Transformada de Fourier – FFT – STFT

Prof. Jesús A. Vega
Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología
Universidad del Rosario

Resumen:

Tiempo Continuo

$$x(t) = e^{jkw_0 t}$$

$$\text{No se repiten}\begin{cases} \varphi_0(t) = e^{-j0w_0 t} \\ \varphi_1(t) = e^{-j1w_0 t} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_\infty(t) \end{cases}$$

Existen infinitas exp. Complejas de t.c. Relacionadas armónicamente

Tiempo Discreto

$$x[n] = e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\text{No se repiten}\begin{cases} \varphi_0[n] = e^{-j0\Omega_0 n} \longrightarrow \varphi_N[n] = e^{-jN\Omega_0 n} \\ \varphi_1[n] = e^{-j1\Omega_0 n} \longrightarrow \varphi_{N+1}[n] = e^{-j(N+1)\Omega_0 n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_{N-2}[n] = e^{-j(N-2)\Omega_0 n} \longrightarrow \varphi_{2N-2}[n] = e^{-j(2N-2)\Omega_0 n} \\ \varphi_{N-1}[n] = e^{-j(N-1)\Omega_0 n} \longrightarrow \varphi_{2N-1}[n] = e^{-j(2N-1)\Omega_0 n} \end{cases}$$

Existen N exp. Complejas de t.d. Relacionadas armónicamente.

Donde N es el periodo.

Fourier - Representación

Fourier - Representación

Series de Fourier

Señales Periódicas

Transformada de Fourier

Señales Periódicas y Aperiódicas.

Transformada Rápida de Fourier(FFT)

Algoritmo eficiente

Establece

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jkw_0 t}\,dt$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

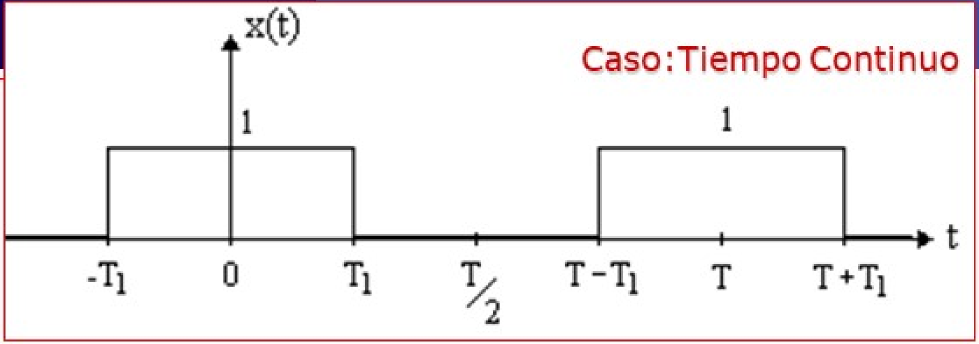
Coeficientes de la serie de Fourier

$$\begin{cases} a_0 \rightarrow \text{Componente DC} \\ a_1 \rightarrow \text{Primer armónico} \\ a_2 \rightarrow \text{Segundo armónico} \\ \vdots \end{cases}$$

Para obtener(reconstruir) una señal con base en exponenciales, es necesario ubicar un escalamiento a cada una de esas exponenciales

Transformada Continua de Fourier

Ejemplo: Considere la señal



Los coeficientes de la Serie de Fourier para $x(t)$ son $a_k = \dfrac{sen(k\omega o T_1)}{\pi k}$

Esto hace que su transformada de Fourier sea

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{sen(k\omega o T_1)}{\pi k}\delta(\omega - k\omega o)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2sen(k\omega o T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega o)$$

$Si \quad T = 4T_1$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2sen\left(\frac{k2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)}{k}\delta(\omega - k\omega o)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2sen\left(k\pi/2\right)}{k}\delta(\omega - k\omega o)$$

$$Si \quad \omega = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \;\Rightarrow\; X(j\omega) = \pi\cdot\delta(\omega)$$

