ED lineal de orden n.

Considere la ED:

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_n(x)\frac{d^ny}{y^n} = g(x)$$

- Esta ED es una lineal de orden n, donde las funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo I. Estas funciones se llaman coeficientes de la ED.

ED Homogenea

Si $g(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = 0 \quad ★$$

Observe que la función constante $\phi(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ es una solución de la ED, la solución trivial de la ED.

Principio de superposición

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ED lineal ★ entonces para cualquiera constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se tiene:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

También es solución de la ED lineal ★

Ejemplo: Considere $y'' - 3y' + 2y = 0$. Verifique que las funciones $y_1 = e^{2x}$ $y_2 = e^x$ son soluciones de la ED

- $y_1 = e^{2x}$ $y_1' = 2e^{2x}$ $y'' = 4e^{2x}$ reemplazando $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} - 3(2e^{2x}) + 2e^{2x} = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$
- $y_2 = e^x$ $y_2' = e^x$ $y_2'' = e^x$ Reemplazando $e^x - 3e^x + 2e^x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

y_1 y y_2 son soluciones de la ED.

Luego, por el principio de superposición $y = 6y_1 + 3y_2 = 6e^{2x} + 3e^x$ tambien es solución

Verificación $y' = 12e^{2x} + 3e^x$ $y'' = 24e^{2x} + 3e^x$ $y'' - 3y' + 2y = 24e^{2x} + 3e^x - 3(12e^{2x} + 3e^x) + 2(6e^{2x} + 3e^x) = 0$

TAREA Demostrar el principio de superposición.

$y_1 = e^x$ $y_2 = 5e^x$ ← Linealmente dependientes $\qquad$ $y_1 = e^x$ $y_2 = e^{3x}$ ← Linealmente independientes

$(V, +, \cdot)$ espacio vectorial. Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n = 0$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \det\begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{pmatrix} \underset{\text{son infinitas}}{=} 0 \quad \text{pero} = 3e^{4x} - e^{4x} = 2e^{4x} \underset{\forall x \in \mathbb{R}}{\neq} 0$$

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la ED lineal homogenea de orden n. Definimos el Wronskiano como:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema

Suponga que $y_1, y_2, \dots, y_n$ son soluciones de la ED homogenea

y_1, y_2, y_n son linealmente independientes sii $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$

Ejemplo Considere la ED $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ verificar que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^{-2}$ son soluciones y determinar si son L.I.

$y_1 = x^2 \quad y_1' = 2x \quad y_1'' = 2 \rightarrow x^2y'' + xy' - 4y = 2x^2 + 2x^2 - 4x^2 = 0$ y $y_2 = x^{-2} \quad y_2' = -2x^{-3} \quad y_2'' = 6x^{-4} \quad x^2y'' + xy' - 4y = 6x^{-2} - 2x^{-2} - 4x^{-2} = 0$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-1} - 2x^{-1} = 4x^{-1} \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Coeficientes Constantes

Considere la ED lineal de orden n **homogenea** con coeficientes constantes:

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$$

Esta ED tiene n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \dots, y_n$.

El conjunto de estas soluciones linealmente independientes se llama Conjunto Fundamental de soluciones

La notación general de la ED es la combinación lineal $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$. Donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias

ED de segundo orden con coeficientes constantes homogeneos.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Supongamos que la solución de la ecuación diferencial es de la forma $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx} \quad y'' = m^2e^{mx}$

$ay'' + by' + cy = 0 \rightarrow am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \rightarrow am^2 + bm + c = 0$ Ecuación característica de la ED(x)

La solución de esta ecuación es: $m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, tenemos los casos:

1. Si $m_1 \neq m_2$ $(b^2 - 4ac > 0)$. La solución es: $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$
2. Si $m_1 = m_2$ $(b^2 - 4ac = 0)$. La solución es: $y = C_1e^{m_1x} + C_2 \cdot x \cdot e^{m_2x}$
3. Si $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$ $(b^2 - 4ac < 0)$. La solución es: $y = C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 \cdot e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ (var. compleja) Ej $m = 4 \pm \sqrt{-9} = 4 \pm i3$ $\alpha = 4$ $\beta = 3$ y todo lo anterior.

