SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

≡ PONER FOTO ≤ → Foto esta en telegram

En el libro es el capitulo 8

Ejemplo:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} X$$

1) Valores propios de la Matriz A

Ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\left[-2(1-\lambda) + 4\right] + 2\left[4 - 2(1-\lambda)\right] = 0$$
$$(1-\lambda)(-3 - 2\lambda + \lambda^2) + 2(2 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 0$$
$$(1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda - 3) + 4(1+\lambda) + 4(1+\lambda) = 0$$
$$(1+\lambda)\left[(1-\lambda)(\lambda-3) + 8\right] = 0$$
$$(1+\lambda)\left[\lambda - 3 - \lambda^2 + 3\lambda + 8\right] = 0$$
$$(1+\lambda)(-\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0$$
$$-(1+\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$
$$-(1+\lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$
$$-(1+\lambda)^2(5-\lambda) = 0$$

→ Valores propios:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}\right\} \text{ repetidos valor propio de multiplicidad 2}$$
$$\lambda_3 = 5$$

→ Vectores propios:

$$\lambda = -1 \qquad \begin{matrix} AK = \lambda K \\ AV - \lambda K = \vec{0} \\ (A - \lambda I)K = \vec{0} \end{matrix} \qquad \vec{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)K = \vec{0} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Gauss-Jordan Matriz Aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad K_1 - K_2 + K_3 = 0$$

$K_1 - K_2 + K_3 = 0 \qquad K_1 = \underset{\downarrow}{K_2} - \underset{\downarrow}{K_3}$

Variables libres

Nulidad = 2 ⇒ 2 vectores

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_2 - K_3 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_2 \\ K_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_3 \\ 0 \\ K_3 \end{pmatrix} = K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego los vectores

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son vectores propios LI independientes asociados al valor propio $\lambda = -1$

Ahora con $\lambda = 5$

$(A - 5I)K = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_1 - K_3 = 0 \Rightarrow K_1 = K_3$ $\quad$ K_3 es var. libre

$K_2 + K_3 = 0 \Rightarrow K_2 = -K_3$

Vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ asociado a $\lambda = 5$

Entonces

$\lambda = -1$ vector propio $\vec{K_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ vector propio $\vec{K_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 5$ vector propio $\vec{K_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ Solución General:

$$X = C_1 \vec{K_1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{K_2} e^{\lambda_2 t} + C_3 \vec{K_3} e^{\lambda_3 t}$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Ejemplo: $x' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} x$

1) Valores propios

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-9-\lambda) + 36 = 0$$
$$-27 - 3\lambda + 9\lambda + \lambda^2 + 36 = 0$$
$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$
$$(\lambda+3)^2 = 0$$

Solo hay un valor propio $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}\right\}$ valor propio de multiplicidad dos

→ Vector propio: asociado a $\lambda = -3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -18 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$K_1 - 3K_2 = 0$$
$$K_1 = 3K_2$$

Vector propio: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x' = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

Cuando solo hay un valor propio en este caso de multiplicidad 2 solo hay un vector propio asociado y la solución correspondiente es:

$$X_1 = \vec{K_1} e^{\lambda t}$$

¿Como encontrar la segunda solucion?

Se puede encontrar una segunda solución de la forma

$$X_2 = K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}$$

donde $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$

Justificando un poco si sustituimos X_2 en $x' = AX$

$$X_2' = Ke^{\lambda t} + Kt\lambda e^{\lambda t} + P\lambda e^{\lambda t} = A(xte^{\lambda t} + Pe^{\lambda t})$$

La última ecuación se puede reescribir de la forma:

$$(AK-\lambda K)te^{\lambda t} + (AP-\lambda P-K)e^{\lambda t} = 0$$

↳ es una identidad → valido $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$AK-\lambda K=0$ $\qquad$ $AK=\lambda K$

$AP-\lambda P-K=0$

K debe ser un vector propio de A.

$$AP-\lambda P=K$$

$$\underbrace{(A-\lambda I)}_{\text{tengo esto}}P = \underbrace{K}_{\text{conozco esto}}$$

vamos a hallar P

→ Siguiendo con el ejemplo anterior

Ecua. carac. $(\lambda+3)^2=0$

$\lambda=-3$ único valor propio

vector propio $K=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ encontrar $\vec{P}=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}$ tal que $(A-\lambda I)P=K$

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}$$

$\lambda=-3$

$$\begin{pmatrix}K_1\\K_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & -18\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc:c}6 & -18 & 3\\ 2 & -6 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c}1 & -3 & 3/6\\ 1 & -3 & 1/2\end{array}\right)$

$P_1-3P_2=1/2$ $\qquad$ Podemos elegir $\vec{P}$ como $\vec{P}=\begin{pmatrix}7/2\\1\end{pmatrix}$

$P_1=1/2+3P_2$

Luego la segunda solución es: $X_2=Kte^{\lambda t}+Pe^{\lambda t}$

$$X_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}7/2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$$

Solución General: $X=C_1X_1+C_2X_2$

$$X=C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+C_2\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}7/2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}\right)$$