Inteligencia Artificial

Incertidumbre

Edgar Andrade, Ph.D.

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la computación

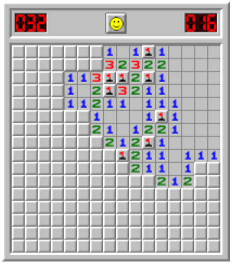
Última revisión: Abril de 2023

Contenido

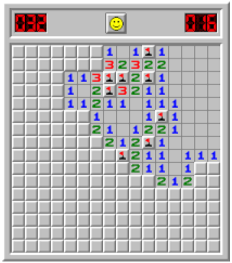
Contenido

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

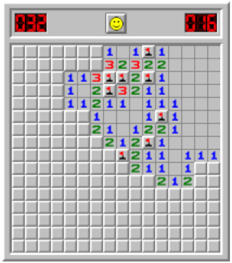
Fuentes de incertidumbre

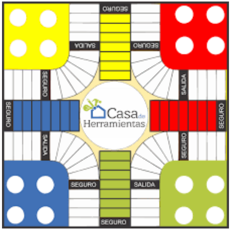


Fuentes de incertidumbre



Fuentes de incertidumbre





MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Actuando bajo incertidumbre

Fuentes de incertidumbre:

- Información parcial.
- Adversarios.
- No determinismo.

Muchas veces no es posible deducir un plan perfecto.

No obstante, el agente debe actuar.

Inferencia probabilística

Comparación:

Inferencia lógica	Inferencia probabilística

Inferencia probabilística

Comparación:

Inferencia lógica	Inferencia probabilística
Reglas	Probabilidad conjunta

Inferencia probabilística

Comparación:

Inferencia lógica	Inferencia probabilística
Reglas	Probabilidad conjunta
Datos	Evidencia

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

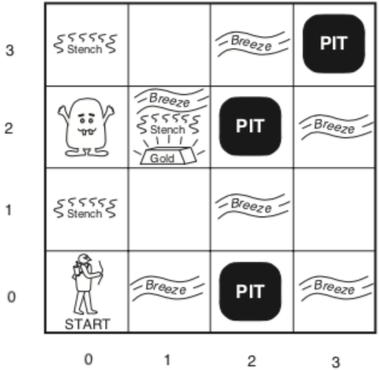
Inferencia probabilística

Comparación:

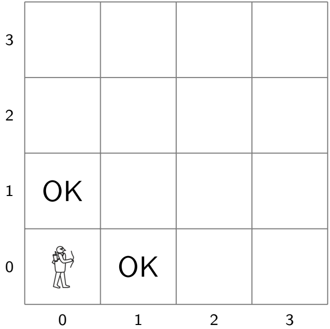
Inferencia lógica	Inferencia probabilística
Reglas	Probabilidad conjunta
Datos	Evidencia
Deducción	Probabilidad condicional (Posteriores)

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

El mundo del Wumpus de nuevo



Cuantificando la incertidumbre



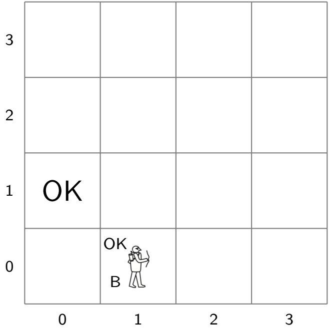
Sensores

`(None, None, None, None, None)`

Actuadores

`adelante`

Cuantificando la incertidumbre



Sensores

(`None`, `brisa`, `None`, `None`, `None`)

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Cuantificando la incertidumbre

¿Cuál es la probabilidad de que haya un pozo en cada una de esas casillas?

Cuantificando la incertidumbre

¿Cuál es la probabilidad de que haya un pozo en cada una de esas casillas?

☞ La probabilidad de que haya un pozo en una casilla es 0.2.

$$P(Pozo(2,0)) = 0.2$$

Cuantificando la incertidumbre

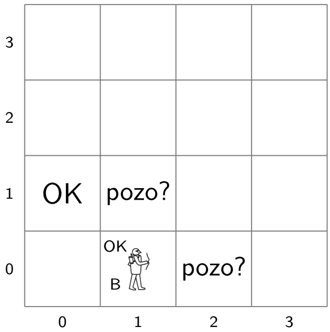
¿Cuál es la probabilidad de que haya un pozo en cada una de esas casillas?

☞ La probabilidad de que haya un pozo en una casilla es 0.2.

$$P(Pozo(2,0)) = 0.2$$

☞ Esta probabilidad cambia dado que hay brisa en $(1,0)$.

Cuantificando la incertidumbre



¿Cuál es la probabilidad de que haya un pozo en cada una de esas casillas?

☞ La probabilidad de que haya un pozo en una casilla es 0.2.

$$P(Pozo(2,0)) = 0.2$$

☞ Esta probabilidad cambia dado que hay brisa en $(1,0)$.

$$P(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)) = ?$$

Contenido

Probabilidades (1/3)

Probabilidad conjunta

¿Cuál es la probabilidad de sacar por lo menos una cara y un sello en dos lanzamientos de una moneda?

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Probabilidades (1/3)

Probabilidad conjunta

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

$P(A) = ?$

Probabilidades (1/3)

Probabilidad conjunta

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

Ω

(c, c) (c, s) (s, c) (s, s)

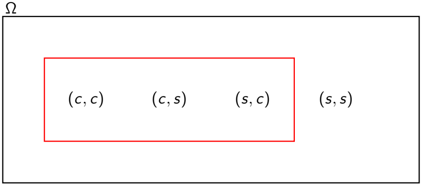
$$P(A) = ?$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Probabilidades (1/3)

Probabilidad conjunta

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

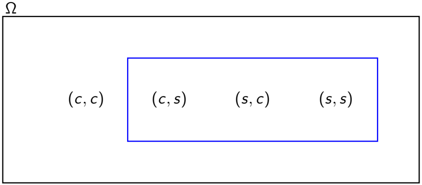


$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$

Probabilidades (1/3)

Probabilidad conjunta

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.
B: Sacar por lo menos un sello en dos lanzamientos de una moneda.



