TALLER 2

Entrega: hasta el 21 de noviembre de 2023

Indicaciones generales

- Resolver todos los problemas, este taller servirá como preparación para el tercer parcial. Se deben entregar solamente los problemas marcados con *.
- A menos que se especifique lo contrario consideramos siempre a $\mathbb{R}$ con la topología estandar (la topología euclidiana).
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- ¡Éxitos!

Conexos y arco-conexos

1. Pruebe que cada intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo.

2. Pruebe que todo espacio topológico irreducible es conexo.

3. * Es cierto que si $\bar{A}$ es conexo entonces A es conexo? Justifique su respuesta ya sea con una demostración o con un contraejemplo.

4. * Considere el conjunto $A = \{a, b, c\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$. Pruebe que A conexo. ¿Es A arco-conexo? **Ayuda:** Existe una función continua y sobreyectiva $f : \mathbb{R} \to A$.

5. Pruebe que una función continua envía arco-conexos a arco-conexos.

6. Pruebe si $\pi : X \to Y$ es una función cociente y X es conexo, entonces Y es conexo.

7. Pruebe si $\pi : X \to Y$ es una función cociente tal que Y es conexo y todas las fibras $\pi^{-1}(y) = \{x \in X : \pi(x) = y\}$ son conexas, entonces X es conexo.

8. Pruebe que la banda de Möbius, la botella de Klein, el toro, y el plano proyectivo real son espacios topológicos conexos y en efecto arco-conexos.

9. * Sea X us espacio topológico conexo. Pruebe que si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que para cada $x \in X$ existe un abierto $U_x \subseteq X$ con $x \in U_x$ tal que f es constante en U_x, entonces f es constante en todo X.

10. * Pruebe que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua, entonces existe un $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. ¿Es esto cierto para funciones $[0, 1) \to [0, 1)$ o para funciones $(0, 1) \to (0, 1)$?

11. Pruebe que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe un $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

12. * Pruebe que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo (en la topología euclidiana), entonces U es arco-conexo.

13. Pruebe que si $A \subset X$ es conexo y $S \subset X$ es un subespacio tal que $A \subset S \subset \bar{A}$, entonces S es conexo.

Compactos

1. Pruebe que la imagen de compactos por funciones continuas es compacto.

2. Pruebe que unión finita de compactos es compacto.

3. Muestre que si (X, d) es un espacio métrico y $\{x_n\}$ es una sucesión infinita con un punto límite $x \in X$, entonces existe $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge a x.

4. Muestre que si $Y = \{a, b\}$ tiene la topología trivial, entonces el producto $\mathbb{Z} \times Y$ es compacto de punto límite pero no es compacto.

5. Muestre que si X es compacto entonces X tiene un número finito de componentes conexas.

6. Muestre que si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada, entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

7. Muestre que si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subespacio compacto, entonces A es cerrado y acotado.

8. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Defina para cada $x \in X$ la distancia de x al subconjunto A por medio de la fórmula

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}.$$

   a) Pruebe que $d(x, A) = 0$ si y solo si $x \in \bar{A}$.

   b) Pruebe que si A es compacto, entonces existe un $a \in A$ tal que

$$d(x, A) = d(x, a)$$

   para todo $x \in X$. **Ayuda:** Pruebe que para cada $x \in X$, la función $f \colon A \to \mathbb{R}$ definida por $f(a) = d(x, a)$ es continua.

9. Un espacio topológico se dice **totalmente disconexo** si sus únicos subespacios conexos consisten de un solo punto. Pruebe que si X tiene la topología discreta entonces X es totalmente disconexo.

10. Sea $A_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Sea A_1 el conjunto obtenido luego de remover el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ de A_0. Sea A_2 el conjunto obtenido luego de remover los intervalos centrales $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ de A_1. En general, definimos

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

La intersección

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

se conoce como el **conjunto de Cantor**. Pruebe que:

   a) C es totalmente disconexo.

   b) C es compacto.

   c) C no tiene la topología discreta.