Señales y Sistemas I
cod: 2016506

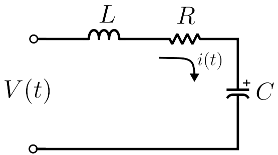
Claudia Caro Ruiz

20 de octubre de 2021

Modelamiento

Por motivos prácticos, los ingenieros debemos utilizar modelos matemáticos que “abstraen” el comportamiento de un sistema físico.

Ejemplo



Ley de Kirchkoff

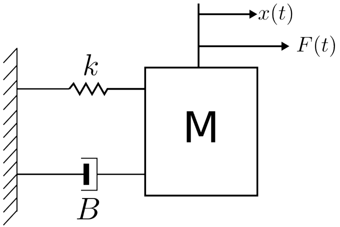
$$V(t) - V_L(t) - V_R(t) - V_C(t) = 0$$

$$V_i(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$V_R(t) = Ri(t)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{\,}\int^{t} i(\tau)\,d\tau$$

Ejemplo



Segunda Ley de Newton

$$F(x) - \overbrace{M\ddot{x}(t)}^{Inercia} - \underbrace{B\dot{x}(t)}_{Friccion} - \overbrace{kx(t)}^{Resorte} = 0$$

Notación

$$\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt}$$

- Adicionalmente, se debe contar con un modelo matemático de las “Señales” que intervienen en un sistema.
- En el ejemplo anterior, se cuenta con un modelo matemático de un sistema M-R-A donde $F(x)$ y $x(t)$ son “modelos” de las señales físicas de fuerza y de posición.
- En otras palabras, teniendo un modelo de una señal $F(x)$, se resuelve el “modelo” matemático para obtener un modelo de la señal de posición $x(t)$.
- La utilidad de dicho modelo depende de su precisión, i.e. que tan bien describe el sistema y las señales físicas.

Señales

Algunas definiciones son:

- Algo que transporta algún tipo de información.
- Se presenta como consecuencia, o son la causa de un evento.
- En general (practicidad) son medibles y representan una cantidad física.

Definición

Una Señal es una "función" de una variable independiente, por lo general el tiempo. Una señal se denota como, por ejemplo, $x(t)$*, donde* x *es la "medición" y* t *representa la variable independiente, el tiempo.*

Definición

Una "función" es una tripla $(f, \mathcal{D}, \mathcal{R})$, donde $f(\cdot)$ es la función, $\mathcal{D}$ es el dominio y $\mathcal{R}$ es el rango, tal que $f(\cdot)$ es un mapeo desde el dominio hasta el rango

$$f(t) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{R}$$

- En ingeniería, el dominio se asume como el espacio (unidimensional) de los reales positivo, tal que la variable independiente (el tiempo)

$$t \in \mathbb{R}^+$$

- Las señales se pueden clasificar según el tipo de dominio y rango
    - Continuas
    - Discretas
    - Digitales

Transformaciones

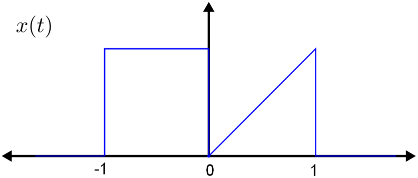
- Inicialmente consideraremos señales escalares, reales, tales que $t \in (-\infty, \infty)$ es decir $(f, \mathcal{D}, \mathcal{R}) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- A continuación se estudiará seis transformaciones básicas, 3 en tiempo y 3 en amplitud.
- Las transformaciones básicas (en tiempo o amplitud) son:
  1. Revertimiento (*"Reversal"*)
  2. Escalamiento (*"Scaling"*)
  3. Corrimiento (*"Shift"*)

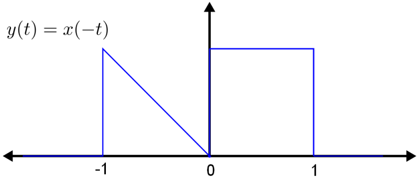
Las transformaciones en tiempo se estudiarán a continuación

Revertimiento en tiempo

Considere la señal $x(t)$. Defina una nueva señal $y(t)$ como:

$$y(t) = x(-t)$$





Escalamiento en el tiempo

- Considere la señal $x(t)$. Defina una nueva señal $y(t)$ como:

$$y(t) = x(at) \qquad a > 0$$

- Se dice que la señal se “comprime” en el tiempo si $a > 1$.
- Se dice que la señal se “expande” en el tiempo si $a < 1$.

