2023-2 Topología Grupo 2
Segundo Corte
RESUMEN

- Sea X un espacio topológico. De ahora en adelante omitirémos la mención especifica de la topología y simplemente nos referiremos a un elemento de la topología como un subconjunto abierto de X.

- Sea $A \subseteq X$, definimos los siguientes subconjuntos de X:

  1. El **interior** de A, denotado por $\text{int}A$, es el abierto más grande contenido en A.
  2. La **clausura** o **cerradura** de A, denotada por $\bar{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A.

  Equivalentemente, $\text{int}A$ es la unión de todos los abiertos contenidos en A, y $\bar{A}$ es la intersección de todos los abiertos que contienen a A.

- Se sigue de la definición anterior que $\text{int}A$ es abierto y $\bar{A}$ es cerrado. Además,

  $$\text{int}A \subseteq A \subseteq \bar{A}.$$

  Es claro que A es abieto si y solo si $\text{int}A = A$, y que A es cerrado si y solo si $\bar{A} = A$.

- Recuerde que una **vecindad** de $x \in X$ es un abierto de $U \subseteq X$ tal que $x \in U$. Decimos que una vecindad U de x **intersecta** al subconjunto $A \subseteq X$ si $U \cap A \neq \emptyset$.

- Es posible probar que $x \in \bar{A}$ si y solo si cada vecindad de x intersecta a A. Aquí algunos ejemplos:

  1. Si $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ con la topología euclidiana), entonces $\bar{A} = [0, 1]$.
  2. Si $A = (0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ con la topología euclidiana), entonces $\bar{A} = [0, 1] \cup \{2\}$.
  3. Si $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ con la topología euclidiana), entonces $\bar{S} = S \cup \{0\}$.

- Decimos que una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ es una **sucesión infinita** si $S = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito.

- Una sucesión infinita $\{x_n\} \subseteq X$ **converge** a $L \in X$ si cada vecindad de L contiene todos excepto un número finito de elementos de $S = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$. Es decir, $\{x_n\}$ converge a L si y solo si para cada vecindad U de L existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > N$.

Ejercicio. Pruebe que si $\{x_n\}$ es una sucesión infinita en X que converge a $L \in X$ y $S = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $L \in \bar{S}$.

- Decimos que $x \in X$ es un **punto límite** de $A \subseteq X$ si cada vecindad de x intersecta a A en por lo menos un punto diferente de x.

- Si A' denota el conjunto de puntos límites de A, entonces $\bar{A} = A \cup A'$.

- **La recta del doble origen.** Sea $X = \mathbb{R} \cup \{P\}$ donde $P \notin \mathbb{R}$. En X podemos definir la topología $\mathcal{T}_{oo}$ generada por los conjuntos:

  1. Los intervalos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con $a < b$;
  2. Las vecindades de P obtenidas como una vecindad de 0, quitando 0 y agregando P, es decir, conjuntos de la forma

  $$((a, b) - \{0\}) \cup \{P\}, \quad \text{con} \;\; a < 0, \;\; b > 0.$$

  Ejercicio. Pruebe que si $I \subset X$ es cualquier intervalo que contiene a 0 entonces $P \in \overline{I}$. Similarmente, si $V \subset X$ es cualquier vecindad de P entonces $0 \in \overline{V}$.

  Ejercicio. Pruebe que si $A \subseteq X$ es un subconjunto con $0 \in A'$ entonces $P \in A'$.

  Ejercicio. Pruebe que la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ como subconjunto de X converge a 0 y a P. Es decir, sucesiones en X pueden tener más de un límite.

- Un espacio topológico X se dice $\mathbf{T}_1$ si para cada $x \in X$ el singleton $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X. También decimos que la topología de X es $\mathbf{T}_1$.

  Ejercicio. Pruebe que la topología $\mathcal{T}_{oo}$ es $\mathbf{T}_1$.

- Un espacio topológico X es **Hausdorff** si para cada par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen vecindades U de x y V de y tales que $U \cap V = \emptyset$.

  Ejercicio. Muestre que todo espacio Hausforff es $\mathbf{T}_1$.

  Ejercicio. Muestre que si $A \subseteq X$ es un subconjunto finito y X es Hausdorff, entonces A es cerrado.

Ejercicio. Muestre que la topología $\mathcal{T}_f$ de complemento finito es $\mathbf{T}_1$ pero no es Hausdorff.

