TALLER 1

LAURA GONZALEZ y DAFNE CASTELLANOS

1. Resuelva la ecuación diferencial o el problema de Valor Inicial dado, según el caso.

a) $\frac{dy}{dt} = 1 - t + ty^2$

Observe que $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2(1-t)$

$$\frac{dy}{dt} = (1-t)(1+y^2)$$

Por lo tanto se puede solucionar por variables separables.

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1-t)dt$$

$\star \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y + c_1$ $\quad \star \int 1 - t \, dt = t - \frac{t^2}{2} + c_2$

$$\arctan y + C_1 = t - \frac{t^2}{2} + C_2$$

$$y = \arctan^{-1}\left(t - \frac{t^2}{2} + c\right)$$

b) $\frac{dp}{dt} = p - p^2$

Observe que $\frac{dp}{p-p^2} = dt$.

Se resuelve por variables separables

* $\int \frac{dp}{p-p^2}$ mediante fracciones parciales.

$$\frac{1}{p-p^2} = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1-p}$$

$$1 = A(1-p) + Bp$$

- Si $p=1 \Rightarrow B=1$
- Si $p=0 \Rightarrow A=1$

$$\int \frac{dp}{p-p^2}\,dp = \int \frac{dp}{p} - \int \frac{dp}{1-p} = \ln|p| - \ln|1-p| + C_1$$

* $\int dt = t + C_2$

$$\ln|p| - \ln|1-p| + C_1 = t + C_2$$

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = t + C$$

$$\frac{p}{1-p} = e^{t+C}$$

$$p = e^{t+C}(1-p)$$

$$p = e^{t+C} - pe^{t+C}$$

$$p = \frac{e^{t+C}}{1-e^{t+C}}$$

c) $y' = \dfrac{2x}{y+x^2y}$

Observe que $dy(y+x^2y) = 2x\,dx$

$$y(1+x^2)dy = 2x\,dx$$

$$y\,dy = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Se resuelve por variables separables.

★ $\int y\,dy = \dfrac{y^2}{2} + C_1$

★ $\int \dfrac{2x}{1+x^2}dx = \int \dfrac{du}{u}$ $\quad u = 1+x^2$, $du = 2x\,dx$

$= \ln|u| + c = \ln|1+x^2| + C_2$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+x^2| + C$$

$$y = \pm\sqrt{2\ln|1+x^2| + 2C}$$

d) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$, $\quad y(0)=1$

Observe que $2(y-1)dy = (3t^2+4t+2)dt$

Se resuelve mediante variables separables.

★ $2\int y-1\,dy = 2\left[\frac{y^2}{2} - y\right] + C_1 = y^2 - 2y + C_1$

★ $\int 3t^2 + 4t + 2\,dt = 3\int t^2\,dt + 4\int t\,dt + 2\int dt$

$= t^3 + 2t^2 + 2t + C_2$

$y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t + C$ → Sol. General

→ $y(0) = 1$

$(1)^2 - 2(1) = 0^3 + 2(0)^2 + 2(0) + C$

$C = -1$

$y^2 - 2y = t^3 + 2t^2 + 2t - 1$ → Sol. PVI

e) $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3 + 2x$

Se resuelve como E O Lineal.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{x^3 + 2x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^2 + 2$$

★ $P(x) = \frac{2}{x}$ y $Q(x) = x^2 + 2$

★ $\int P(x)\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx = 2\ln x + c$

$\mu(t) = e^{2\ln x} = x^2$

★ $\int Q(x)\mu(x)\,dx = \int x^4 + 2x^2\,dx$

$= \int x^4\,dx + 2\int x^2\,dx = \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + c$

$$y = \left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3\right)\right] + \frac{c}{x^2}$$

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{2}{3}x + cx^{-2}$$

f) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x \;; \quad y(1) = 10$

Se resuelve como ED lineal.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = \frac{\ln x}{x+1}$$

★ $P(x) = \frac{1}{x+1}$ y $Q(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

★ $\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + c$

$$\mu(x) = e^{\ln|x+1|} = x+1$$

$\star$ $\int Q(x)\mu(x)\,dx = \int \frac{\ln x}{x+1} \cdot x+1 \; dx$

$= \int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$

$$y = \frac{1}{x+1}(x\ln x - x) + \frac{C}{x+1}$$

$\star$ $y(1) = 10$

$$10 = \frac{1}{1+1}(1\ln(1) - 1) + \frac{C}{1+1}$$

$$10 = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2}$$

$$\left[10 + \frac{1}{2}\right]2 = C$$

$$C = 21$$

$$y = \frac{1}{x+1}(x\ln x - x) + \frac{21}{x+1} \rightarrow \text{Sol. PVI}$$

9) $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

Observe que $\frac{dP}{dt} + (2t-1)P = 4t-2$

Se resuelve como ED lineal.

