Taller 2. Vectores

jueves, 2 de febrero de 2023 10:21 a. m.

Ejercicios de Tarea:

1) VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

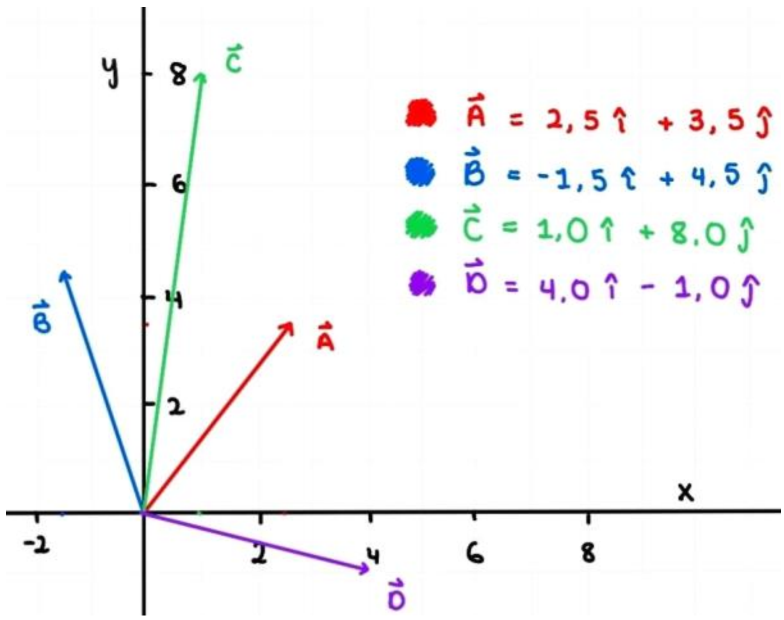
Teniendo los siguientes vectores:

→ $\vec{A} = 2,5\,\hat{i} + 3,5\,\hat{j}$

→ $\vec{B} = -1,5\,\hat{i} + 4,5\,\hat{j}$

a) Dibujar en un plano los vectores:

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $(\vec{A} + \vec{B})$, $(\vec{A} - \vec{B})$



b) Calcular:

- $\vec{A} + \vec{B} = (2,5 - 1,5)\hat{i} + (3,5 + 4,5)\hat{j} = (1,0\,\hat{i} + 8,0\,\hat{j})$
- $\vec{A} - \vec{B} = (2,5 - (-1,5))\hat{i} + (3,5 - 4,5)\hat{j} = (4,0\,\hat{i} - 1,0\,\hat{j})$.
- $\|\vec{A}\| = \sqrt{(2,5)^2 + (3,5)^2} = 4,30 = \sqrt{74}/2$
- $\|\vec{B}\| = \sqrt{(-1,5)^2 + (4,5)^2} = 4,74 = 3\sqrt{10}/2$
- $\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\| = 4,30 + 4,74 = 9,04 = (\sqrt{74} + 3\sqrt{10})/2$
- $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(1,0)^2 + (8,0)^2} = 8,06 = \sqrt{65}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2,5 \cdot (-1,5)) + (3,5 \cdot 4,5) = 12$
- $\vec{A} \times \vec{B} = ((2,5 \cdot 4,5) - (-1,5 \cdot 3,5))\hat{k} = 16,5\,\hat{k}$

c) Calcule el ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

c) Calcule el ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

- $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \dfrac{12}{\frac{\sqrt{74}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{2}} = 0.588172$

- $\theta = \cos^{-1}(0.588172) = 53{,}97°$

2) OPERACIONES ENTRE VECTORES.

1) Dados dos vectores:

→ $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

→ $\vec{B} = 3\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

a) Obtenga la magnitud de cada vector:

$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$

b) Escriba una expresión para la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$. ¿Es la misma magnitud para $\vec{B}-\vec{A}$? Explique.