Escalamiento en el tiempo

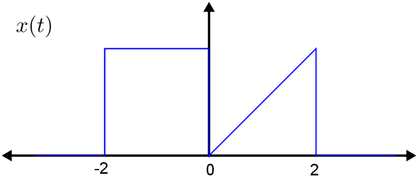
- Considere la señal $x(t)$. Defina una nueva señal $y(t)$ como:

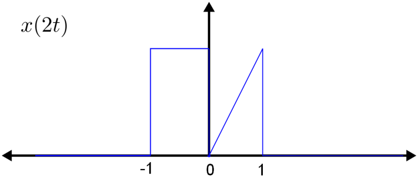
$$y(t) = x(at) \qquad a > 0$$

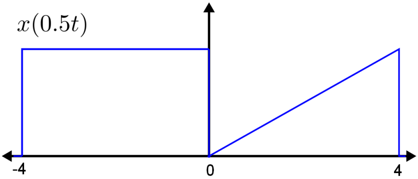
- Se dice que la señal se "comprime" en el tiempo si $a > 1$.
- Se dice que la señal se "expande" en el tiempo si $a < 1$.

Nota

Si $a < 0$, no solo se escala, sino que adicionalmente se revierte la señal


$x(t)$
-2
0
2


$x(2t)$
-1
0
1


$x(0.5t)$
-4
0
4

Corrimiento en tiempo

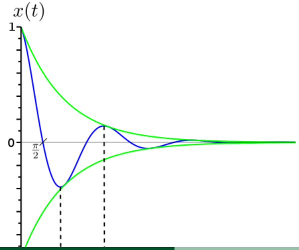
- Considere la señal $x(t)$. Defina una nueva señal $y(t)$ como:

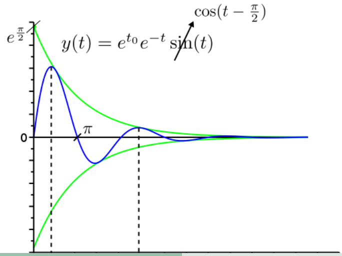
$$y(t) = x(t + t_0)$$

- Se dice que hay un "retardo" en tiempo si $t_0 < 0$.
- Se dice que hay un "adelanto" en tiempo si $t_0 > 0$.

$$x(t) = e^{-t}\cos(t) \qquad y = x(t + t_0) = e^{t_0}e^{-t}\cos(t + t_0)$$

$$\text{Si} \quad t_0 = -\pi/2$$





Las transformaciones pueden ser generalizadas como:

$$y(t) = x(at + b) \qquad \text{con} \qquad a, b \quad \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Considere la señal $x(t)$, y realice una transformación en tiempo tal que el resultado sea una señal revertida, "comprimida" a la mitad del tiempo original y con un retardo de 2 segundos.

- Tal transformación puede ser realizada con valores $a = -2 \quad b = 2$, tal que:

$$y(t) = x(-2t - 2)$$

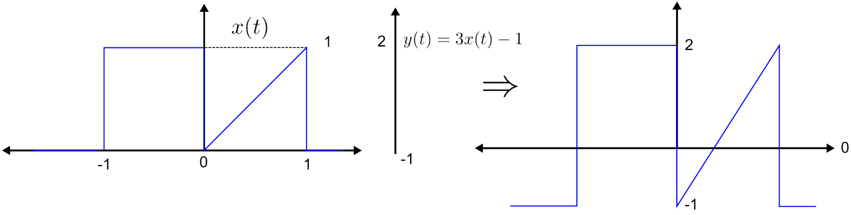
Ejercicio

Graficar la función $y(t)$

- Las transformaciones en amplitud son análogas a las de tiempo, pero el cambio se da en el rango de la señal (no en el Dominio).
- Una transformación general (revertimiento, escalamiento y corrimiento) se define como:

$$y(t) = Ax(t) + B \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

- Podemos seguir una metodología similar para graficar una señal transformada en amplitud.



