Taller 1

26 de septiembre de 2023

Indicaciones generales

- Resolver todos los problemas, este taller servirá como preparación para el segundo parcial. Se deben entregar solamente los problemas marcados con *, es decir, 1.b.2, 3.1, 6, 8.a, 11, 15.c, 15.d, 18, 21, y 26.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- ¡Éxitos!

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere la topología sobre X dada por

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, X\}.$$

   a) Halle la colección $\mathcal{C}$ de todos los conjuntos cerrados sobre el espacio $(X, \mathcal{T})$.

   b) Halle el interior $\text{int}A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites para los siguientes conjuntos:
   - $A = \{1, 2, 4\}$
   - * $A = \{1, 3, 4, 5\}$
   - $A = \{3, 4, 5\}$
   - $A = \{3, 5\}$

2. Sobre $\mathbb{R}$ definamos la colección

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

   a) Muestre que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

   b) Describa la colección $\mathcal{C}$ de los cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

   c) Halle el interior $\text{int}A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites para los siguientes conjuntos:
   - $A = (-3, 5)$
   - $A = (1, 4]$
   - $A = (-\infty, 8)$

3. Considere $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana. Halle el interior $\text{int}A$, la clausura $\overline{A}$, y el conjunto A' de puntos límites para los siguientes conjuntos:
   - * $A = (-3, 5] \cup (6, \infty)$
   - $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
   - $A = (0, 8) \cup (8, 3]$

4. Sean $A,\ B$, y A_α subconjuntos del espacio X. Pruebe lo siguiente:

    a) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

    b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

    c) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup A_\alpha}$, dé un ejemplo donde no se cumpla la igualdad.

5. Sean $A,\ B$, y A_α subconjuntos del espacio X. Determine si las siguientes igualdades se cumplen; si alguna igualdad es falsa, determine si alguna de las contenencias $\subset$ o $\supset$ se cumple

    a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

    b) $\bigcap \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcap A_\alpha}$.

    c) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$

6. * Un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico se dice **denso** si $\overline{A} = X$. En este ejercicio, probaremos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ en la topología euclidiana.

    a) Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo de longitud $\epsilon = b - a$. Usando la expansión decimal de b podemos escribir b como una serie

    $$b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 10^{-i},$$

    donde $b_0 \in \mathbb{Z}$ y $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para $i > 0$. Pruebe que existe $n > 0$ tal que

    $$S_n = \sum_{i=0}^{n} b_i 10^{-i} \in (a, b).$$

    Por tanto, cada intervalo abierto en $\mathbb{R}$ contiene un número racional.

    b) Pruebe que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

7. Sea X un espacio topológico. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) X es T_1 : Para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen vecindades U de x y V de y tales que $x \notin V$ y $y \notin U$.

    b) Para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado.

8. Determine cuáles de los siguientes espacios son de Hausdorff y cuáles son T_1. En cada caso justifique su respuesta.

    a) * $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

    b) $\mathbb{Z}$ con $\mathcal{T}_c = \{U \subset \mathbb{Z} : \mathbb{Z} - U \text{ es contable}\}$.

9. Sea $(\mathbb{R}^2, \mathbb{T}_<)$ con $<$ el orden del diccionario. Diga si las siguientes sucesiones convergen o no. Justifique la respuesta.

    a) $\{(1 - 1/n) \times 1 : n \in \mathbb{Z}^+\}$

    b) $\{0 \times (1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$

10. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) Si X es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(X, \mathcal{T}_<)$ es un espacio Hausdorff.
   b) Si $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$ son espacios Hausdorff entonces $X \times Y$ con la topología producto es una topología Hausdorff.
   c) * Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff y $Y \subset X$ entonces Y con la topología del subespacio $\mathcal{T}_Y$ es una topología Hausdorff.

11. * Pruebe que X es Hausdorff si y solo si

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

es cerrado en la topología producto de $X \times X$.

12. Sea $X = \mathbb{R} \cup \{P\}$ donde $P \notin \mathbb{R}$. En X podemos definir la topología $\mathcal{T}_{oo}$ generada por los conjuntos:

   - Los intervalos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con $a < b$;
   - Las vecindades de P obtenidas como una vecindad de 0, quitando 0 y agregando P, es decir, conjuntos de la forma

$$((a, b) - \{0\}) \cup \{P\}, \quad \text{con} \;\; a < 0, \;\; b > 0.$$

   a) Pruebe que si $I \subset X$ es cualquier intervalo que contiene a 0 entonces $P \in \overline{I}$. Similarmente, si $V \subset X$ es cualquier vecindad de P entonces $0 \in \overline{V}$.
   b) Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subconjunto con $0 \in A'$ entonces $P \in A'$.
   c) Pruebe que la sucesión $\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ como subconjunto de X converge a 0 y a P. Es decir, sucesiones en X pueden tener más de un límite.

