

---

## Actividad de Aprendizaje: **Transformaciones – Análisis en el Dominio de la Frecuencia**

Asignatura: Procesamiento de Señales

Universidad del Rosario - Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Objetivo:

- Análisis en frecuencia.

Procedimiento:

1. Copie las imágenes presentes en el CD a la carpeta “work” de Matlab, esto con el fin de ubicarlas en el directorio raíz.
2. Transformada Rápida de Fourier en Dos Dimensiones (fft2).
  - Las máscaras de convolución son útiles para extraer información relevante de una imagen, de acuerdo al proceso de convolución analizado en el taller 4.
  - El realce es un procesamiento matemático sobre los píxeles de una imagen, para resaltar algunos tipos de relaciones utilizando las máscaras de convolución o filtros espaciales, como la siguiente (filtro pasa-bajos, analizada en el taller 4),

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |

- Para una señal de dos dimensiones(imágenes), los bordes y demás cambios bruscos de los niveles de gris están relacionados con las componentes de alta frecuencia, mientras que los factores de iluminación y color tienen que ver con las frecuencias bajas.
- Se toma la siguiente imagen,  $Im=f(x,y)$

|    |    |   |    |    |
|----|----|---|----|----|
| 17 | 24 | 1 | 8  | 15 |
| 23 | 5  | 7 | 14 | 16 |

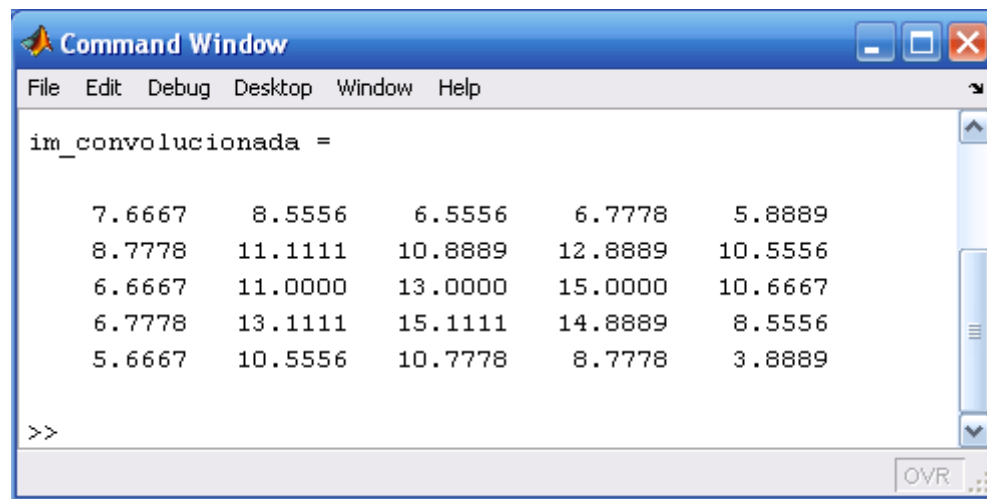
---

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 4  | 6  | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3  |
| 11 | 18 | 25 | 2  | 9  |

Al realizar la convolución se obtienen los siguientes resultados,

***Aumentando Ceros para Filas y Columnas de la Imagen***

La imagen resultante tiene los siguientes datos,

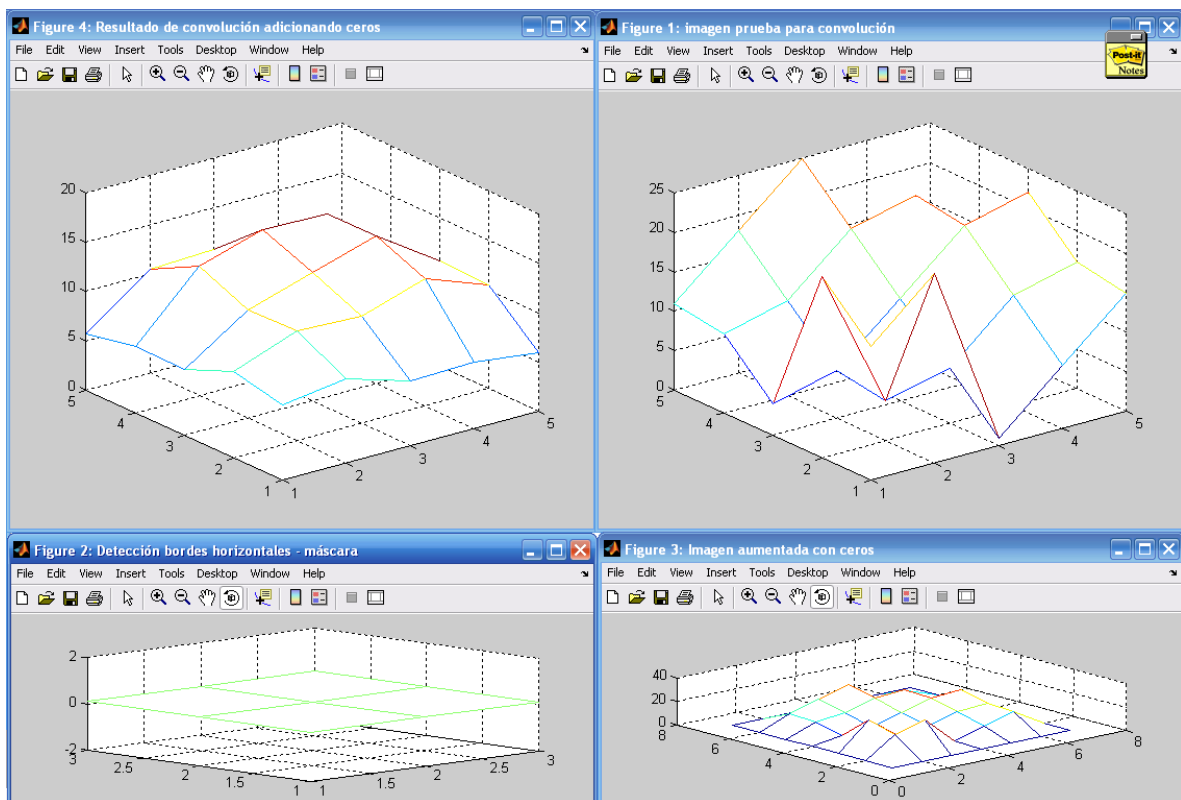


```
Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
im_convolucionada =

    7.6667    8.5556    6.5556    6.7778    5.8889
    8.7778   11.1111   10.8889   12.8889   10.5556
    6.6667   11.0000   13.0000   15.0000   10.6667
    6.7778   13.1111   15.1111   14.8889    8.5556
    5.6667   10.5556   10.7778    8.7778    3.8889

>>
```

The image shows a screenshot of the MATLAB Command Window. The title bar reads "Command Window" with standard window controls. The menu bar includes "File", "Edit", "Debug", "Desktop", "Window", and "Help". The command prompt shows the variable `im_convolucionada` assigned to a 5x5 matrix of numerical values. The values are displayed in a formatted manner with four decimal places. At the bottom right, there is a status bar showing "OVR" and a small icon.