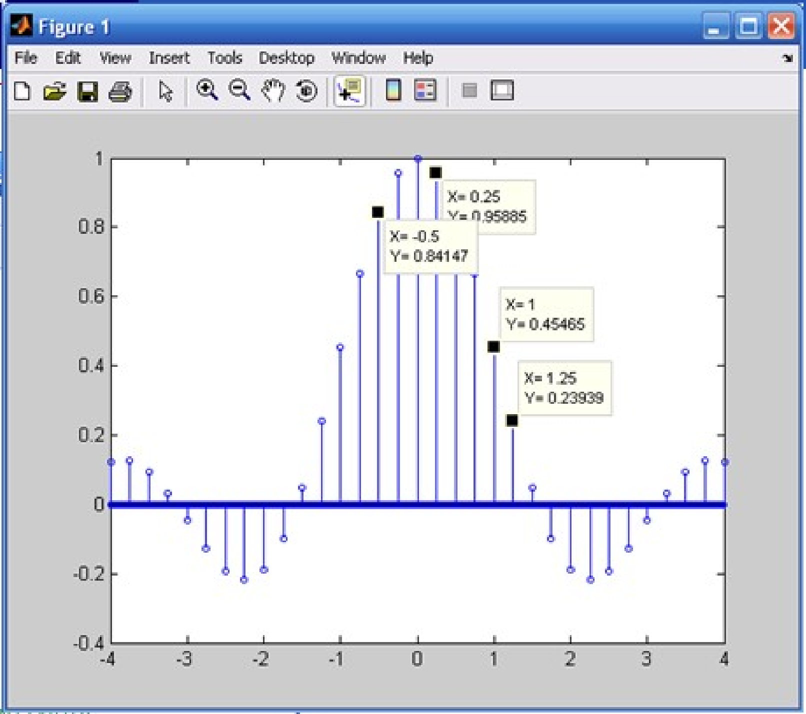
$$Si \quad \omega = \omega 0 \;\Rightarrow\; k = 1 \;\Rightarrow\; X(j\omega) = 2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta(\omega - \omega o) = 2\delta(\omega - \omega o)$$

$$Si \quad \omega = 2\omega 0 \;\Rightarrow\; k = 2 \;\Rightarrow\; X(j\omega) = \frac{2sen(\pi)}{2}\delta(\omega - 2\omega o) = 0\delta(\omega - 2\omega o)$$

Transformada Continua de Fourier

C:\Carpeta_jesus\Semestre_I_2008\Senales_y_sistemas_I_2008\matlab\trans_fourier_puls

```
clear all
close all

m=2;
T=4;%PERIODO
T1=T/m;

w0=1/T;%FRECUENCIA DE LA SEÑAL X(T)

w=-8:(w0/1000):8;%se define el eje de frecuencia

cont=1;%CONTADOR
x=zeros(1,length(w));
for paso=1:1:length(w);

    for k=-50:1:50,%puntos de la sumatoria PARA "k"
        if w(paso)==(k*w0),%se compara el argumento(SEÑAL IMPULSO UNITARIO)
            if k==0,
               kk=(2*T1)/T;
            else
               kk=(2*sin(k*w0*T1))/(k*w0*T);%si el argumento de la función impulso es cero
            end
        else
            kk=0;%si el argumento de la función impulso es diferente de cero
        end
        x(1,cont)=kk+x(1,cont);%se suman todos los valores
    end
    cont=cont+1;
end
s1=x;%se asigna la variable de salida de la función

dd=stem(w,s1);%OBJETO GRAFICO DE TIEMPO DISCRETO
set(dd,'markersize',2)%SE AJUSTA EL TAMAÑO DE CADA IMPULSO
```



Short-Time Fourier Transform **(Transformada de Fourier de Tiempo Corto)**
- Señales de tiempo continuo y señales de tiempo discreto.

método → *Clásico* → **análisis tiempo-frecuencia**

señal
s(t)

Multiplica - ventana de análisis w(t-τ) → **Transformada de Fourier de la señal ventaneada**

$$x(t) = s(t)w(t-\tau)$$

Si se selecciona una función Gausiana como ventana w(t-τ), se tiene la ***Transformada de Gabor***

