2023-2 Topología Grupo 2
Tercer Corte
RESUMEN

- Una **separación** de un espacio topológico X consiste de dos abiertos $U, V \subset X$ no vacíos y tales que
$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \emptyset.$$
- Un espacio topológico X es **conexo** si no tiene una separación.
- Se sigue de la definición anterior que un espacio topológico X es conexo si y solo si el único subconjunto de X que es abierto y cerrado al mismo tiempo es precisamente X.
- Los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos unitarios. En efecto, si $S \subset \mathbb{Q}$ contiene dos puntos distintos $x < y$, entonces el intervalo (x, y) continiene un irracional γ y por tanto
$$S = (S \cap (-\infty, \gamma)) \cup (S \cap (\gamma, \infty))$$
es una separación de S.
- Si $f \colon X \to Y$ es continua y X es conexo, entonces la imagen
$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algún } x \in X\}$$
es un subconjunto conexo de Y. En particular, **conexidad es una propiedad topológica**.
- Una propidad importante de conexidad es la siguiente: suponga que tenemos una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos conexos de X tales que
$$\bigcap U_\alpha \neq \emptyset,$$
entonces $U = \bigcup U_\alpha$ es conexo. Esta propiedad en particular implíca que el **producto de dos espacios topológicos conexos es un espacio topológico conexo**. Sin embargo,
- La propiedad de la mínima cota superior de $\mathbb{R}$ permite mostrar que los **únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos**.

- Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la imagen $f([a,b])$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ (porque el intervalo $[a,b]$ es conexo) y por tanto $f([a,b])$ es un intervalo. Esto quiere decir que si r es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = r$. Este resultado se conoce como el **teorema del valor intermedio**.

- Un caso particular del teorema del valor intermedio es el **teorema de Bolzano** que asegura que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$ entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

- Un espacio topológico X se dice **arco-conexo** o **conexo por arcos** si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ existe una función continua $\alpha\colon [a,b] \to X$ tal que $\alpha(a) = x_1$ y $\alpha(b) = x_2$.

- Es posible probar que todo espacio arco-conexo es necesariamente conexo. En efecto, si X es arco-conexo y $X = U \cup V$ es una separación, entonces una curva que une un punto $x_1 \in U$ con un punto $x_2 \in V$ es necesariamente disconexa, contradiciendo que la imagen de un intervalo $[a,b]$ por una función continua es un subconjunto conexo. Sin embargo, no todo espacio topológico conexo es arco-conexo, un ejemplo es **la curva seno del topólogo** definida como la clausura $\bar{S}$ de la curva

$$S = \left\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\right\}.$$

- Al igual que para conexidad, es posible probar que si $f\colon X \to Y$ es continua y X es arco-conexo, entonces su imagen $f(X)$ es un subconjunto arco-conexo de Y. En particular, **arco-conexidad es una propiedad topológica**.

- Un espacio topológico X se dice **localmente arco-conexo** si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $U_x \subset X$ que es arco-conexa.

- Es posible probar que si X es localmente arco-conexo y conexo, entonces X es arco-conexo. En efecto, si $x_0 \in X$ es cualquier punto, podemos usar la arco-conexidad local para probar que el conjunto

$$U_{x_0} := \{y \in X \colon y \text{ puede unirse por una curva con } x_0\}$$

  es abierto y cerrado y por tanto $U_{x_0} = X$, es decir, X es arco-conexo.

- Dado cualquier espacio topológico podemos definir la siguiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe un subconjunto conexo } U \subset X \text{ con } x, y \in U.$$