MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Análisis Real
2023-1

Parcial 1: Completitud en $\mathbb{R}$ y finitud

21 de Febrero de 2023

Indicaciones generales

- Para la solución del parcial disponen de una hora y treinta minutos.
- El parcial es individual y no se permite el uso de dispositivos electrónicos, libros o apuntes.
- Todos los puntos deben estar debidamente justificados.

1. Sean a y b números reales. Demuestre que:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

2. Sean A y B subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$. Demuestre que $A \cup B$ es acotado inferiormente y que:

$$Inf(A \cup B) = min\{Inf(A), Inf(B)\}$$

3. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Para cada número real α existe un número natural k tales que $\alpha \leq k$.

   b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$, tales que $0 < \frac{1}{k} < \epsilon$.

4. Sean A y B conjuntos finitos y no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que $A \cup B$ es finito.

Solución primer parcial de análisis real

① Sean a y b números reales. Demuestre que $||a|-|b|| \leq |a-b|$

<u>Demostración</u>: Debemos probar que $\overbrace{-|a-b| \leq |a|-|b|}^{②} \leq |a-b|$, donde ① es $\underbrace{|a|-|b| \leq |a-b|}_{①}$.

$$|a| = |a-b+b| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desigualdad triangular}}}{\leq} |a-b|+|b| \Rightarrow |a| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow \underbrace{|a|-|b| \leq |a-b|}_{①}$$

$$|b| = |b-a+a| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desigualdad triangular}}}{\leq} |b-a|+|a| = |a-b|+|a| \Rightarrow |b| \leq |a-b|+|a|$$

$$\Rightarrow \underbrace{-|a-b| \leq |a|-|b|}_{②}$$

De ① y ②: $-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b| \Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b|$

② Sean A y B conjuntos acotados de $\mathbb{R}$. Demuestre que $A \cup B$ es acotado inferiormente y que $\text{Inf}(A\cup B) = \min\{\text{Inf}(A), \text{Inf}(B)\}$

<u>Demostración</u>: • Por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ existen $\text{Inf}(A)$ e $\text{Inf}(B)$.

Si $x \in A\cup B \Rightarrow x \in A$ o $x \in B$.
- $x \in A \Rightarrow \text{Inf}(A) \leq x$
- $x \in B \Rightarrow \text{Inf}(B) \leq x$

Como $\min\{\text{Inf}(A), \text{Inf}(B)\} \leq \text{Inf}(A), \text{Inf}(B) \Rightarrow \min\{\text{Inf}(A), \text{Inf}(B)\} \leq x$.

Por lo tanto, $A\cup B$ esta acotado inferiormente.

• Sea $\varepsilon > 0$ y $m = \min\{\text{Inf}(A), \text{Inf}(B)\}$: veamos que es posible encontrar $x \in A\cup B$, tales que $x < m+\varepsilon$.

<u>caso I</u>: $m = \text{Inf}(A)$
Entonces, existe $x \in A$ tq $x < m+\varepsilon \Rightarrow$ existe $x \in A\cup B$ tq $x < m+\varepsilon$.

<u>caso II</u>: $m = \text{Inf}(B)$
Entonces, existe $x \in B$ tq $x < m+\varepsilon \Rightarrow$ existe $x \in A\cup B$ tq $x < m+\varepsilon$.

Así, deducimos que $\text{Inf}(A\cup B) = \min\{\text{Inf}(A), \text{Inf}(B)\}$

③ Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a. Para cada número real α existe un número natural K tq $\alpha \leq K$.
b. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{K} < \varepsilon$.

a⇒b: Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, luego por a) existe $K \in \mathbb{N}$ tq $\frac{1}{\varepsilon} < K \Rightarrow \frac{1}{K} < \varepsilon$ //

b⇒a: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Sea $\alpha \leq 0$: Entonces, existe $0 \in \mathbb{N}$ tq $\alpha \leq 0$.
- Sea $\alpha > 0$: Entonces $\frac{1}{\alpha} > 0$ y por b) existe $K \in \mathbb{N}$ tq

$$\frac{1}{K} < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha < K \Rightarrow \alpha \leq K$$ //

④ Sean A y B conjuntos finitos y no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$.
Demuestre que $A \cup B$ es finito.

Demostración: Como A y B son finitos, existen funciones biyectivas $f: A \to \mathbb{N}_n$ y $g: B \to \mathbb{N}_m$. Definamos: $h: A \cup B \to \mathbb{N}_{n+m}$, como sigue

$$A \cup B \xrightarrow{h} \mathbb{N}_{n+m}$$
$$x \longmapsto f(x), \quad x \in A$$
$$x \longmapsto n + g(x), \quad x \in B.$$

Debemos verificar que h es biyectiva

- Inyectividad: Sean $x, y \in A \cup B$, tales que $h(x) = h(y)$.