→ $\vec{A}-\vec{B} = (-2-3)\hat{\imath} + (3-1)\hat{\jmath} + (4-(-3))\hat{k}$

$= -5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 7\hat{k}$

→ $\vec{B}-\vec{A} = (3-(-2))\hat{\imath} + (1-3)\hat{\jmath} + (-3-4)\hat{k}$

$= 5\hat{\imath} + (-2)\hat{\jmath} + (-7)\hat{k}$

Considerando los resultados obtenidos, vemos que los vectores son diferentes [$\vec{A}-\vec{B} \neq \vec{B} - A$], puesto que las direcciones de los mismos no son iguales.

Sin embargo, teniendo en cuenta la fórmula para encontrar la magnitud de un vector:

$|\vec{V}| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2}$

las magnitudes de los vectores son iguales:

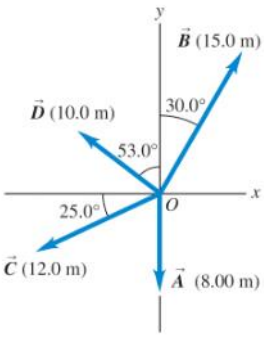
las magnitudes de los vectores son iguales:

$$\|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2 + (7)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 4 + 49}$$
$$= \sqrt{78}$$

$$\|\vec{B} - \vec{A}\| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (-7)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 4 + 49}$$
$$= \sqrt{78}.$$

y esto se debe a que con la resta obtenemos vectores con sentidos diferentes pero igual magnitud.

2) Calcule el vector resultante



	Magnitud	Ángulo	Componente x	componente y
$\vec{A}$	8.00 m	270°	0 m	-8 m
$\vec{B}$	15.00 m	60°	7.5 m	12.99 m
$\vec{C}$	12.00 m	205°	-10,88 m	-5,07 m
$\vec{D}$	10.00 m	143°	-7.99 m	6,02 m
$\vec{R}$	12.83 m $\|\vec{R}\|$	-27.58° 152.42° R_θ	-11.37 m R_x	5.94m R_y

El vector resultante se define como:

$\vec{R}$: con magnitud 12.83m y con 152.42° respecto al origen.

3) Calcule los vectores unitarios asociados a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$\vec{A} = (0\hat{\imath} - 8\hat{\jmath})\,m$ $\qquad |\vec{A}| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$

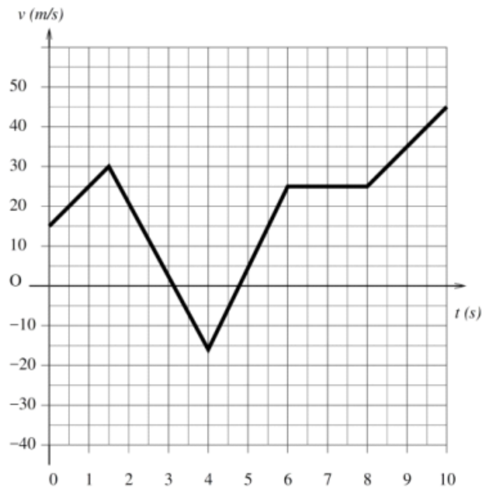
$\vec{B} = (7.5\,\hat{i} + 12.99\,\hat{j})\,m$ $\quad |\vec{B}| = \sqrt{7.5^2 + 12.99^2} = 14.99$

* $\hat{A} = (0\,\hat{i} + 1\,\hat{j})\,m$
* $\hat{B} = (0.5\,\hat{i} + 0.87\,\hat{j})\,m$