★ $P(t) = 2t - 1$ y $Q(t) = 4t - 2$

★ $\int P(t)\,dt = \int 2t\,dt - \int dt = t^2 - t + c$

$\mu(t) = e^{t^2 - t}$

★ $\int Q(t)\mu(t)\,dt = \int e^{t^2-t}(4t-2)\,dt$

$u = t^2 - t$
$du = 2t - 1\,dt$

$= 2\int e^u\,du = 2e^{t^2-1}$

$$y = \frac{1}{e^{t^2-1}} 2e^{t^2-1} + \frac{c}{e^{t^2-1}}$$

$$y = 2 + c\,e^{-t^2+1}$$

h) $\left(1 - \frac{3}{y} + x\right)\frac{dy}{dx} + y = \frac{3}{x} - 1$

Se resuelve por Ecuaciones exactas.

$$\left(-\frac{3}{x} + 1 + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy = 0$$

★ $M_y = 1 \wedge N_x = 1 \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$ ED exacta

★ $-\int \frac{3}{x}\,dx + \int dx + y\int dx = -3\ln x + x + yx + g(y)$

★ $f_y = x + g'(y)$

★ $\cancel{x} + g'(y) = 1 - \frac{3}{y} + \cancel{x}$

$$g(y) = \int dy - \int \frac{3}{y}\, dy$$

$$g(y) = y - 3\ln(y) + c$$

★ $-3\ln x + x + yx + y - 3\ln y = C$

$$x + y + xy - 3\ln(xy) = C$$

i) $(x+y)^2\, dx + (2xy + x^2 - 1)\, dy = 0, \quad y(1) = 1$

Note que $(x^2 + 2xy + y^2)dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$

Se resuelve por Ecuación Exacta.

★ $M_y = 2x + 2y \quad \wedge \quad N_x = 2y + 2x \Rightarrow M_y = N_x$

$\Rightarrow$ ED exacta

★ $2x\int y\,dy + x^2\int dy - \int dy = xy^2 + x^2y - y + g(x)$

★ $f_x = \cancel{y^2} + \cancel{2xy} + g'(x) = x^2 + \cancel{2xy} + \cancel{y^2}$

$$g'(x) = x^2$$

$$g(x) = \int x^2\, dx$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

★ $xy^2 + x^2y - y + \frac{x^3}{3} = C$ → Sol. General

★ $y(1)=1$

$$1\cdot 1^2+1^2 1-1+\frac{1^3}{3}=C \Rightarrow \frac{3}{3}+\frac{1}{3}=C \Rightarrow C=\frac{4}{3}$$

$$xy^2+x^2y-y+\frac{x^3}{3}=\frac{4}{3}$$ → Sol. PVI

j) $y(x+y+1)\,dx+(x+2y)\,dy=0$

Note que $(xy+y^2+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$

Se resuelve mediante Ecuación exacta.

★ $M_y=x+2y+1 \;\wedge\; N_x=1 \Rightarrow M_y \neq N_y$

⇒ ED NO exacta

★ $$P(x)=\frac{(x+2y+1)-1}{x+2y}=\frac{x+2y}{x+2y}=1$$

★ $\int P(x)\,dx=\int dx=x \Rightarrow f(x)=e^x$

★ $\underline{e^x(xy+y^2+y)\,dx+e^x(x+2y)\,dy=0}$

$M_y=e^x x+2ye^x+e^x \;\wedge\; N_x=e^x\cdot x+e^x+e^x 2y$

$\Rightarrow M_y=N_x \Rightarrow$ ED exacta

★ $\int e^x x\,dy+\int e^x 2y\,dy=e^x xy+e^x y^2+g(x)$

$\star$ $f_x = \cancel{e^x x y} + \cancel{e^x y} + \cancel{e^x y^2} + g'(x) = \cancel{e^x x y} + \cancel{e^x y^2} + \cancel{e^x y}$

$$g'(x) = 0$$
$$g(x) = 0$$

$\star$ $e^x x y + e^x y^2 = C \rightarrow$ Sol. General

2. La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

1) Definir las variables y qué hallar

$P(t) :=$ Bacterias que hay en el cultivo a t horas

$P(3) = 400$

$P(10) = 2000$ ¿ P_0 ?

