Universidad del Rosario | Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Álgebra Abstracta y Codificación: Ejercicios Semana 2

Mauro Artigiani

11 agosto 2023

1. Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{P}(X)$ su conjunto de potencia. Denotamos con $\triangle$ la diferencia simétrica entre conjuntos. Demuestre que $\langle \mathcal{P}(X), \triangle \rangle$ es un grupo abeliano.

2. Sea $\mathscr{F}(\mathbb{R}) = \{f, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ el conjunto de las funciones reales de variable real. Definimos la operación $+$ en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ punto por punto, es decir:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}).$$

   Demuestre que $\langle \mathscr{F}(\mathbb{R}), + \rangle$ es un grupo.

3. Con la notación del punto anterior, definimos la operación $\cdot$ en $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ punto por punto, es decir:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}).$$

   Demuestre que $\langle \mathscr{F}(\mathbb{R}), \cdot \rangle$ no es un grupo.

4. Considere la siguiente tabla de multiplicación

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	b	c
b	b	c	e	a
c	c	a	b	e

   Explique por qué no puede ser la tabla de Cayley de un grupo.

   Opcional: trate de arreglar la tabla para que se vuelva la tabla de multiplicación en un grupo. Hay dos maneras distintas para hacerlo, se puede apoyar en el `Group Explorer`, si quiere.

5. En la Figura 1 encuentra el grafo de Cayley del grupo A_4[1]. Utilizando el grafo, encuentre el elemento $t \in A_4$ tal que $t(b^2)^2 = xyz$.

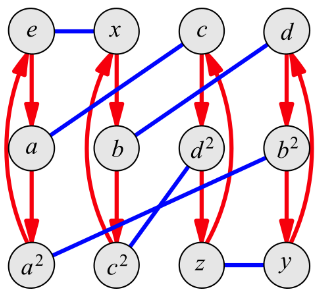

Figura 1: El grafo de Cayley del grupo A_4.

Los siguientes ejercicios son más difíciles, porque se requiere creatividad para solucionarlos. La sugerencia es atacarlos en grupos, y, de necesitarlo, pasar a horario de atención para unas pistas.

6. Encuentre los grafos de Cayley de los grupos de simetrías de los patrones de frisos en la Figura 2.

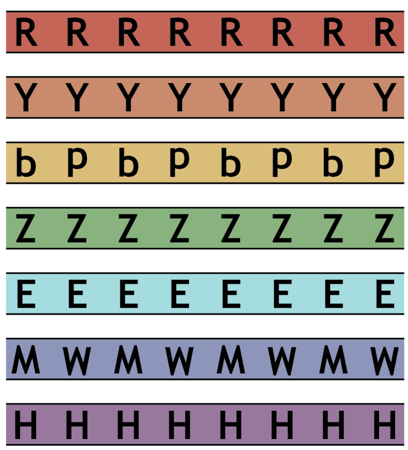

Figura 2: Patrones de frisos. Imagine que cada patrón se extienda hacia infinito hacia la izquierda y la derecha.

7. Considere los grafos en la Figura 3. Explique por qué no pueden ser grafos de Cayley de ningún grupo.

[1]Por el momento, no importa cómo está definido este grupo.

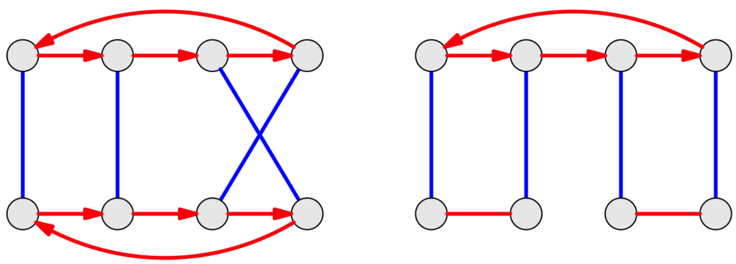

Figura 3: Dos grafos que no son grafos de Cayley.