Universidad del Rosario | Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Álgebra Abstracta y Codificación: Ejercicios Semana 12.

Mauro Artigiani

25 octubre 2023

1. Sea $D \geq 2$ un entero. Demuestre que
$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{x + y\sqrt{D}, x, y \in \mathbb{Q}\}$$
es un campo.

2. Demuestre que $\mathbb{C}$ es isomorfo al subanillo
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
a través del isomorfismo
$$z = a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

3. Sea A un anillo conmutativo y sean I y J dos ideales en A. Demuestre que $I + J$, $I \cap J$ e IJ son ideales, donde
$$I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\}$$
$$IJ = \{xy, x \in I, y \in J\}.$$
¿Cuáles siguen siendo ideales si A *no* es conmutativo?

4. Sean A un anillo conmutativo y G un grupo finito cuya operación sea la multiplicación. Definimos el *anillo grupo* como

$$AG = \{a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n, a_i \in A, g_i \in G\},$$

   con las operaciones "obvias". Demuestre que AG es un anillo.

5. Sea A un anillo conmutativo con 1. Dados x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in A$, demuestre que

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, a_i \in A\}$$

   es un ideal, llamado el ideal generado por x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in A$.