Álgebra Abstracta y Codificación: Ejercicios Semana 13

Mauro Artigiani

1 noviembre 2023

En los ejercicios 1–3 adapte la demostración vista en $\mathbb{Z}$ para el anillo $F[x]$, con F campo.

1. Todos los ideales de $F[x]$ son principales.

2. El máximo común divisor entre $f(x)$ y $g(x)$ es un polinomio *mónico* $d(x) \in F[x]$ tal que

   - $d(x) \mid f(x)$ y $d(x) \mid g(x)$,
   - si $e(x) \mid f(x)$ y $e(x) \mid g(x)$, luego $e(x) \mid d(x)$.

   Demuestre que si $\gcd(f(x), g(x)) = d(x)$, luego existen $r(x)$, $t(x) \in F[x]$ tales que
   $$f(x)r(x) + g(x)t(x) = d(x).$$

3. Si $p(x)$ es un polinomio irreducible y $p(x) \mid f(x)g(x)$, luego $p(x) \mid f(x)$ o $p(x) \mid g(x)$.

4. Sea A un anillo conmutativo con 1. Decimos que a y b en A están *asociados* si existe una unidad $u \in A$ tal que $a = bu$. Estar asociados es una relación de equivalencia. Demuestre los siguientes hecho sobre ideales.
$$\begin{aligned}
u \text{ es una unidad } &\iff \langle u\rangle = \langle 1\rangle\\
a \text{ y } b \text{ están asociados } &\iff \langle a\rangle = \langle b\rangle\\
a \text{ divide a } b &\iff \langle b\rangle \subset \langle a\rangle\\
a \text{ es un divisor proprio de } b &\iff \langle b\rangle \subset \langle a\rangle \subset \langle 1\rangle.
\end{aligned}$$