Actividad de Aprendizaje: Señal exponencial compleja como entrada a un sistema LTI

Asignatura: Procesamiento de Señales

Universidad del Rosario - Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Objetivo:

- Observar la respuesta de un sistema LTI a una señal exponencial compleja.
- Visualización de la Transformada de Laplace.

Procedimiento:

Considere las siguientes tres ecuaciones que definen un sistema,

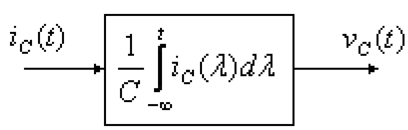
$$i = i_C(t) + i_R(t) \quad donde \quad i_R(t) = \frac{1}{R} v_C(t) \qquad (1)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \qquad (2)$$

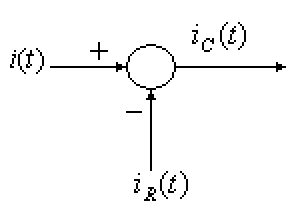
$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_C(\lambda) d\lambda \qquad (3)$$

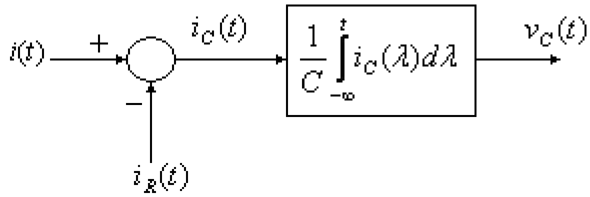
Estas tres ecuaciones definen un sistema entrada-salida (SISO – Single input Single Output), que para este caso la entrada será la variable $i(t)$ y la salida será $v_c(t)$.

La tercera ecuación se puede manejar como un sistema.

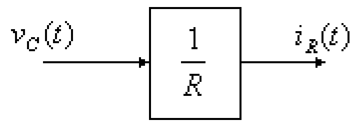


$i_C(t)$ se puede representar como $i_C(t) = i(t) - i_R(t)$.

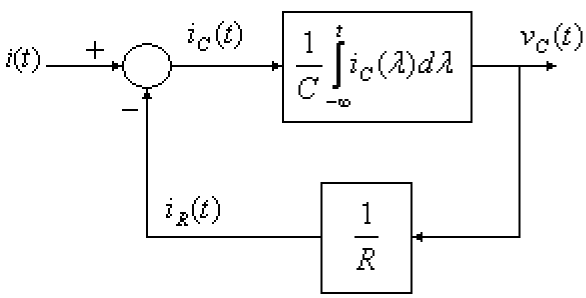




De las dos ecuaciones que conforman la ecuación 1 se puede utilizar $i_R(t) = \frac{1}{R}v_C(t)$



Finalmente se puede intercambiar y obtener un diagrama final,

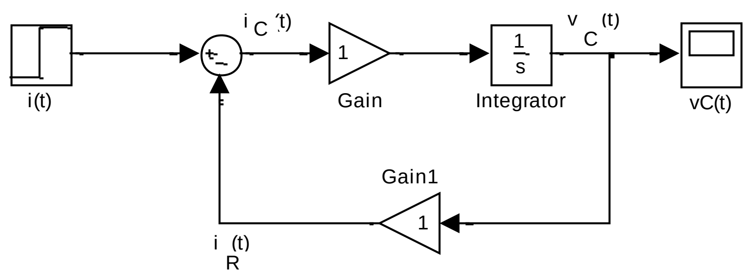


La ventaja de esta representación en diagrama de bloques es que en él se tienen disponibles todas las variables involucradas en la ecuación diferencial del sistema, las cuales provienen de las tres ecuaciones iniciales.

Adicionalmente, se observa que la señal de realimentación $i_R(t)$, que conforma el lazo de realimentación y que tiene signo negativo, tiene asociada un bloque entrada-salida dado por $1/_R$ que no posee integrales o diferenciales. Por otro lado, la señal de salida $v_c(t)$ proviene de un bloque definido por una ecuación integral que contiene la señal $i_c(t)$.
Todo lo anterior permite entender que este sistema construido, tal y como se ha realizado con base en las tres ecuaciones iniciales, puede ser llevado al dominio de la frecuencia con base en la Transformada de Laplace.
Otros de los aspectos que se debe tener en cuenta con este diagrama de bloques es que el bloque que relaciona las variables $v_c(t)$ e $i_c(t)$ tiene la integral definida entre $-\infty$ y t. Lo cual, de acuerdo con los conceptos de cálculo diferencial-integral, tiene asociada una condición inicial para el intervalo $-\infty < t < 0\ s$. La ventaja de Simulink es que dentro del bloque integrador se puede incluir esta condición inicial que está relacionada con la variable de salida de este bloque integrador $v_c(t)$.