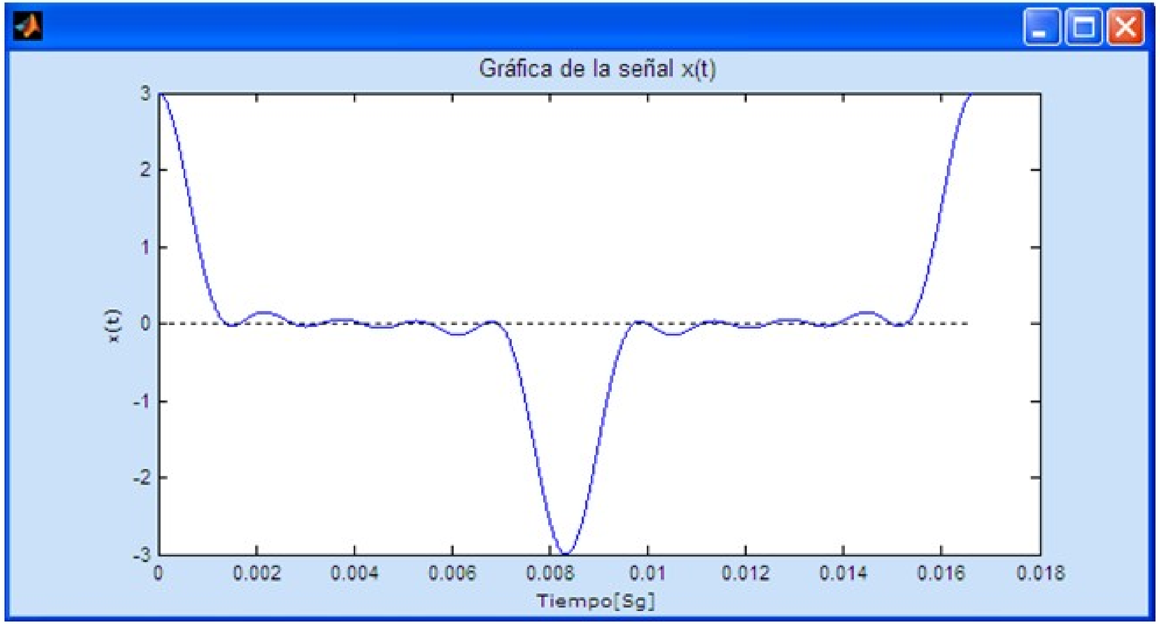
w(t) es suprimir a s(t) fuera de cierta región tal que la Transformada de Fourier mantiene un *espectro local*

Se tiene una señal x(t), dada por

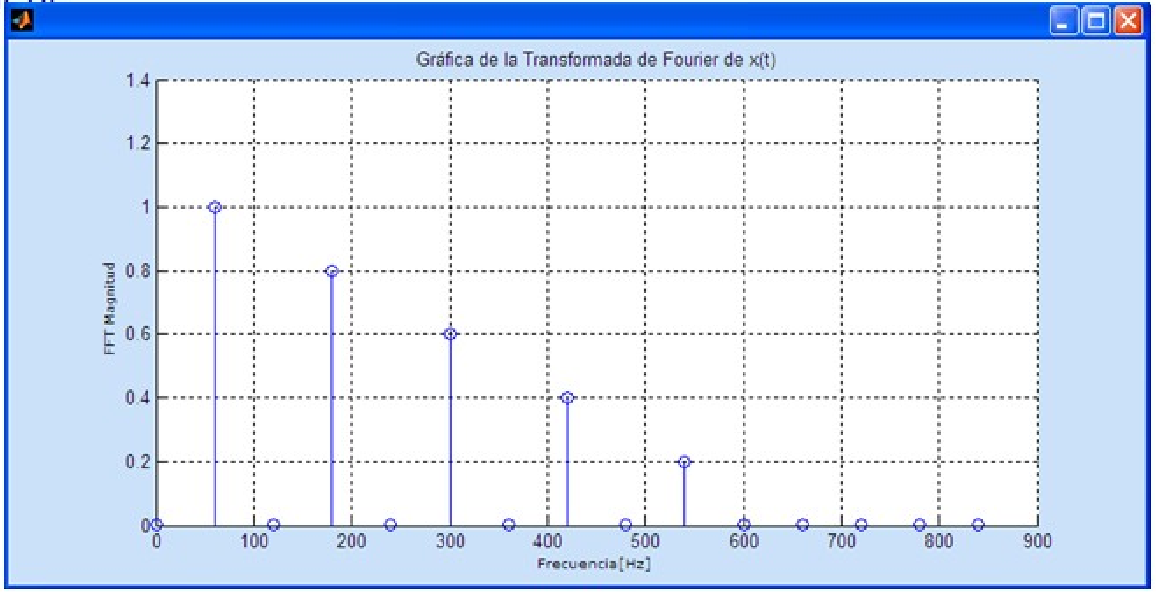
$$x(t)=\sum_{\substack{k=1\\ k\,impar}}^{9} A_i Cos\left(k*377*t\right) \quad A_i=\{1\,,0.8\,,0.6\,,0.4\,,0.2\} \quad con \quad i=1\,,2\,,3\,,4\,,5$$

