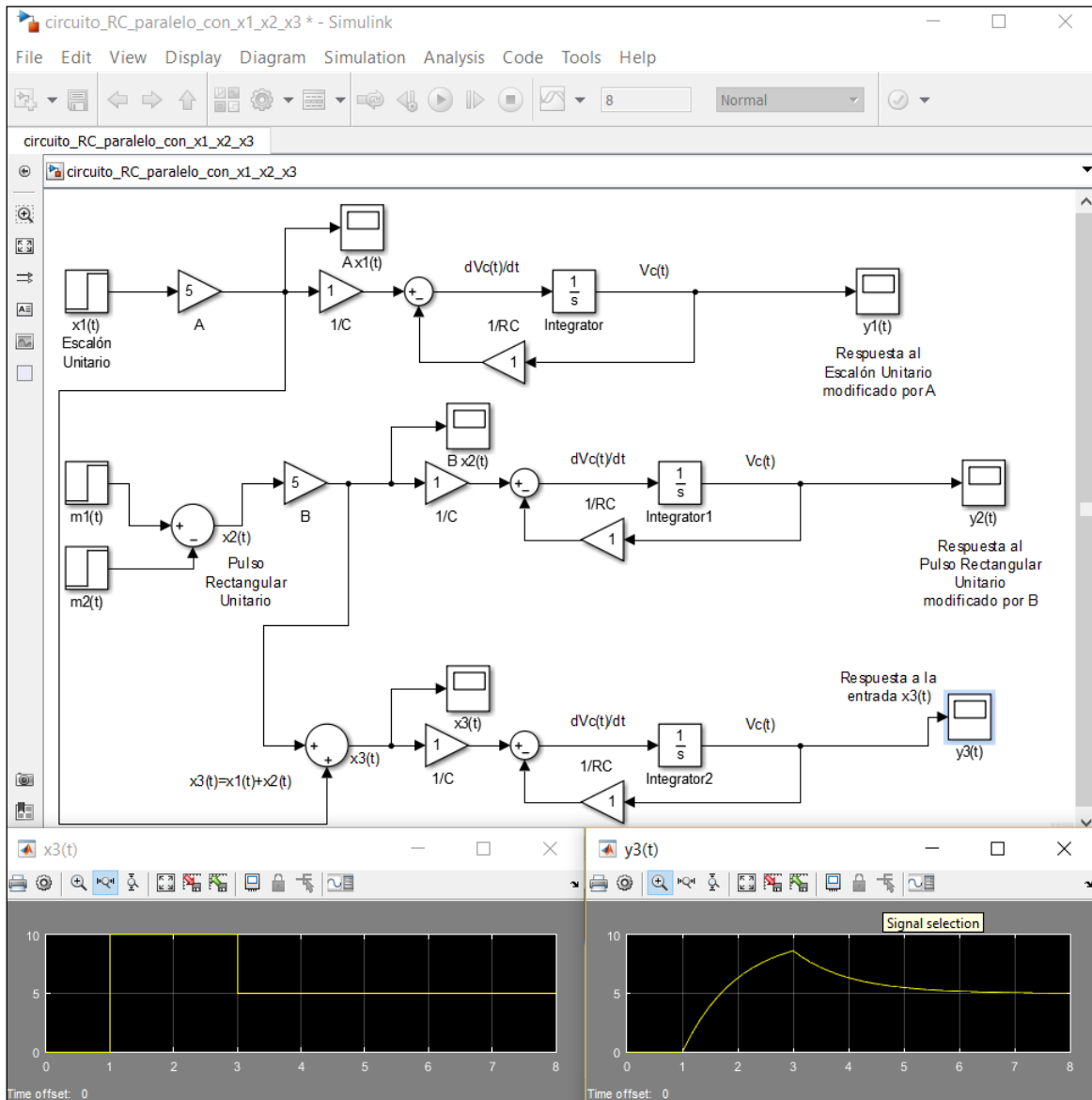
$$x_1(t) \rightarrow \text{Escalon unitario}$$