Ejercicio. Muestre que $X = \mathbb{R} \cup \{P\}$ con la topología $\mathcal{T}_{oo}$ no es un espacio topológico Hausdorff.

- Si X es $\mathbf{T}_1$, es posible mostrar la siguiente caracterización de puntos límites. Si $A \subseteq X$ entonces $x \in A'$ si y solo si cada vecindad de x contiene un número infinito de puntos de A.

  Ejercicio. Muestre que si X es Hausdorff, entonces una sucesión infinita en X converge a lo más a un punto.

  Ejercicio. Pruebe que la topología del orden es Hausdorff.

  Ejercicio. Pruebe que la topología producto de dos topologías Hausforff es una topología Hausdorff.

  Ejercicio. Pruebe que un subespacio de un espacio topológico Hausdorff es Hausdorff.

  Ejercicio. Pruebe que X es Hausdorff si y solo si

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

  es cerrado en la topología producto de $X \times X$.

- Una función $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos se dice **continua** si para cada abierto $V \subseteq Y$ tenemos que

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \colon f(x) \in V\}$$

  es un subconjunto abierto de X.

- Es posible probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

  1. $f\colon X \to Y$ es continua;
  2. $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para cada subconjunto $A \subseteq X$;
  3. Para cada subconjunto cerrado $Z \subseteq Y$ tenemos que $f^{-1}(Z)$ es un subconjunto cerrado de X;

4. Para cada $x \in X$ y cada vecindad V de $f(x)$, existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq V$.

Ejercicio. Pruebe que si $f\colon X \to Y$ es continua y $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\} \subset Y$ converge a $f(x)$.

- Una función $f\colon X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es continua, biyectiva, y su inversa f^{-1} es continua.

  Ejercicio. Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$. Sea $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ y considere la función $f\colon X \to Y$ definida por $f(a) = \beta,\ f(b) = \alpha,\ f(c) = \gamma$. Encuentre una topología en Y para la cual f es un homeomorfismo. ¿Hay alguna otra topología en Y con esta propiedad?

- Una función $f\colon X \to Y$ es **abierta** si $f(U)$ es abierto para cada abierto $U \subseteq X$.

  Ejercicio. Pruebe que $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo si y solo si f es continua, abierta y biyectiva.

- Una propiedad de espacios topológicos que es invariante bajo homeomorfismos se denomina una **propiedad topológica**.

  Ejercicio. Pruebe que si X es Hausdorff y $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces Y es Hausdorff. Es decir, Hausdorff es una propiedad topológica.

  Ejercicio. Pruebe que irreducibilidad es una propiedad topológica.

- Un espacio topológico X es **conexo** si es imposible escribir X como la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos. Es decir, si $X = U \cup V$ con U, V abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.

  Ejercicio. Pruebe que conexidad es una propiedad topológica.

- Las siguientes propiedades de funciones continuas son fáciles de probar. Sean X, Y, Z espacios topológicos, entonces:

  1. Cada función constante $f\colon X \to Y$ es continua;
  2. Si $A \subseteq X$ es un subespacio, entonces la inclusión $\iota\colon A \to X$ definida por $\iota(x) = x$, es continua;

3. Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son continuas, entonces la composición $g \circ f\colon X \to Z$ es continua;
4. Si $f\colon X \to Y$ es continua y $A \subseteq X$ es un subespacio, entonces la restricción $f|_A\colon A \to Y$ es continua;
5. Si $Y \subseteq Z$ es un subespacio y $f\colon X \to Y$ es continua, entonces la extensión $f\colon X \to Z$ es continua;
6. Si $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ con cada U_α abierto, entonces $f\colon X \to Y$ es continua si y solo si $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to Y$ es continua para cada $\alpha \in I$.

- Una funcion $f\colon X \to Y$ es un **embebimiento** si la correstricción $f\colon X \to f(X)$ es un homeomorfismo (aquí $f(X) \subseteq Y$ tiene la topología de subespacio).