Características de la Señal

Señales Pares e Impares

- Una señal es simétrica par (even) si:

$$x_e(t) = x_e(-t)$$

- Una señal es simétrica impar (odd) si:

$$x_o(t) = -x_o(-t)$$

- Cualquier señal $x(t)$ puede representarse como la suma de una señal par y otra impar.
- Observe que:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Prueba

- $x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t)$
- Sumando $x(t)$

$$x(t) + x(-t) = 2x_e(t) \Rightarrow x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

- De forma similar, pero restando $x(t)$ y $x(-t)$

$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Nota

El promedio de una señal se define como

$$x(t)_{\text{avg}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

- *Si $x = x_e + x_o$, el promedio está dado por x_e ya que la integral de x_o es igual a 0.*

Propiedades de las señales par/impar

1. La suma de dos funciones par, es par.
2. La suma de dos funciones impar, es impar.
3. La suma de una función par y una impar, no es par o impar.
4. El producto de dos funciones par es, es par.
5. El producto de dos funciones impar, es par.
6. El producto de una función par y una impar, es impar.

Propiedades de las señales par/impar

1. La suma de dos funciones par, es par.
2. La suma de dos funciones impar, es impar.
3. La suma de una función par y una impar, no es par o impar.
4. El producto de dos funciones par es, es par.
5. El producto de dos funciones impar, es par.
6. El producto de una función par y una impar, es impar.

Ejercicio

Demuestre las seis propiedades

Señales Periódicas

- Por definición una señal es periódica si:

$$x(t) = x(t+T) \qquad T > 0 \quad , \quad \forall t$$

- Una señal que no es periódica se denomina *aperiódica*.
- Ahora considere un instante de tiempo $(t+T)$. Si la señal es periódica, entonces

$$x(t+T) = x(t+2T) \Rightarrow x(t) = x(t+2T)$$

- Se puede concluir que una señal periódica satisface la identidad:

$$x(t) = x(t+nT) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- El valor mínimo del periodo $T > 0$, tal que $x(t) = x(t+T)$, se denomina el *periodo fundamental*.

Nota

- *Un caso particular de una señal periódica es una señal constante, donde*
$$x(t) = x(t+T) \quad \forall \quad T$$
- *Por lo tanto su periodo está indefinido.*
- *Una forma de definir una señal constante es:*
$$x(t) = A\cos(\omega t)$$
donde $\omega \to 0$.
- *Si definimos el periodo como* $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *podemos ver que el periodo de una señal constante es desacotado.*

Ejemplo

- Considere la señal
$$x(t) = e^{\sin(t)}$$
- La señal es periódica ya que:
$$x(t+T) = e^{\sin(t+T)} = e^{\sin(t)} = x(t)$$
- El periodo de la señal es $T = 2\pi$, ya que este es el periodo de la señal $\sin(t)$

Ejemplo

- Considere la señal
$$x(t) = e^{\sin(t)}$$
- La señal es periódica ya que:
$$x(t+T) = e^{\sin(t+T)} = e^{\sin(t)} = x(t)$$
- El periodo de la señal es $T = 2\pi$, ya que este es el periodo de la señal $\sin(t)$

Ejercicio

Demuestre que la señal $x(t)$ es aperiódica
$$x(t) = te^{\sin(t)}$$

Ejemplo

- Considere la señal
$$x(t) = e^{\sin(t)}$$
- La señal es periódica ya que:
$$x(t+T) = e^{\sin(t+T)} = e^{\sin(t)} = x(t)$$
- El periodo de la señal es $T = 2\pi$, ya que este es el periodo de la señal $\sin(t)$

Ejercicio

Demuestre que la señal $x(t)$ es aperiódica
$$x(t) = te^{\sin(t)}$$

- En algunos casos debemos considerar la suma de señales periódicas.
- Una pregunta interesante es si esta suma produce una señal periódica.