$$x_2(t) \rightarrow \text{Pulso rectangular}$$

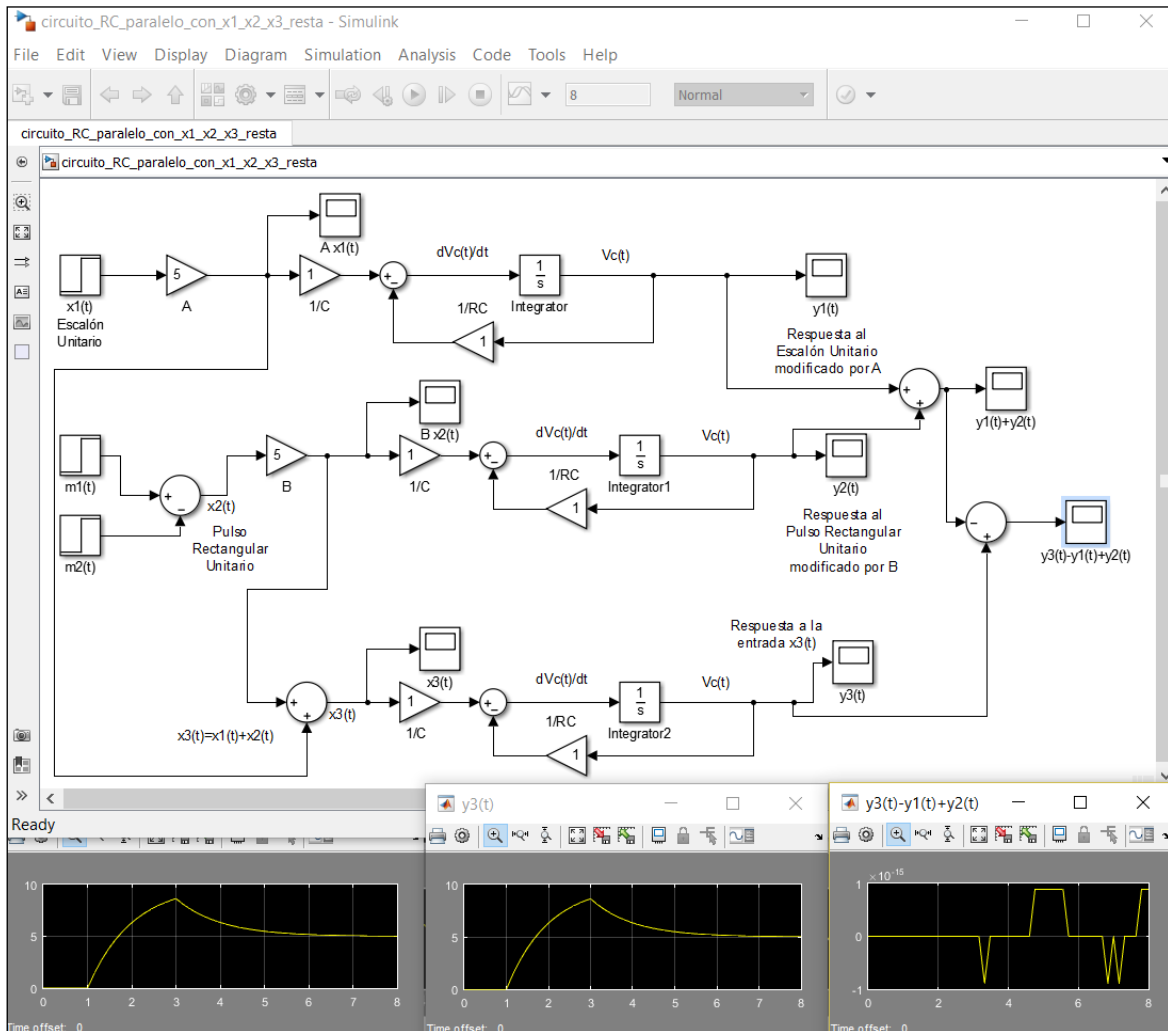
Cada una de ellas se ubica como entrada al sistema,



- Se toman dos entradas y se construye una entrada $x_3(t)$, además, se observa la salida a esta entrada,