**No se Aumenta el tamaño de la imagen**

La imagen resultante tiene los siguientes datos,

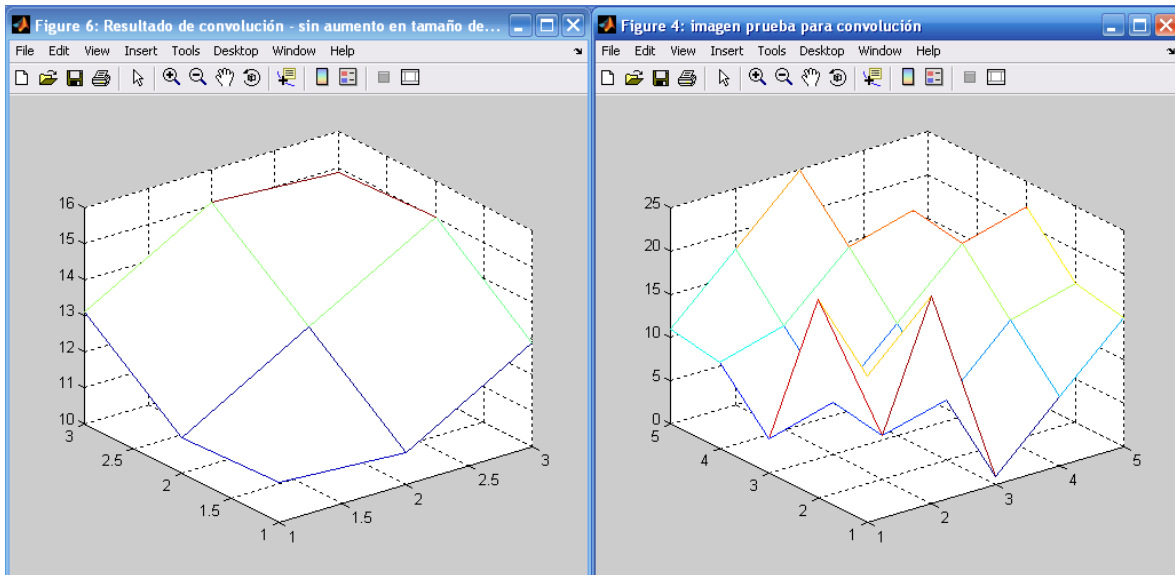
```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

im_convolucionada =

    11.1111    10.8889    12.8889
    11.0000    13.0000    15.0000
    13.1111    15.1111    14.8889

>>
  
```



Se observa que los valores resultantes son mas homogéneos, lo cual es un resultado directo de la aplicación de un filtro pasa-bajos.

- Los principales objetivos de un realce o filtrado espacial son:
  - i. Mejorar la apariencia visual de la imagen.
  - ii. Ayudar a la extracción de información.
- Surge una pregunta: ¿Cómo saber que efectos tiene sobre una imagen la aplicación de una máscara, conociendo sus coeficientes? La respuesta puede ser fundamentada empleando la Transformada de Fourier.
  - i. La FFT2 (para imágenes) es un proceso por medio del cual se puede obtener información en el dominio de la frecuencia de una señal que está originalmente en el dominio del espacio.
  - ii. La definición de la FFT2 está dada por,

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

$f(x, y)$ : señal discreta en el dominio del espacio.

$F(u, v)$ : señal discreta equivalente en el dominio de la frecuencia.

$x, y$ : coordenadas espaciales.

$u, v$ : índices de frecuencia.

$M, N$ : número de filas y columnas de la imagen, respectivamente.

- Una de las propiedades importantes de la Transformada de Fourier es la propiedad de convolución,

$$h(x, y) = f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow H(u, v) = F(u, v) \cdot G(u, v)$$

$h(x, y)$ : imagen filtrada en el dominio del espacio.

---

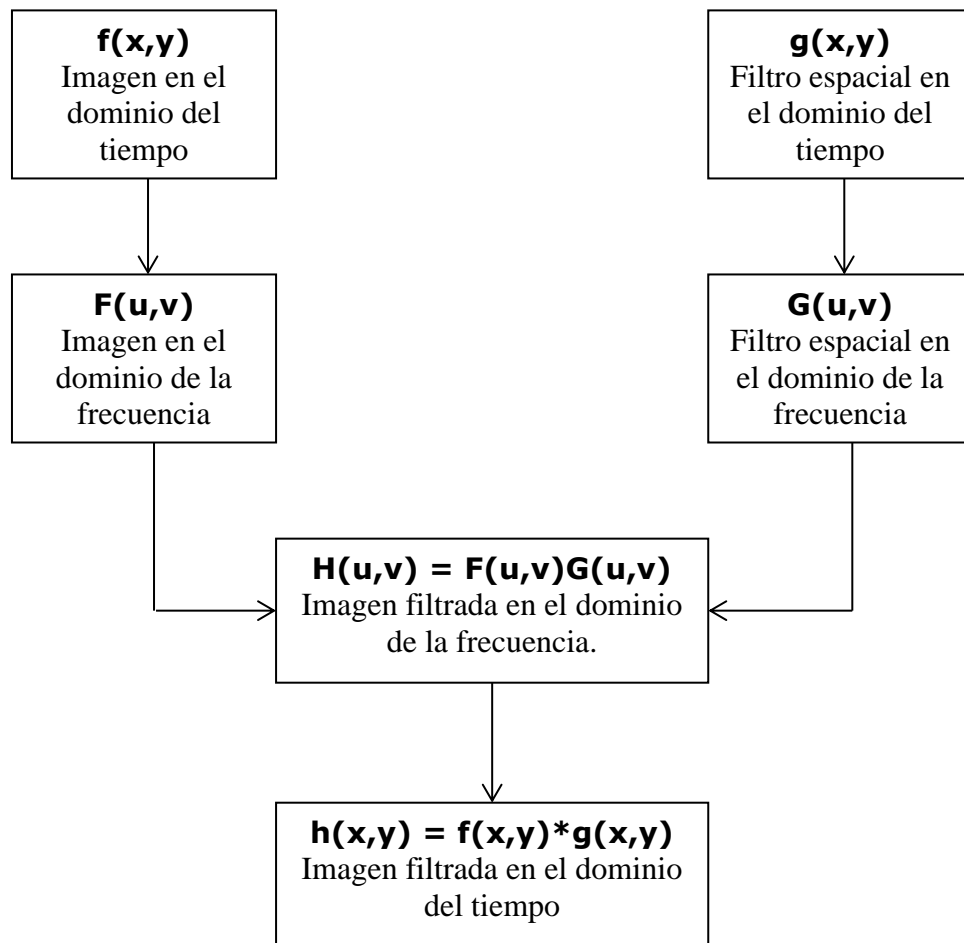
$H(u,v)$ : imagen filtrada en el dominio de la frecuencia.

$g(x,y)$ : filtro en el dominio del espacio.

