Taller 2:

1)

```
x1 <- c(9,2,6,5,8)
x2 <- c(12,8,6,4,10)
x3 <- c(3,4,0,2,1)

datos <- data.frame(x1 = c(9,2,6,5,8),
                    x2 = c(12,8,6,4,10),
                    x3 = c(3,4,0,2,1))


x_bar <- c(mean(x1), mean(x2), mean(x3))
Sn <- cov(datos)*((length(x1)-1)/length(x1))
R <- cor(datos)
```

2)

```
x <- c(5,1,3)
y <- c(-1,3,1)

eje_x <- c(5,-1)
eje_y <- c(1, 3)
eje_z <- c(3, 1)

scatterplot3d(eje_x,eje_z,eje_y, xlim=c(-6,6), ylim=c(-6,6), zlim=c(-6,6),grid=TRUE,box=FALSE,axis=TRUE)
```

Encontrar: longitud de x

```
longx <-norm(x,type='2')
longx
```

```
## [1] 5.91608
```

Ángulo entre x y y (en radianes)

```
longy <- norm(x,type = '2')
angulo <- acos((x_trans%*%y_trans)/(longx * longy))
angulo
```

```
##          [,1]
## [1,] 1.542221
```

Proyección de y en x

```
proy <- ((x_trans%*%y_trans)/longy^2) %*% y
proy
```

```
##             [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -0.02857143 0.08571429 0.02857143
```

4)

4.1) Sea ρ la matriz de correlación poblacional $p \text{ x } p$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & p_{1p} \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{p1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

y $V^{\frac{1}{2}}$ la matriz de desviación estándar.

$$V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$V^{\frac{1}{2}}\rho = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \dots & \dots & \sqrt{\sigma_{11}}p_{1p} \\ \dots & \sqrt{\sigma_{22}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\sigma_{pp}}p_{p1} & \dots & \dots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

Note que para la entrada a_{ij} de $V^{\frac{1}{2}}\rho$:

$$a_{ij} = \{\sqrt{\sigma_{ii}} \text{ si } i = j$$

$$a_{ij} = \{\sqrt{\sigma_{ii}}\rho_{p_i j} \text{ si } i < j$$

$$a_{ij} = \{\sqrt{\sigma_{ii}}\rho_{p_j i} \text{ si } i > j$$

Ahora, considere $V^{\frac{1}{2}}\rho V^{\frac{1}{2}}$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \dots & \dots & \sqrt{\sigma_{11}}p_{1p} \\ \dots & \sqrt{\sigma_{22}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\sigma_{pp}}p_{p1} & \dots & \dots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

Note que para la entrada b_{ij} de $V^{\frac{1}{2}}\rho V^{\frac{1}{2}}$

$$b_{ij} = \{\sigma_{ii} \text{ si } i = j$$

$$b_{ij} = \left\{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}\rho_{p_i j} \text{ si } i \neq j\right.$$

Dado que $p_{ij} = p_{ji} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}}$.

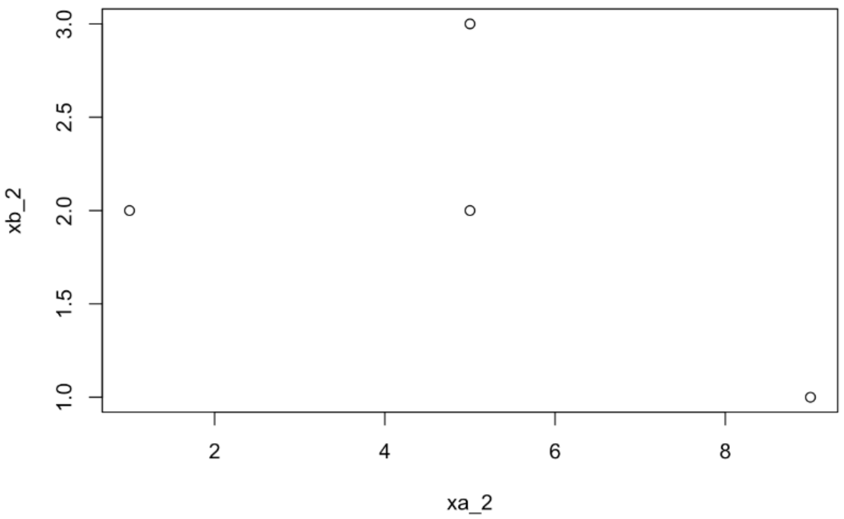
Luego $\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}p_{ij} = \sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}} = \sigma_{ij}$

Entonces $b_{ij} = \sigma_{ij}$

Con lo que $V^{\frac{1}{2}}\rho V^{\frac{1}{2}} = \Sigma$

6)

```
x1_2 <- c(9,5,1)
x2_2 <- c(1,3,2)

xa_2 = matrix(x1_2, nrow = 3, ncol = 1)
xb_2 = matrix(x2_2, nrow = 3, ncol = 1)

x_2 = cbind(xa_2, xb_2)

x1m = mean(x1_2)
x2m = mean(x2_2)

xa_2 <- c(xa_2, x1m)
xb_2 <- c(xb_2, x2m)

plot(xa_2, xb_2)
```



7)

Demuestre que $|S| = (s_{11}s_{22}s_{33}\dots s_{pp}) \mid R|$

Para este caso, S es la matriz de varianzas y covarianzas y R es la matriz de correlación.

Por demostración en punto anterior tenemos que

$S = D^{1/2}RD^{1/2}$

Donde

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{22}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{s_{pp}} \end{bmatrix}$$

Como por propiedades de matrices, tenemos que el determinante del producto de matrices es igual al producto de cada uno de los determinantes:
$|S| = |D^{1/2}||R||D^{1/2}| = |D^{1/2}||D^{1/2}||R| = (|D^{1/2}|)^2 \mid R|$

Dado que $D^{1/2}$ es una matriz diagonal, el determinante $|D^{1/2}|$ de D es el producto de los elementos de la diagonal tal que:

$|D^{1/2}| = \sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{33}}\dots\sqrt{s_{pp}}$

Por lo tanto:

$|S| = (\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{33}}\dots\sqrt{s_{pp}})^2 \mid R| = (s_{11}s_{22}s_{33}\dots s_{pp}) \mid R|$

9)

Considere una distribución normal bivariada con $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1, \rho_{12} = -0.8$

a. Escriba la densidad normal bivariada

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{11}{10} \\ -\frac{11}{10} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} 0.88} e^{\frac{-(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})' \Sigma^{-1} (x - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})}{2}}$$

b. Escriba la expresión de distancia estadística al cuadrado $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$ como una función cuadrática de x_1, x_2.

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 & 1.4 \\ 1.4 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2x_1 + 1.4x_2 - 5.4 & 1.4x_1 + 2.5x_2 - 8.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1.2x_1^2 - 1.2x_1 + 1.4x_1x_2 - 1.4x_2 - 5.4x_1 + 5.4 + 1.4x_1x_2 - 4.2x_1 + 2.4x_2^2 - 7.5x_1^2 - 8.9x_2 + 26.7$$

$$= 1.2x_1^2 - 10.8x_1 + 2.8x_1x_2 - 17.8x_2 + 2.5x_2^2 + 32.1$$

10)

Sea X $N_3 \sim (\mu, \Sigma)$ con $\mu' = [-3, 1, 4]$ y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes variables son independientes?

a. X_1, X_2

$X_1, X_2 \rightarrow$. Note que $\Sigma_{12} \neq 0$ así que estas no son independientes

b. X_2, X_3

$X_2, X_3 \rightarrow$. Note que $\Sigma_{12} = 0$ y X es normal así que estas son independientes.