Suma de señales periódicas

- La suma de señales periódicas es una señal periódica *sii* la división de los periodos de cada señal es un número racional, *i.e.* se puede expresar como la fracción de dos enteros.
- La periodicidad de la suma de señales periódicas se puede establecer de la siguiente manera:
  1. Encuentre las fracciones $\frac{T_{01}}{T_{0i}} \quad \forall \quad i \neq 1$, y exprésela como una fracción de enteros (si esto no es posible, la señal resultante es aperiódica).
  2. Elimine múltiplos comunes entre el numerador y el denominador en cada una de las fracciones $\frac{T_{01}}{T_{0i}}$.
  3. El periodo fundamental está dado por $T_0 = k_0 T_{01}$, donde k_0 es el mínimo común múltiplo de los denominadores de todas las fracciones.

Ejemplo

- Considere la señal $v(t)$ como la suma de tres funciones periódicas dadas por

$$x_1 = \cos(3{,}5t) \qquad x_2 = \sin(2t) \qquad x_3 = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

Ejemplo

- Considere la señal $v(t)$ como la suma de tres funciones periódicas dadas por

$$x_1 = \cos(3{,}5t) \qquad x_2 = \sin(2t) \qquad x_3 = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

- Las fracciones de los periodos están dadas por

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{4}{7} \qquad \frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo

- Considere la señal $v(t)$ como la suma de tres funciones periódicas dadas por

$$x_1 = \cos(3{,}5t) \qquad x_2 = \sin(2t) \qquad x_3 = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

- Las fracciones de los periodos están dadas por

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{4}{7} \qquad \frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

- El periodo fundamental está determinada por $k_0 = 7 \times 3 = 21$, el cual es el mínimo común múltiplo.

Ejemplo

- Considere la señal $v(t)$ como la suma de tres funciones periódicas dadas por

$$x_1 = \cos(3{,}5t) \qquad x_2 = \sin(2t) \qquad x_3 = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

- Las fracciones de los periodos están dadas por

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{4}{7} \qquad \frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

- El periodo fundamental está determinada por $k_0 = 7 \times 3 = 21$, el cual es el mínimo común múltiplo.
- $T_0 = 21\left(\frac{2\pi}{3{,}5}\right) = 12\pi$

Ejemplo

- Considere la señal $v(t)$ como la suma de tres funciones periódicas dadas por

$$x_1 = \cos(3{,}5t) \qquad x_2 = \sin(2t) \qquad x_3 = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

- Las fracciones de los periodos están dadas por

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{4}{7} \qquad \frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

- El periodo fundamental está determinada por $k_0 = 7 \times 3 = 21$, el cual es el mínimo común múltiplo.
- $T_0 = 21\left(\frac{2\pi}{3{,}5}\right) = 12\pi$

Ejemplo

- Considere la señal $v(t)$ como la suma de tres funciones periódicas dadas por

$$x_1 = \cos(3{,}5t) \qquad x_2 = \sin(2t) \qquad x_3 = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

- Las fracciones de los periodos están dadas por

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{4}{7} \qquad \frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

- El periodo fundamental está determinada por $k_0 = 7 \times 3 = 21$, el cual es el mínimo común múltiplo.
- $T_0 = 21\left(\frac{2\pi}{3{,}5}\right) = 12\pi$

Ejercicio

Ahora determine si

$$\hat{v}(t) = v(t) + x_4, \qquad x_4 = \sin(5\pi t)$$

es periodica. En caso de serlo, ¿cuál es el periodo fundamental T_0?

Otro tipo de señales

- Veremos otro tipo de señales que aparecen frecuentemente en el mundo de la ingeniería.
- Como ya se mencionó, los sistemas se modelan como un conjunto de ecuaciones diferenciales.
- Una señal común es la solución a la ecuación diferencial (ED)

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

donde $a \in \mathbb{R}$

- La solución a esta ED es de la forma

$$x(t) = x(0)e^{at}$$

lo cual se puede verificar por sustitución directa.