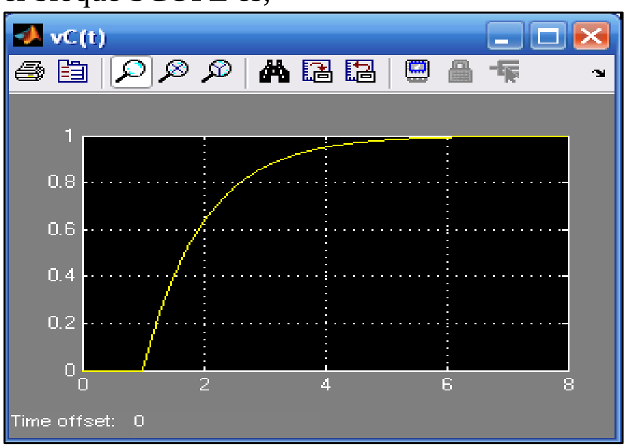
En resumen; a) cualquier ecuación diferencial de orden "n" puede representarse como un conjunto de integradores interconectados (serie, paralelo, combinación serie-paralelo); b) todo bloque integrador, que se encuentre dentro de una ecuación diferencial, relaciona variables entrada-salida tiene asociada a su variable de salida una condición inicial; y c) el número de integradores, dentro del diagrama de bloques que representa una ecuación diferencial, indica el número de condiciones iniciales que solucionan dicha ecuación diferencial.

Ubique el diagrama en Simulink de la siguiente forma.



De acuerdo con lo comentado en los párrafos anteriores, la señal de salida está asociada a un bloque integrador; sin embargo, se ha dejado una constante que presenta la constante $1/_C$ que se puede observar en la ecuación diferencial.

Al ejecutar la simulación del diagrama de bloques en Simulink, la salida visualizada en el bloque SCOPE es,



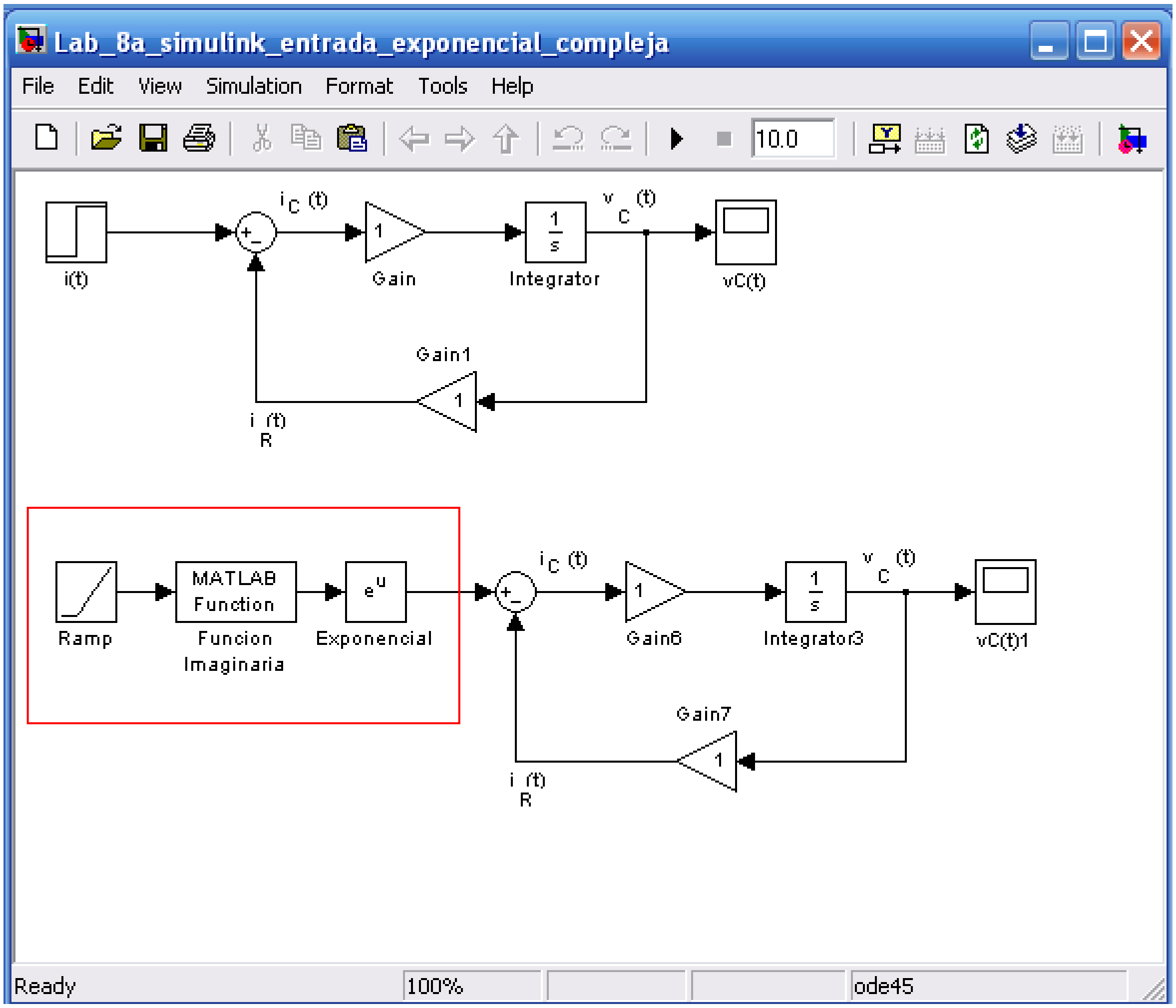
La simulación realizada se encuentra en el intervalo