- Se resta la salida $y_3(t)$ de la suma de $y_1(t) + y_2(t)$,

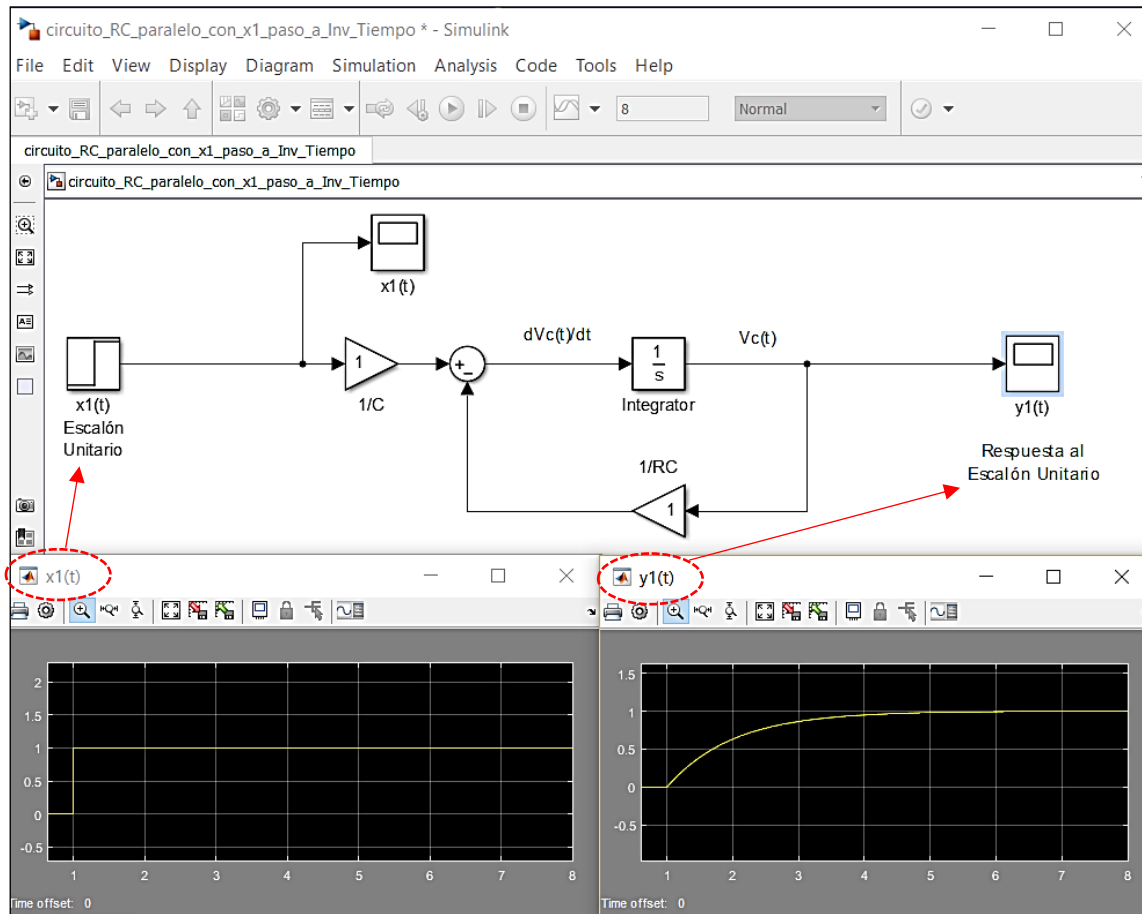


Valores muy pequeños al sustraer $y_3(t) - (y_1(t) + y_2(t))$.
Con esto se muestra que el sistema es lineal.

2. Invarianza en el tiempo.

Con base en el sistema modelado,

a) Sea $y_1(t)$ la salida correspondiente a $x_1(t)$. $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$



Responda: Investigue cómo llevar los datos de la respuesta de salida $y_1(t)$ de Simulink al Workspace.

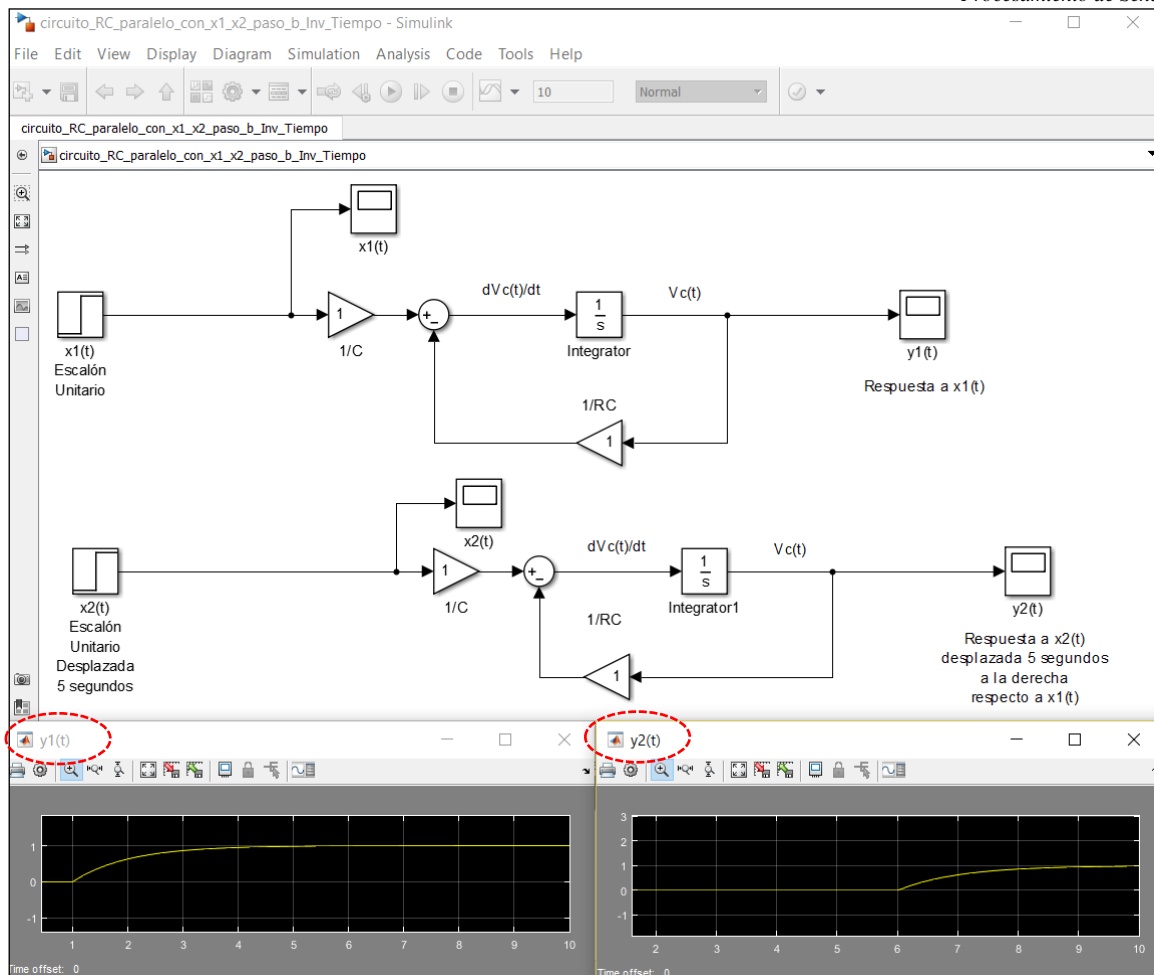
Responda: ¿Puedes calcular con los datos de la gráfica de la variable de salida $y_1(t)$ la ecuación que los representa? Investigue como construir la ecuación de $y_1(t)$ con base en los datos.