Caso I) La gráfica de la señal es,(**para un período**)

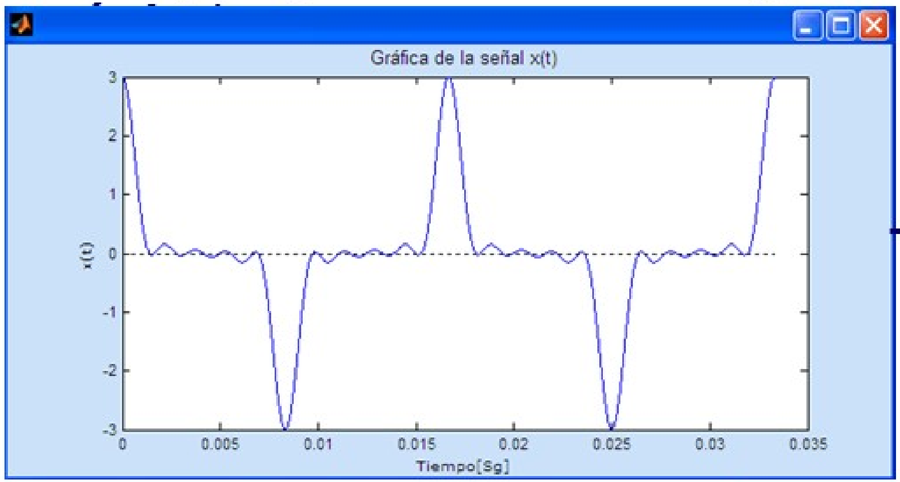
Armonicas_fft.m

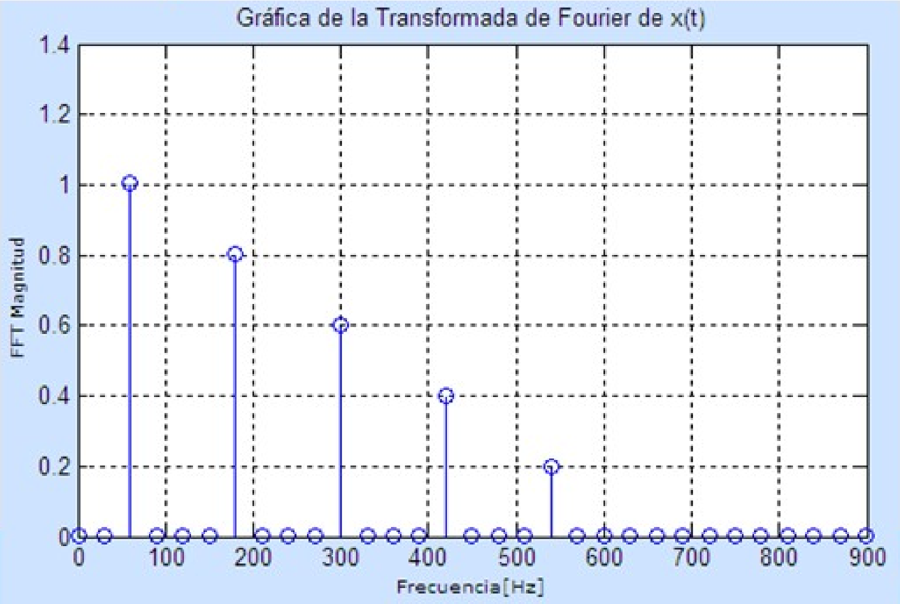