$$0 \leq t \leq 8\, s$$

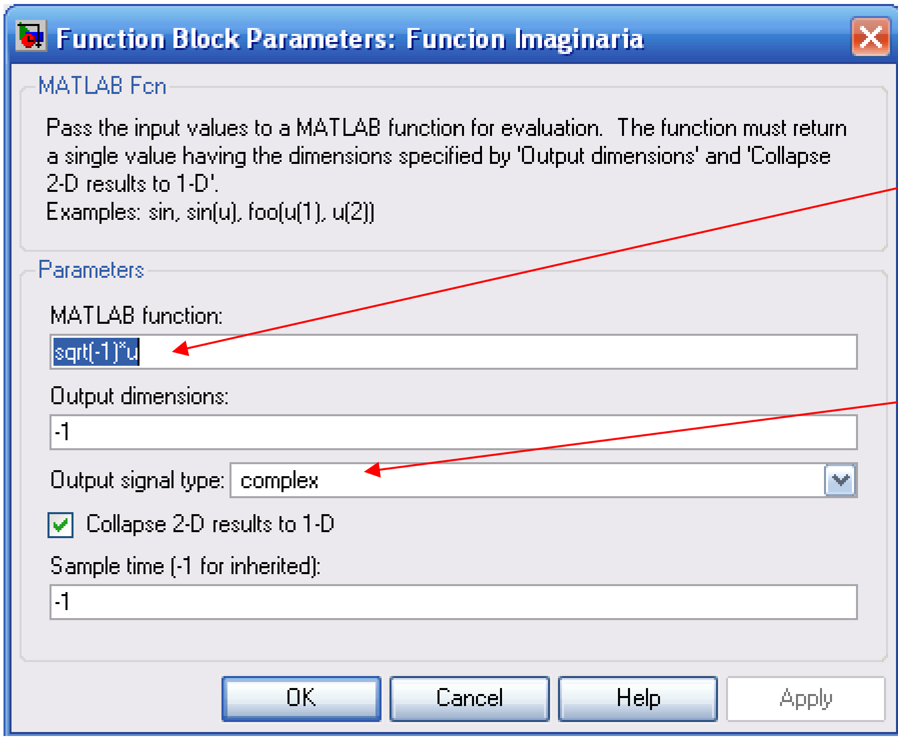
Adicionalmente, se observa que la respuesta comienza en t=1 y no en t=0, lo cual se debe a la forma como fue ajustada la señal de entrada $i(t)$. Para esta simulación, se ha dejado un tiempo de retardo de un (1) segundo.