$G(u,v)$ : filtro en el dominio de la frecuencia.

Esto indica que el proceso de convolución espacial es equivalente a la multiplicación en frecuencia.

- La importancia de lo anterior radica en que si se tienen la imagen y el filtro en el dominio de la frecuencia, sus componentes se multiplican término a término y se calcula la transformada inversa de la multiplicación obteniendo la imagen filtrada. Este proceso se muestra a continuación,

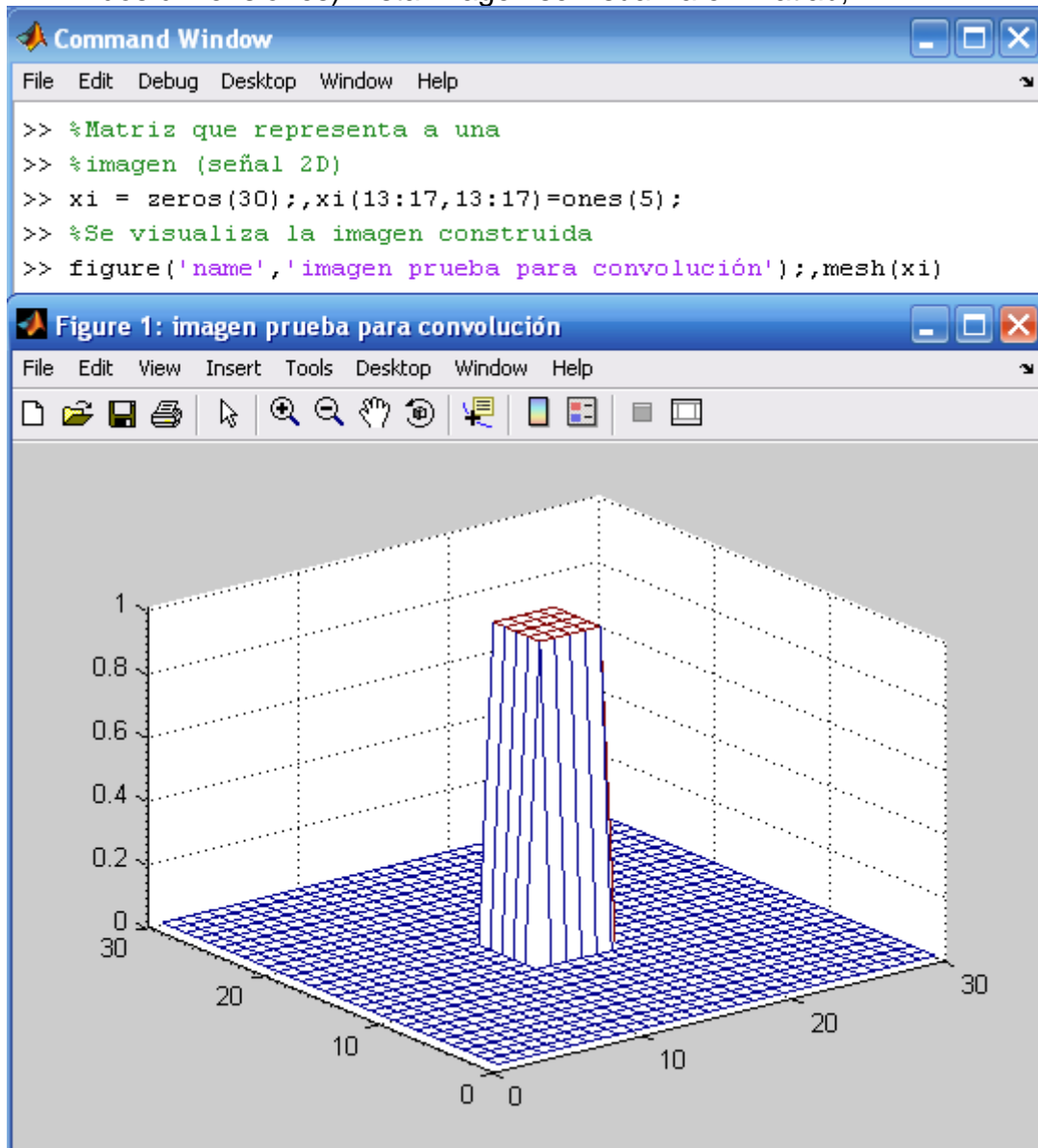


Para visualizar la transformada de Fourier de una imagen, se hace uso del espectro en magnitud,

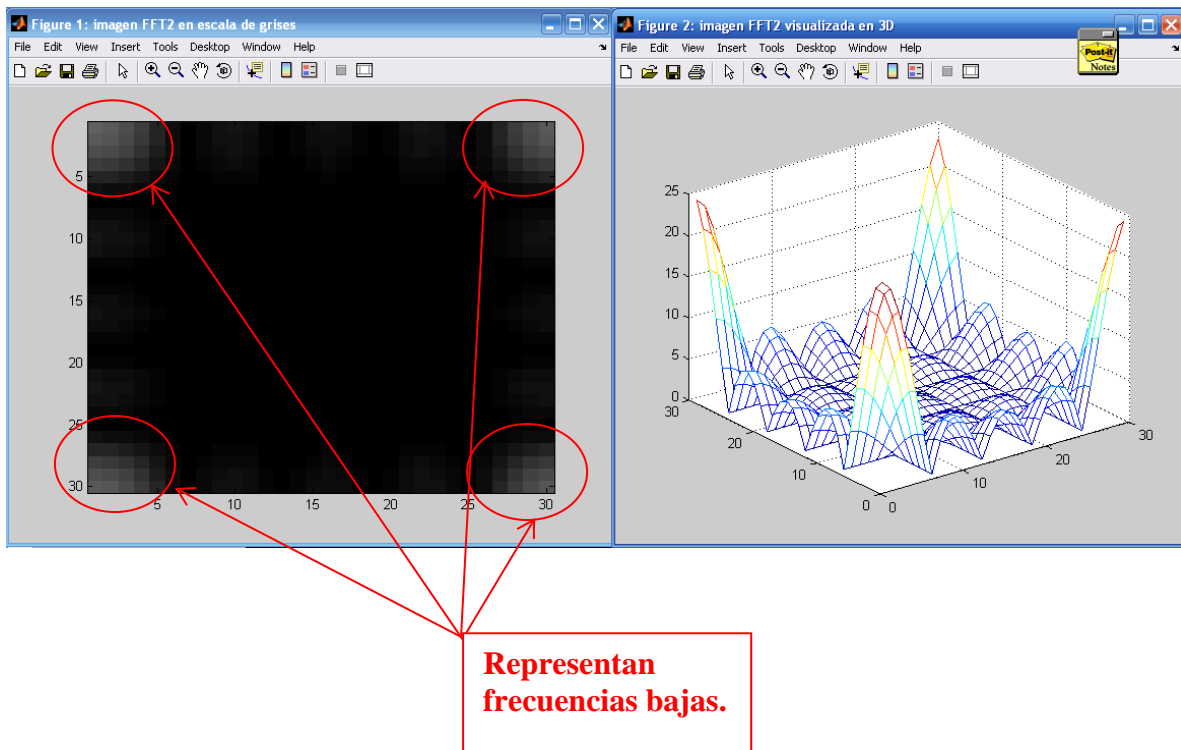
$$|F(u,v)| = \sqrt{(\text{real}(F(u,v)))^2 + (\text{imag}(F(u,v)))^2}$$

- El espectro en magnitud que se obtiene al aplicar la transformada de Fourier tiene el inconveniente de estar centrado en el origen (esquina superior izquierda) lo cual dificulta una correcta percepción de frecuencias espaciales altas y bajas. Para facilitar el análisis se requiere que el espectro esté centrado en el centro de la imagen.