Transformada de Fourier al conjunto de puntos, se tiene

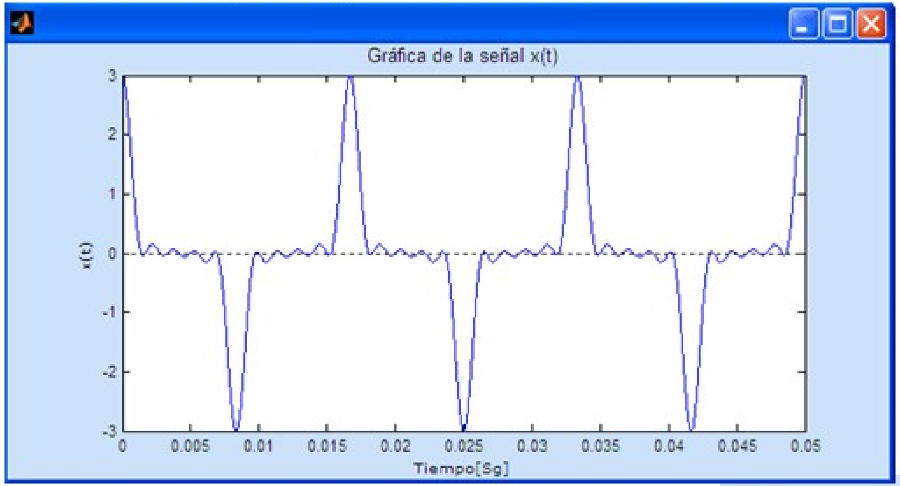


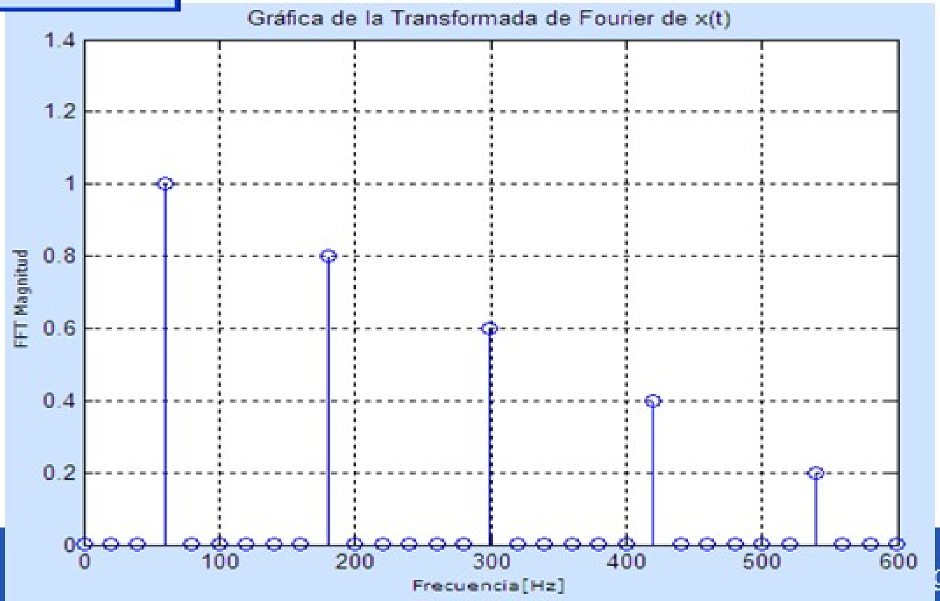
Caso II) La gráfica de la señal es:(**para dos**