Ejemplo $y'' - 5y' + 6y = 0$

Ecuación auxiliar $m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m-3)(m-2) = 0 \quad m = 2 \quad m_2 = 3 \rightarrow y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

Ejemplo: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Ec. Aux. $m^2 + 4m + 4 = 0 \rightarrow (m+2)^2 = 0 \quad m = -2. \quad y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

Ejemplo $y'' + y' + y = 0$

Ec. Aux. $m^2 + m + 1 = 0 \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejemplo $y'' - 9y = 0 \quad m^2 - 9 = 0 \quad m = \pm 3 \quad y = C_1e^{3x} + C_2^{-3x}$

$y'' + 9y = 0 \quad m^2 = -9 \quad m = \sqrt{-9} = i3 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 3 \quad y = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x)$

$y'' + 9y' = 0 \quad m^2 + 9m = 0 \quad m(m+9) \quad m_1 = -9, \ m_2 = 0 \quad y = C_1 + C_2e^{-9x}$

Problema de Valor Inicial

$ay''+by'+cy=0$: $y(x_0)=y_1$ $\quad y'(x_0)=y^2$

Ejemplo $\quad y''-7y'+12y=0$: $y(0)=1$ $\quad y'(0)=2$

$m^2-7m+12=0$ $\quad (m-4)(m-3)=0$ $\quad \begin{matrix} m_1=4 \\ m_2=3 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}$ $\quad y(0)=1=C_1+C_2$ $\qquad C_1=1-C_2$, $\quad C_1=-1$

$y'=4C_1e^{4x}+3C_2e^{3x}$ $\qquad y'(0)=2=4C_1+3C_2$ $\qquad 2=4(1-C_2)+3C_2$ $\qquad C_2=2$

$\therefore y=-1e^{4x}+2e^{3x}$

Ejercicios

1) $4y''+y'=0$ Ec. Aux. $4m^2+m=0$ $\quad m(4m+1)=0$ $\quad \begin{matrix} m_1=0 \\ m_2=-1/4 \end{matrix}$ $\quad y=C_1+C_2e^{-1/4x}$

2) $y''-36y=0 \to m^2-36m=0$ $\quad m(m-36)$ $\quad \begin{matrix} m=0 \\ m=36 \end{matrix}$ $\quad y=C_1+C_2e^{36x}$

3) $y''-y'-6y=0 \to m^2-m-6=0$ $\quad (m-3)(m+2)=0$ $\quad \begin{matrix} m=3 \\ m=-2 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$

4) $y''-3y'+2y=0 \to m^2-3m+2=0$ $\quad (m-2)(m-1)=0$ $\quad \begin{matrix} m_1=2 \\ m_2=1 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

5) $y''+8y'+16y=0 \to m^2+8m+16=0$ $\quad (m+4)^2=0$ $\quad m=-4$ $\quad y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$

6) $y''-10y'+25y=0 \to m^2-10m+25=0 \to (m-5)^2=0$ $\quad m=5$ $\quad y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}$

7) $12y''-5y'-2y=0 \to 12m^2-5m-2=0$ $\quad m=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot12\cdot-2}}{2\cdot12}$ $\quad \begin{matrix} m_1=2/3 \\ m_2=-1/4 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{\frac{2}{3}\cdot x}+C_2e^{-x/4}$

8) $y''+4y'-y=0 \to m^2+4m-1=0$ $\quad m=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot-1}}{2\cdot1}$ $\quad \begin{matrix} m_1=-2+\sqrt{5} \\ m_2=-2-\sqrt{5} \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{(-2-\sqrt{5})x}+C_2e^{(-2+\sqrt{5})x}$

9) $y''+9y=0 \to m^2+9=0$ $\quad m=\sqrt{-9}=i3$ $\quad \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=3 \end{matrix}$ $\quad y=C_1\cos(3x)+C_2\operatorname{sen}(3x)$

10) $3y''+y=0 \to 3m^2+1=0$ $\quad m=\sqrt{-\frac{1}{3}}=i\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$ $\quad y=C_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x\right)$

11) $y''-4y'+5y=0 \to m^2-4m+5=0$ $\quad m=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot5}}{2}$ $\quad \begin{matrix} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{2x}\cos(x)+C_2e^{2x}\operatorname{sen}(x)$

12) $2y''+2y'+y=0$ $\quad 2m^2+2m+1=0$ $\quad m=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{4}$ $\quad \begin{matrix} \alpha=-1/2 \\ \beta=1/2 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{-1/2x}\cos(\tfrac{1}{2}x)+C_2e^{-1/2x}\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}x)$

13) $3y''+2y'+y=0$. $\quad 3m^2+2m+1=0$ $\quad m=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{6}$ $\quad \begin{matrix} \alpha=-1/3 \\ \beta=\sqrt{2}/3 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{-\frac{x}{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)+C_2e^{-\frac{x}{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$

