Separación (X,τ) $\exists U,V\subset X$ abiertos, $U,V\neq\emptyset$, tales que $U\cup V=X$, $U\cap V=\emptyset$

X es **conexo** si NO tiene separación.

X es conexo sii el único subconjunto abierto y cerrado es $X,\emptyset$

$U\subseteq\mathbb{Q}$ conexo son $\{x\}$ $(S=(S\cap(-\infty,r))\cup(S\cap(r,\infty))$

- Si $f:X\to Y$ es continua y X es conexo, entonces la imagen $f(X)=\{y\in Y: y=f(x), \text{algún } x\in X\}$ es $\subseteq$ conexo de Y. Conexidad es una propiedad topológica
- Sea $\{U_\alpha\}\subseteq X$ conexos: $\cap U_\alpha\neq\emptyset$, entonces $U=\cup U_\alpha$ es conexo. El producto de dos espacios topológicos conexos, es un esp. top de conexo.
- propiedad de la mínima cota superior de $\mathbb{R}\to$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ conexos son los intervalos

---

Teorema del valor intermedio Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces $f([a,b])$ es un subconjunto conexo ($[a,b]$ conexo) y $f([a,b])$ es un intervalo. Si r está entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $c\in[a,b]: f(c)=r$.

Teorema de Bolzano Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $f(a).f(b)<0$, entonces $\exists\, c\in(a,b): f(c)=0$.

---

video

Lema Si $X=C\cup D$ (separación) y si $Y\subseteq X$ conexo, entonces $Y\subseteq C$ o $Y\subseteq D$

Teorema Si $A\subseteq X$ conexo y $A\subset B\subset\bar{A}$, entonces B conexo.

X es **arco-conexo/conexo por arcos** si $\forall x,y\in X$, $\exists\,\alpha:[a,b]\to X$ continua : $\alpha(a)=x$ y $\alpha(b)=y$.

X es **localmente arco-conexo** si $\forall x\in X$, $\exists\, U_x\subset X$ vecindad abierta que es arco-conexa.

- Todo espacio arco-conexo es conexo.
- $f:X\to Y$ es continua y X es arco-conexo, entonces su imagen $f(X)$ es un subconjunto arco-conexo de Y. En particular, arco-conexidad es una prop. top.
- Si X es localmente arco-conexo y conexo, entonces X es arco-conexo (Si $y\in X$, usar la arco-conexidad local $\to$ bolas $\to$ arco conexas).

---

video

$x\sim y\Leftrightarrow\exists\, U\subset X$ conexo con $x,y\in U$. Son **componentes conexas**. **Teo:** Las componentes conexas de X son subespacios disyuntos y conexos de X cuya unión es X, de forma que $U\subseteq X$ conexo no trivial intersecta solo a uno de ellos. En $\mathbb{Q}$ son $\{r\}$.

Cubierta abierta de X es una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos tales que $\cup_\alpha U_\alpha=X$.

X es **Compacto** si es posible extraer una cubierta finita

Si $\{U_\alpha\}$, $X=U_{\alpha_1}\cup\dots\cup U_{\alpha_n}$.

- Si $A\subseteq X$ es cerrado y X es compacto, entonces A compacto. Si además X es Hausdorff, entonces cada $U\subseteq X$ compacto es cerrado.
- Si $f:X\to Y$ continua y X compacto, $\Rightarrow Y$ compacto. (Prop. topológica)

Teorema de Tychonoff Si $\{X_\alpha\}$ es una colección de esp. top. compactos, entonces $X=\prod_\alpha X_\alpha$ es un esp. top. compacto.

- (prop. mín cota sup $\mathbb{R}$) Cada intervalo cerrado $[a,b]$ es compacto.
- (X,d). $A\subseteq X$ es **acotado** si $\exists R>0: A\subset Bd(x_0,R)$ para algún $x_0\in X$

Teorema Heine-Borel los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los subconjuntos cerrados y acotados.

Teo. de los valores extremos Si $f:X\to\mathbb{R}$ continua y X compacto, entonces f tiene máx y mín. ($f(X)\subseteq\mathbb{R}$ compacto $\Rightarrow$ cerrado y acotado $\Rightarrow$ sup e inf $\Rightarrow$ inf, sup $\in f(X)$)

Una colección $\{C_\alpha\}\subset X$ cerrados, tiene la **propiedad de la intersección finita** si cada subcolección finita $C_{\alpha_1},\dots,C_{\alpha_n}$ satisface $C_{\alpha_1}\cap\dots\cap C_{\alpha_n}\neq\emptyset$.

video

Teo X es compacto sii $\{C_\alpha\}\subset X$ cerrados con la prop. intersección finita $\cap_\alpha C_\alpha\neq\emptyset$.

Teo Bolzano-Weierstraß Si $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^n$ sucesión acotada, entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente. En general:

Si $A\subset\mathbb{R}^n$ compacto y $\{x_n\}\subset A$, $\Rightarrow\{x_n\}$ tiene una subsucesión

---

X es **compacto de punto límite** si cada $U\subseteq X$ finito tiene punto límite

X es **secuencialmente compacto** si cada sucesión $\{x_n\}\subset X$ tiene una subsucesión convergente

---

- Si X es compacto, entonces X es compacto de punto límite.
- Asumiendo que X es metrizable, es equivalente: $\cdot$ X es compacto $\cdot$ X es compacto de punto límite $\cdot$ X es secuencialmente compacto
- **Lema del número de Lebesgue** Si (X,d) es un espacio métrico y $\mathcal{A}$ es una cubierta de X, entonces $\exists\,\delta>0$: Si $B\subset X$ $d(B)=\sup\{d(x,y): x,y\in B\}<\delta$, existe un $A\in\mathcal{A}: B\subset A$.

- A': $x\in X: x\in A-\{x\}\mid\forall V_x: V_x\cap(A-\{x\})\neq\emptyset$
- $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Una métrica en X es una función $d:X\times X\to\mathbb{R}$ tq: ($d(x,y)$ es la distancia de x a y)

1. $d(x,y)\geq 0$ y $d(x,y)=0$ sii $x=y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$Bd(x_0,r)=\{x\in X: d(x_0,r)<r\}$