Anillos cocientes

Sea A anillo, $I \subset A$ ideal

$\langle I, +\rangle \trianglelefteq \langle A, +\rangle$ $\Rightarrow$ podemos formar laterales

$$a + I = \{a + x,\ x \in I\}$$

De lo visto en grupos:

$$a \in b + I \iff a - b \in I \iff a + I = b + I$$

como antes: laterales particionan A.

Definimos

A/I anillo cociente A módulo I

" $\{$laterales de A respecto a $I\}$

es un anillo con operaciones:

$$(a+I) + (b+I) = a + b + I$$

$$(a+I)(b+I) = ab + I$$

Siendo $\langle I, +\rangle \trianglelefteq \langle A, +\rangle$ la suma está bien definida en A/I. Veamos la multiplicación:

$$\begin{aligned} a + I &= a' + I \\ b + I &= b' + I \end{aligned} \overset{?}{\Longrightarrow} ab + I = a'b' + I$$

$a+I = a'+I \iff a \in a'+I$

$\exists\, x \in I : \quad a = a'+x$

$b+I = b'+I \iff b \in b'+I$

$\exists\, y \in I : \; b = b'+y$

$$ab = (a'+x)(b'+y) = a'b' + \underset{\overset{\cap}{I}}{a'y} + \underset{\overset{\cap}{I}}{xb'} + \underset{\overset{\cap}{I}}{xy}$$

$ab = a'b' + z \;, \quad z \in I$

$ab \in a'b' + I \quad y \quad ab + I = a'b' + I$

Ejemplos

- $A = \mathbb{Z} \;, \; I = \langle 5 \rangle$

$$A/I = \mathbb{Z}/\langle 5\rangle \cong \mathbb{Z}_5$$

$0 + I = \{\dots, -5, 0, 5, \dots\}$

$1 + I = \{\dots, -4, 1, 6, \dots\}$

$2 + I = \{\dots, -3, 2, 7, \dots\}$

$3 + I = \{\dots, -2, 3, 8, \dots\}$

$4 + I = \{\dots, -1, 4, 9, \dots\}$

en general $\mathbb{Z}/\langle n\rangle \cong \mathbb{Z}_n$

Observaciones:

- elemento neutro por el $+$ en A/I es $0+I$
- si A tiene 1, A/I tiene 1: $1+I$
- si A es conmutativo entonces A/I es conmutativo
- opuesto de $a+I$ es $-a+I$

- si a es unidad $a+I$ es unidad: $(a+I)^{-1}=a^{-1}+I$

Sea A anillo cualquiera, I ideal t.q.

$$\{ab-ba,\ a,b\in A\}\subset I$$

luego A/I es conmutativo!

En efecto

$$\begin{aligned}(a+I)(b+I)=ab+I &= ab+ba-ba+I\\ &= ba+ab-ba+I\\ &= ba+I\\ &= (b+I)(a+I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi: A &\to A/I\\ a &\mapsto a+I\end{aligned}$$ homomorfismo canónico

Teorema fundamental de homomorfismo

Sean A y B anillos y $\varphi: A\to B$ homomorfismo. Luego

$$A/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

Dem: Ejercicio.

Ejemplo:

$A=\mathbb{R}[x]$, $I=\langle x^2+1\rangle=\{(x^2+1)\,p(x),\ p(x)\in\mathbb{R}[x]\}$

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle \cong ?$$

en el cociente si $a \in \langle x^2+1\rangle$ $a+I = 0+I$

en particular $x^2+1+I = 0+I$

$$x^2+I = -1+I$$
$$\overset{\shortparallel}{(x+I)^2}$$

Buscamos $\varphi: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ homomorfismo sobreyectivo

$$ax+b \longmapsto ai+b$$

$\ker \varphi = ?$

$x^2+1 \in \ker\varphi$: $\varphi(x^2+1) = i^2+1 = 0$

$\langle x^2+1\rangle \subset \ker\varphi$

mostramos

$\ker\varphi \subset \langle x^2+1\rangle$

sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \ker\varphi$ $a_i \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$
$$p(i) = 0 \quad *$$

Lema:

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Si $p(\alpha)=0$ para $\alpha \in \mathbb{C}$, luego $p(\bar{\alpha})=0$.

