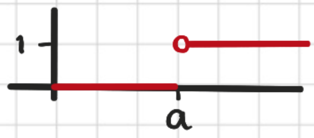
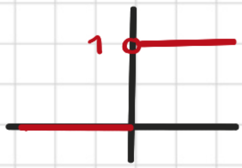
Función escalar unitario

Sea $a \geq 0$, definamos la función escalon unitario como

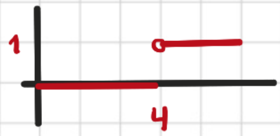
$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$



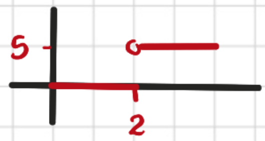
$u(t)$



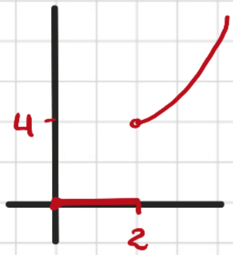
$u(t-4)$



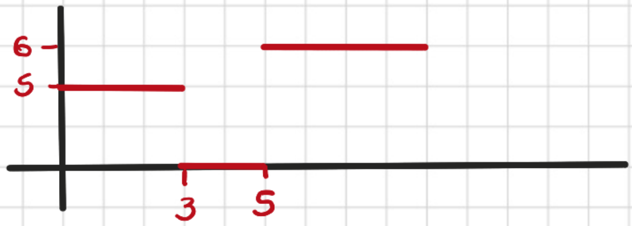
$5\,u(t-2)$



$t^2\,u(t-2)$



$5 - 5\,u(t-3) + 6\,u(t-5)$



→ la idea es calcular la TL para este tipo de funciones

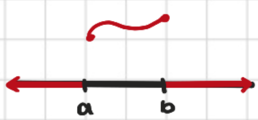
Función definida a trozos

la fun. escalon unitario me sirve para describir las funciones a trozos como una sola formula

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ h(t) & \text{si} \quad a \leq t \end{cases}$$

$$f(t) = g(t) - g(t)\,u(t-a) + h(t)\,u(t-a)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ g(t), & \text{si} \quad a < t < b \\ 0, & \text{si} \quad b \leq t \end{cases}$$



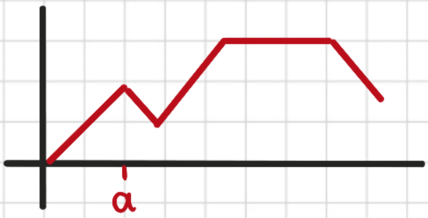
$$f(t) = g(t)\,u(t-a) - g(t)\,u(t-b)$$

Ejercicios:

1. Utilice la función escalon unitario para expresar la función definida a trozos:

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & si \quad 0 \leq t < a \\ h(t) & si \quad a \leq t < b \\ K(t) & si \quad b \leq t \end{cases}$$

2. ¿ Cuál es la gráfica de $f(t-a)\,U(t-a)$ si la gráfica de $f(t)$ es:



TEOREMA: de traslación 2

i) $\mathcal{L}(f(t-a)\,U(t-a)) = e^{-as} \cdot \mathcal{L}(f(t))$

ii) $\mathcal{L}(g(t)\,U(t-a)) = e^{-as}\,\mathcal{L}(g(t-a))$

Ejemplos:

* $\mathcal{L}(sen(3(t-8))\,U(t-8)) = e^{-8s}\,\mathcal{L}(sen(3t)) = \dfrac{e^{-8s}\,3}{s^2+9}$ caso i)

* $\mathcal{L}((t-5)^3\,U(t-5)) = e^{-5s}\,\mathcal{L}(t^3) = e^{-5s}\,\dfrac{3!}{s^4}$ caso i)

Demostración Teorema 2:

$$\mathcal{L}(f(t-a)\,U(t-a)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,U(t-a)\,dt$$

$$= \cancel{\int_0^a}^{\,0} + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt \qquad \text{sustitución } v = t-a, \; dv = dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)\,dv$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e \;\; g(t)dt = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv = e^{-sa}\,\mathcal{L}(f)$$