b) Se considera una segunda entrada $x_2(t)$, la cual es igual a la entrada del numeral “a” anterior pero desplazada una cantidad t_0 [s].

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) \longrightarrow$$

Se encuentra esta salida



Se observa que las dos gráficas son iguales y la única diferencia es el desplazamiento de 5 segundos.

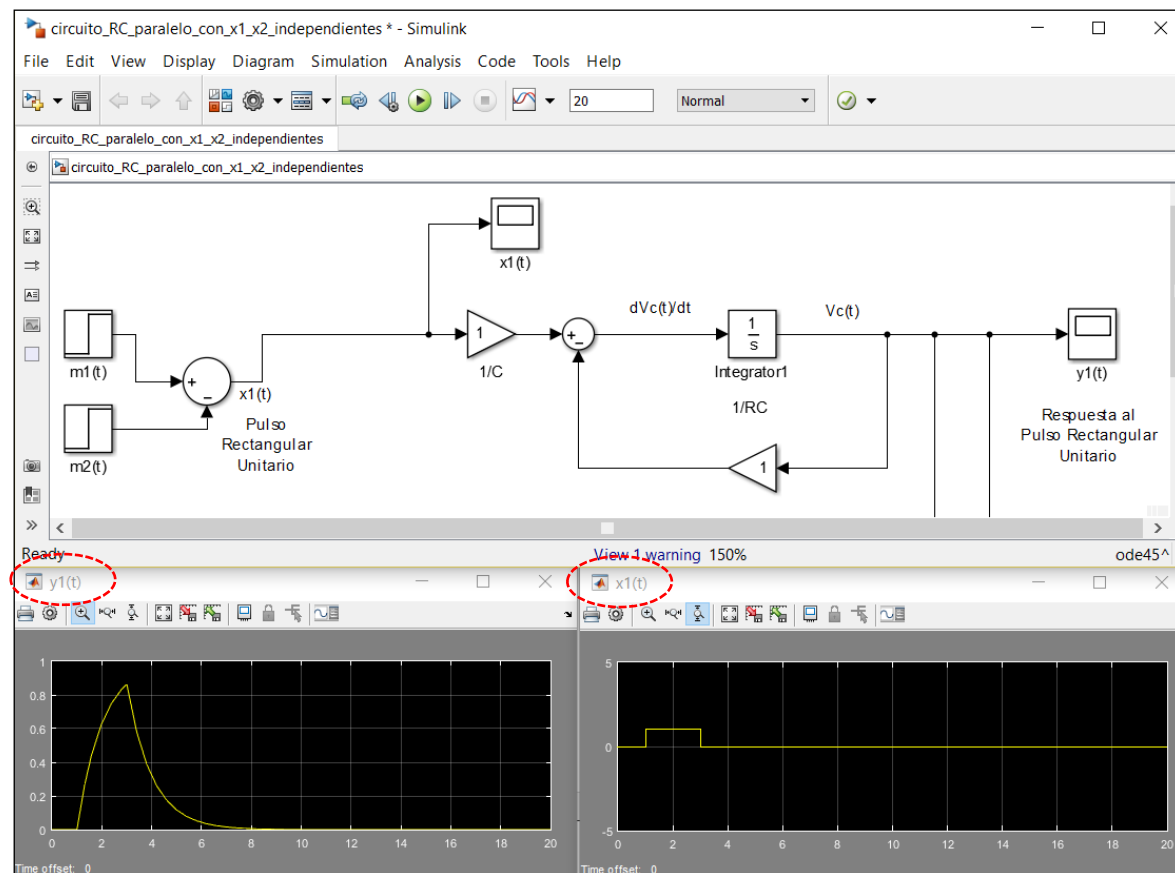
Responda: ¿Qué sucede si se aumenta o disminuye el desplazamiento en el dominio del tiempo t_0 ?