Primero, se construye una imagen de ceros y unos (pulso rectangular en dos dimensiones). Esta imagen se visualiza en Matlab,



Esta imagen posee frecuencias bajas, lo cual se puede visualizar utilizando la FFT en dos dimensiones "fft2.m".



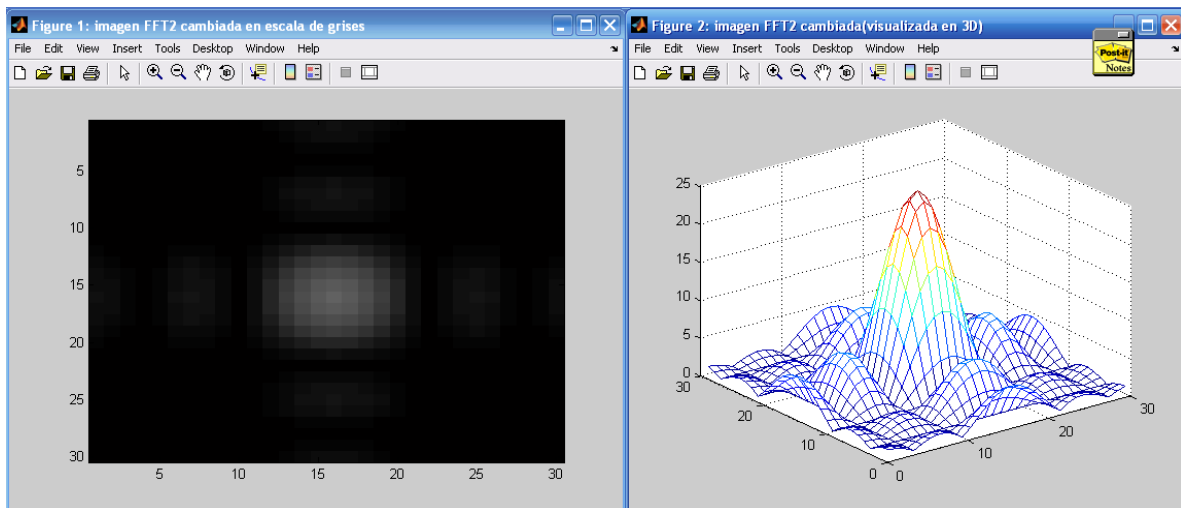
Esta representación puede cambiarse a una representación donde se muestren las frecuencias bajas en el centro de la imagen y las frecuencias altas en los extremos de la imagen. Para esto se utiliza la función “fft2shift.m” de Matlab.

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

>> F=fft2(xi);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %calcula de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt(((real(F_shift)).^2)+((imag(F_shift)).^2));
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises');image(F_shift_mag),colormap('gray')
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(visualizada en 3D)');mesh(F_shift_mag)
>> |

```



En el resultado anterior, se muestra que las frecuencias bajas tienen una amplitud de 20 aproximadamente. Esto hace que la visualización en escala de grises no posea blancos bien definidos. Por consiguiente, para mejorar la visualización se toma el máximo valor en la matriz y se normalizan todos los demás puntos de la matriz.

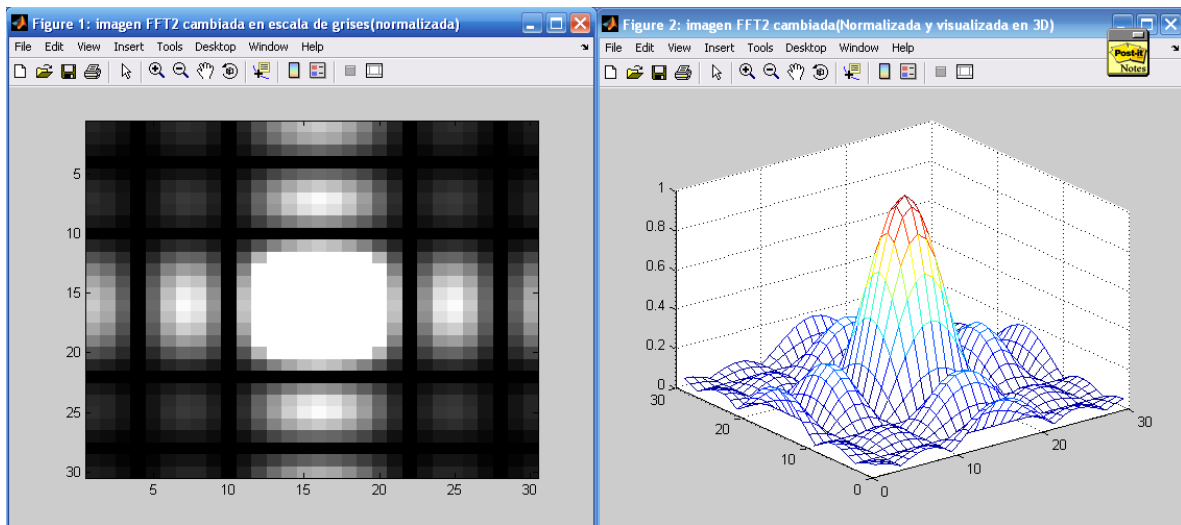
```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

>> F=fft2(x1);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %calculo de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
>> %calculo del máximo valor
>> mx_valor=max(F_shift_mag(:));
>> %normalización de los datos
>> F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');image(F_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(Normalizada y visualizada en 3D)');mesh(F_shift_norm_mag)
>>