Ejemplo:

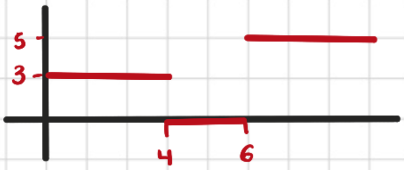
$$\mathcal{L}(\cos t \cdot U(t-\pi)) = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}(\cos(t+\pi)), \quad \text{como } \cos(t+\pi) = \cos t \,\cancel{\cos \pi}^{-1} - \cancel{sen\, t\, sen\, \pi}^{0} = -\cos t$$

$$= e^{-\pi s}\,\mathcal{L}(-\cos t) = -\frac{e^{-\pi s}\,s}{s^2+1}$$

Caso especial:

$$\mathcal{L}(U(t-a)) = e^{-as}\,\mathcal{L}(1) = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo: $f(t) = 3 - 3\,\mathcal{U}(t-4) + 5\,\mathcal{U}(t-6)$



$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(3 - 3\,\mathcal{U}(t-4) + 5\,\mathcal{U}(t-6))$$

$$= \frac{3}{s} - \frac{3e^{-4s}}{s} + \frac{5e^{-6s}}{s}$$

Forma inversa del teorema de traslación 2

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))\Big|_{t \leftrightarrow t-a}\,\mathcal{U}(t-a)$$

Ejemplo directos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6e^{-4s}}{s}\right) = 6\,\mathcal{U}(t-4) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{2s}}{s}\right) = \mathcal{U}(t+2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s}\right) = \mathcal{U}(t-3) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-6s}}{s}\right) = \mathcal{U}(t-6)$$

Ejemplos:

$$\star\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s+2}}{s^2+3s+2}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3s+2}\right)$$ utilizamos fracciones parciales

$$\frac{s}{s^2+3s+2} = \frac{s}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

$$= \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

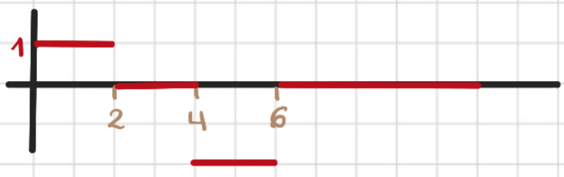
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3s+2}\right) = 2e^{-2t} - e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s+2}}{s^2+3s+2}\right) = \left[2e^{-2(t-3)} - e^{-(t-3)}\right]\mathcal{U}(t-3)$$

Ejemplo: Resolver el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y' + 3y = 1 - \mathcal{U}(t-2) - \mathcal{U}(t-4) + \mathcal{U}(t-6) \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

Solución:



1) Aplicar la TL en ambos lados de la ED

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y') + 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(u(t-2)) - \mathcal{L}(u(t-4)) + \mathcal{L}(u(t-6))$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\,\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}_{0} + 4[s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)}_{0}] + 3\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

Sea $Y = \mathcal{L}(y)$

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-6s}}{s}$$

Debemos despejar Y en términos de s

$$Y(s^2+4s+3) =$$

$$Y(s+3)(s+1) =$$

$$Y = \underbrace{\frac{1}{s(s+3)(s+1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s+3)(s+1)} - \frac{e^{-4s}}{s(s+3)(s+1)} + \frac{e^{-6s}}{s(s+3)(s+1)}}^{\text{Para invertir se necesita el teo. de traslación 2}}$$

Calculemos F. P. de $\dfrac{1}{s(s+3)(s+1)} = \dfrac{1/3}{s} + \dfrac{1/6}{s+3} + \dfrac{-1/2}{s+1}$

Empezamos a invertir

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-(t-2)}\right]u(t-2)$$

$$-\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3(t-4)} - \frac{1}{2}e^{-(t-4)}\right]u(t-2) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3(t-6)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}e^{-(t-6)}\right]u(t-6)$$

RTA