Caso III) La gráfica de la señal es,(**para tres**



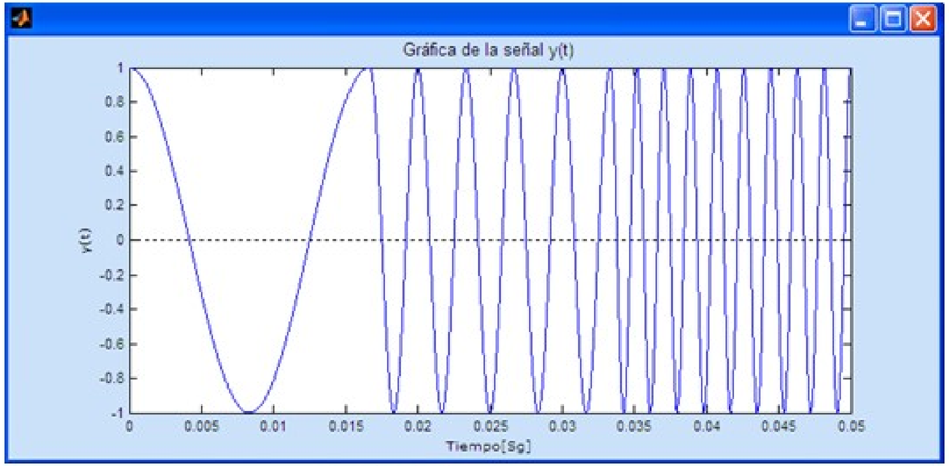


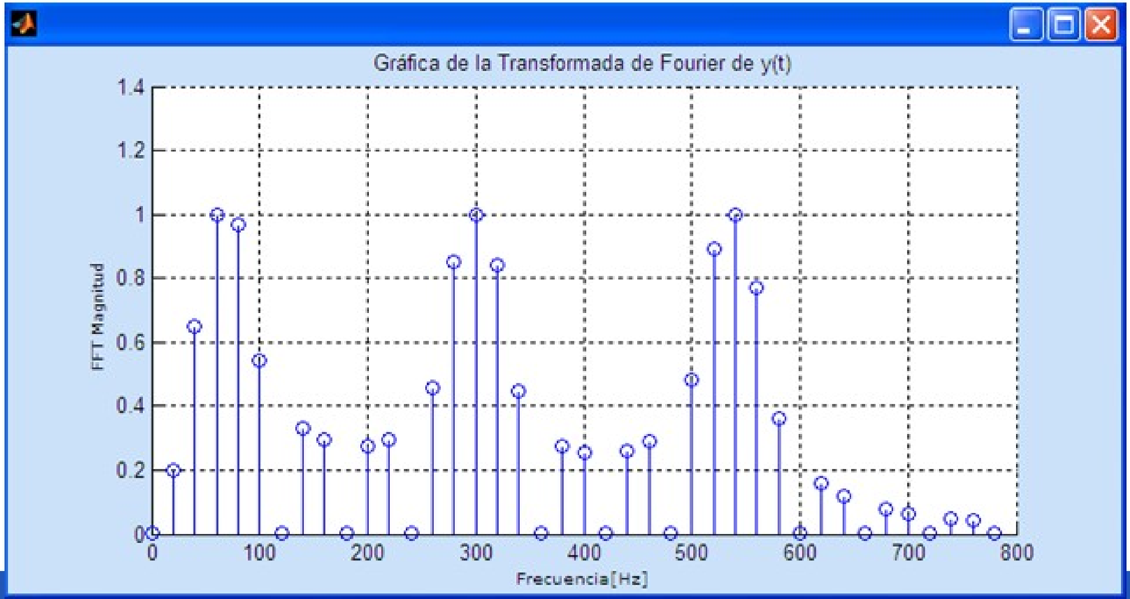
tienen las siguientes características:

- Para todos los casos se muestra las frecuencias involucradas(cuya magnitud de Fourier es diferente de cero), las cuales son f=[60, 180, 300, 420, 540][Hz].
- · La componente DC es cero en todos los casos.
- · Para el caso II) se muestran las frecuencias y además, aparece una frecuencia adicional (entre 0[Hz] y 60[Hz]). Esta corresponde a 30 [Hz].
- Para el caso III) aparecen dos componentes entre 0[Hz] y 60[Hz], que corresponden a 20[Hz] y 40[Hz].
- · Este comportamiento seguirá avanzando a medida que aumentamos el número de períodos.
- · Esto indica que la tranformada de fourier da información con respecto al contenido de frecuencias que existen, pero no da información con respecto a en donde están localizadas esas frecuencias en el tiempo.