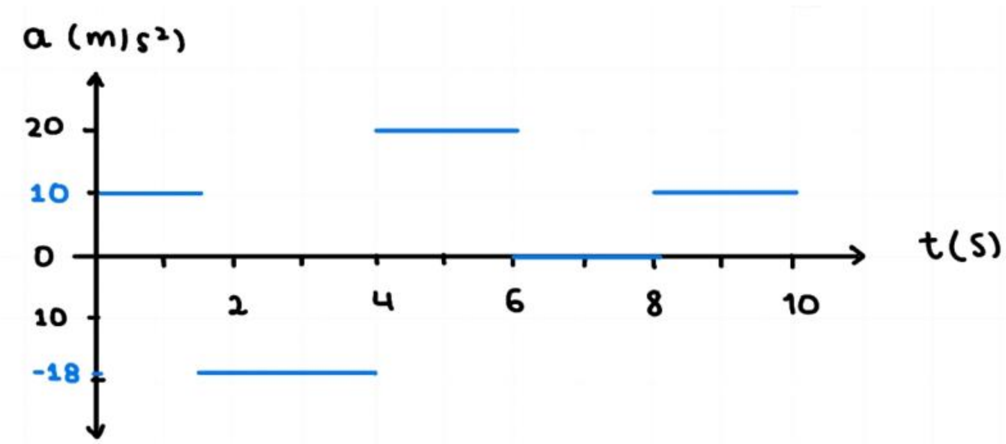
Ejercicios para trabajar en clase:

3.1) Movimiento en 1D

Una moto se desplaza en línea recta a lo largo del eje x. La gráfica de la figura muestra la componente v_x del vector velocidad de la moto en función del tiempo.



a) Grafique la componente a_x del vector aceleración en función del tiempo. Indique claramente la escala que ultiliza para hacer el gráfico.

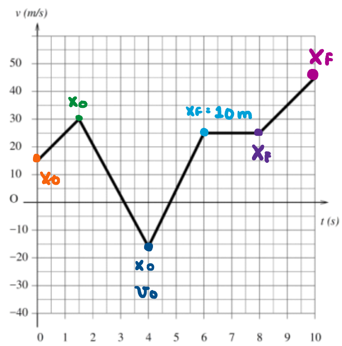


b) Se desplaza la moto siempre en el mismo sentido, o en algún momento cambia de sentido? Si cambia de sentido, indicar en qué tiempos lo hace, y cuánto vale su velocidad en esos tiempos.

vale su velocidad en esos tiempos.

La moto si cambia de sentido en su recorrido. Esto pasa entre el segundo 3.2 y 4.75. La velocidad en $t = 3.2$ s, es $v_x = 0$ m/s y en $t = 4.75$s es $v_x = 0$ m/s.

c) Si la componente x del vector posición en $t = 6.0$s es $x = 10.0$ m, determine x en $t = 1.5$ s, en $t = 8.0$s y en $t = 10.0$ s.



* $t = 6$ s , $x = 10$ m
* $t = 4$ s , $x = 0$ m
* $t = 1.5$ s , $x = -18.75$ m
* $t = 8$ s , $x = 60$ m
* $t = 10$ s , $x = 130$ m

→ $x_o = ?$ → $v_{ox} = -15$ m/s
→ $x_F = 10$ m

→ $\Delta t = 2$ s $= 6$s $- 4$s.
→ $a_x = 20$ m/s²

$$x_F = x_o + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$10\,m = x_o + \left[\left(-15\,\frac{m}{s}\right)(2s)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(20\,\frac{m}{s^2}\right)(2s)^2\right]$$

$$10\,m = x_o + (10\,m)$$

$$0\,m = x_o$$

→ $x_o = ?$ → $v_{ox} = 30$ m/s
→ $x_F = 0$ m

→ $\Delta t = 4$s $- 1.5$s $= 2.5$s
→ $a_x = -18$ m/s²

$$0\,m = x_o + \left[\left(30\,\frac{m}{s}\right)(2.5\,s)\right] + \left[\frac{1}{2}\left(-18\,\frac{m}{s^2}\right)(2.5s)^2\right]$$

$$0\,m = x_o + 18.75\,m$$

$$-18.75\,m = x_o$$

$X_0 = 10\ m$ $\quad v_{0x} = 25\ m/s$

$X_F = ?$

→ $\Delta t = 2s$

→ $a_x = 0\ m/s$

$$X_F = (10m) + \left[\left(25\ \frac{m}{s}\right)(2s)\right] + 0$$

$X_F = 60\ m$

$X_0 = 60m$ $\quad v_{0x} = 25\ m/s$

$X_F = ?$

→ $\Delta t = 2\ s$

→ $a_x = 10\ m/s^2$

$$X_F = (60m) + \left[(25\ \frac{m}{s})\ (2s)\right] + \left[\frac{1}{2}\ (10\ \frac{m}{s^2})\ (2s)^2\right]$$