Una vez construido correctamente el diagrama de bloques en Simulink a partir de las tres ecuaciones iniciales, es posible ubicar cualquier señal de entrada y visualizar la repuesta de todo el sistema y algunas variables internas.

Relacionado con la respuesta en frecuencia de un sistema y con la transformada de Laplace, se ubica una exponencial compleja como entrada al sistema, tal y como se muestra en la siguiente figura. Como se requiere una señal exponencial compleja, debido a que la mayoría de funciones en Simulink son reales, se utiliza el bloque “Matlab function” para generar la parte compleja “-jt” de la señal de entrada compleja e^{-jt}.



Donde, a) el bloque "Función Imaginaria" construye la variable compleja, y b) la variable compleja construida será la entrada al diagrama de bloques de todo el sistema.

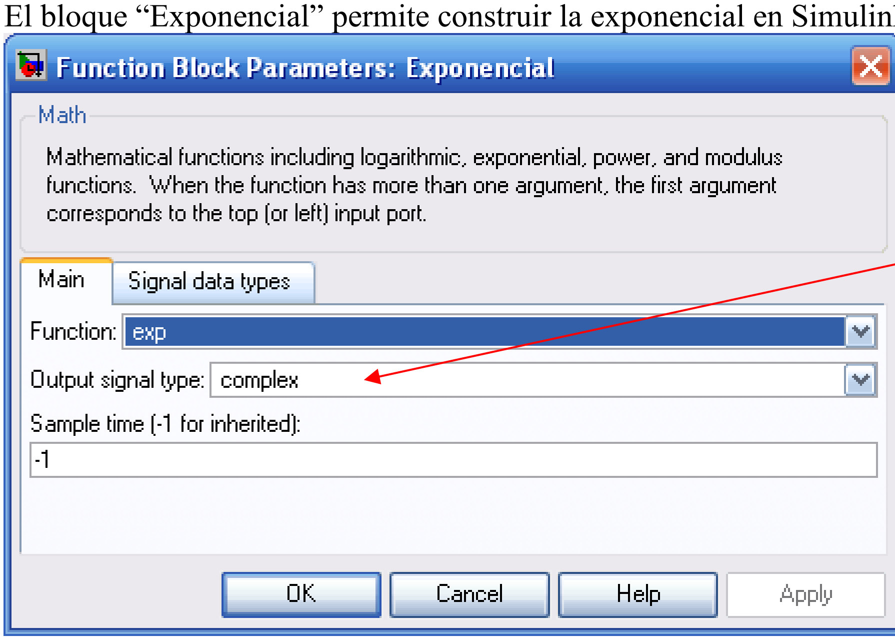


$$-\left(\sqrt{-1}\right)t = -jt$$

u = t

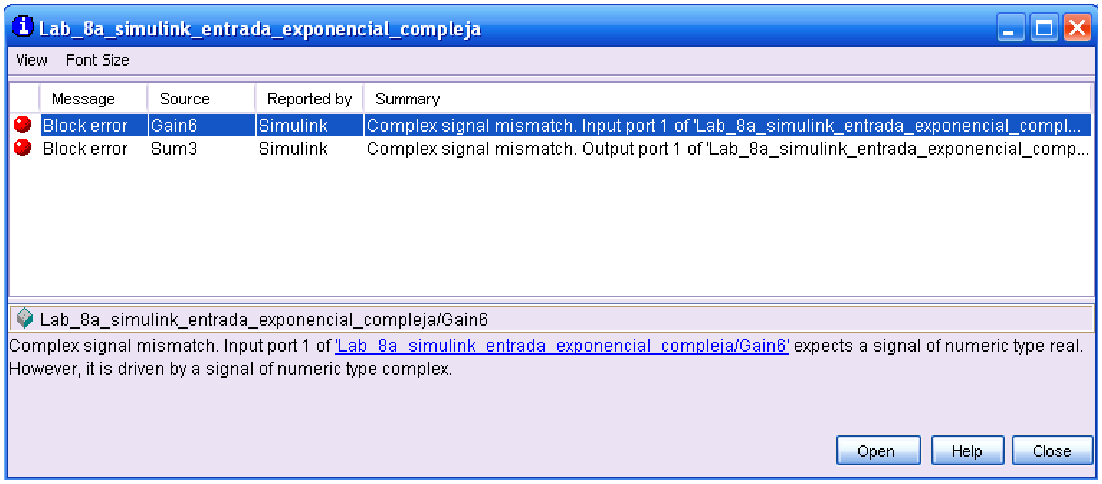
La salida del bloque será un número complejo y su entrada es un número real.