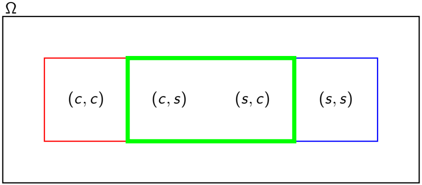
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Probabilidades (1/3)

Probabilidad conjunta

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.
B: Sacar por lo menos un sello en dos lanzamientos de una moneda.



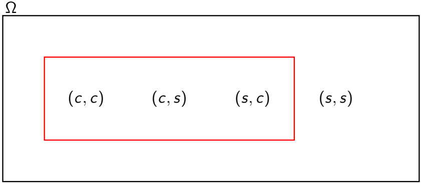
$$P(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Probabilidades (2/3)

Probabilidad marginal

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

B: El primer lanzamiento es sello.

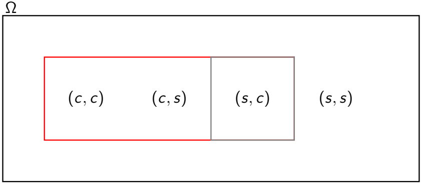


$$P(A) = \qquad +$$

Probabilidades (2/3)

Probabilidad marginal

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.
B: El primer lanzamiento es sello.



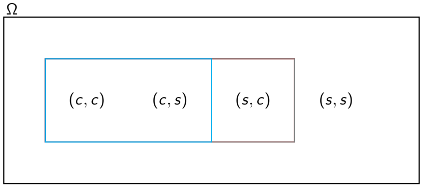
$$P(A) = P(A, B) +$$

Probabilidades (2/3)

Probabilidad marginal

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

B: El primer lanzamiento es sello.



$$P(A) = P(A, B) + P(A, \neg B)$$

Probabilidades (3/3)

Probabilidad condicional

¿Cuál es la probabilidad de sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda dado que el primer lanzamiento fue sello?

Ω

(c, c) (c, s) (s, c) (s, s)

Probabilidades (3/3)

Probabilidad condicional

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

B: El primer lanzamiento es sello.

Ω

$(c, c) \quad (c, s) \quad (s, c) \quad (s, s)$

$$P(A|B) = ?$$

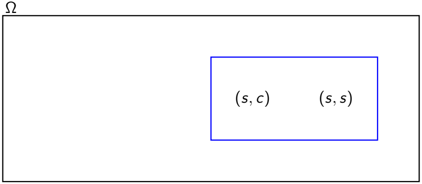
MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Probabilidades (3/3)

Probabilidad condicional

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

B: El primer lanzamiento es sello.



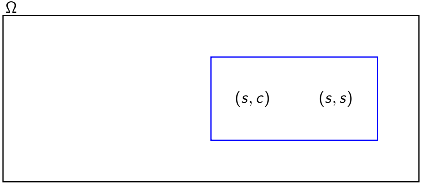
$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Probabilidades (3/3)

Probabilidad condicional

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

B: El primer lanzamiento es sello.



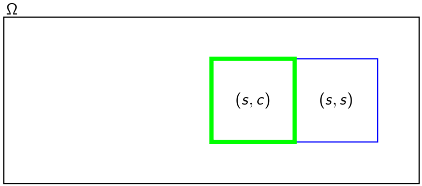
$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Probabilidades (3/3)

Probabilidad condicional

A: Sacar por lo menos una cara en dos lanzamientos de una moneda.

B: El primer lanzamiento es sello.



$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{2}$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{P(B)}P(B|A)P(A)$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{P(B)}P(B|A)P(A) = \alpha P(B|A)P(A)$$

Prior

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{P(B)}P(B|A)P(A) = \alpha P(B|A)P(A)$$

Prior

Posterior

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{Posterior}} = \frac{1}{P(B)}P(B|A)P(A) = \alpha \underbrace{\color{red}{P(B|A)}}_{\text{Relaciones causales, Leyes teóricas}} \underbrace{P(A)}_{\text{Prior}}$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{Posterior}} = \underbrace{\frac{1}{P(B)}}_{\text{factor de normalización}} P(B|A)P(A) = \alpha \underbrace{P(B|A)}_{\text{Relaciones causales, Leyes teóricas}} \underbrace{P(A)}_{\text{Prior}}$$

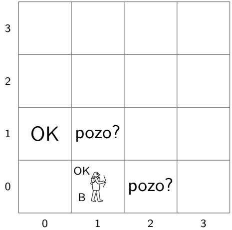
Posterior

factor de normalización

Relaciones causales
Leyes teóricas

Prior

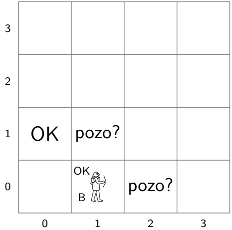
Obteniendo la probabilidad posterior



$$P\big(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)\big) = ?$$

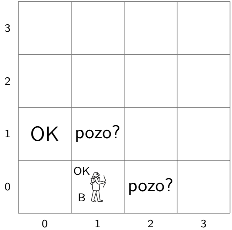
MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Obteniendo la probabilidad posterior



$$P\big(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)\big) = \alpha P(Brisa(1,0)|Pozo(2,0))P(Pozo(2,0))$$

Obteniendo la probabilidad posterior

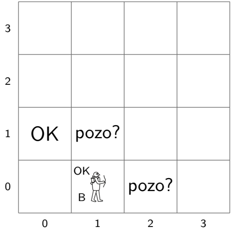


$$P\big(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)\big) = \alpha P(Brisa(1,0)|Pozo(2,0))P(Pozo(2,0))$$

☞ Siempre hay una brisa en $(1,0)$ cuando hay un pozo en $(2,0)$.