$X_F = 130\ m$

$X_0 = ?$ $\quad v_{0x} = 15\ m/s$

$X_F = -18.75\ m$

→ $\Delta t = 1.5\ s$

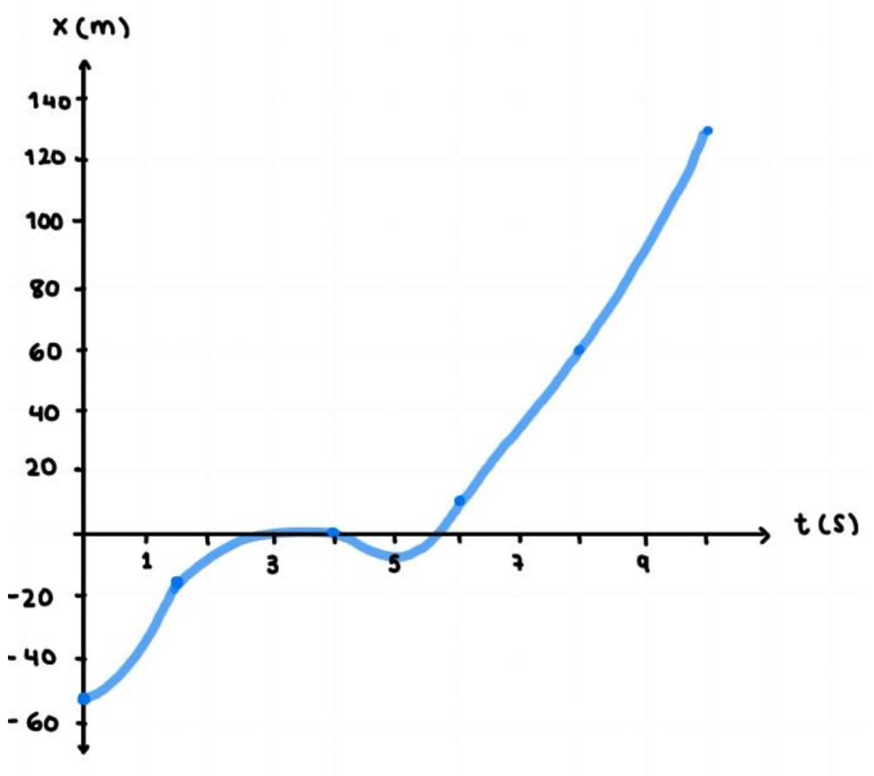
→ $a_x = 10\ m/s^2$

$$-18.75\ m = X_0 + \left[15\ \frac{m}{s} \cdot 1.5\ s\right] + \left[\frac{1}{2} \cdot 10\ \frac{m}{s^2} \cdot 1.5\ s^2\right]$$

$-52.5\ m = X_0$

d) Grafique esquemáticamente la curva de posición en función del tiempo.

t (s)	Posición en x (m)
0	-52.5
1.5	- 18.75
4	0
6	10
8	60
10	130



e) Calcule la velocidad media entre 0 y 1.5 s.

$$v_{med\text{-}x} = \frac{v_{ox} + v_{F(x)}}{2}$$

$$= \frac{(15\ m/s) + (30\ m/s)}{2}$$

$$= 22.5\ m/s$$

La velocidad media entre $t_0 = 0s$ y $t_1 = 1.5s$.