El bloque "Exponencial" permite construir la exponencial en Simulink,

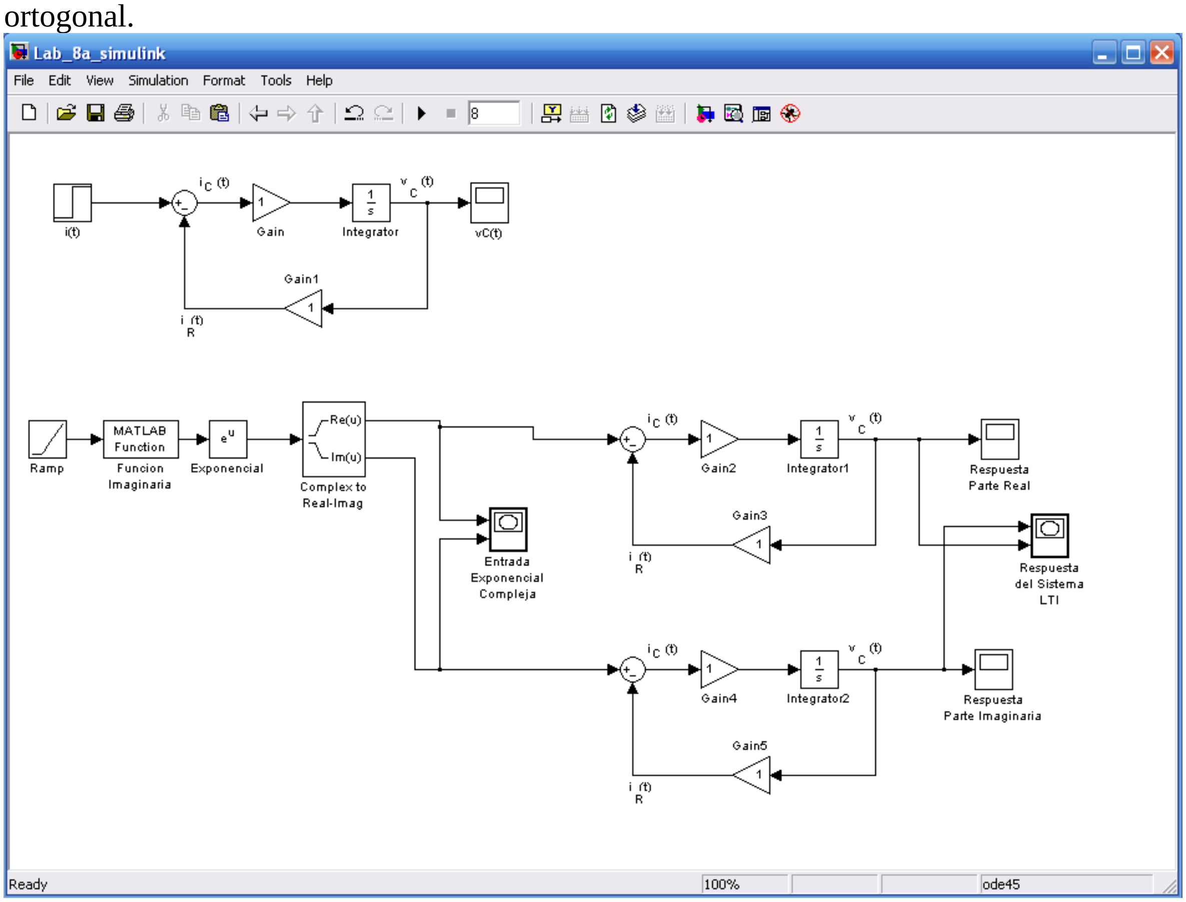


La salida del bloque será un número complejo.