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

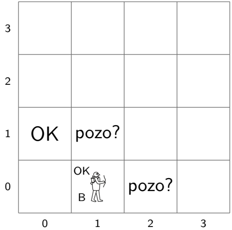
Obteniendo la probabilidad posterior



$$
\begin{aligned}
P\big(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)\big) &= \alpha P(Brisa(1,0)|Pozo(2,0))P(Pozo(2,0)) \\
&= \alpha \times 1 \times P(Pozo(2,0))
\end{aligned}
$$

☞ Siempre hay una brisa en $(1,0)$ cuando hay un pozo en $(2,0)$.

Obteniendo la probabilidad posterior



$$
\begin{aligned}
P\big(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)\big) &= \alpha P(Brisa(1,0)|Pozo(2,0))P(Pozo(2,0)) \\
&= \alpha \times 1 \times P(Pozo(2,0)) \\
&= \alpha \times 1 \times 0.2 = \alpha \times 0.2
\end{aligned}
$$

☞ La probabilidad de que haya un pozo en $(2,0)$ es 0.2.

Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

$$\frac{1}{\alpha} = P(B)$$

Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= P(B) \\
&= P(B, A) + P(B, \neg A)
\end{aligned}
$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= P(B) \\
&= P(B, A) + P(B, \neg A) \\
&= P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)
\end{aligned}$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= P(B) \\
&= P(B,A) + P(B,\neg A) \\
&= {\color{red}P(B|A)P(A)} + P(B|\neg A)P(\neg A)
\end{aligned}
$$

☞ Esta cantidad se acaba de obtener.

Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} &= P(B)\\ &= P(B, A) + P(B, \neg A)\\ &= P(B|A)P(A) + {\color{red}P(B|\neg A)P(\neg A)}\end{aligned}$$

☞ Sólo falta encontrar esta cantidad.

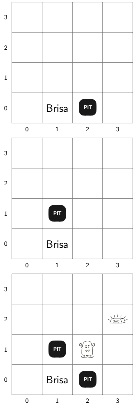
Factor de normalización

¿Qué es α y cómo se puede obtener?

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= P(B) \\
&= P(B, A) + P(B, \neg A) \\
&= P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)
\end{aligned}
$$

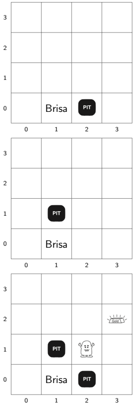
☞ $P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(1,1)) = ?$

Independencia



☞ Observe que *Brisa*$(1, 0)$ es independiente de la localización de los demás pozos, de la localización del Wumpus, etc.

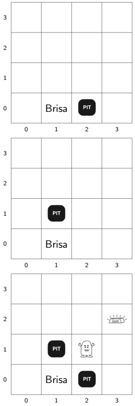
Independencia



☞ Observe que *Brisa*$(1,0)$ es independiente de la localización de los demás pozos, de la localización del Wumpus, etc.

¡El valor de $P(Brisa(1,0))$ no depende del valor de *Wumpus*$(2,1)$!

Independencia



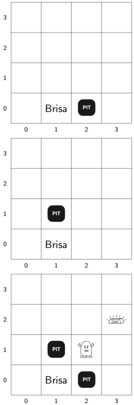
☞ Observe que *Brisa*$(1,0)$ es independiente de la localización de los demás pozos, de la localización del Wumpus, etc.

¡El valor de $P(Brisa(1,0))$ no depende del valor de $Wumpus(2,1)$!

☞ Dos eventos A y B son independientes sii $P(A,B) = P(A)P(B)$.

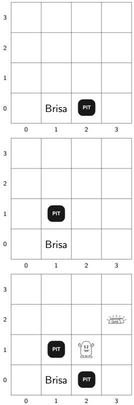
MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Independencia

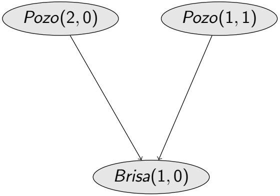


☞ *Brisa*$(1,0)$ solo depende de la combinación de valores de *Pozo*$(1,1)$ y *Pozo*$(2,0)$.

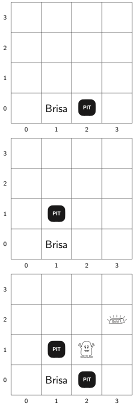
Independencia



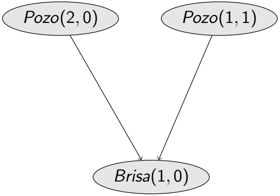
☞ *Brisa*$(1,0)$ solo depende de la combinación de valores de *Pozo*$(1,1)$ y *Pozo*$(2,0)$.



Independencia



☞ *Brisa*$(1,0)$ solo depende de la combinación de valores de *Pozo*$(1,1)$ y *Pozo*$(2,0)$.



		Brisa$(1,0)$	
Pozo$(1,1)$	*Pozo*$(2,0)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Hallando α

$$P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(1,1))$$

Hallando α

$$
\begin{aligned}
&P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1)) \\
&\qquad = P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1), \mathit{Pozo}(2,0))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1), \mathit{Pozo}(2,0)) \\
&\qquad\quad + P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1), \neg \mathit{Pozo}(2,0))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1), \neg \mathit{Pozo}(2,0))
\end{aligned}
$$

☞ $\mathit{Brisa}(1,0)$ depende de $\mathit{Pozo}(1,1)$ y de $\mathit{Pozo}(2,0)$.

Hallando α

$$
\begin{aligned}
&P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1)) \\
&\qquad = P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1), \mathit{Pozo}(2,0))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1), \mathit{Pozo}(2,0)) \\
&\qquad\quad + P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1), \neg \mathit{Pozo}(2,0))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1), \neg \mathit{Pozo}(2,0)) \\
&\qquad = P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1), \mathit{Pozo}(2,0))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1))P(\mathit{Pozo}(2,0)) \\
&\qquad\quad + P(\mathit{Brisa}(1,0)|\neg \mathit{Pozo}(1,1), \neg \mathit{Pozo}(2,0))P(\neg \mathit{Pozo}(1,1))P(\neg \mathit{Pozo}(2,0))
\end{aligned}
$$

☞ $\mathit{Pozo}(1,1)$ y $\mathit{Pozo}(2,0)$ son independientes.