13. Sean $X_1 = (X, \mathcal{T}_1)$ y $X_2 = (X, \mathcal{T}_2)$. Sea $id : X_1 \to X_2$ la función identidad.

   a) Pruebe que id es continua, si y solo si, $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.
   b) Pruebe que id es un homeomorfismo, si y solo si, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$

14. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{H})$. Pruebe que las siguientes funciones son continuas:

   a) $\pi_1 : X \times Y \to X$ con $\pi_1(x \times y) = x$.
   b) $\pi_2 : X \times Y \to X$ con $\pi_2(x \times y) = y$.
   c) Dado un $y_0 \in Y$ fijo, $f_{y_0} : X \to X \times Y$ con $f_{y_0}(x) = x \times y_0$.
   d) Dado un $x_0 \in X$ fijo, $g_{x_0} : X \to X \times Y$ con $g_{x_0}(x) = x_0 \times y$.

15. Pruebe que cada una de las siguientes parejas de conjuntos son homeomorfas como subespacios de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

   a) $[a, \infty)$ y $[b, \infty)$.
   b) $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$.

c) * $[0,1)$ y $[a,b)$.
d) * $[0,1)$ y $[a,\infty)$.

16. Pruebe que los conjuntos $(0,1)$ y $[0,1)$ no son homeomorfos.

17. Sean $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{H})$ espacios y $f : X \to Y$ una función. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f es continua.
    b) Si $A \subset X$, entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

18. * Pruebe que si $f\colon X \to Y$ es continua y $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\} \subset Y$ converge a $f(x)$.

19. Pruebe que si X es Hausdorff y $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces Y es Hausdorff. Es decir, Hausdorff es una propiedad topológica.

20. Pruebe que irreducibilidad es una propiedad topológica.

21. * Un espacio topológico X es **conexo** si es imposible escribir X como la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos. Es decir, si $X = U \cup V$ con U, V abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Pruebe que conexidad es una propiedad topológica.

22. Sea $S^1 := \{x \times y \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topología de sub-espacio, y considere la función $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ definida por

$$f(x) = \cos(2\pi x) \times \sin(2\pi x).$$

    a) Pruebe que f es continua;
    b) Pruebe que $f|_{(0,1)}\colon (0,1) \to S^1$ es un embebimiento;
    c) Pruebe que $f|_{[0,1)}\colon [0,1) \to S^1$ es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo. **Ayuda:** Si $f|_{[0,1)}$ fuese un homeomorfismo entonces la preimagen de cualquier sucesión convergente debería ser convergente (ya que la función inversa sería continua). Analice que sucede con la preimagen de la sucesión convergente en S^1 dada por

$$y_n = \cos\left(\frac{(-1)^n 2\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{(-1)^n 2\pi}{n}\right).$$

23. Escriba la definición de función continua entre espacios topológicos. Demuestre que esta definición es equivalente a la definición en términos de $\epsilon - \delta$ en el caso de funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ esta dotado con la topología euclidiana.

24. Sean X, Y espacios topológicos y $\alpha \in Y$. Muestre que la función $f\colon X \to X \times Y$ definida por $f(x) = (x, \alpha)$ es un embebimiento (aquí $X \times Y$ está dotado de la topología producto).

25. Dé un ejemplo de una función que es continua solo en un punto (justifique su respuesta).

26. * Dé un ejemplo de una función que no es continua en ningún punto.

27. Pruebe que en $\mathbb{R}^2$ las funciones

$$\begin{aligned} d_1(\vec{x},\vec{y}) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \\ d_2(\vec{x},\vec{y}) &= \text{máx}\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\} \\ d_3(\vec{x},\vec{y}) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|, \end{aligned}$$

satisfacen los axiomas de métrica, donde $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$.

28. Con la misma notación del punto anterior, pruebe que existen constantes $\alpha,\beta>0$ tales que

$$\alpha d_2(\vec{x},\vec{y}) \leq d_3(\vec{x},\vec{y}) \leq \beta d_2(\vec{x},\vec{y})$$

para todos $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$. ¿Qué quiere decir esto acerca de las topologías inducidas por d_2 y d_3?

29. Con la misma notación de los puntos anteriores, pruebe que existen constantes $\gamma,\delta>0$ tales que

$$\gamma d_2(\vec{x},\vec{y}) \leq d_1(\vec{x},\vec{y}) \leq \delta d_2(\vec{x},\vec{y})$$

para todos $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$. ¿Qué quiere decir esto acerca de las topologías inducidas por d_1 y d_2?

30. Dibuje $B_d((0,0);1)\subseteq\mathbb{R}^2$ para $d=d_1,d_2,d_3$.

31. Muestre que si d y d' son métricas sobre X las cuales inducen las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ respectivamente, entonces $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}'$ si y solo si para cada $x\in X$ y cada $r>0$ existe $r'>0$ tal que

$$B_{d'}(x;r')\subseteq B_d(x;r)$$

32. Pruebe que todo espacio topológico metrizable es Hausdorff.

33. Pruebe que ser metrizable es una propiedad topológica.

34. Pruebe que una función $f\colon X\to Y$ con X metrizable es continua si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}\subseteq X$ tal que $x_n\to x$ para algún $x\in X$ se tiene que $f(x_n)\to f(x)$.

35. Pruebe que la suma, la resta y la multiplicación de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (con la topología euclidiana) son de nuevo funciones continuas.