$v_{med\text{-}x} = 22.5\ m/s$

F) calcule el módulo de velocidad entre 0 y 1.5 s.

$$R = \frac{d}{\Delta t} = \frac{33.75\ m}{1.5\ s} = 22.5\ m/s.$$

El módulo de velocidad es de 22.5 m/s.

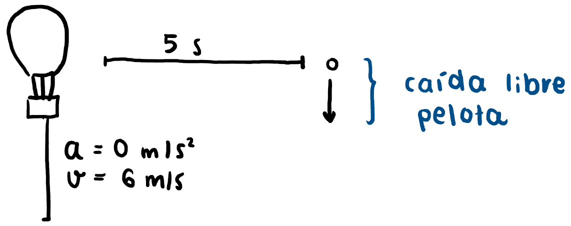
g) Calcule la velocidad media entre 1.5 y 4 s.

$$v_{med\text{-}x} = \frac{(30\ m/s) + (-15\ m/s)}{2}$$

$$= 7.5\ \frac{m}{s}$$

3.2) Movimiento en 1D

Un niño desde el borde de un globo que asciende desde el suelo a una velocidad de 6 m/s deja caer su pelota después de 5 segundos que el globo empezó a elevarse. Calcule:



a) La distancia total recorrida de ascenso de la pelota.

$t = 0\,s$ a $t = 5\,s$] 30 m (m.u)

$v = 6\ m/s$

$$* \ y = y_0 + v_0 t - \cancel{\tfrac{1}{2} g t^2}^{\,0}$$

$$y = 0 + 6\frac{m}{s} \cdot 5\,s$$

$$y = 30\,m$$

b) Tiempo total que dura la pelota en el aire.

$v_{oy} = 6\ m/s$

$a_y = -9.8\ m/s$

$y_0 = 30\ m$

$y_F = 0\ m$

① $v_y = ?$

$$v_y^2 = v_{oy}^2 + 2 \cdot a_y\,(y_F - y_0)$$

$$v_y^2 = \left(6\frac{m}{s}\right)^2 + 2\left(-9.8\frac{m}{s^2}\right)(0 - 30m)$$

$$v_y^2 = 624\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$v_y = \pm 24.98\ m/s$$

② $t = ?$

$$v_y = v_{oy} + a_y t$$

$$* \ 24,98\ \frac{m}{s} = 6\ \frac{m}{s} + \left(-9.8\ \frac{m}{s^2}\right) t$$

$$18,98\ \frac{m}{s} = -9.8\ \frac{m}{s^2}\ t$$

$-1,94\ s = t$ X

$* -24,98 \frac{m}{s} = 6 \frac{m}{s} + (-9.8 \frac{m}{s^2})\, t$

$-30,98 \frac{m}{s} = -9.8 \frac{m}{s^2}\, t$

$3,16\ s = t.$

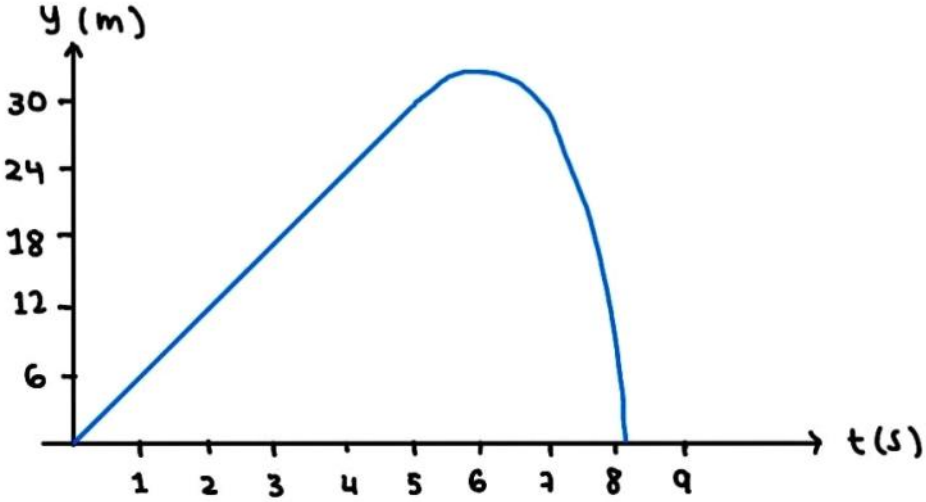
El tiempo total que dura la pelota en el aire es: 3,16 s.