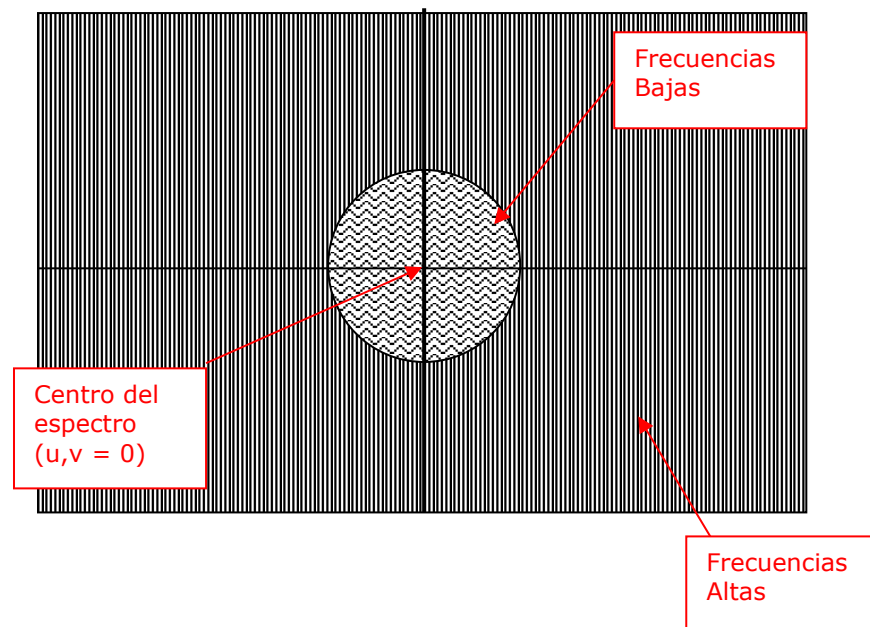
```





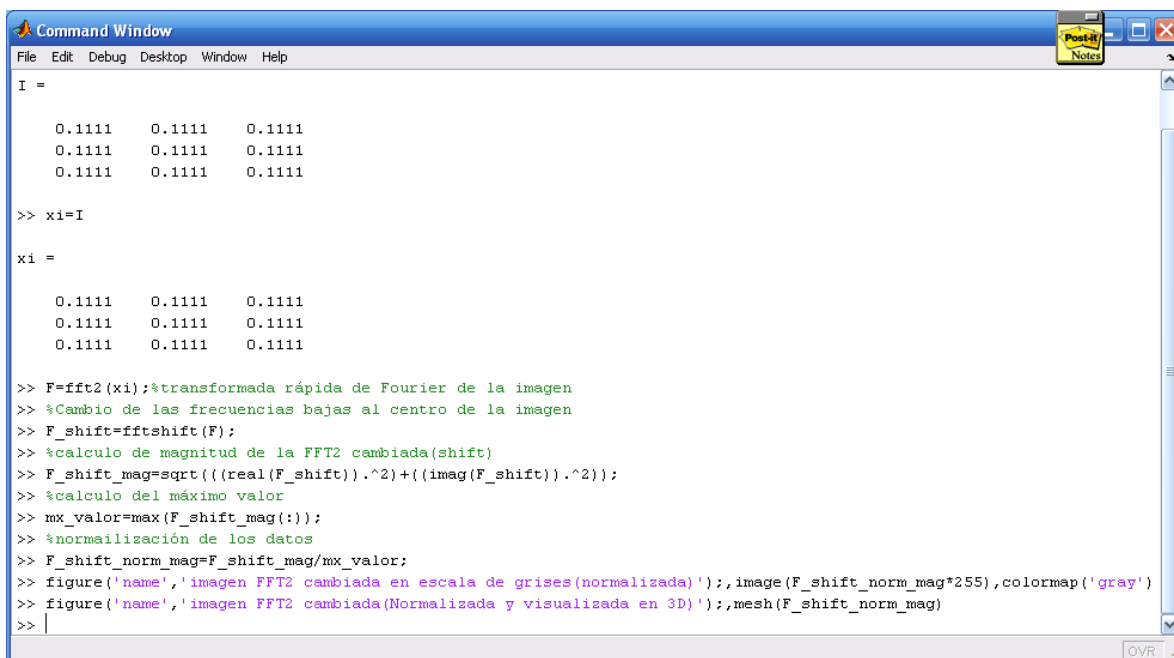
Se observa que mejora la visualización del espectro de magnitud de la transformada de Fourier.

La forma general que presenta un espectro de magnitud se muestra a continuación,



- Para conocer el efecto de la aplicación de una máscara de convolución, es necesario visualizar su espectro de magnitud.  
Se tienen a continuación tres máscaras utilizadas como pasa-bajos y pasa-altos.  
De acuerdo a la forma de la transformada de Fourier en el espectro de magnitud, se tendrá un filtro pasa-alto y pasa-bajo ya que se tiene es sencillamente una multiplicación punto a punto en el dominio de la frecuencia.  
Por esto, se tiene que la función de Matlab “fft2.m” permite obtener la fft de una imagen con un número de filas y columnas mayor al de la imagen, esto con el fin de obtener la FFT de una máscara con el mismo número de filas y columnas de la imagen.  
Se tiene a continuación un ejemplo,  
Se toma la máscara pasa-bajos definida por,

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |



```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

I =

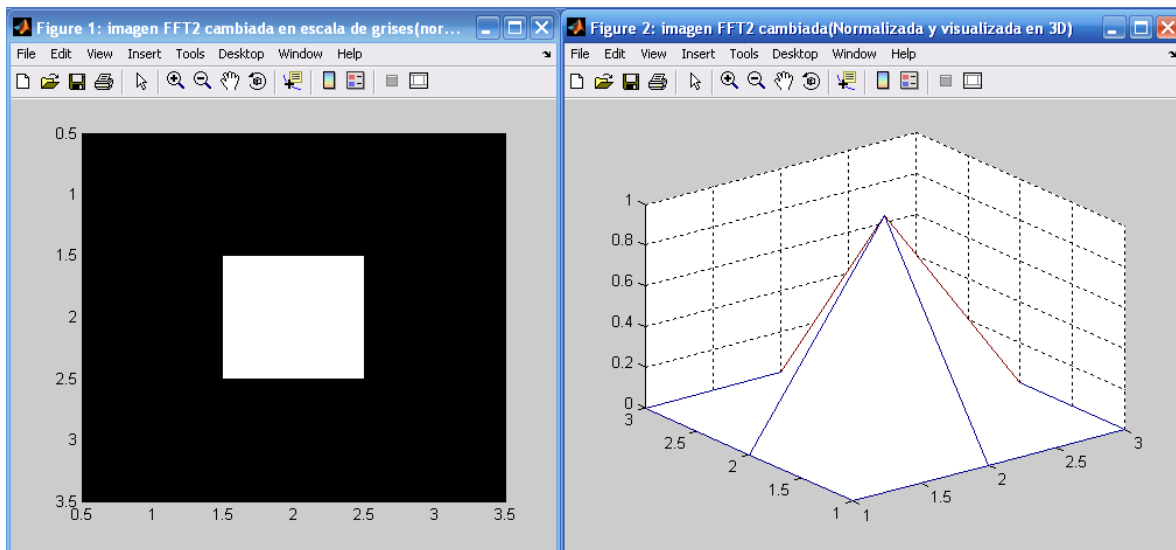
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111