14) $2y''-3y'+4y=0$ $\quad 2m^2-3m+4=0$ $\quad m=\frac{3\pm7}{4}$ $\quad \begin{matrix} m_1=5/2 \\ m_2=-1 \end{matrix}$ $\quad y=C_1e^{\frac{5}{2}x}+C_2e^{-x}$

15) $y'''-4y''-5y'=0$ $\quad m^3-4m^2-5m=0$ $\quad m(m^2-4m-5)=0$ $\quad m(m-5)(m+1)=0$ $\quad \begin{matrix} m_1=0 \\ m_2=5 \\ m_3=-1 \end{matrix}$ $\quad y=C_1+C_2e^{5x}+C_3e^{-x}$

16) $y'''-y=0$ $\quad m^3-1=0$ $\quad m=1$ $\quad y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3x^2e^{x}$

$(m-3)(m-3)$

17) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0 \to m^3 - 5m^2 + 3m + 9 = 0 \to (m+1)(m^2 - 6m + 9) = 0$

$$\begin{array}{l|l} m^3 - 5m^2 + 3m + 9 & m+1 \\ \hline -m^3 - m^2 & m^2 - 6m + 9 \\ \quad -6m^2 + 3m & \\ \quad +6m^2 + 6m & \\ \qquad 9m + 9 & \\ \qquad -9m - 9 & \\ \end{array}$$

$m_1 = -1 \quad m_{2,3} = 3 \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}$

18) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0 \to m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = 0 \to m^2(m+3) - 4(m+3) \to (m+3)(m^2-4) \to$

$(m+3)(m-2)(m+2) = 0 \to m_1 = -3 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = -2 \quad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$

19) $u''' + u'' - 2u = 0 \to m^3 + m^2 - 2 = 0 \to m^3 - m^2 + 2m^2 - 2 = 0 \quad m^2(m-1) + 2(m^2-1) = 0$

$m^2(m-1) + 2(m-1)(m+1) = 0 \to (m-1)(m^2 + 2m + 2) \quad m = \frac{-2 \pm 2i}{2} \quad \begin{smallmatrix} m_1 = 1 \\ \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{smallmatrix} \quad y = C_1 e^{x} + e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\operatorname{sen}(x)$

20) $x''' - x'' - 4x = 0 \to m^3 - m^2 - 4 = 0 \to m^3 - 2m^2 + m^2 - 4 = 0 \to m^2(m-2) + (m-2)(m+2) = 0 \to$

$(m-2)(m^2 + m + 2) = 0 \quad \begin{smallmatrix} m_1 = 2 \\ \alpha = -1/2 \\ \beta = \sqrt{7}/2 \end{smallmatrix} \to y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-1/2 \cdot x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_3 e^{-1/2 \cdot x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

21) $y''' + 3y'' + 3y + 1 = 0 \to m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0 \quad (m+1)^3 = 0 \quad m = -1 \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$

22) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0 \to m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0 \quad (m-2)^3 = 0 \quad m = 2 \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x}$

23) $y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = 0 \to m^4 + m^3 + m^2 = 0 \to m^2(m^2 + m + 1) \quad \begin{smallmatrix} m_{1,2} = 0 \\ \alpha = -\frac{1}{2} \ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{smallmatrix} \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-1/2 x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4 e^{-1/2 x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right)$

24) $y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 0 \to m^4 - 2m^2 + 1 = 0 \to (m^2 - 1)^2 = 0 \quad \begin{smallmatrix} m^2 = 1 \\ m = \pm\sqrt{1} \end{smallmatrix} \quad y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$

25) $16y^{(4)} + 24y^{(2)} + 9y = 0 \to 16m^4 + 24m^2 + 9 = 0 \to (4m^2 + 3)^2 = 0 \quad \begin{smallmatrix} 4m^2 + 3 = 0 \\ m = \sqrt{\frac{-3}{4}} = i\frac{\sqrt{3}}{4} \end{smallmatrix} \quad y = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + x\left(C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right) + C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)\right)$

26) $y^{(4)} - 7y^{(2)} - 18y = 0 \to m^4 - 7m^2 - 18 = 0 \to m^4 + 2m^2 - 9m^2 - 18 = 0 \to m^2(m^2+2) - 9(m^2+2) = 0 \to (m^2+2)(m^2-9) = 0 \to (m^2+2)(m-3)(m+3) = 0$

$\begin{smallmatrix} m = \sqrt{-2} & m_3 = 3 \\ m = i\sqrt{2} & m_4 = -3 \end{smallmatrix} \to y = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x) + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$