3. Estabilidad.

Un sistema es estable si para cualquier entrada acotada $x(t)$, su salida $y(t)$ es acotada

$$|x(t)| < B_1 \rightarrow |y(t)| < B_2$$

Se toma una entrada $x_1(t)$ acotada respecto a la variable dependiente como una señal pulso rectangular.

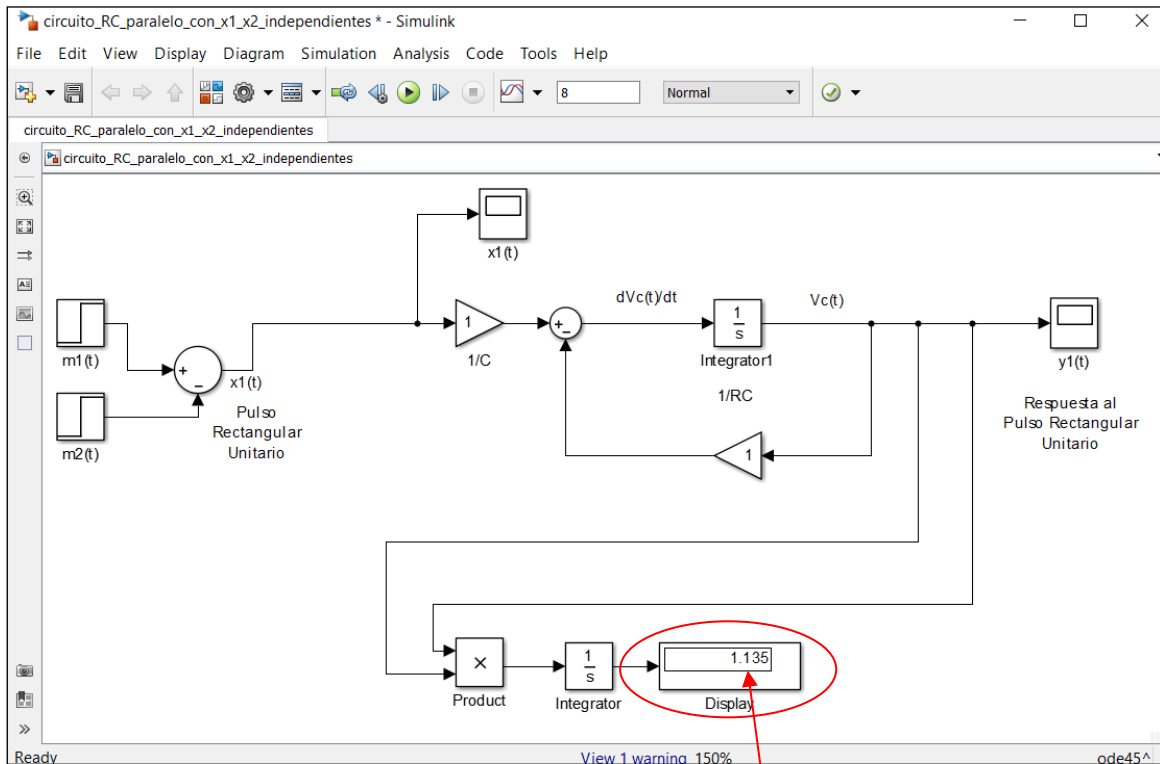


Responda: ¿por qué ésta se considera que esta señal utilizada es acotada?

Se puede calcular la energía de la señal en el intervalo de tiempo dentro del cual se encuentra la señal,