>> xi=I

xi =

    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111

>> F=fft2(xi);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %calcula de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
>> %calcula del máximo valor
>> mx_valor=max(F_shift_mag(:));
>> %normalización de los datos
>> F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)'),image(F_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(Normalizada y visualizada en 3D)'),mesh(F_shift_norm_mag)
>>
  
```



Ahora, se obtiene la transformada de Fourier de la máscara pero con 50 filas y 50 columnas.

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

>> I=[1/9,1/9,1/9;1/9,1/9,1/9;1/9,1/9,1/9]

I =

    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111

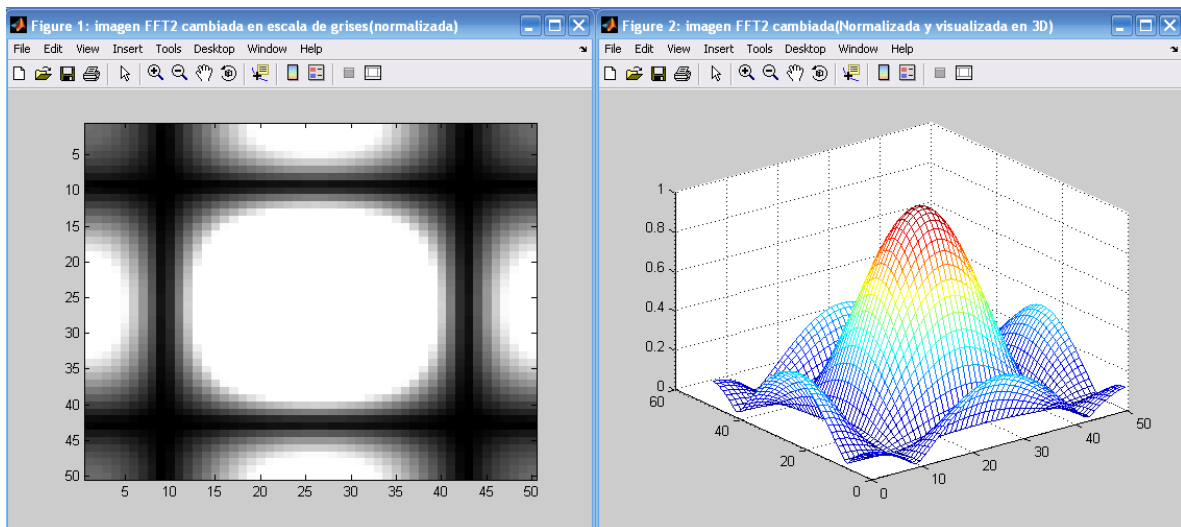
>> xi=I

xi =

    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111
    0.1111    0.1111    0.1111

>> F=fft2(xi,50,50);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %calculo de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
>> %calculo del máximo valor
>> mx_valor=max(F_shift_mag(:));
>> %normalización de los datos
>> F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');image(F_shift_norm_mag*255, colormap('gray'))
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(Normalizada y visualizada en 3D)');mesh(F_shift_norm_mag)

```



Se observa un mejor detalle en las componentes del espectro mostrando que es un filtro pasa-bajos.

Se toma una máscara que funciona como filtro pasa altos,

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> I=[-1 -1 -1;-1 8 -1;-1 -1 -1]

I =

    -1    -1    -1
    -1     8    -1
    -1    -1    -1

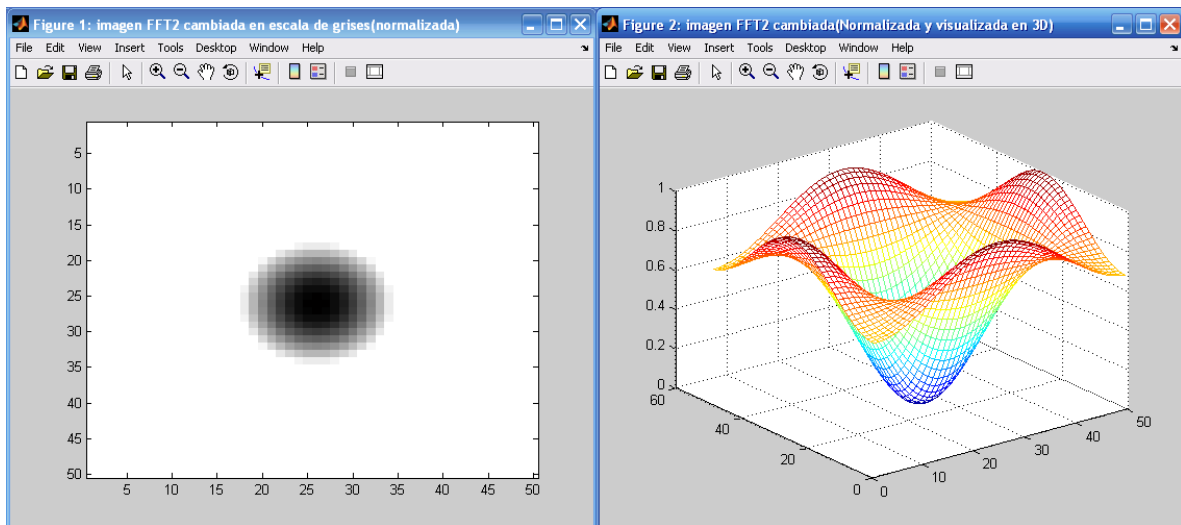
>> xi=I

xi =

    -1    -1    -1
    -1     8    -1
    -1    -1    -1

>> F=fft2(xi,50,50);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %calculo de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
>> %calculo del máximo valor
>> mx_valor=max(F_shift_mag(:));
>> %normalización de los datos
>> F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');image(F_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(Normalizada y visualizada en 3D)');mesh(F_shift_norm_mag)

```



Se toma otra máscara que funciona como filtro pasa altos,

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

>> I=[0 -1 0;-1 4 -1;0 -1 0]

I =

     0     -1     0
    -1     4     -1
     0     -1     0

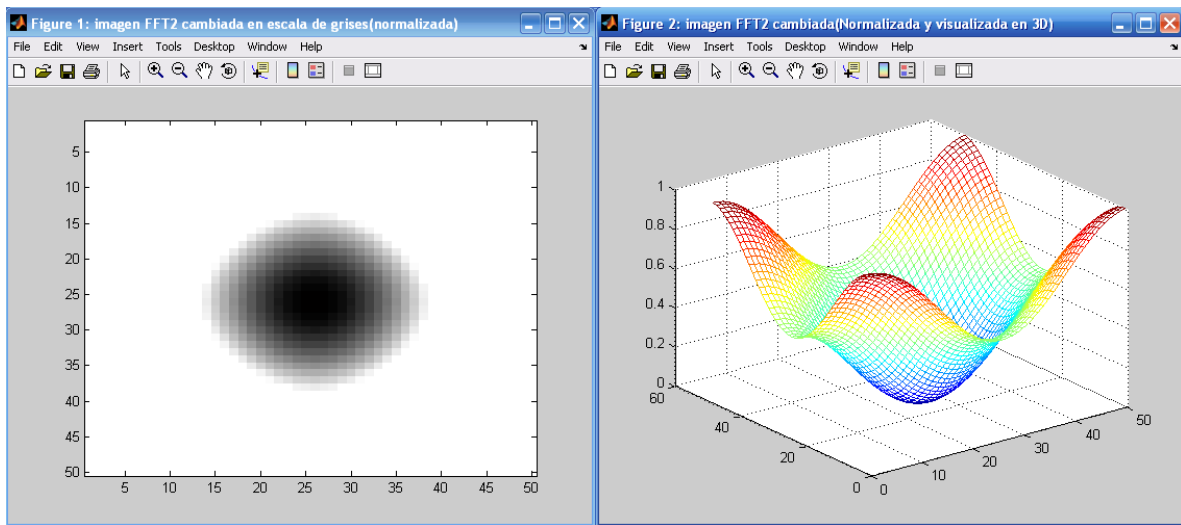
>> xi=I

xi =

     0     -1     0
    -1     4     -1
     0     -1     0

>> F=fft2(xi,50,50);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %calculo de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
>> %calculo del máximo valor
>> mx_valor=max(F_shift_mag(:));
>> %normalización de los datos
>> F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)'),image(F_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(Normalizada y visualizada en 3D)'),mesh(F_shift_norm_mag)