Ejemplo

- Considere el circuito eléctrico RL tal que:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t)$$

- La corriente está dada por:

$$i(t) = i(0)e^{-(R/L)t}$$

Ejemplo

- Considere el circuito eléctrico RL tal que:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t)$$

- La corriente está dada por:

$$i(t) = i(0)e^{-(R/L)t}$$

Para poder realizar un análisis mas completo de los tipos de señal exponencial, es necesario hacer la siguiente definición

Definición

Relación de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

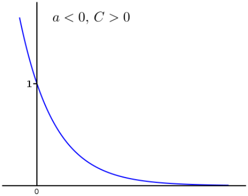
- La función exponencial general está dada por

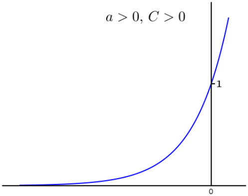
$$x(t) = Ce^{at}$$

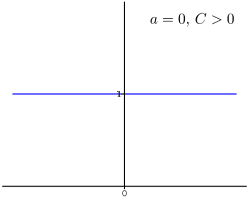
- Existen 3 casos generales dependiendo del espacio (tipo de número) al que pertenezcan C y a.

Caso 1: $C \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

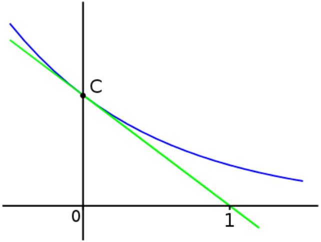
$$x(t) = Ce^{at} = Ce^{-t/\tau}$$







- Para $a < 0$, $x(t) = e^{-t/\tau}$, donde τ es la constante de tiempo
- La constante de tiempo de esta señal se puede definir como la intersección de la recta tangente a x en $t = 0$, con el eje horizontal

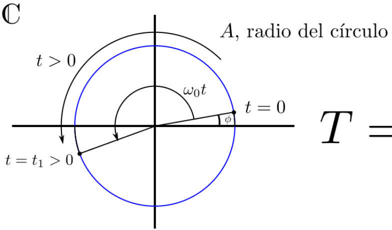


$$\dot{x}(t)\Big|_{t=0} = -\frac{C}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}\Big|_{t=0} = -\frac{C}{\tau}$$

Caso 2: $C \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{I}$

$$x(t) = Ce^{at} \qquad a = j\omega_0$$

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t} = A[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]$$

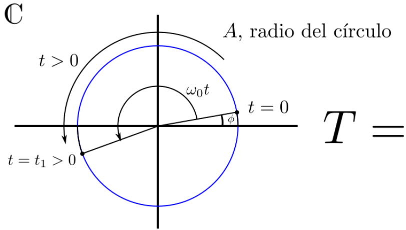


$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Caso 2: $C \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{I}$

$$x(t) = Ce^{at} \qquad a = j\omega_0$$

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t} = A[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Definición

Las Exponenciales Complejas Armónicas son un conjunto de funciones exponenciales complejas cuyas frecuencias están relacionadas por enteros

$$x(t) = Ae^{k\omega_0 j} \qquad k \in \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

Caso 3: $C \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$

$$x(t) = Ce^{at} \qquad C = \alpha + j\beta = |C|\sphericalangle(C) = Ae^{j\phi}$$

$$a = \sigma_0 + j\omega_0$$

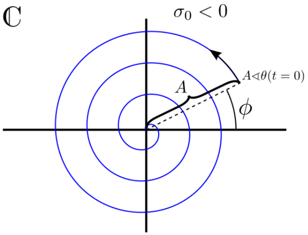
$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{j\phi}e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}e^{j(\omega_0 t + \phi)} \\ &= \underbrace{Ae^{\sigma_0 t}}_{\text{Envolvente}} \left(\underbrace{\cos(\omega_0 t + \phi)}_{\mathbb{R}} + \underbrace{j\sin(\omega_0 t + \phi)}_{\mathbb{I}}\right) \end{aligned}$$