  Ejercicio. Sea $S^1 := \{x \times y \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topología de subespacio, y considere la función $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ definida por

  $$f(x) = \cos(2\pi x) \times \sin(2\pi x).$$

  1. Pruebe que f es continua;
  2. Pruebe que $f|_{(0,1)}\colon (0,1) \to S^1$ es un embebimiento;
  3. Pruebe que $f|_{[0,1)}\colon [0,1) \to S^1$ es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo. **Ayuda:** Si $f|_{[0,1)}$ fuese un homeomorfismo entonces la preimagen de cualquier sucesión convergente debería ser convergente (ya que la función inversa sería continua). Analice que sucede con la preimagen de la sucesión convergente en S^1 dada por
  $$y_n = \cos\left(\frac{(-1)^n 2\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{(-1)^n 2\pi}{n}\right).$$

- Podemos **pegar** funciones continuas para formar nuevas funciones continuas de la siguiente forma. Sean X y Y espacios topológicos y supongamos que $X = A \cup B$ para un par de subconjuntos cerrados $A, B \subseteq X$. Si $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la función $h\colon X \to Y$ definida por
  $$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$
  es continua.

- Considere la función $f\colon A \to X \times Y$ dada por

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Es posible probar que f es continua ($X \times Y$ con la topología producto) si y solo si $f_1\colon A \to X$ y $f_2\colon A \to Y$ son continuas. Las funciones f_1 y f_2 son llamadas las **funciones coordenadas** de f.

- Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto X, definimos una J-tupla de elementos de X como una función

$$\mathbf{x}\colon J \to X.$$

Si $\alpha \in J$, la imagen de α por $\mathbf{x}$ se denota por x_α (la coordenada α de $\mathbf{x}$). Usualmente denotamos la función $\mathbf{x}$ por el símbolo $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.

- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos. Sea

$$X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha.$$

El **producto cartesiano** de esta familia indexada, denotado por

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha,$$

es el conjunto de J-tuplas $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in J$.

- Sea $\beta \in J$. La β-ésima proyección del producto cartesiano $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ es la función

$$\pi_\beta\colon \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \to A_\beta, \quad \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta.$$

- Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios topológicos. El producto cartesiano $\prod X_\alpha$ tiene dos topologías:

  1. La topología generada por la base

  $$\mathcal{B} = \left\{ \prod U_\alpha \colon U_\alpha \subseteq X_\alpha \ \text{ es abierto para todo } \ \alpha \in J \right\}.$$

  Esta topología se llama la **topología de cajas**;

2. La topología generada por la sub-base

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\colon U_\beta \subseteq X_\beta \text{ es abierto, } \beta \in J\right\}.$$

La topología generada por $\mathcal{S}$ se denomina la **topología producto**.

Ejercicio. Pruebe que la topología producto es generada por la base

$$\mathcal{B}' = \left\{\prod U_\alpha \colon U_\alpha \subseteq X_\alpha \text{ es abierto y } U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para un número finito de índices}\right\}$$

Ejercicio. Pruebe que si J es finito entonces la topología producto coincide con la topología de las cajas.

- Si $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$ es un subespacio topológico para cada α, entonces la topología de subespacio de
$$Y := \prod_\alpha Y_\alpha \subseteq \prod_\alpha X_\alpha$$
es la topología producto (resp. la topología de cajas) si la topología de $X = \prod_\alpha X_\alpha$ es la topología producto (resp. la topología de cajas).

- Si X_α es Hausdorff para cada α, entonces $X = \prod_\alpha X_\alpha$ es Hausdorff (tanto en la topología producto como en la topología de cajas).

- Si $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$ es un subespacio topológico para cada α, entonces
$$\prod_\alpha \overline{Y_\alpha} = \overline{\prod_\alpha Y_\alpha} \subseteq \prod_\alpha X_\alpha$$
tanto en la topología producto como en la topología de cajas.

- Sea $f\colon A \to \prod_\alpha X_\alpha$ la función definida por
$$f(a) = (f_\alpha(a))_\alpha, \quad \text{donde } \; f_\alpha \colon A \to X_\alpha.$$
Si dotamos a $\prod_\alpha X_\alpha$ con la topología producto, entonces f es continua si y solo si f_α es continua para cada α.

- El resultado anterior no es cierto si dotamos a $\prod_\alpha X_\alpha$ con la topología de cajas. En efecto, sea
$$X = \mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \quad \text{donde } \; X_n = \mathbb{R} \; \text{ para cada } \; n \in \mathbb{N},$$

Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $f(x) = (x, x, x, \dots)$. Note que f es continua en la topología producto por el resultado anterior ya que $f_n(x) = x$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, en la topología de cajas el conjunto

$$B = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \times \cdots$$

es abierto, mientras que

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}\colon f_n(x) = x \in (-1/n, 1/n) \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

no es un conjunto abierto. Es decir, la función f no es continua con la topología de cajas en el codominio.