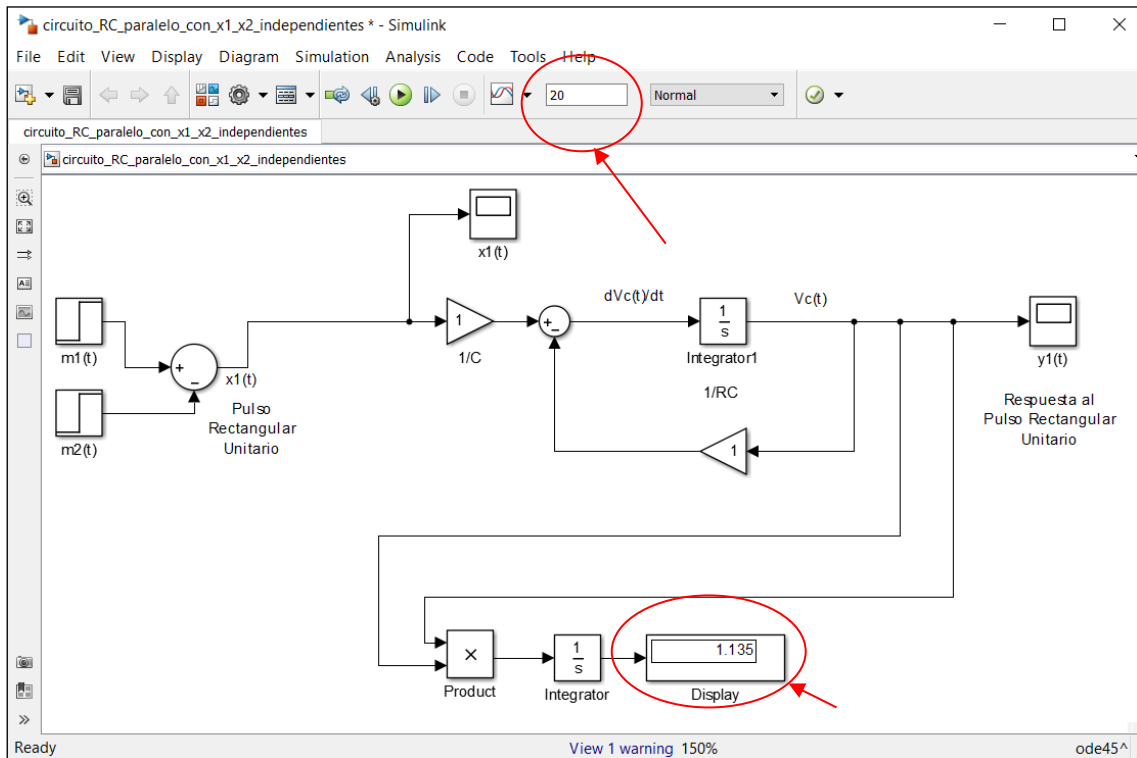
$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x_1(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} x_1^2(t) dt$$

Para ello, se utiliza el bloque “**product**” y en cascada el bloque integral, tal y como se muestra a continuación,



Tal y como se observa, la simulación es realizada entre 0 s y 8 s. Por lo tanto, la energía se obtiene en ese mismo intervalo.

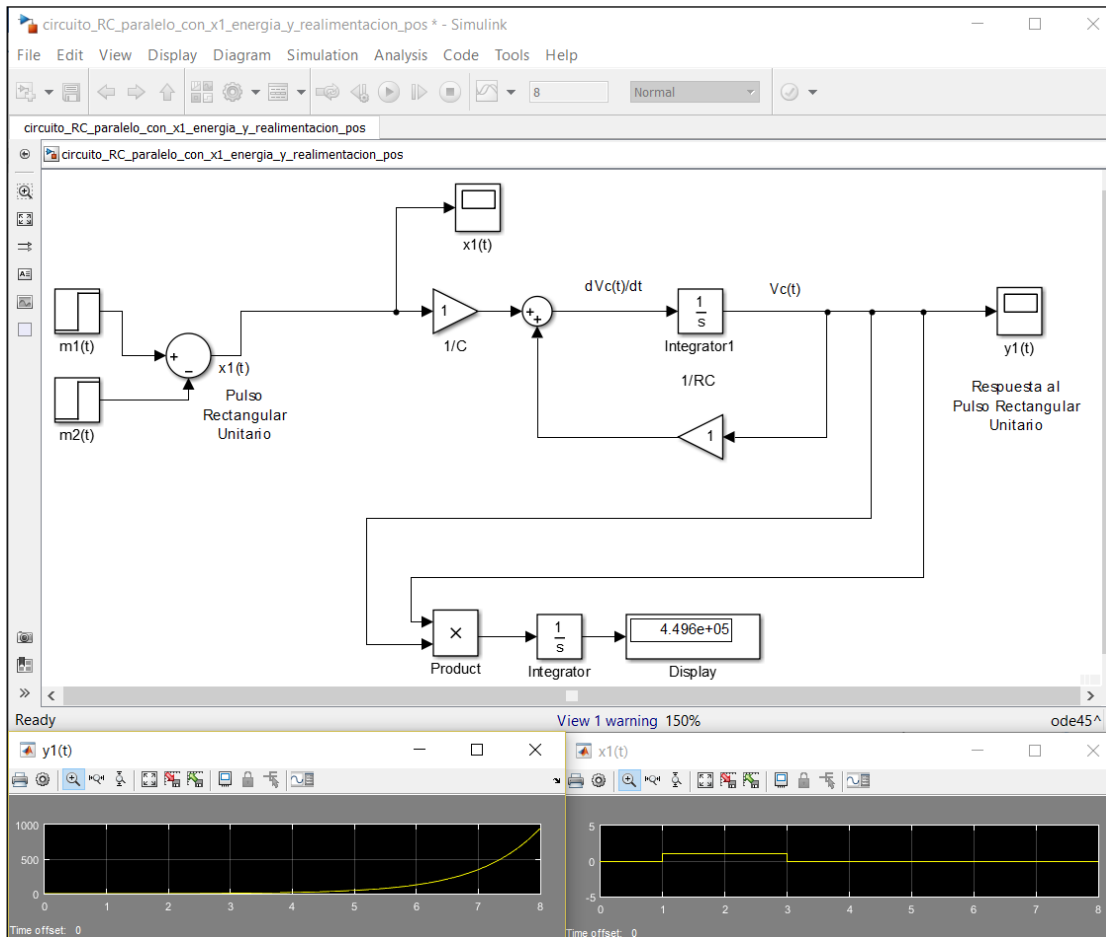
Si el sistema es estable, realizando la simulación ahora entre 0 s y 20 s debe conservarse la energía. Esto se muestra a continuación,