```



En general, el proceso de filtrado utilizando la transformada de Fourier resulta más rápido que utilizar máscaras de convolución cuando la máscara es de gran tamaño.

El análisis sobre el efecto del filtro está dado por las tonalidades que muestra el espectro de magnitud. Las zonas con tonalidades claras aumentan o mantienen esas zonas de frecuencia en la imagen por tratar, mientras que las zonas oscuras disminuyen, o incluso anulan, las respectivas zonas de frecuencia de la imagen.

Por ejemplo, se analiza la máscara siguiente,

|   |    |    |
|---|----|----|
| 1 | 4  | -2 |
| 3 | 0  | -3 |
| 2 | -4 | -1 |

```

Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> I=[1 4 -2;3 0 -3;2 -4 -1]

I =

     1     4    -2
     3     0    -3
     2    -4    -1

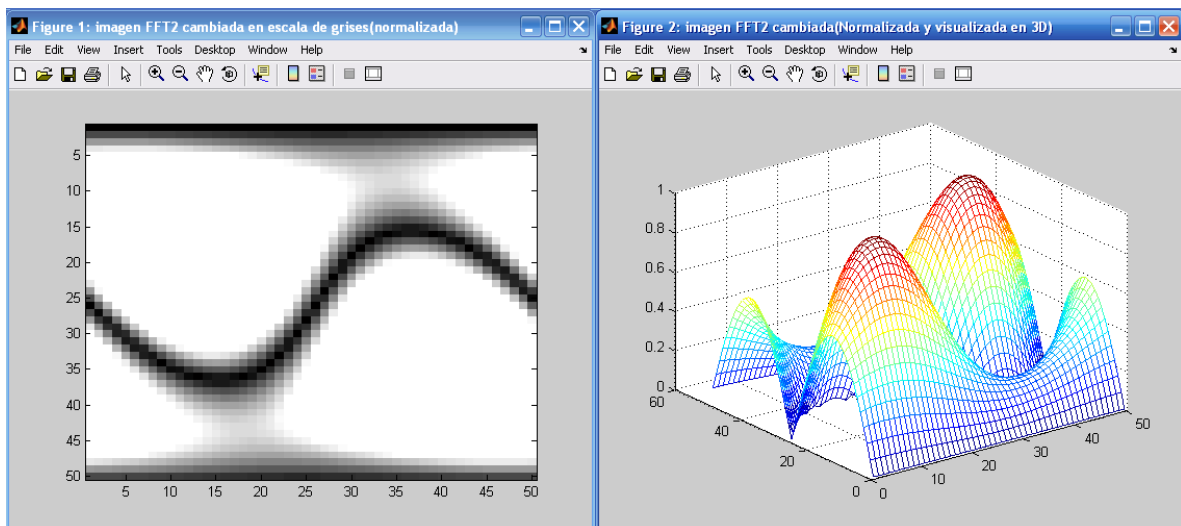
>> xi=I

xi =

     1     4    -2
     3     0    -3
     2    -4    -1

>> F=fft2(xi,50,50);%transformada rápida de Fourier de la imagen
>> %Cambio de las frecuencias bajas al centro de la imagen
>> F_shift=fftshift(F);
>> %cálculo de magnitud de la FFT2 cambiada(shift)
>> F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
>> %cálculo del máximo valor
>> mx_valor=max(F_shift_mag(:));
>> %normalización de los datos
>> F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');image(F_shift_norm_mag*255, colormap('gray'))
>> figure('name','imagen FFT2 cambiada(Normalizada y visualizada en 3D)');mesh(F_shift_norm_mag)

```



Se observa que la parte central del espectro de la máscara es oscura, por lo que se deduce que una imagen tratada con esta máscara pierde sus frecuencias espaciales bajas, lo cual se ve reflejado en una pérdida de detalles gruesos de los objetos de la imagen. Por otro lado, algunas de las zonas que corresponden a las frecuencias espaciales altas se verán resaltadas, por lo que se detectarán algunos bordes o cambios bruscos en los niveles de gris.

El efecto de un filtro puede ser revertido, dado que si se multiplica en frecuencia para obtener la imagen espectral filtrada  $[H(u,v)]$ , también es

posible dividirla para tratar de recuperar el espectro de la imagen original  $[F(u,v)]$ .

$$f(x, y) * g(x, y) = F(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$F(u, v) \cdot G(u, v) = H(u, v)$$

$$F(u, v) = \frac{H(u, v)}{G(u, v)}$$

Donde:

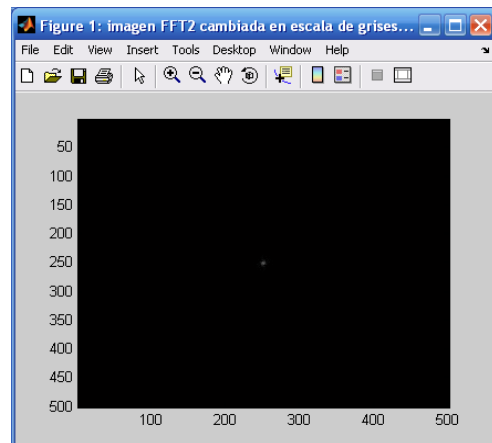
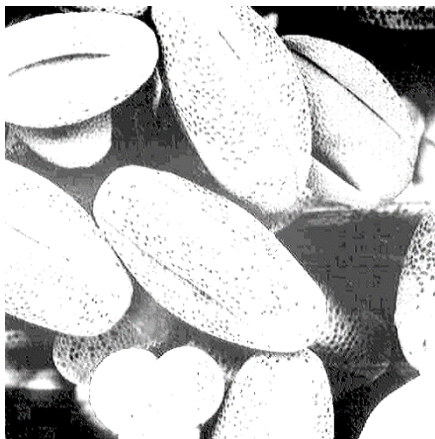
$F(u,v)$ : Trans. de Fourier de la imagen original.

$G(u,v)$ : Trans. de Fourier del filtro por aplicar.

