Álgebra Abstracta y Codificación: Ejercicios Semana 6*

Mauro Artigiani

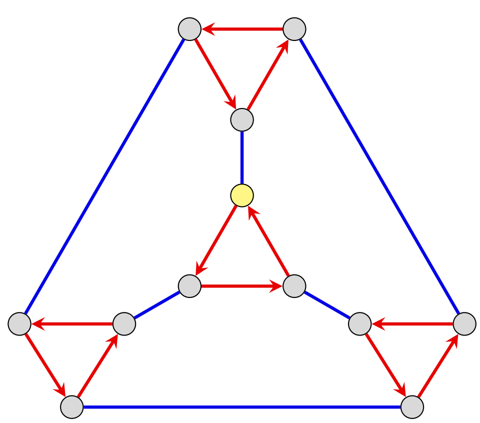
6 septiembre 2023

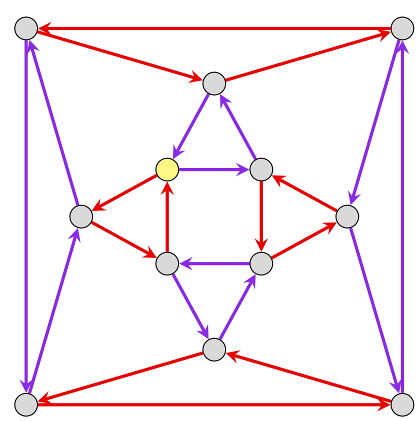
1. Sea G un grupo. Demuestre que si $g^2 = e$ para todos $g \in G$ entonces G es abeliano.

2. El *grupo alterno* A_4 es el subgrupo de S_4 formado por las permutaciones pares. Abajo hay dos diagramas de Cayley para las presentaciones:

$$A_4 = \big\langle (123), (12)(34) \big\rangle = \big\langle (123), (234) \big\rangle.$$

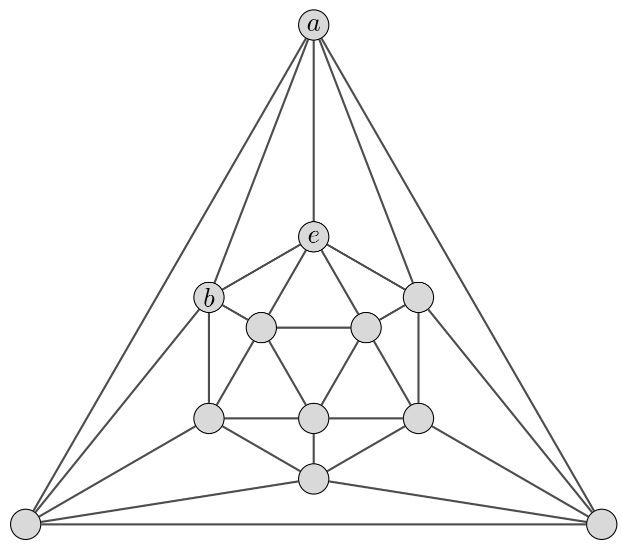
En cada vértice de ambos diagramas escriba como etiqueta el elemento corresponde de A_4, utilizando la notación en ciclos disjuntos.





3. Transforme el siguiente grafo, que representa el esqueleto de un icosaedro, en un diagrama de Cayley de grupo $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = abc = e \rangle$. En particular, ponga colores y direcciones a las flechas y escriba en cada vértice una etiqueta utilizando a, b, y c.

*Los ejercicios entre 2,3 y 4 son traducidos desde los ejercicios de Matthew Macauley.



Hay cinco grupos de orden 12:

(a) el producto de grupos cíclicos $C_3 \times C_4$.

(b) el producto de grupos cíclicos $C_2 \times C_2 \times C_3$.

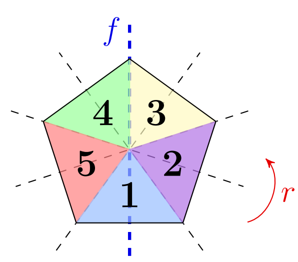
(c) el grupo alterno A_4.

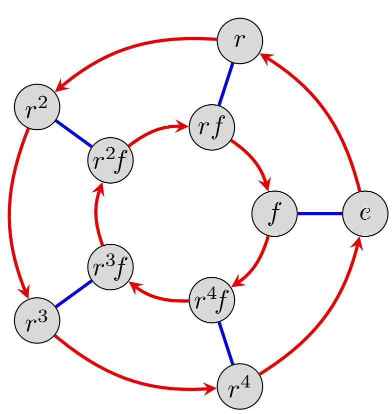
(d) el grupo diedral D_6.

(e) el grupo $\langle x, y \mid x^4 = e = y^2, xy = y^2x \rangle$.

Determine a cuáles de estos cinco es isomorfo el grupo G. Vuelva a dibujar el diagrama de Cayley etiquetando cada vértice con un elemento del grupo que es isomorfo a G entre los anteriores.

4. En el parcial encontraron los subgrupos de D_5, cuyo diagrama de Cayley está abajo.





(a) Construya el diagrama de Hasse de los subgrupos de D_5. Etiquete cada arista entre H y K con el índice $[H : K]$.

(b) Encuentre los laterales izquierdo y derechos de $\langle r \rangle$ y $\langle f \rangle$.

(c) El *normalizador* de $H \leq G$, denotado $N_G(H)$, es la unión de los laterales izquierdos de H que son también laterales derechos. Encuentre los normalizadores de $\langle r \rangle$ y $\langle f \rangle$.

(d) Dos subgrupos $H, K \leq G$ son *conjugados* si $K = gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ por algún $g \in G$. Esto define una relación de equivalencia entre los subgrupos llamada *clases de conjugación*. Particione D_5 en clases de conjugación.