Hallando α

$$
\begin{aligned}
&P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(1,1)) \\
&\qquad = P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0)) \\
&\qquad\quad + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0)) \\
&\qquad = P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1))P(Pozo(2,0)) \\
&\qquad\quad + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(2,0)) \\
&\qquad = 1 \times P(\neg Pozo(1,1))P(Pozo(2,0)) + 0 \times P(\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(2,0))
\end{aligned}
$$

		Brisa(1,0)	
Pozo(1,1)	*Pozo*(2,0)	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

Hallando α

$$
\begin{aligned}
&P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(1,1))\\
&\qquad = P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))\\
&\qquad\quad + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))\\
&\qquad = P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1))P(Pozo(2,0))\\
&\qquad\quad + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(2,0))\\
&\qquad = 1 \times P(\neg Pozo(1,1))P(Pozo(2,0)) + 0 \times P(\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(2,0))\\
&\qquad = 1 \times 0.8 \times 0.2 + 0 \times 0.8 \times 0.8\\
&\qquad = 0.16
\end{aligned}
$$

☞ La probabilidad de que haya un pozo es 0.2.

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Hallando α

$$
\begin{aligned}
&P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(1,1)) \\
&\quad = P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0)) \\
&\qquad + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0)) \\
&\quad = P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1))P(Pozo(2,0)) \\
&\qquad + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1), \neg Pozo(2,0))P(\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(2,0)) \\
&\quad = 1 \times P(\neg Pozo(1,1))P(Pozo(2,0)) + 0 \times P(\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(2,0)) \\
&\quad = 1 \times 0.8 \times 0.2 + 0 \times 0.8 \times 0.8 \\
&\quad = 0.16
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1))P(Pozo(1,1)) + P(Brisa(1,0)|\neg Pozo(1,1))P(\neg Pozo(1,1)) \\
&= 0.2 + 0.16 = 0.36
\end{aligned}
$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Obteniendo la probabilidad posterior (cont.)

$$
\begin{aligned}
P\big(Pozo(2,0)|Brisa(1,0)\big) &= \alpha P(Brisa(1,0)|Pozo(2,0))P(Pozo(2,0)) \\
&= \alpha \times 0.2 = \frac{1}{0.36} \times 0.2 \\
&\approx 0.55
\end{aligned}
$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Fórmula general

Probabilidad posterior

$$P(A|B) = \alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(B|A, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) P(A, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$$

Donde α es el factor de normalización, $\boldsymbol{Y}$ es el vector de variables desconocidas e $\boldsymbol{y}$ toma valores en todas las combinaciones posibles.

Contenido

Evidencia múltiple

Intentando encontrar el oro sin morir en el intento...

Sensores

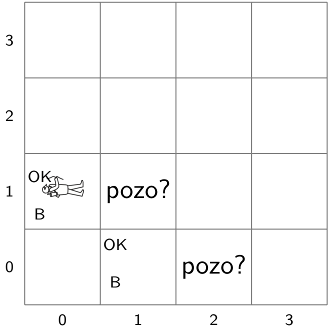
(`Brisa`, `None`, `None`, `None`, `None`)

Actuadores

(`voltearIzquierda`, `voltearIzquierda`, `adelante`, `voltearDerecha`, `adelante`)

Evidencia múltiple

Intentando encontrar el oro sin morir en el intento...

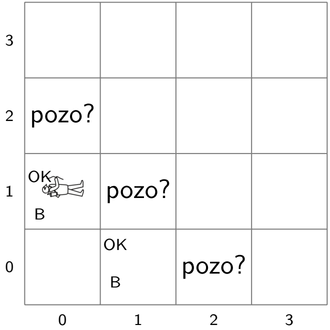


Sensores

`(Brisa, None, None, None, None)`

Evidencia múltiple

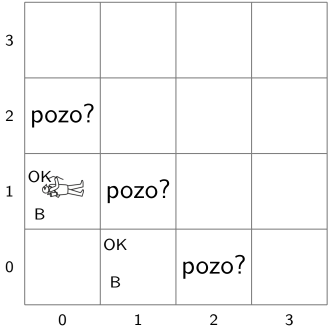
Intentando encontrar el oro sin morir en el intento...



¿Cuál es la probabilidad de que haya un pozo en $(1, 1)$ con base en la información disponible hasta el momento?

Evidencia múltiple

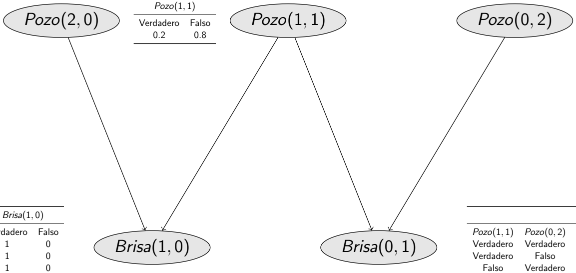
Intentando encontrar el oro sin morir en el intento...



¿Cuál es la probabilidad de que haya un pozo en $(1,1)$ con base en la información disponible hasta el momento?