c) La velocidad final con la que la pelota llega al suelo

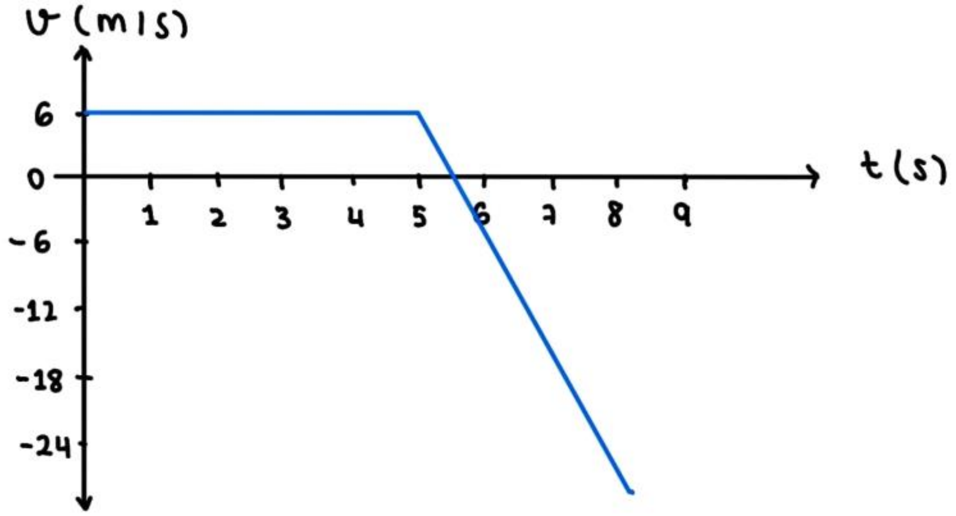
Como se calculo en el anterior ejercicio, la velocidad final con la que la pelota llega al suelo es de $-24,98 \frac{m}{s}$

d) Realice la gráfica de y vs t, v vs t y a vs t.

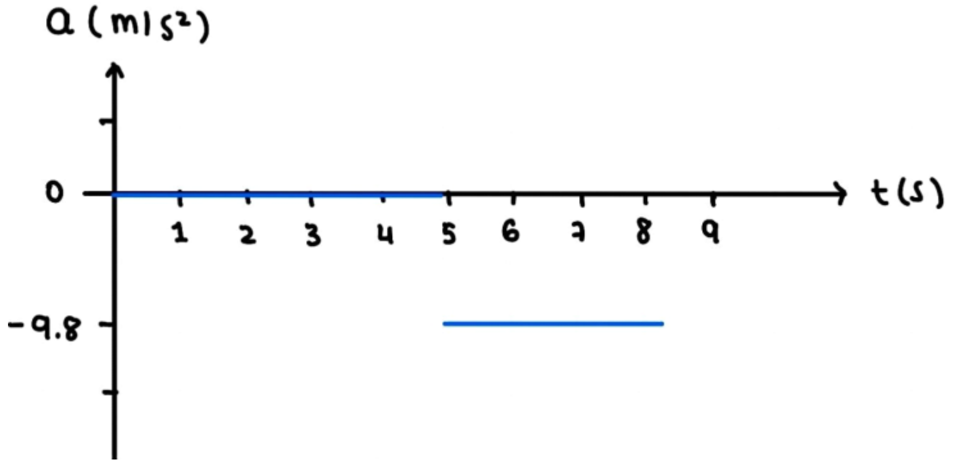
* y vs t



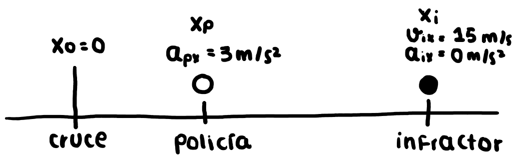
* v vs t



* a vs t



3.3) Un conductor que viaja a rapidez constante de 15 m/s pasa por un cruce, cuyo límite de velocidad es de 10 m/s. En ese preciso momento un oficial de policía, que está parado en el cruce, arranca en su motocicleta para perseguir al infractor con aceleración constante de 3.0 m/s² y lo alcanza.