Caso I: $x, y \in A \Rightarrow h(x) = h(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, puesto que f es 1-1.
Caso II: $x, y \in B \Rightarrow h(x) = h(y) \Rightarrow n + g(x) = n + g(y) \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow \boxed{x = y}$ puesto que g es 1-1
Caso III: $x \in A$ y $y \in B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h(x) = f(x) \leq n \\ h(y) = n + g(y) > n \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) = h(y)$ NO es posible

Con lo cual concluimos del Caso I y II que h es 1-1

- Sobreyectividad: Sea $K \in \mathbb{N}_{n+m}$

Caso I: $K \leq n \Rightarrow$ existe $x \in A$ tq $f(x) = K$, puesto que f es sobre.
Así, existe $x \in A \cup B$ tq $h(x) = f(x) = K$.
Caso II: $K > n \Rightarrow$ existe $x \in B$ tq $g(x) = K - n$, ya que g es sobre.
Así, existe $x \in A \cup B$ tq $h(x) = n + g(x) = n + K - n = K$

(4) Otra forma: Si A y B son finitos existen $f: \mathbb{N}_n \longrightarrow A$ y $g: \mathbb{N}_m \longrightarrow B$, biyectivas. Se define $h: \mathbb{N}_{n+m} \longrightarrow A \cup B$, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_{n+m} &\xrightarrow{h} A \cup B \\ x &\longmapsto f(x), \quad 1 \leq x \leq n \\ x &\longmapsto g(x-n), \quad n < x \leq n+m \end{aligned}$$

Veamos que h es 1-1: Sean $x, y \in \mathbb{N}_{n+m}$ tq $x \neq y$.

- Caso I: $1 \leq x, y \leq n$. Entonces, $h(x) = f(x)$ y $h(y) = f(y)$. Como f es 1-1 $\Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow h(x) \neq h(y)$.

- Caso II: $n < x, y \leq n+m$. Entonces, $h(x) = g(x-n)$ y $h(y) = g(y-n)$, como $x \neq y \Rightarrow x-n \neq y-n \Rightarrow g(x-n) \neq g(y-n)$, puesto que g es 1-1. Luego $h(x) \neq h(y)$.

- Caso III: $1 \leq x \leq n$ y $n < y \leq n+m$. En este caso, $h(x) = f(x) \in A$ y $h(y) = g(x-n) \in B$ y como $A \cap B \neq \phi$, entonces $h(x) \neq h(y)$.

Veamos que h es sobre:

Sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$.

- Si $x \in A$, existe $1 \leq k \leq n$ tq $f(k) = x$, puesto que f es sobre. Luego $f(k) = h(k) = x$.

- Si $x \in B$, existe $1 \leq k \leq m$ tq $g(k) = x$, puesto que g es sobre. Luego, $h(k+n) = g(k+n-n) = g(k) = x$.

Por lo tanto, h es biyectiva. Así, $A \cup B$ es finito.

(1) Otra forma: Veamos que $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

Caso I: $a = 0 = b$.

$$\left.\begin{aligned} ||a|-|b|| &= ||0|-|0|| = |0-0| = |0| = 0 \\ |a-b| &= |0-0| = |0| = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ||a|-|b|| = |a-b| \Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b|$$

Caso II: $a, b > 0$

$||a|-|b|| = |a-b| \Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b|$

Caso III: $a, b < 0$

$||a|-|b|| = |-a-(-b)| = |-a+b| = |(-1)(a-b)| = |-1||a-b| = |a-b| \Rightarrow$

$||a|-|b|| = |a-b| \Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b|$

Caso IV: $a > 0,\ b < 0$

$||a|-|b|| = |a-(-b)| = |a+b| = \begin{cases} a+b, & \text{si } a+b \geq 0 \\ -(a+b), & \text{si } a+b < 0 \end{cases}$

$|a-b| = a-b$

, Como $b < 0 \Rightarrow b \leq -b$ y como $a \leq a \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} b \leq -b \\ \underline{a \leq a} \\ \boxed{a+b \leq a-b} \end{array}$$

- De otra parte: $a > 0$ y $-b > 0 \Rightarrow a-b > 0$

$\Rightarrow a-b > -(a+b)$ si $a+b < 0$

Por lo tanto, $||a|-|b|| \leq a-b$.

Caso V: $a < 0,\ b > 0$, es similar al anterior