- Una **métrica** en un espacio topológico X es una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

  1. $d(x, y) \geq 0$ para cada $x, y \in X$, y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;
  2. $d(x, y) = d(y, x)$ para cada $x, y \in X$;
  3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cada $x, y, z \in X$.

  Nos referimos al número $d(x, y)$ como la **distancia** de x a y.

- Dada una métrica d sobre X, un punto $x_0 \in X$ y un número $r \in \mathbb{R}$ podemos definir el conjunto
  $$B_d(x_0; r) = \{x \in X\colon d(x_0, x) < r\}.$$
  Nos referimos a este conjunto como la **bola con centro x_0 y radio r**.

- Si d es una métrica sobre X entonces la colección

  $$\mathcal{B} = \{B_d(x; r)\colon x \in X, \ r > 0\}$$

  es una base para una topolgía sobre X, llamada la **topología inducida por d**.

- Decimos que un espacio topológico X es **metrizable** si existe una métrica d sobre X tal que la topología de X es la topología inducida por la métrica d.

- Si X es metrizable y d induce la topología de X, no referimos a la pareja (X, d) como un **espacio métrico**.

- Aquí algunos ejemplos de métricas:

1. La **métrica discreta** es la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

   Ejercicio. Pruebe que la topología inducida por la métrica discreta es precisamente la topología discreta.

2. La **métrica euclidiana en** $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|,$$

   donde $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ cuando $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. La **métrica cuadrada en** $\mathbb{R}^n$:

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\},$$

   donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

4. La **métrica del taxista en** $\mathbb{R}^n$:

$$d_3(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

   donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Ejercicio. Dibuje $B_d((0,0);1) \subseteq \mathbb{R}^2$ para $d = d_1, d_2, d_3$.

Ejercicio. Muestre que si d y d' son métricas sobre X las cuales inducen las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ respectivamente, entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ si y solo si para cada $x \in X$ y cada $r > 0$ existe $r' > 0$ tal que

$$B_{d'}(x; r') \subseteq B_d(x; r).$$

Ejercicio. Pruebe que la métrica euclidiana, la métrica cuadrada y la métrica del taxista inducen la misma topología en $\mathbb{R}^2$.

- **Continuidad para espacios métricos**. Una función $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ entre espacios métricos es continua si y solo si para cada $\epsilon > 0$ y cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ (que depende de ϵ y x) tal que

$$d(x,y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

- **Lema de la sucesión**. Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subespacio y $\{x_n\} \subseteq A$ una sucesión tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$, entonces $x \in \bar{A}$. Reciprocamente, si X es metrizable entonces para cada $x \in \bar{A}$ existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.

  Ejercicio. Pruebe que todo espacio topológico metrizable es Hausdorff.

  Ejercicio. Pruebe que ser metrizable es una propiedad topológica.

  Ejercicio. Pruebe que una función $f\colon X \to Y$ con X metrizable es continua si y solo si para cada sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.

  Ejercicio. Pruebe que la suma, la resta y la multiplicación de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son de nuevo funciones continuas.

- El espacio $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de cajas **no es metrizable**. En efecto, considere el subconjunto
$$A = \{(x_1, x_2, \dots)\colon x_n > 0 \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}\}.$$
  Entonces $\vec{0} = (0, 0, \dots) \in \bar{A}$ ya que cada vecindad de $\vec{0}$ contiene un abierto de la forma
$$U = (-\epsilon_1.\epsilon_1) \times (-\epsilon_2, \epsilon_2) \times \cdots$$
  y por tanto $U \cap A \neq \emptyset$. Si $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de cajas fuese metrizable entonces existiría una sucesión $\{\vec{x}_n\} \subseteq A$ tal que $\vec{x}_n \to \vec{0}$. Escribamos
$$\vec{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \dots) \in A.$$
  Entonces cada $x_{nm} > 0$ y por tanto
$$V = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times (-x_{33}, x_{33}) \times \cdots$$
  es una vecindad de $\vec{0}$ tal que $V \cap \{\vec{x}_n\colon n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ (ya que $x_{nn} \notin (-x_{nn}, x_{nn})$).