Dem:

Escribimos $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ $a_i \in \mathbb{R}$

$$0 = p(\alpha) = a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0$$

$$p(\bar{\alpha}) = a_n \bar{\alpha}^n + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0$$

porque $p(x) \in \mathbb{R}[x] \longrightarrow$ $= \overline{a_n}\, \overline{\alpha^n} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0}$

$$= \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

$\square$

* Si $p(x) \in \ker \varphi$ $(\Leftrightarrow p(i)=0)$ entonces $p(-i)=0$.

$\Rightarrow (x^2+1) \mid p(x) \Leftrightarrow p(x) = (x^2+1)\, q(x) \quad q(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\ker \varphi \subset \langle x^2+1 \rangle$

y $\ker \varphi = \langle x^2+1 \rangle$

por TFH: $\quad \mathbb{R}[x] / \langle x^2+1 \rangle \cong \mathbb{C}$

Def:

Sea A anillo e I ideal. I es **primo** si:

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ o } b \in I \qquad \forall a, b \in I.$$

Ej: p primo en $\mathbb{Z} \Leftrightarrow \langle p \rangle$ es primo

$\langle 4 \rangle$ NO es primo: $2 \cdot 2 = 4 \in \langle 4 \rangle$ pero $2 \notin \langle 4 \rangle$

Prop: Sea A conmutativo con 1. Sea $I \subset A$ ideal.
Luego A/I es dominio de integridad sii I es primo.

Dem:

$$\underset{\substack{\| \\ ab+I}}{(a+I)(b+I)} = 0 + I \quad \Leftrightarrow \quad ab \in I$$

$\square$

Def:

Sean A anillo e I ideal en A.
I es **maximal** si $I \neq A$ y si existe $J \subset A$ ideal t.q.:

$$I \subset J \subset A$$

luego $J = I$ o $J = A$.

Ej: p primo en $\mathbb{Z}$, $\langle p \rangle$ es maximal (lo veremos)

$\langle 4 \rangle$ <u>no</u> es maximal :

$$\langle 4 \rangle \subsetneq \langle 2 \rangle \subsetneq \mathbb{Z}$$

Prop: Sea A conmutativo con 1, $I \subset A$ ideal.
Luego A/I es un campo sii I es maximal.

Dem:

($\Leftarrow$): Sea $a+I \neq 0+I \iff a \notin I$

Consideramos

$$J = aA + I = \{ax+y,\ x \in A,\ y \in I\}$$

tomando $x=0$ $I \subset J$

tomando $y=0$, $x=1$ $a \cdot 1 + 0 = a \in J \Rightarrow J \supsetneq I$

J es ideal :

$$ax+y - ax'-y' \overset{?}{\in} J$$
$$= \underset{\in A}{\underbrace{a(x-x')}} + \underset{\in I}{\underbrace{y-y'}}$$

✓

$$(ax+y)\cdot z = a\underset{\in A}{\underbrace{xz}} + \underset{\in I}{\underbrace{yz}} \in J \quad \text{si } z \in A$$

Por maximalidad de I, $J = A$!

En particular $1 \in J$:

$$\exists x, y : \ ax + y = 1$$
$$ax = 1 - y$$
$$ax \in 1 + I$$

$$(a+I)(x+I) = ax + I = 1 + I$$

$(\Longrightarrow)$: ejercicio $\square$

Lema:

Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Para todos $a \in \mathbb{R}$, $\ker \varphi_a$ es maximal, donde
$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathcal{F}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\longmapsto f(a). \end{aligned}$$

Dem:

Recordamos:
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es la función constante igual a 1.

$f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es unidad sii $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Llamamos $I = \ker \varphi_a$.

Tomamos $g(x) \notin I$. Sea J ideal de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ t.q.
$$I \subset J \text{ y } g(x) \in J.$$

Mostramos $J = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Siendo $g(x) \notin I = \ker \varphi_a$, $g(a) \neq 0$.

Tomamos $h(x) = g(x) - g(a) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$
$$h(a) = g(a) - g(a) = 0 \in \ker \varphi_a$$

Luego
$$\underset{\substack{\Uparrow \\ I}}{h(x)} - \underset{\substack{\Uparrow \\ J}}{g(x)} = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{-g(a)} \in J$$

entonces $\dfrac{1}{h(x) - g(x)} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $h(x) - g(x)$ es unidad y $J = \mathcal{F}(\mathbb{R})$! $\square$