$¿P(Pozo(1,1)|Brisa(1,0), Brisa(0,1))?$

Red de dependencias



Pozo(2, 0)	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

Pozo(1, 1)	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

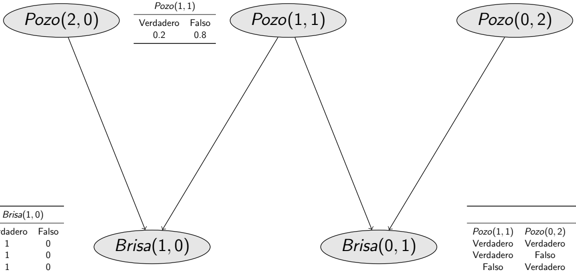
Pozo(0, 2)	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

		Brisa(1, 0)	
Pozo(2, 0)	*Pozo*(1, 1)	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

		Brisa(0, 1)	
Pozo(1, 1)	*Pozo*(0, 2)	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Red de dependencias



$Pozo(2,0)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

$Pozo(1,1)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

$Pozo(0,2)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

		$Brisa(1,0)$	
$Pozo(2,0)$	$Pozo(1,1)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

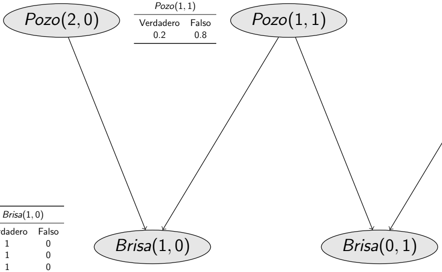
		$Brisa(0,1)$	
$Pozo(1,1)$	$Pozo(0,2)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

Independencia condicional

$Brisa(1,0)$ y $Brisa(0,1)$ son independientes condicional a $Pozo(1,1)$.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Red de dependencias



$Pozo(2,0)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

$Pozo(1,1)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

$Pozo(0,2)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

		$Brisa(1,0)$	
$Pozo(2,0)$	$Pozo(1,1)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

		$Brisa(0,1)$	
$Pozo(1,1)$	$Pozo(0,2)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

Independencia condicional

A y B son independientes condicional a C sii $P(A,B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Encontrando la probabilidad posterior

$$
\begin{aligned}
&P(\mathit{Pozo}(1,1)|\mathit{Brisa}(1,0),\mathit{Brisa}(0,1))\\
&=\alpha P(\mathit{Brisa}(1,0),\mathit{Brisa}(0,1)|\mathit{Pozo}(1,1))P(\mathit{Pozo}(1,1))
\end{aligned}
$$

Encontrando la probabilidad posterior

$$P(Pozo(1,1)|Brisa(1,0), Brisa(0,1))$$
$$=\alpha P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1))P(Pozo(1,1))$$
$$=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})$$

☞ Incluimos las variables desconocidas

Encontrando la probabilidad posterior

$$
\begin{aligned}
&P(Pozo(1,1)|Brisa(1,0), Brisa(0,1))\\
&=\alpha P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1))P(Pozo(1,1))\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

☞ Usamos independencia condicional

Encontrando la probabilidad posterior

$$
\begin{aligned}
&P(\mathit{Pozo}(1,1)|\mathit{Brisa}(1,0),\mathit{Brisa}(0,1))\\
&=\alpha P(\mathit{Brisa}(1,0),\mathit{Brisa}(0,1)|\mathit{Pozo}(1,1))P(\mathit{Pozo}(1,1))\\
&=\alpha\sum_{\boldsymbol{y}} P(\mathit{Brisa}(1,0),\mathit{Brisa}(0,1)|\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})P(\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})\\
&=\alpha\sum_{\boldsymbol{y}} P(\mathit{Brisa}(1,0)|\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})P(\mathit{Brisa}(0,1)|\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})P(\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})\\
&=\alpha\sum_{\boldsymbol{y}} P(\mathit{Brisa}(1,0)|\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})P(\mathit{Brisa}(0,1)|\mathit{Pozo}(1,1),\boldsymbol{y})P(\mathit{Pozo}(1,1))
\end{aligned}
$$

☞ Usamos la independencia de $\mathit{Pozo}(1,1)$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Encontrando la probabilidad posterior

$$
\begin{aligned}
&P(Pozo(1,1)|Brisa(1,0), Brisa(0,1))\\
&=\alpha P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1))P(Pozo(1,1))\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1))
\end{aligned}
$$

$\uparrow$ variable conocida

$\uparrow$ padres

.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Encontrando la probabilidad posterior

$$
\begin{aligned}
&P(Pozo(1,1)|Brisa(1,0), Brisa(0,1))\\
&=\alpha P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1))P(Pozo(1,1))\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y})\\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1))
\end{aligned}
$$

↑	↑	↑	↑
variable conocida	padres	variable conocida	padres

.

Encontrando la probabilidad posterior

$$
\begin{aligned}
&P(Pozo(1,1)|Brisa(1,0), Brisa(0,1)) \\
&=\alpha P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1))P(Pozo(1,1)) \\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0), Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y}) \\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1), \boldsymbol{y}) \\
&=\alpha \sum_{\boldsymbol{y}} P(Brisa(1,0)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Brisa(0,1)|Pozo(1,1), \boldsymbol{y})P(Pozo(1,1))
\end{aligned}
$$

↑	↑	↑	↑	↑
variable conocida	padres	variable conocida	padres	variable conocida sin padres

.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Semántica de una red bayesiana

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\boldsymbol{y}} \prod_{i=1}^{n} P(X_i | Padres\_conocidos(X_i), \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$$

1. $Padres\_conocidos(X_i) = Padres(X_i) \cap \{X_{i+1}, \ldots, X_n\}$.
2. $\boldsymbol{Y}$ es un vector de las variables Y_i cuyo valor desconocemos y tal que Y_i es padre de alguno o algunos $X_1, \ldots, X_n$.