a) Calcule el tiempo en que se encuentran y a qué distancia.

$X = X_o + V_{ox}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2$

* policía:

$\rightarrow a_{px} = 3\ m/s^2$

* **Policía:**
  - $\rightarrow a_{px} = 3\ m/s^2$
  - $\rightarrow v_{po} = 0\ m/s^2$
  - $\rightarrow x_{po} = 0\ m$

$$x = \frac{1}{2}\left(3\,\frac{m}{s^2}\right) t^2 = 1.5\,\frac{m}{s^2}\, t^2$$

* **Infractor:**
  - $\rightarrow v_{io} = 15\ m/s$
  - $\rightarrow a_{ix} = 0\ m/s^2$
  - $\rightarrow x_{io} = 0\, m$

$$x = \left(15\,\frac{m}{s}\right) t$$

$$\left(1.5\,\frac{m}{s^2}\right) t^2 = x = \left(15\,\frac{m}{s}\right) t$$

$$\left(1.5\,\frac{m}{s^2}\right) t = \left(15\,\frac{m}{s}\right)$$

$$t = 10 \text{ segundos}$$

El policía y el infractor se encuentran en 10 segundos.

* **policía**

$$x = 1.5\,\frac{m}{s^2}\,(10\ s)^2$$

$$X = 150\ m$$

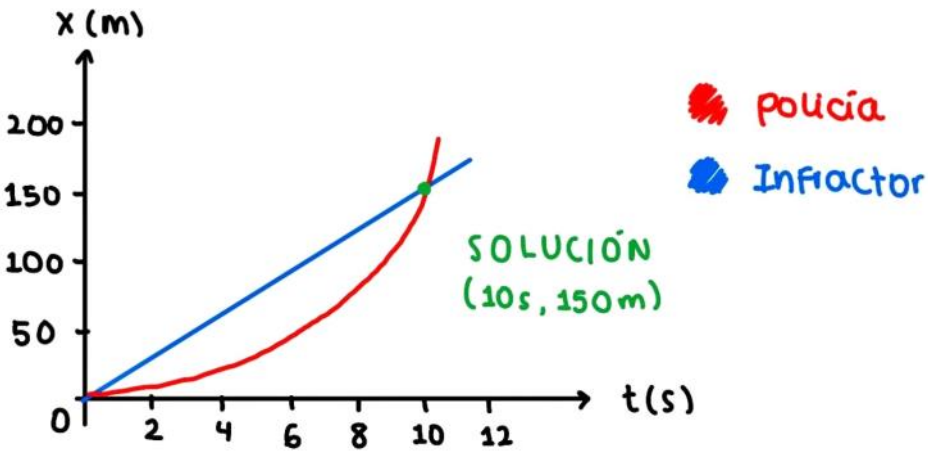
* **Infractor**

$$x = 15\,\frac{m}{s}\,(10\,s)$$

$$x = 150\ m$$

Además, se recorrieron 150 m antes de que el policía y el infractor se encontraran.

b) Resuelvalo en forma gráfica es decir grafique posición en función del tiempo para cada uno en el mismo gráfico.



c) Dibuje la gráfica de velocidad en función del tiempo

* Policía

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right) t$$

$$150\,m = \left(\frac{v_x}{2}\right) 10\,s$$

$$15\,\frac{m}{s} = \frac{v_x}{2}$$

$$30\,\frac{m}{s} = v_x$$