2) $P(t) = P_0 e^{kt}$

$$400 = P_0 e^{k3} \Rightarrow P_0 = \frac{400}{e^{k3}}$$

$$2000 = P_0 e^{k10} \Rightarrow P_0 = \frac{2000}{e^{k10}}$$

Igualamos:

$$\frac{400}{e^{k3}} = \frac{2000}{e^{k10}} \Rightarrow \frac{e^{k10}}{e^{k3}} = \frac{2000}{400} \Rightarrow e^{k7} = 5$$

Despejamos $\ln(e^{k7}) = \ln 5 \Rightarrow 7k = \ln 5 \Rightarrow k = \frac{\ln 5}{7}$

Reemplazamos $P_0 = \dfrac{400}{e^{3(\ln 5/7)}} = 200,678 = 80 \times 5^{4/7}$ Bacterias

Solución general := $P(t) = 80 \times 5^{4/7} \times e^{(\ln 5/7)t}$

3. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3 %. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine:

   a) La cantidad que queda después de 24 horas.

   b) La vida media de la sustancia radiactiva

1) Definir las variables

$P(t)$:= cantidad de sustancia en t horas

$P_0 = 100$

$P(6) = 100 - 3 = 97$ ¿$P(24)$?

2) $P(t) = P_0 e^{kt}$

$P(t) = 100e^{kt} \Rightarrow 97 = 100e^{k6}$

$\ln\left(\frac{97}{100}\right) = \ln(e^{k6}) \Rightarrow k = \frac{\ln(0,97)}{6} = -0,0051$

Sol. General := $P(t) = 100e^{-0,0051t}$

$P(24) = 100e^{-0,0051(24)} = 88,47$ mg → cantidad luego de 24 horas

3) Vida media := $P(t) = \frac{1}{2}P_0$

$$100\, e^{-0{,}0051t} = \frac{1}{2} 100$$

$$\ln\left(e^{-0{,}0051\,t}\right) = \ln(1/2)$$

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0{,}0051} = 135{,}9112 \text{ h}$$

Vida media de 135,9112 h.

4. Cuando el interés es compuesto continuamente, la cantidad de dinero aumenta con una razón proporcional a la cantidad presente S al tiempo t, es decir,

$$\frac{dS}{dt} = rS,$$

donde r es la razón de interés anual.

a) Calcule la cantidad reunida al final de 5 años cuando se depositan \$5000 en una cuenta de ahorro que rinde el $\frac{23}{4}$ % de interés anual compuesto continuamente.

b) ¿En cuántos años se habrá duplicado el capital inicial?

1) Definir variables

$S(t) :=$ cantidad de dinero en tiempo t

$S_0 = 5000$

$r = \frac{23}{4}\% \approx 0{,}0575$ ¿$S(5)$?

2) $S(t) = S_0 e^{rt}$

$$S(t) = 5000\, e^{0{,}0575 \cdot t}$$

$$S(5) = 5000\, e^{0{,}0575 \cdot 5} \approx \$6665{,}453$$ → cantidad luego de 5 años

3) $10000 = 5000\, e^{0{,}0575 \cdot t}$

$$t = \frac{\ln(2)}{0{,}0575} \approx 12{,}0547$$ → En 12 años se habría duplicado el capital inicial.

5. Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es 5°F. Después de 1 minuto, el termómetro indica 55°F y después de 5 minutos indica 30° F. ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?

1) Definir variables

$T(t) :=$ Temperatura en tiempo t

$T_m = 5$

$T(1) = 55$

$T(5) = 30$ ¿$T(0)$?