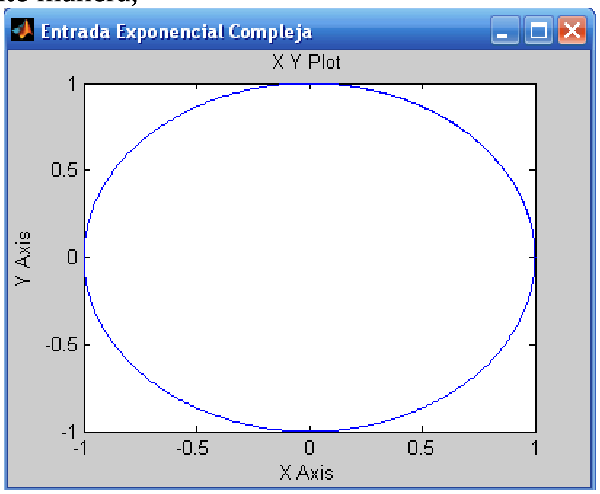
Debido a que la exponencial compleja de entrada tiene parte real e imaginaria, se genera el siguiente error,



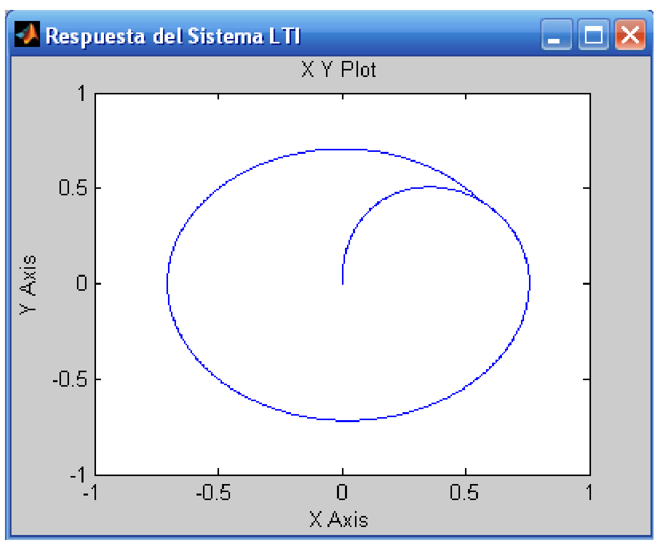
Por consiguiente, es necesario separar la señal de entrada compleja en sus dos componente, real e imaginaria. En el siguiente diagrama de bloques se observa; a) la separación utilizando el bloque “Complex to RealImag”; y b) la visualización (utilizando el bloque de visualización XY Graph) de estas dos componentes, cada una ubicada en uno de los ejes de un sistema ortogonal.



El bloque de visualización XYGRaph titulado como "Entrada Exponencial Compleja" dibuja la entrada de la siguiente manera,