Caso 3: $C \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$

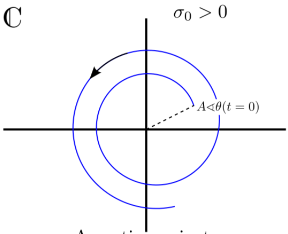
$$x(t) = Ce^{at} \qquad C = \alpha + j\beta = |C|\sphericalangle(C) = Ae^{j\phi}$$

$$a = \sigma_0 + j\omega_0$$

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{j\phi}e^{(\sigma_0+j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}e^{j(\omega_0 t+\phi)} \\ &= \underbrace{Ae^{\sigma_0 t}}_{\text{Envolvente}}\left(\underbrace{\cos(\omega_0 t+\phi)}_{\mathbb{R}} + \underbrace{j\sin(\omega_0 t+\phi)}_{\mathbb{I}}\right) \end{aligned}$$



Subamortiguada



Amortiguamiento
Negativo

Impulso Unitario

- La función impulso es muy utilizada en ingeniería, aún cuando esta no es una señal física.
- Esta "señal" es llamada el *delta de Dirac* y se denota $\delta(t)$
- Para introducir el delta de Dirac, defina la función rampa como:

$$x(t) = (t - t_0)\hat{u}(t - t_0)$$

  donde $\hat{u}(t)$ es la función escalón unitario definida como:

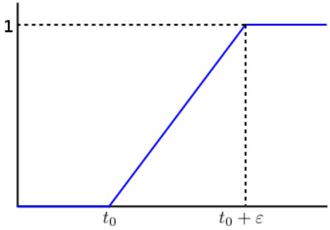
$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

- Si tomamos la primera derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo, obtenemos

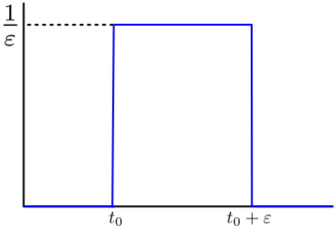
$$\frac{dx(t)}{dt} = \hat{u}(t - t_0)$$

- Sin embargo, si intentamos obtener la segunda derivada, nos encontramos con problemas considerando que ninguna señal física puede cambiar su posición instantáneamente (esto implica una transferencia instantánea de energía).
- De hecho, el resultado no es una función y su valor es 0 para todo t excepto $t = t_0$.
- Debido a las complicaciones definiremos la derivada (inexistente) de la función escalón como el límite de una derivada (existente) de una función de aproximación.

- Una aproximación de la señal escalón es:



donde $\dot{x}(t)$ es una señal pulso.



- Observe que a medida que $\varepsilon \to 0$, la función $x(t) \to \hat{u}(t - t_0)$, y la amplitud del pulso $\dot{x}(t)$ crece.
- También se debe observar que aunque la amplitud de $\dot{x}(t)$ crece, el área bajo la curva (pulso), se mantiene constante en un valor de 1.
- El resultado de sacar el límite cuando $\varepsilon \to 0$ es la función de impulso unitario.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \dot{x}(t) = \delta(t - t_0)$$

- De esta manera el delta de Dirac se define como una "funcion":

$$\delta(t - t_0) = 0 \qquad \forall \quad t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

- Si se tiene la señal $f(t) = 5\delta(t - t_0)$, esto no significa un impulso con amplitud 5 (la amplitud es infinita) sino un impulso con "área" 5.
- Una definición más apropiada es la siguiente:

Definición

La señal impulso se define como aquella que cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

para cualquier función $f(t)$ continua en t_0.

Propiedades de la señal Impulso

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$
2. $f(t)\cdot\delta(t-t_0) = f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\cdot\delta(t)dt = f(-t_0)$

$f(t)$continua en $t = t_0$

4. $\delta(t-t_0) \triangleq \dfrac{du(t-t_0)}{dt} \longleftrightarrow u(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)d\tau$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at-t_0)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\frac{t_0}{a})dt$
6. $\delta(-t) = \delta(t)$

Ejercicio

Considere la función $f(t) = \cos(t)$ encuentre las siguientes integrales:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-1)\delta(t)dt$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-1)dt$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-1)\delta(t-1)dt$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(4t)dt$