2) $T(t) = T_m + Ce^{kt}$

- $55 = 5 + Ce^{k}$
- $30 = 5 + Ce^{5k}$

Luego, igualamos:

$\frac{50}{e^{k}} = C$ $\qquad$ $\frac{25}{e^{5k}} = C$

$$\frac{50}{e^{k}} = \frac{25}{e^{5k}} \Rightarrow e^{4k} = \frac{1}{2} \Rightarrow K = \frac{\ln(1/2)}{4} \approx -0{,}173$$

Hallamos C $\Rightarrow$ $C = \frac{50}{e^{-0{,}173}} \approx 59{,}4604$

Reemplazamos

$$T(0) = 5 + 59{,}4604\, e^{-0{,}173 \cdot 0} \approx 64{,}4604 \text{ m}$$

↳ Temp. inicial

6. Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de 70°F al exterior, donde la temperatura del aire es de 10°F. Después de medio minuto el termómetro indica 50°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los 15° F?

1) Definir variables

$T(0) = 70$ $\qquad$ $T(0{,}5) = 50$

$T_m = 10$ $\qquad$ ¿$T(1)$? $\qquad$ ¿$T(t) = 15$?

2) $T(t) = T_m + Ce^{kt}$

- $70 = 10 + Ce^{0}$
  $C = 60$

- $50 = 10 + Ce^{0,5k}$
  $C = \dfrac{40}{e^{0,5k}}$

$$e^{0,5k} = \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{\ln(2/3)}{0,5} \approx -0,8109$$

★ $T(1) = 10 + 60e^{-0,8109 \cdot 1} = 36,6675\,°F$

★ $15 = 10 + 60e^{-0,8109 \cdot t}$ Despejando t

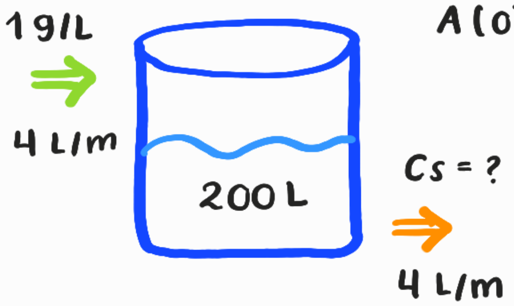
$$\ln\left(\frac{1}{12}\right) = -0,8109 \cdot t \Rightarrow t = \frac{\ln(1/12)}{-0,8109} \approx 3,0644 \text{ m}$$

A los 3,0644 minutos el termometro llegará a 15°F.

7. Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 g de sal. Salmuera que tiene 1 g de sal por litro entra al tanque con una razón de 4 L/min; la solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Encuentre la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t.

1) Definir variables

$X = 200$ L
$C_e = 1$ g/L
$V_e = 4$ L/min
$V_s = 4$ L/min
$A(0) = 30$ g



$A(0) = 30$ g

¿A(t)?

2)

★ $R_e = 4 \cdot 1 = 4$

$$\frac{dA}{dt} = 4 - (4)C_s = 4 - 4\left(\frac{A}{200}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 - \frac{A}{50}$$

Resolviendo por ED lineal

* $P(t) = \frac{1}{50}$ $\quad Q(t) = 4$

* $\int p(t)\,dt = \frac{t}{50}$ $\quad \mu(t) = e^{t/50}$

* $\int Q(t)\,\mu(t)\,dt = 4(50)e^{t/50} = 200e^{t/50}$

$$A(t) = \frac{1}{e^{t/50}}\,200e^{t/50} + \frac{C}{e^{t/50}}$$

$$A(t) = 200 + \frac{C}{e^{t/50}}$$ → Sol. General

* Para hallar C usamos $A(0) = 30\,gl$

$$30 = 200 + C \Rightarrow C = 170$$

RTA: $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$

8. Un gran tanque tiene una capacidad de 1000 galones. Suponga que el tanque contiene 500 galones de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 lb de sal por galón a razón de 5 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Determine la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque al tiempo t.

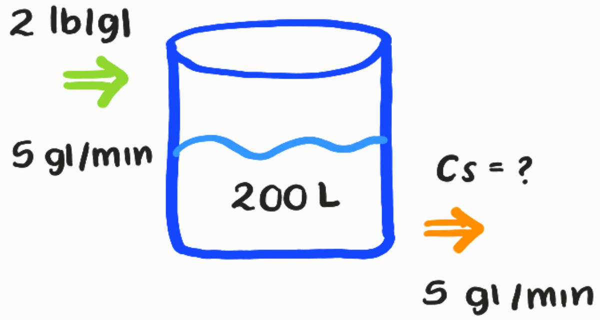
1) Variables

$X = 500$ gl

$C_e = 2$ lb/gl

$V_e = 5$ gl/min

$V_s = 5$ gl/min



¿A(t)?