Caso en el cual se tiene una señal y(t) que tiene la siguiente forma :

[60 300 540][Hz]





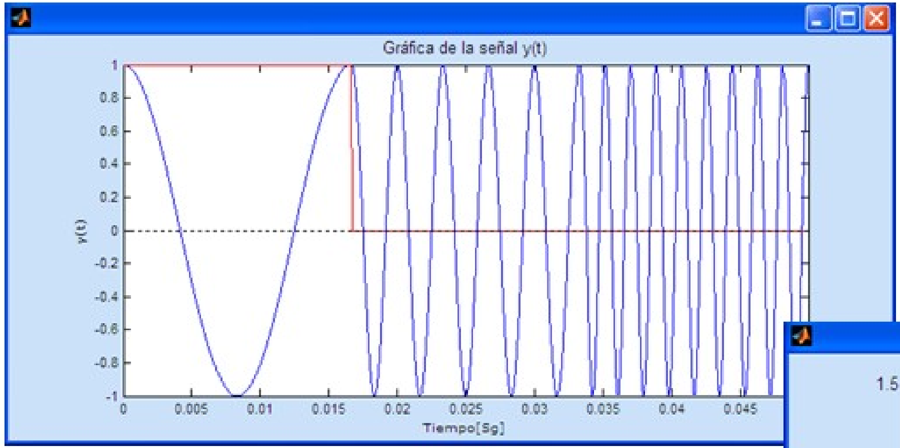
Se observa lo siguiente:

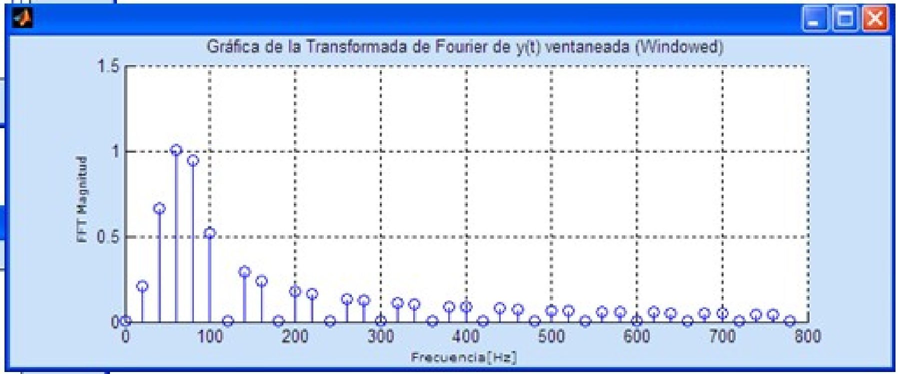
- La FFT provee información de todas las frecuencias de la señal.
- La FFT no provee información de la ***ubicación en tiempo*** de las frecuencias.

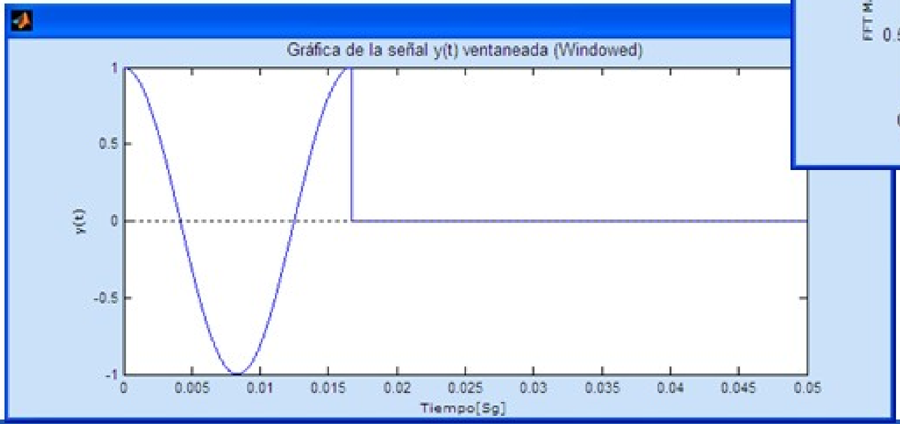
6. *Transformada de Fourier de Tiempo Corto.*

Tomamos una ventana rectangular w(t), la cual podem desplazar sobre el eje de tiempo haciendo w(t-t)

$$w(t) = \begin{cases} 1 & t_1 \le t \le t_2 \\ 0 & resto \end{cases}$$







Se observa que en f=60[Hz] aparece magnitud 1, lo que concuerda con el espectro de la señal y(t) sin ventaneo

se desplaza la señal ventana rectangular a la derecha w(t-t), tal y como se muestra a continuación: