Pontificia Universidad Javeriana

MÉTODO DE LA SECANTE

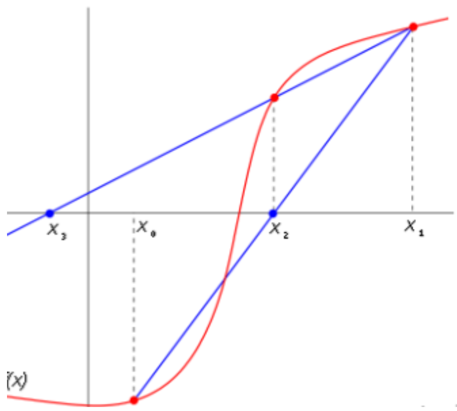
Juan Felipe Arias Castillo
Laura Sofía Jiménez Ballén
Esteban Alberto Rojas Molina
Natalia Gaona Salamanca

INGENIERÍA DE SISTEMAS
Eddy Herrera Daza
Bogotá D.C
2021

1. Introduccción

En análisis numérico el método de la secante es un método para encontrar los ceros de una función de forma iterativa. Es una variación del método de Newton-Raphson donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior.

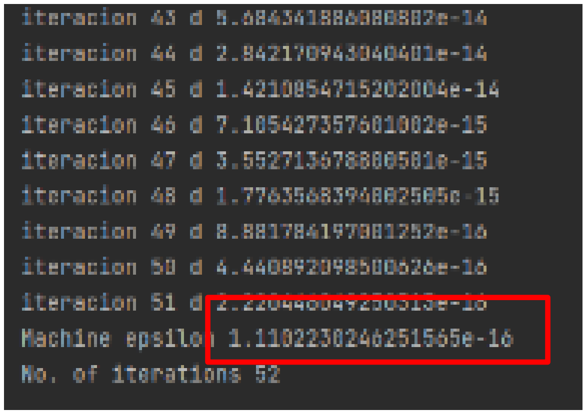
Este método es de especial interés cuando el coste computacional de derivar la función de estudio y evaluarla es demasiado elevado, por lo que el método de Newton no resulta atractivo.
El método de la secante es un algoritmo de la raíz de investigación que utiliza una serie de raíces de las líneas secantes para aproximar mejor la raíz de una función f.



1.1 Código realizado en python:

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
#Realizado por: Juan Felipe Arias-Laura Jiménez
                #Esteban Rojas-Natalia Gaona
def f(x):
    return x**3-2*(x)-5


def secante(a, b, tol, max_iter):
    iter = 0
    c = (a + b) / 2
    i = 0
    while (abs(f(c)) > tol and iter < max_iter):
        c = b - (f(b) * (b - a) / (f(b) - f(a)))
        a = b
        b = c
        i = i + 1
        print("Iteracion: ", i, " raiz: ", c)

a=-1
b=3
iteraciones=200
xa = 1.5
secante(a, b, 1e-56, iteraciones)
```

2. **Epsilon de la máquina con que se trabajó:**

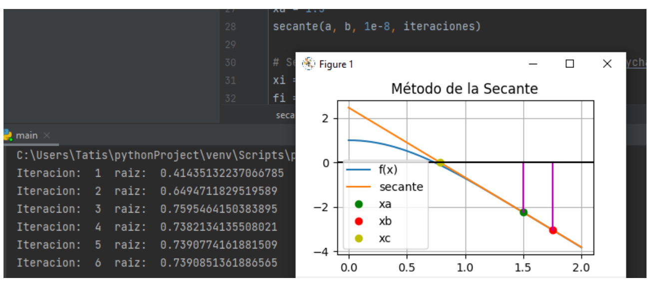


3. **Encontrar la(s) raíces de:**

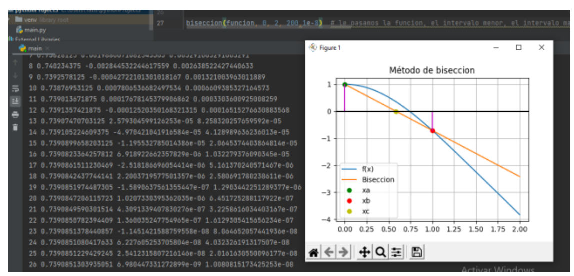
a) $\boldsymbol{f(x) = cos^2(x) - x^2}$

$\boldsymbol{Tolerancia\ 10^{-8}}$:

Secante:

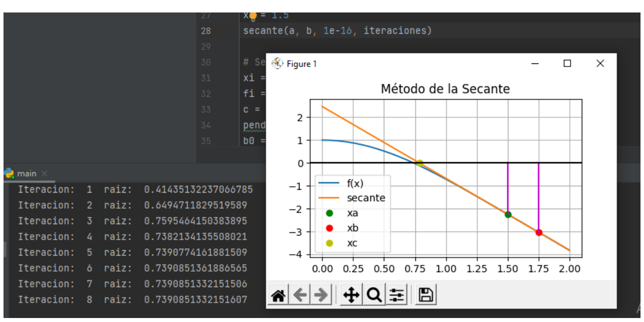


Bisección:

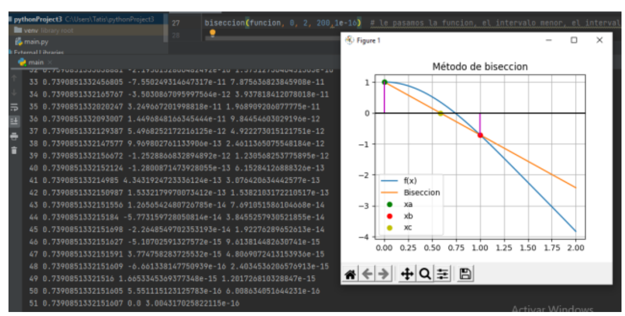


$\boldsymbol{Tolerancia\ 10^{-16}}$:

Secante:

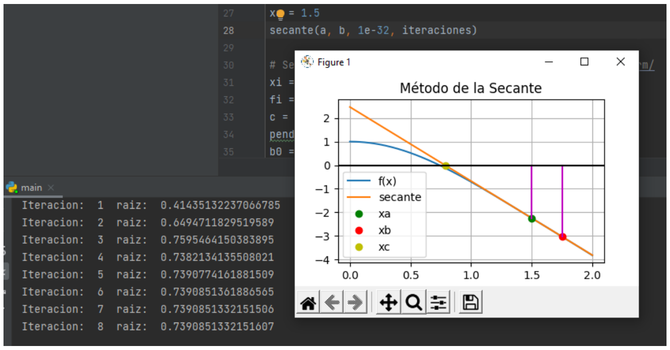


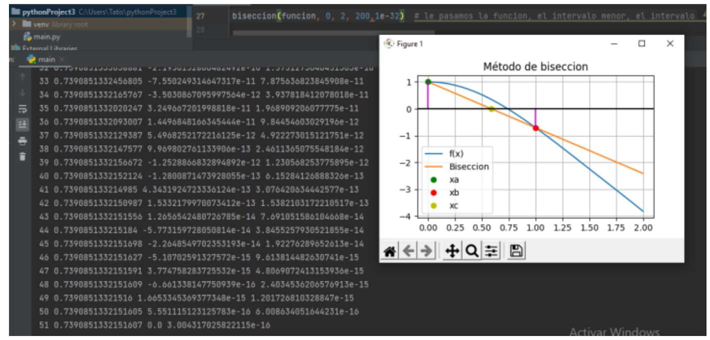
Bisección:



$Tolerancia\ 10^{-32}$:

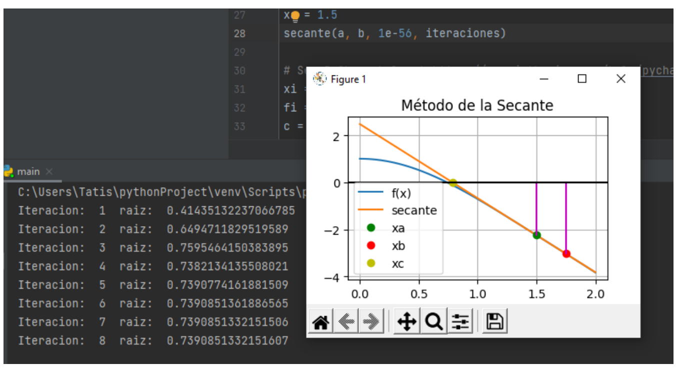
Secante: **Bisección:**

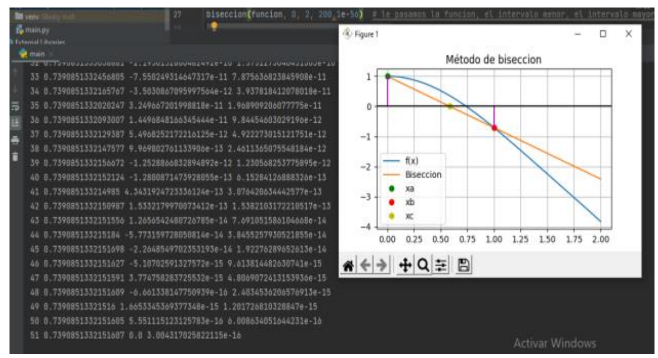




$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Secante: **Bisección:**