2)

★ $R_e = 5 \cdot 2 = 10$

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{5A}{500}$$

Resolviendo por ED lineal

★ $P(t) = \frac{1}{100}$ $\quad Q(t) = 10$

★ $\mu(t) = e^{1/100\, t}$

$$\int Q(t)\mu(t)\,dt = 1000\, e^{1/100\, t}$$

★ $A(t) = 1000 + C e^{-t/100}$

$C = (A(t) - 1000)\, e^{t/100}$

$C = (0 - 1000)\, e^{0/100}$

$C = -1000$

RTA: $A(t) = 1000 - 1000\, e^{-t/100}$

9. Resuelva el problema anterior suponiendo que la solución sale con una razón de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

Ahora $V_s = 10$ gl/min

Entonces $C_s = \dfrac{A}{500+(5-10)t} = \dfrac{A}{500-5t}$

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{10A}{5(100-t)} = 10 - \frac{2A}{100-t}$$

* $P(t) = \dfrac{2}{100-t}$ y $Q(t) = 10$

* $\int P(t)\,dt = 2\int \dfrac{dt}{100-t} = -2\int \dfrac{du}{u}$ $\boxed{\begin{array}{l} u = 100-t \\ du = -1dt \end{array}}$

$= -2\ln(100-t)$

$$\mu(t) = e^{-\ln(100-t)^{-2}} = (100-t)^{-2}$$

* $\int Q(t)\mu(t)\,dt = 10\int (100-t)^{-2}dt$ $\boxed{\begin{array}{l} u = 100-t \\ du = -dt \end{array}}$

$= -10\int u^{-2}du = 10\,u^{-1} = 10(100-t)^{-1}$

* $A(t) = \dfrac{10(100-t)^{-1}}{(100-t)^{-2}} + \dfrac{C}{(100-t)^{-2}}$

$A(t) = 10(100-t) + C(100-t)^2 \rightarrow$ Sol. General

* $0 = 10(100) + C(100)^2 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{10}$

$C = -1000/(100)^2$

$$10(100-t)-\frac{1}{10}(100-t)^2 \rightarrow \text{Sol. PVI}$$

La capacidad del tanque es de $500-5t=0$
Despejando se tiene que $t=100$ min es el tiempo donde se vacia el tanque.

10. Resuelva el problema anterior suponiendo ahora que la solución sale con una razón de 3 gal/min. ¿Cuándo se llena el tanque?

Ahora $V_s = 3$ gl/min

Entonces $C_s = \dfrac{A}{500+(5-3)t} = \dfrac{A}{500+2t}$

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{3A}{500+2t}$$

$\star$ $P(t) = \dfrac{3}{500+2t}$ $\quad Q(t) = 10$

$\star$ $\displaystyle\int P(t)\,dt = \int \frac{3}{500+2t}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} u = 500+2t \\ du = 2 \end{array}}$

$= \dfrac{3}{2}\ln|500+2t| + C$

$$\mu(t) = e^{3/2 \ln|500+2t|} = (500+2t)^{3/2}$$

$\star$ $\displaystyle\int Q(t)\,\mu(t)\,dt = 10\int (500+2t)^{3/2}\,dt$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} u = 500+2t \\ du = 2 \end{array}}$

$= 5\displaystyle\int u^{3/2}\,du = 2u^{5/2} = 2(500+2t)^{5/2} + C$

$$A(t) = \frac{2(500+2t)^{5/2}}{(500+2t)^{3/2}} + \frac{C}{(500+2t)^{3/2}}$$

$$A(t) = 2(500+2t) + C(500+2t)^{-3/2}$$

$$0 = 2(500) + C(500)^{-3/2}$$

$$-1000(500)^{3/2} = C$$

$$A(t) = 2(500+2t) + (500+2t)^{-3/2}(-1000(500)^{3/2})$$

↳ sol. PVI

La capacidad del tanque es de $500 - 5t = 1000$
Despejando se tiene que $t = 100$ min es el tiempo donde se llena el tanque.