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Inferencia exacta en una Red Bayesiana

$$P(X_1, \dots, X_n | E_1, \dots E_s) = \alpha P(X_1, \dots, X_n, E_1, \dots E_s)$$

Inferencia exacta en una Red Bayesiana

$$
\begin{aligned}
P(X_1, \ldots, X_n | E_1, \ldots E_s) &= \alpha P(X_1, \ldots, X_n, E_1, \ldots E_s) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{Y}} P(X_1, \ldots, X_n, E_1, \ldots E_k, \boldsymbol{Y})
\end{aligned}
$$

☞ Donde $\boldsymbol{Y}$ son las variables Y_i cuyo valor desconocemos y tal que Y_i es padre de alguno o algunos $X_1, \ldots, X_n$.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Inferencia exacta en una Red Bayesiana

$$
\begin{aligned}
P(X_1, \ldots, X_n | E_1, \ldots E_s) &= \alpha P(X_1, \ldots, X_n, E_1, \ldots E_s) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{Y}} P(X_1, \ldots, X_n, E_1, \ldots E_k, \boldsymbol{Y}) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{Y}} P(Z_1, \ldots, Z_r)
\end{aligned}
$$

☞ Donde $Z_1, \ldots, Z_r = X_1, \ldots, X_n, E_1, \ldots E_s, \boldsymbol{Y}$

Inferencia exacta en una Red Bayesiana

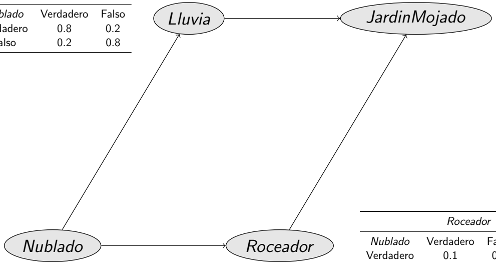
$$
\begin{aligned}
P(X_1,\ldots,X_n|E_1,\ldots E_s) &= \alpha P(X_1,\ldots,X_n,E_1,\ldots E_s) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{Y}} P(X_1,\ldots,X_n,E_1,\ldots E_k,\boldsymbol{Y}) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{Y}} P(Z_1,\ldots,Z_r) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{Y}} \prod_{k=1}^{r} P(Z_i|Padres(Z_i))
\end{aligned}
$$

☞ Donde $Z_1,\ldots,Z_r = X_1,\ldots,X_n,E_1,\ldots E_s,\boldsymbol{Y}$

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Ejercicio 1

	Lluvia	
Nublado	Verdadero	Falso
Verdadero	0.8	0.2
Falso	0.2	0.8



		JardinMojado	
Lluvia	*Roceador*	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	0.99	0.01
Verdadero	Falso	0.9	0.1
Falso	Verdadero	0.9	0.1
Falso	Falso	0	1

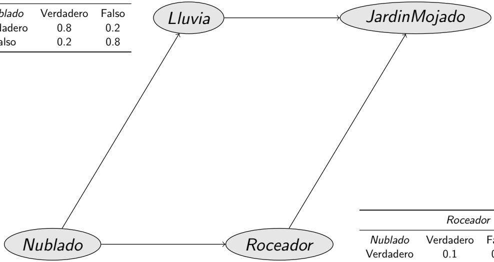
Nublado	
Verdadero	Falso
0.5	0.5

	Roceador	
Nublado	Verdadero	Falso
Verdadero	0.1	0.9
Falso	0.5	0.5

Ejercicio 1

	Nublado
Verdadero	Falso
0.5	0.5

	Lluvia	
Nublado	Verdadero	Falso
Verdadero	0.8	0.2
Falso	0.2	0.8



		JardinMojado	
Lluvia	*Roceador*	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	0.99	0.01
Verdadero	Falso	0.9	0.1
Falso	Verdadero	0.9	0.1
Falso	Falso	0	1

	Roceador	
Nublado	Verdadero	Falso
Verdadero	0.1	0.9
Falso	0.5	0.5

Dado que el jardín está mojado, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

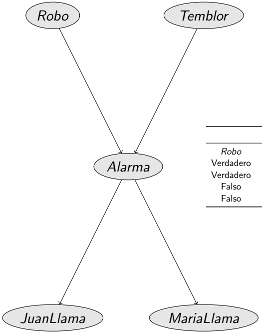
Ejercicio 2

Usted ha instalado un sistema de alarma para su casa, el cual es muy confiable para detectar robos, pero en ciertas ocasiones también responde a terremotos leves. Usted tiene dos vecinos, John y Mary, que han prometido llamarlo a su trabajo cuando escuchen la alarma. John casi siempre llama cuando escucha la alarma, pero a veces confunde el sonido del teléfono con la alarma y hará la llamada. Por otro lado, Mary escucha música a todo volumen y por eso algunas veces no escucha la alarma.

Ejercicio 2

Robo	
Verdadero	Falso
0.001	0.999

Terremoto	
Verdadero	Falso
0.002	0.998



		Alarma	
Robo	*Terremoto*	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	0.95	0.05
Verdadero	Falso	0.94	0.06
Falso	Verdadero	0.29	0.71
Falso	Falso	0.001	0.999

	JuanLlama	
Alarma	Verdadero	Falso
Verdadero	0.9	0.1
Falso	0.05	0.95

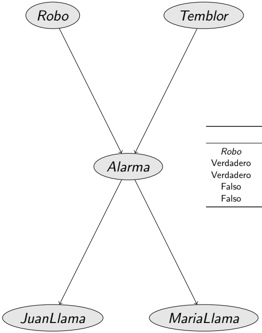
	MariaLlama	
Alarma	Verdadero	Falso
Verdadero	0.7	0.3
Falso	0.01	0.99

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Ejercicio 2

Robo	
Verdadero	Falso
0.001	0.999

Terremoto	
Verdadero	Falso
0.002	0.998



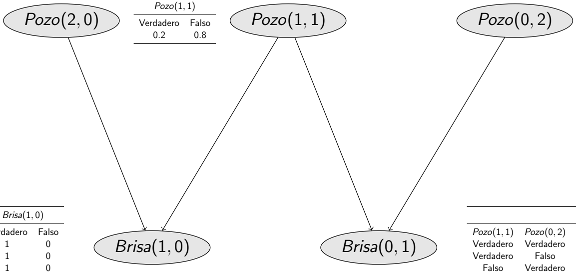
		Alarma	
Robo	*Terremoto*	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	0.95	0.05
Verdadero	Falso	0.94	0.06
Falso	Verdadero	0.29	0.71
Falso	Falso	0.001	0.999

	JuanLlama	
Alarma	Verdadero	Falso
Verdadero	0.9	0.1
Falso	0.05	0.95

	MariaLlama	
Alarma	Verdadero	Falso
Verdadero	0.7	0.3
Falso	0.01	0.99

Dado que John y Mary llaman, ¿cuál es la probabilidad de robo?