En general, los sistemas que son estables poseen realimentaciones negativas al construir su diagrama de bloques.

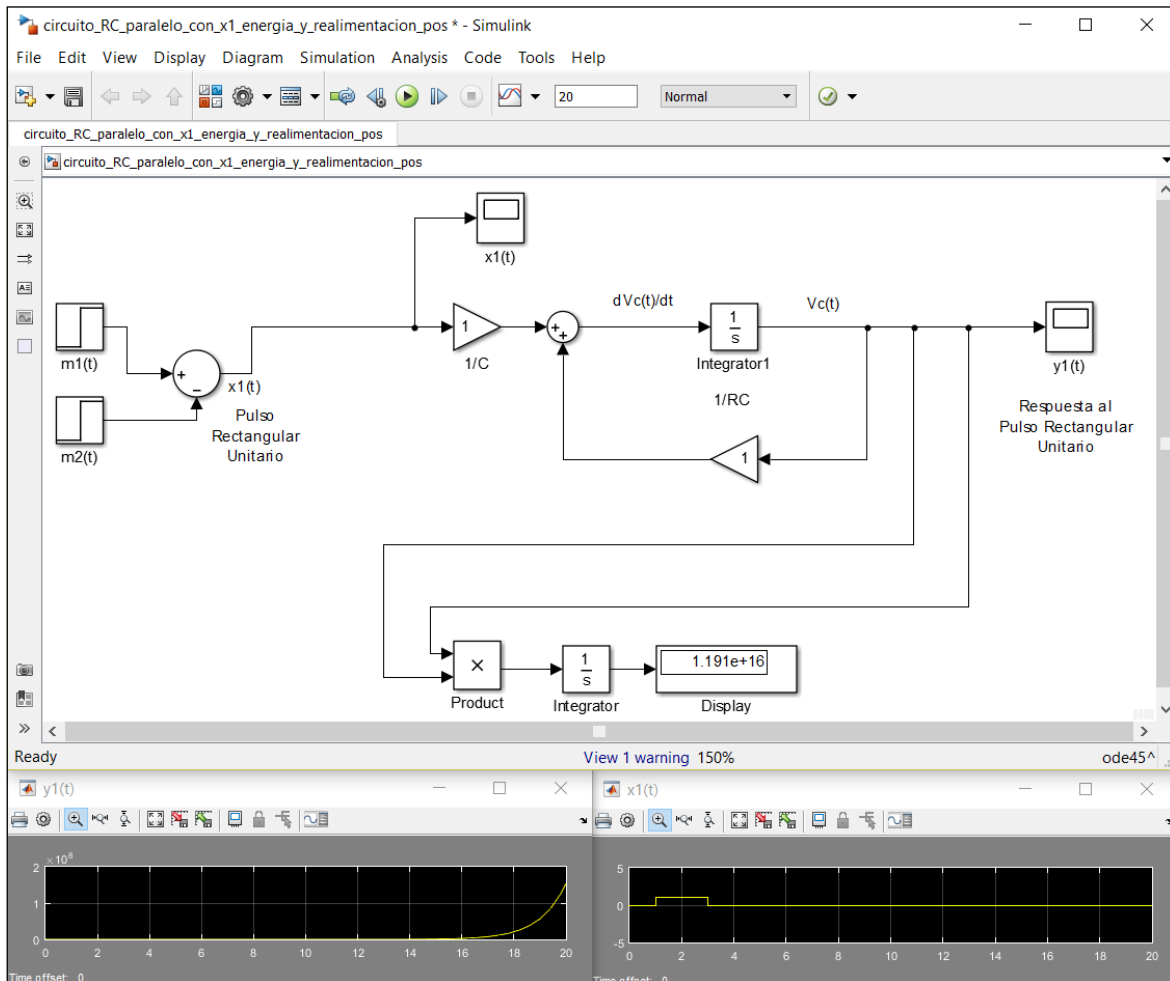
Responda: *Investiga dos modelos (física, química, ingeniería, u otra) que posean una ecuación diferencial de primer orden.*

Si en el modelo anterior ubicamos una realimentación positiva, observamos la respuesta y la energía entre 0 s y 8 s. Se utiliza una entrada acotada en variable independiente.