27) $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y^{(3)} - 10y^{(2)} + y^{(1)} + 5y = 0 \to$

$$\begin{array}{l|l} m^5 + 5m^4 - 2m^3 - 10m^2 + m + 5 & m+5 \\ \hline -m^4 - 5m^4 & m^4 - 2m^2 + 1 \\ \quad -2m^3 - 10m^2 & \\ \quad +2m^3 + 10m^2 & \\ \qquad +m + 5 & \\ \qquad -m - 5 & \\ \end{array}$$

$\to (m+5)(m^4 - 2m^2 + 1) = 0$

$\to (m+5)(m^2 - 1)^2 \to m_1 = -5 \quad m = \pm 1.$

$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + x(C_3 e^{-x} + C_4 e^{x})$

28) $2x^{(5)} - 7x^{(4)} + 12x^{(3)} + 8x^{(2)} \to 2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = 0 \quad m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = 0$

$$\begin{array}{l|l} 2m^3 - 7m^2 + 12m + 8 & 2m+1 \\ \hline -2m^3 - m^2 & m^2 - 4m + 8 \\ \quad -8m^2 & \\ \quad +8m^2 + 4m & \\ \qquad 16m + 8 & \\ \qquad -16m - 8 & \\ \end{array}$$

$m^2(2m+1)(m^2 - 4m + 8) \quad \begin{smallmatrix} m_{1,2} = 0 \\ m_3 = -1/2 \end{smallmatrix} \quad m_{4,5}: \begin{smallmatrix} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{smallmatrix} \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-1/2 x} + C_4 e^{2x}\operatorname{sen}(2x) + C_5 e^{2x}\cos(2x).$

35) $y^{(3)} + 12y^{(2)} + 36y^{(1)} = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -7. \to m^3 + 12m^2 + 36m = 0 \quad m(m^2 + 12m + 36) = 0 \quad m(m+6)^2$

$\begin{smallmatrix} m_1 = 0 \\ m_{2,3} = -6 \end{smallmatrix} \quad y = C_1 + C_2 e^{-6x} + C_3 x e^{-6x} \quad y(0) = 0 = C_1 + C_2 \quad y' = -6C_2 e^{-6x} + C_3 e^{-6x} - 6C_3 x e^{-6x} \quad y'(0) = 1 = -6C_2 + C_3$

$y'' = 36C_2 e^{-6x} - 12C_3 e^{-6x} + 36x C_3 e^{-6x} \quad y''(0) = -7 = 36C_2 - 12C_3 \therefore 0 = C_1 + C_2,\ 1 = -6C_2 + C_3,\ -7 = 36C_2 - 12C_3 \therefore$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 36 & -12 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 3 & -1 & -\frac{7}{12} \end{array}\right] \to$$

$\therefore$

Reducción de Orden

Sea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y y_1 una solución de esta ecuación, la segunda solución y_2 que es L.I. con y_1 está dada por:

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx$$

Ejemplo

$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ $\quad y_1 = x^2$ es una solución de la ecuación

$y'' - 3x^{-1}y' + 4x^{-2}y = 0$

$$y_2 = x^2\int \frac{e^{-\int \frac{3}{x}dx}}{x^4}dx = x^2\int \frac{x^3}{x^4}dx = x^2\cdot\int \frac{1}{x}dx \quad y = x^2\,Ln(x)$$

EDL No-Homogenea

Considere la ED $ay'' + by' + cy = g(x)$

1. Considere la ED homogenea $ay'' + by' + cy$. Se llama complementaria y se denota y_c
2. Encuentre una solución partiendo de la ED y denotela y_p. Hay dos tecnicas para solucionar
   a) Coeficientes indeterminados
   b) Variación de parametros
3. La solución general es $y = y_c + y_p$

Coeficientes Indeterminados

Funciona cuando:

1. Polinomios x^2, x^3
2. $sen(kx)$
3. $cos(kx)$
4. e^{kx}
5. Suma de 1 2 3 4
6. Escalares de 1 2 3 4
7. Multiplicación 1 2 3 4

Ej) $y'' - 3y' + 2y' = x^2 - 3x$.

$g(x) = x^2 - 3x$ es de grado 2. Se supone que $y_p = Ax^2 + Bx + C \quad y_p' = 2Ax + B \quad y_p'' = 2A$

$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 3x$

$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = x^2 - 3x$

$A = 1/2 \quad C = -1/2 \quad B = 0 \qquad y_p = \frac{1}{2}x^2 - 1/2$

1. $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad m^2 - 3m + 2 = 0 \quad m_1 = 2 \quad m_2 = 1 \qquad y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{x}$

Luego

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + C_1e^{2x} + C_2e^{x}$$