Ejercicio 3



$Pozo(2,0)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

$Pozo(1,1)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

$Pozo(0,2)$	
Verdadero	Falso
0.2	0.8

		$Brisa(1,0)$	
$Pozo(2,0)$	$Pozo(1,1)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

		$Brisa(0,1)$	
$Pozo(1,1)$	$Pozo(0,2)$	Verdadero	Falso
Verdadero	Verdadero	1	0
Verdadero	Falso	1	0
Falso	Verdadero	1	0
Falso	Falso	0	1

Dado $Brisa(1,0)$ y $Brisa(0,1)$, ¿cuál es la probabilidad de $Pozo(1,1)$?

Contenido

Ejes definitorios

Objeto de desempeño	**Tipo de desempeño**
Pensamientos	Humano
Acciones	Óptimo

Ejes definitorios

Objeto de desempeño	**Tipo de desempeño**
Pensamientos	Humano
Acciones	Óptimo

Cuarta alternativa

Construir máquinas que actúen de manera óptima

Ambientes de tarea

	Sensores	Actuadores	Entorno	Medida de desempeño
Ajedrez	Percepción del Tablero	Movimiento de las fichas	Tablero	Ganar$>$ Empatar$>$ Perder -tiempo
Héroe del Wumpus	Percepción de la caverna	Movimiento en la caverna y flecha	Caverna	Conseguir el oro$>$ No morir$>$ Morir en el intento

Utilidad

La utilidad (medida de desempeño) es una función que a cada estado S le asigna un valor real, $U(S)$.

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Utilidad

La utilidad (medida de desempeño) es una función que a cada estado S le asigna un valor real, $U(S)$.

La función de utilidad captura la idea de que un agente prefiere un estado S_1 sobre un estado S_2, $U(S_1) \geq U(S_2)$.

Incertidumbre

Una acción puede no dar siempre el mismo resultado.

$$\{S_1, p_1; S_2, p_2; \ldots; S_n, p_n\}$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Incertidumbre

Una acción puede no dar siempre el mismo resultado.

$$\{S_1, p_1; S_2, p_2; \ldots; S_n, p_n\}$$

Después de que el agente ejecuta la acción a, se obtiene el estado S_i con probabilidad p_i.

Utilidad esperada de una acción

$$UE(a|e) = \sum_{i=1}^{n} U(S_i)P(S_i|e) \qquad (1)$$

Utilidad esperada de una acción

$$UE(a|e) = \sum_{i=1}^{n} U(S_i)P(S_i|e) \tag{1}$$

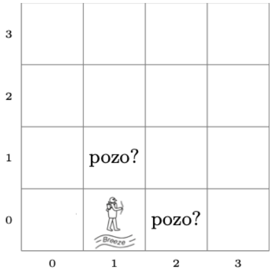
Un agente racional decidirá ejecutar la acción que le permita maximizar su utilidad esperada:

$$\text{Acción} = \operatorname*{argmáx}_a \ UE(a|e) = \operatorname*{argmáx}_a \sum_{i=1}^{n} U(S_i)P(S_i|e) \tag{2}$$

Utilidad en el Wumpus

$$U(\text{casilla}(x,y)) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathit{oro}(x,y) \wedge \neg \mathit{pozo}(x,y) \\ 0, & \text{si } \neg \mathit{oro}(x,y) \wedge \neg \mathit{pozo}(x,y) \\ -1, & \text{si } \mathit{pozo}(x,y) \end{cases}$$

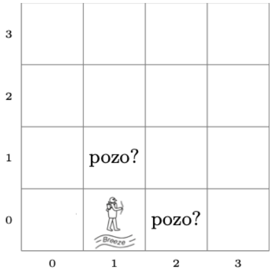
Calculando utilidades esperadas



Acciones posibles:

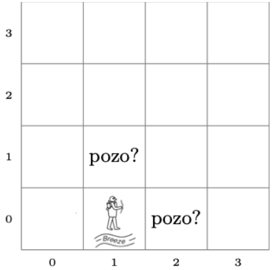
- $a_1 =$ Regresarse a $(0, 0)$
- $a_2 =$ Seguir a $(2, 0)$
- $a_3 =$ Subir a $(1, 1)$.

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_1|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

Calculando utilidades esperadas



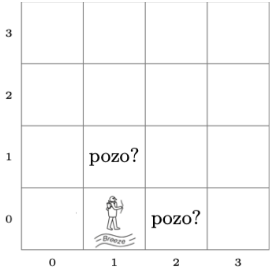
$$UE(a_1|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

$$= U(oro(0,0), \neg pozo(0,0))\,P(oro(0,0), \neg pozo(0,0)|e)$$

$$+\ U(\neg oro(0,0), \neg pozo(0,0))\,P(\neg oro(0,0), \neg pozo(0,0)|e)$$

$$+\ U(pozo(0,0))\,P(pozo(0,0)|e)$$

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_1|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

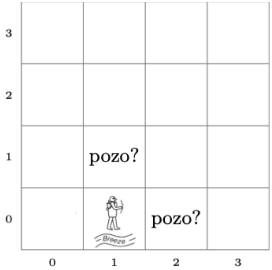
$$= U(oro(0,0), \neg pozo(0,0))\,P(oro(0,0)|e)\,P(\neg pozo(0,0)|e)$$

$$+ U(\neg oro(0,0), \neg pozo(0,0))\,P(\neg oro(0,0)|e)\,P(\neg pozo(0,0)|e)$$

$$+ U(pozo(0,0))\,P(pozo(0,0)|e)$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_1|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