$H(u,v)$ : Trans. de Fourier de la imagen filtrada.

Se toma una imagen y además se observa la transformada de Fourier,

```
Editor - C:\Program Files\WATLAB71\work\Especializacion_teleco_9_Febrero_2008\ejemplo_fft2_imagen.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
1 - I=imread('grises','bmp');%lectura de la imagen en formato jpg
2 - IG=I;
3 - xi=double(IG);
4 - F=fft2(xi);%transformada rápida de Fourier de la imagen
5 - F_shift=fftshift(F);
6 - F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
7 - mx_valor=max(F_shift_mag(:));
8 - F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
9 - figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)'),image(F_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
```

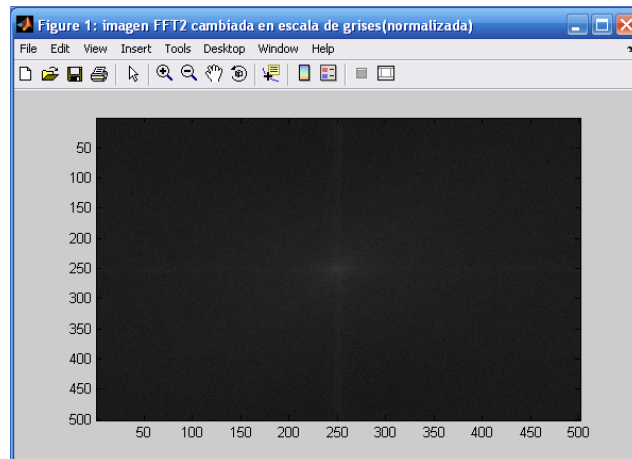


En la mayoría de imágenes, la zona central del espectro tiene valores altos, mientras que otras zonas tienen valores bajos, lo que se traduce en un punto brillante en el centro y negro en las demás zonas del espectro de magnitud de la imagen. Para evitar esto, una vez obtenido el espectro



de magnitud, se dibuja su logaritmo, lo cual hace que los valores pequeños se vean mas claramente, tal y como se muestra a continuación.

```
Editor - C:\Program Files\MATLAB71\work\Especializacion_teleco_9_Febrero_2008\ejemplo_fft2_imagen.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 - I=imread('grises','bmp');%lectura de la imagen en formato jpg
2 - IG=I;
3 - xi=double(IG);
4 - F=fft2(xi);%transformada rápida de Fourier de la imagen
5 - F_shift=fftshift(F);
6 - F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
7 - mx_valor=max(F_shift_mag(:));
8 - F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
9 - figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');image(log(F_shift_norm_mag),colormap('gray'))
script Ln 9 Col 90 OVR
```

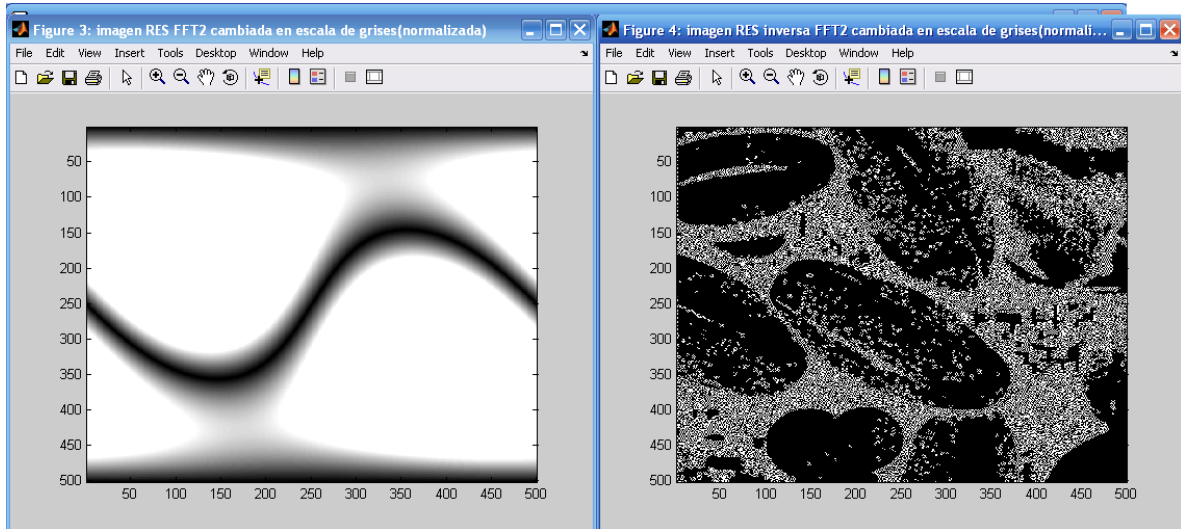


Ahora, se toma la transformada de Fourier de la imagen y de la máscara y se multiplican punto a punto, para luego hacer la inversa y obtener resultados.

```

Editor - C:\Program Files\MATLAB71\work\untitled.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 - I=imread('grises','bmp');%lectura de la imagen en formato jpg
2 - IG=I;
3 - xi=double(IG);
4 - F=fft2(xi);%transformada rápida de Fourier de la imagen
5 - F_shift=fftshift(F);
6 - F_shift_mag=sqrt((real(F_shift)).^2)+(imag(F_shift)).^2);
7 - mx_valor=max(F_shift_mag(:));
8 - F_shift_norm_mag=F_shift_mag/mx_valor;
9 - figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');,image(F_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
10 - [f,c]=size(IG);
11
12 - mk=[1 4 -2;3 0 -3;2 -4 -1]%mascara
13 - filas=f;
14 - columnas=c;
15 - xif=mk
16 - FF=fft2(xif,filas,columnas);%transformada rápida de Fourier de la máscara
17 - FF_shift=fftshift(FF);
18 - FF_shift_mag=sqrt((real(FF_shift)).^2)+(imag(FF_shift)).^2);
19 - mx_valorF=max(FF_shift_mag(:));
20 - FF_shift_norm_mag=FF_shift_mag/mx_valorF;
21 - figure('name','imagen FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');,image(FF_shift_norm_mag*255),colormap('gray')
22
23 - RES=F_shift.*FF_shift;
24 - RES_shift_mag=sqrt((real(FF_shift)).^2)+(imag(FF_shift)).^2);
25 - RES_mx_valor=max(RES_shift_mag(:));
26 - RES_norm=RES_shift_mag/RES_mx_valor;
27 - figure('name','imagen RES FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');,image((RES_norm)*255),colormap('gray')
28 - IM_res=ifft2(RES);
29 - figure('name','imagen RES inversa FFT2 cambiada en escala de grises(normalizada)');,image(real(IM_res)*255),colormap('gray')
script Ln 27 Col 97 OVR

```



La imagen obtenida luego de aplicar el filtro corrobora las suposiciones hechas al analizar la máscara; es decir, se observan algunos contornos de la imagen y se ha perdido información de los detalles nuevos.

*Ejercicio:* tomar una imagen a color y realizar un filtrado en el dominio de la frecuencia.