2023-2 Topología Grupo 2
Primer Corte

MÍNIMOS A SABER

- Definición de topoloía y ejemplos sobre conjuntos finitos.
- Ejemplos básicos: las topologías discreta e indiscreta, la topología del complemento finito, la topología del complemento contable, la topología euclidiana en $\mathbb{R}$, la topología de Zariski en $\mathbb{R}^n$.
- Saber comparar topologías, es decir, dadas dos topologías decidir cual es más fina o si no son comparables.
- Definiciones de base y sub-base para una topología.
- La topología generada por una base y la topología generada por una sub-base.
- La topología del orden, la topología producto, y la topología de subespacio.
- Conjuntos cerrados y axiomas de conjuntos cerrados.

MISCELÁNEA DE EJERCICIOS

1. Construya todas las topologías sobre $A = \{a,\ b,\ c\}$ y determine para cada par de ellas si una es más fina, más gruesa o no se puede comparar con la otra.

2. Probar que los intervalos no acotados $(-\infty, b)$ y (a, ∞) también son abiertos en la topología euclidiana de $\mathbb{R}$.

3. Sea $X = \mathbb{R}$. Probar que $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_E$, que $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_c$, pero que $\mathcal{T}_E$ y $\mathcal{T}_c$ no son comparables.

4. Probar que la topología de Zariski en $\mathbb{R}$ coincide con la topología del complemento finito.

5. Para cada entero positivo n, sea $S_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Muestre que la colección de todos los S_n es una base para una topología sobre $\mathbb{N}$.

6. Una partición de un conjunto X es una colección de subconjuntos disjuntos dos a dos, cuya unión es X. Pruebe que cada partición de X es una sub-base para una topología en X. ¿Es una base?

7. Suponga que $\mathcal{S}$ es una partición de X que contiene exactamente 4 subconjuntos, ¿cuántos abiertos tiene la topología generada por $\mathcal{S}$?

8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Pruebe que si $\{x_0\} \in \mathcal{T}$ para algún $x_0 \in X$, entonces $\{x_0\} \in \mathcal{B}$ para cada base $\mathcal{B}$ que genera la topología $\mathcal{T}$.

9. Sobre $\mathbb{Z}^+$ definamos los siguientes conjuntos

$$B_n = \{x \in \mathbb{Z}^+ :\ n \text{ divide a } x\} \text{ para } n = 1, 2, 3, ...$$

   (a) Muestre que la colección $\mathcal{B} = \{B_n :\ n = 1, 2, 3, ...\}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{Z}^+$;

   (b) ¿es $\mathcal{B}$ una topología?

10. Un subconjunto A de un conjunto simplemente ordenado X se dice **convexo** si para cada $a, b \in A$ con $a < b$, el intervalo $[a, b] \subseteq A$. Pruebe o refute: cada subconjunto convexo de X diferente de $\emptyset$ y X es un intervalo o un rayo (es decir, un subconjunto de la forma $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$).

11. Pruebe que la topología de Zariski en $\mathbb{R}^2$ no es el producto de la topología de Zariski en $\mathbb{R}$ con si misma.

12. Denote por $\mathbb{R}_f$ el conjunto de los números reales con la topología del complemento finito. Describa una base para la topología producto en $\mathbb{R}_f \times \mathbb{R}$.

13. Pruebe que la topología de $\mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, con la topología euclidiana, es la topología discreta.

14. Pruebe que la topología de $\mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, con la topología del complemento finito, es la topología del complemento finito.

15. Sea X un espacio topológico cuya topología es la discreta (también nos referimos a X como un espacio discreto). Describa todos los subconjuntos de X cuya topología de subespacio es la topología indiscreta.

16. Pruebe que si Y es un abierto de X y $U \subseteq Y$ es un abierto en la topología de subespacio de Y, entonces U es abierto en X. De un ejemplo que muestre que la conclusión anterior es falsa si Y no es abierto.

17. Suponga que X es un espacio topológico y que $A \subseteq Y \subseteq X$. Muestre que la topología de A como subespacio de Y es la misma topología de A como subespacio de X.

18. Describa los cerrados de las topologías $\mathcal{T}_f$ y $\mathcal{T}_c$, y de ejemplos de subconjuntos cerrados en las topologías del orden y euclidiana en $\mathbb{R}$.

19. Si $Y \subset X$ es un subconjunto cerrado de X y A es un subconjunto cerrado de Y en la topología de subespacio de Y, entonces A es cerrado en X.

20. Un espacio topológico X se dice **irreducible** si no se puede expresar en la forma $X = A \cup B$ con $A \neq X$, $B \neq X$, ambos cerrados y no vacíos. Muestre que si X es infinito entonces X con la topología del complemento finito es un espacio topológico irreducible. Muestre que hay espacios topológicos **reducibles** (es decir, que no son irreducibles) con la topología del complemento contable.

21. Muestre que si X es un espacio topológico irreducible, entonces cada subconjunto abierto de X es irreducible con la topología de subespacio.