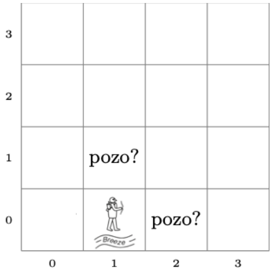
$$= U(oro(0,0), \neg pozo(0,0))\, P(oro(0,0)|e)\, P(\neg pozo(0,0)|e)$$

$$+ \; U(\neg oro(0,0), \neg pozo(0,0))\, P(\neg oro(0,0)|e)\, P(\neg pozo(0,0)|e)$$

$$+ \; U(pozo(0,0))\, P(pozo(0,0)|e)$$

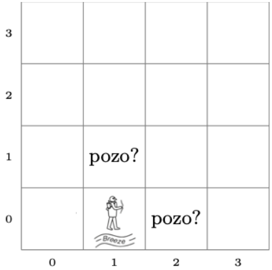
$$= 1 \times 0 \times 1 + 0 \times 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$$

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_2|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

Calculando utilidades esperadas



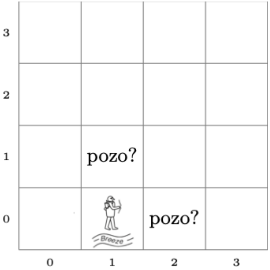
$$UE(a_2|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

$$= U(oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(oro(2,0), \neg pozo(2,0)|e)$$

$$+ U(\neg oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(\neg oro(2,0), \neg pozo(2,0)|e)$$

$$+ U\big(pozo(2,0)\big)P\big(pozo(2,0)|e\big)$$

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_2|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

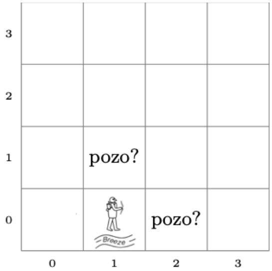
$$= U(oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(oro(2,0))\,P(\neg pozo(2,0)|e)$$

$$+\ U(\neg oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(\neg oro(2,0))\,P(\neg pozo(2,0)|e)$$

$$+\ U(pozo(2,0))\,P(pozo(2,0)|e)$$

MACC Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_2|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

$$= U(oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(oro(2,0))P(\neg pozo(2,0)|e)$$

$$+ U(\neg oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(\neg oro(2,0))P(\neg pozo(2,0)|e)$$

$$+ U(pozo(2,0))P(pozo(2,0)|e)$$

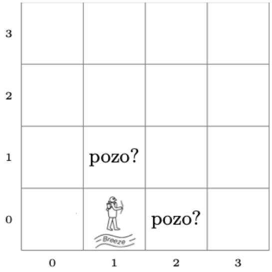
$$= 1 \times \frac{1}{16} \times 0.44$$

$$+ 0 \times \frac{15}{16} \times 0.44$$

$$+ -1 \times 0.56$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Calculando utilidades esperadas



$$UE(a_2|e) = \sum_S U(S)P(S|e)$$

$$= U(oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(oro(2,0))P(\neg pozo(2,0)|e)$$

$$+ U(\neg oro(2,0), \neg pozo(2,0))P(\neg oro(2,0))P(\neg pozo(2,0)|e)$$

$$+ U(pozo(2,0))P(pozo(2,0)|e)$$

$$= 1 \times \frac{1}{16} \times 0.44$$

$$+ 0 \times \frac{15}{16} \times 0.44$$

$$+ -1 \times 0.56$$

$$= -0.53$$

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Contenido

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación

Nodos

Tres tipos de nodos:

- Nodos de probabilidad: son los nodos de la red bayesiana.

Nodos

Tres tipos de nodos:

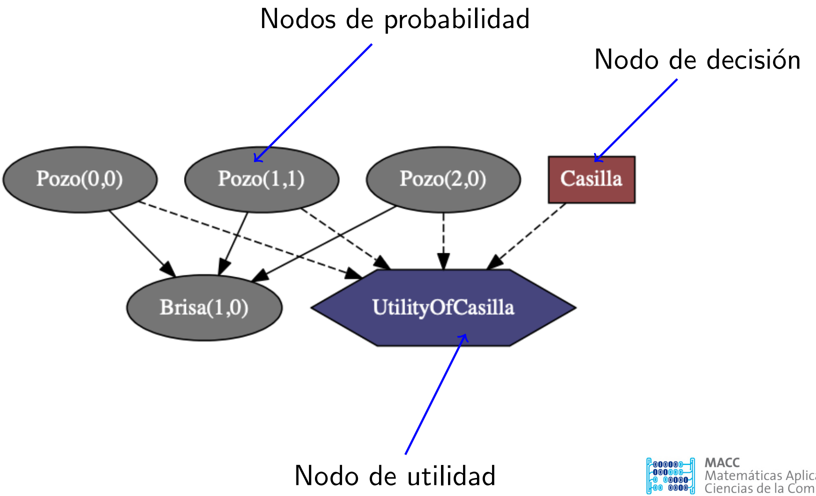
- Nodos de probabilidad: son los nodos de la red bayesiana.
- Nodo de decisión: es el nodo que representa las acciones posibles.

Nodos

Tres tipos de nodos:

- Nodos de probabilidad: son los nodos de la red bayesiana.
- Nodo de decisión: es el nodo que representa las acciones posibles.
- Nodo de utilidad: está conectado a los demás nodos de tal manera que representa la utilidad esperada de cada acción del nodo de decisión, de acuerdo a las probabilidades de los nodos de probabilidad.

Red


Nodos de probabilidad
Nodo de decisión
Pozo(0,0)
Pozo(1,1)
Pozo(2,0)
Casilla
Brisa(1,0)
UtilityOfCasilla
Nodo de utilidad

Take away

En esta sesión usted aprendió:

- Repaso de probabilidades, independencia y teorema de Bayes.
- Usar el teorema de Bayes para encontrar probabilidades a posteriori.
- Representación de la independencia condicional mediante grafos dirigidos acíclicos.
- Realizar inferencias en Redes Bayesianas.
- La IA como tecnologías para que un agente maximice su utilidad esperada.
- Calcular la utilidad esperada de una acción en el mundo del Wumpus.

MACC
Matemáticas Aplicadas y
Ciencias de la Computación