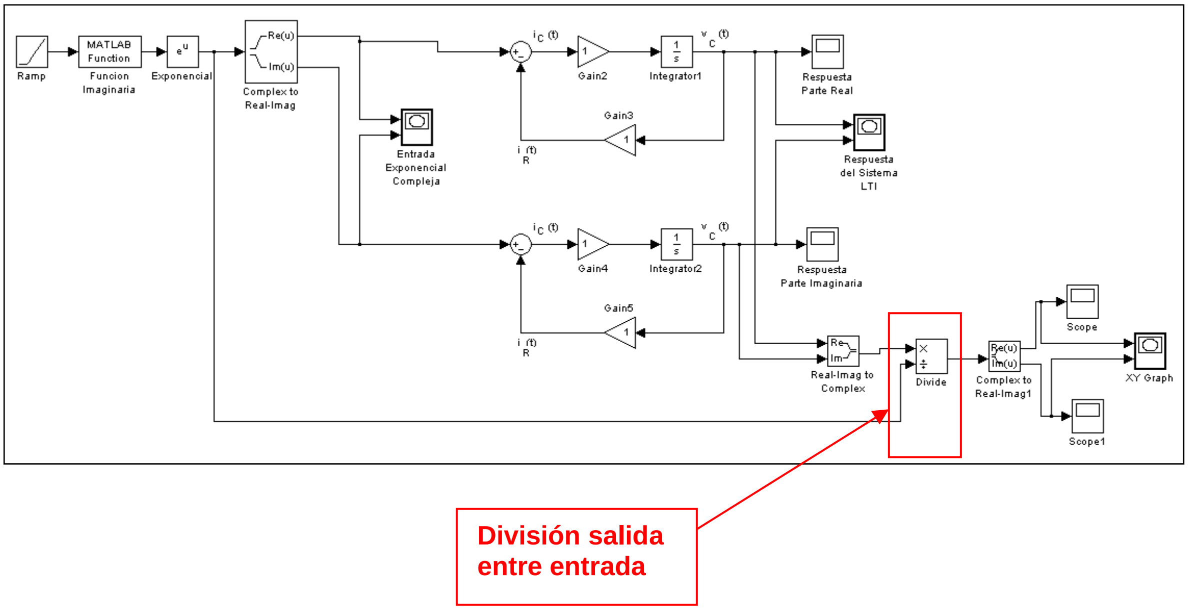


La salida utilizando un bloque de visualización XYGraph,

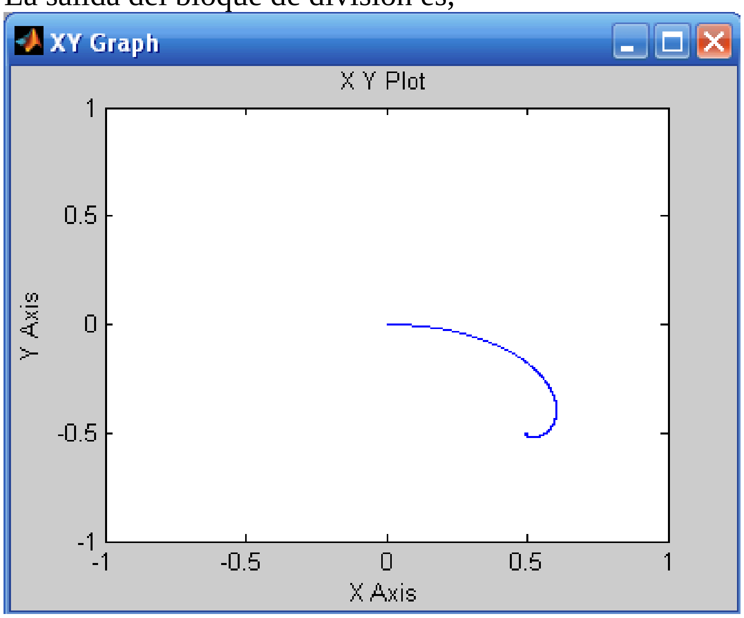


De lo cual se deduce que la salida del sistema es otra exponencial compleja, pero modificada.

Se puede observar lo que modifica a la exponencial compleja de salida ubicando una división entre la salida y la entrada, tal y como se muestra a continuación,



La salida del bloque de división es,



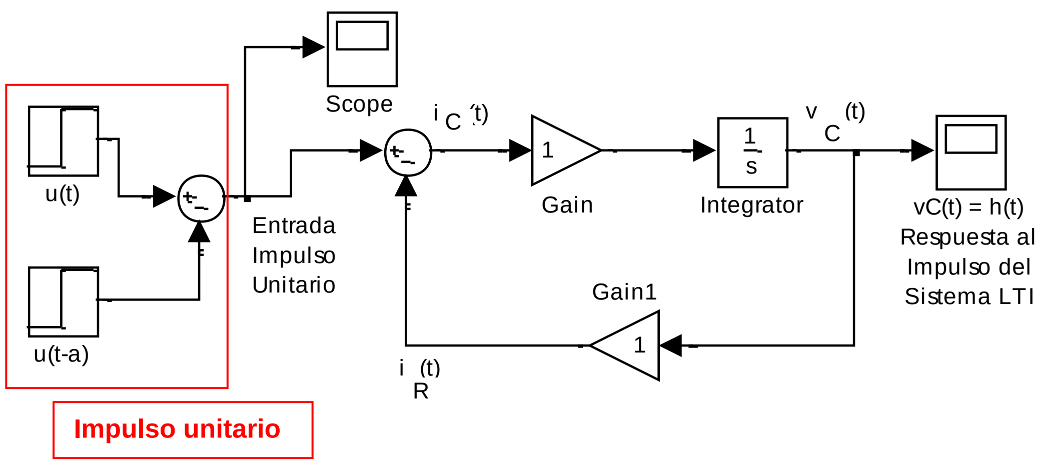
En conclusión, la respuesta del sistema LTI (conjunto de ecuaciones, con una de ellas diferencial y definidas al comienzo de esta actividad de aprendizaje) a una entrada exponencial compleja, es otra exponencial compleja modificada por la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema.

La transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema puede construirse en Simulink utilizando el concepto,

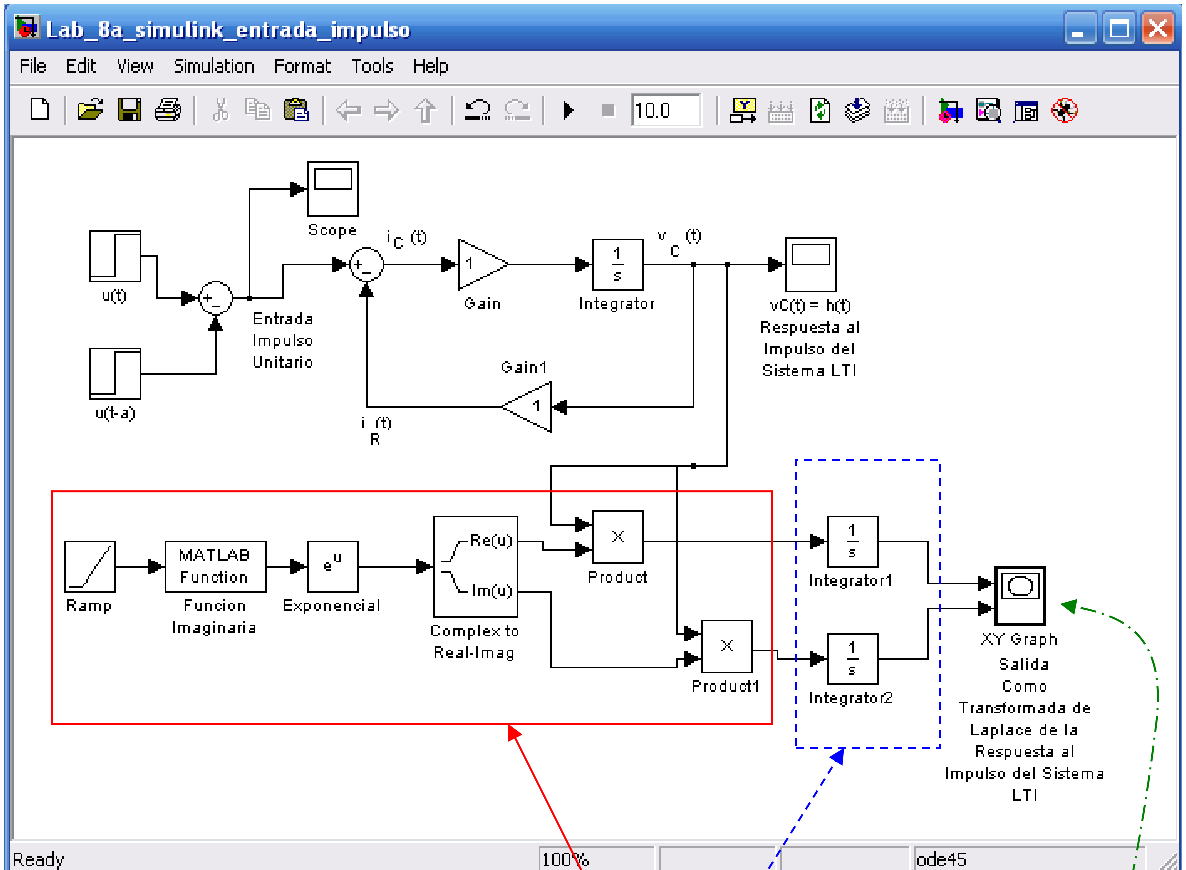
$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Donde
$H(s)$: valor propio del sistema.

Para ello, se construye el sistema en Simulink y se ubica la entrada impulso unitario al sistema (h(t)), tal y como se muestra continuación.



Luego esta salida h(t) se multiplica por $e^{-s\tau}$ y luego se realiza la integral en el intervalo de tiempo.



$$\boxed{H(s)} = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{h(\tau)e^{-s\tau}}\, d\tau}$$

Al visualizar la respuesta en el bloque “XY Graph”, se observa la misma respuesta con entrada exponencial compleja.