Se observa una energía de 449600 [J].

Si ahora se realiza la simulación para un intervalo mayor, entre 0 s y 20 s, se observa que la energía aumenta.



Este es el resultado de un sistema inestable, es decir, la energía aumenta en la medida que el tiempo de simulación aumenta.

4. Causalidad.

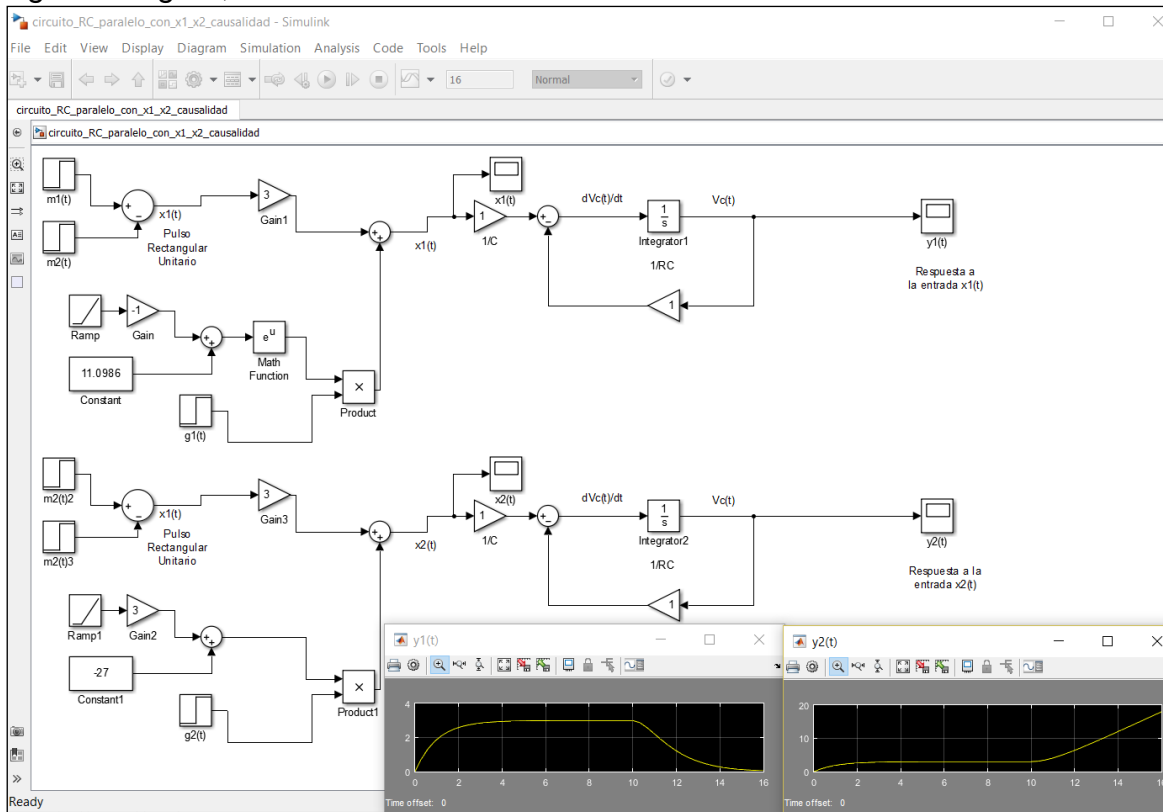
Un sistema es causal si la salida en cualquier instante " t_0 " depende solo de los valores de la entrada para $t < t_0$. A este tipo de sistemas también se les conoce como no anticipativo.

Se toman dos entradas que son iguales hasta $t_0 = 10$ s,

$$x1(t) = \begin{cases} 3 & t < 10 \\ e^{-t+11.0986} & t \geq 10 \end{cases}$$

$$x2(t) = \begin{cases} 3 & t < 10 \\ 3t - 27 & t \geq 10 \end{cases}$$

Se ubican estas señales como entrada al sistema, tal y como se muestra en la siguiente figura,



Se observa que la respuesta para cada entrada, son iguales para $t < 10$ s. Es decir, el sistema es causal.

Responda: Construya dos señales de entrada similares a las utilizadas en este numeral, pero con desplazamientos en el dominio del tiempo.