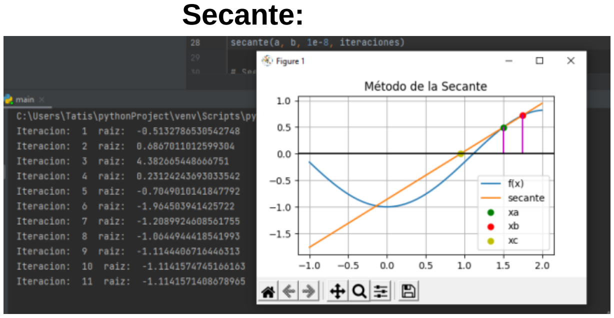




b) $f(x) = xsen(x) - 1\ en\ [-1, 2]$

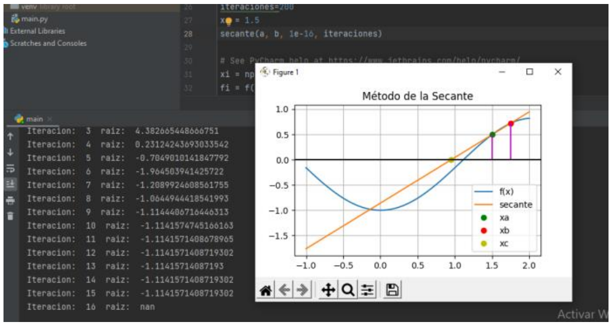
$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Secante: **Bisección:**

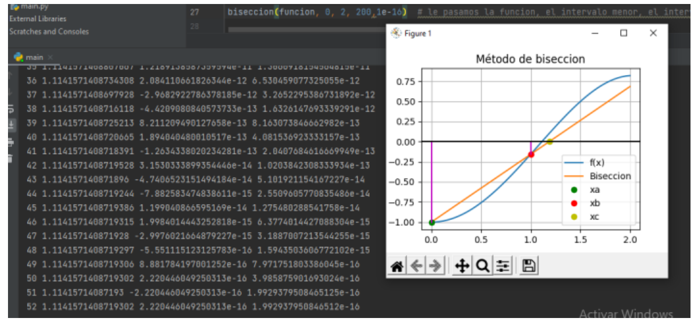


Tolerancia $\boldsymbol{10^{-16}}$:

Secante:

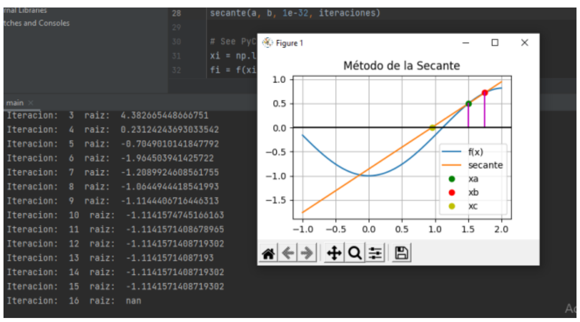


Bisección:

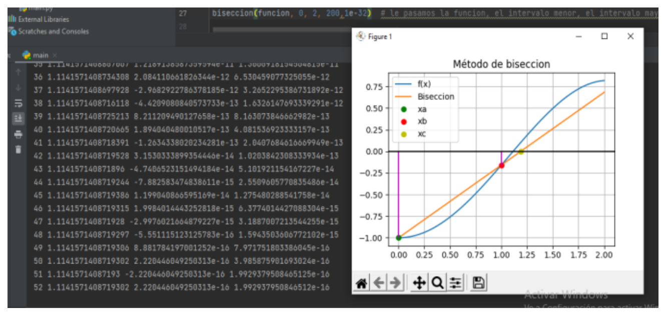


Tolerancia $\boldsymbol{10^{-32}}$:

Secante:

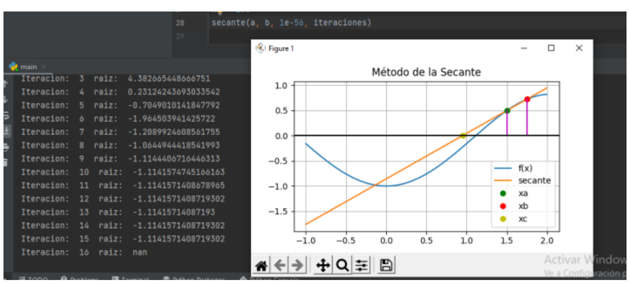


Bisección:

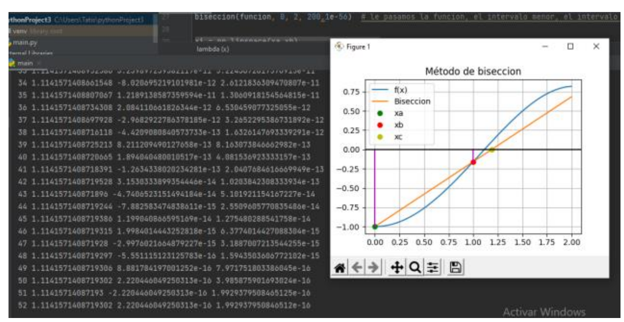


Tolerancia $\boldsymbol{10^{-56}}$:

Secante:



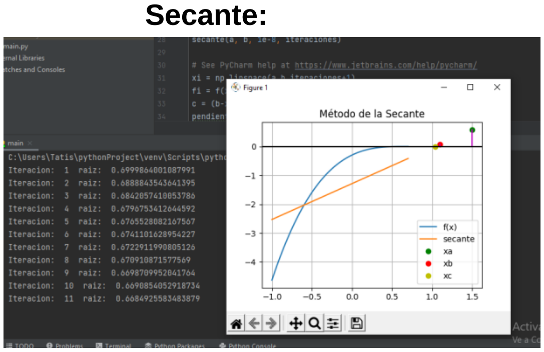
Bisección:



c) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}}$

Tolerancia $\boldsymbol{10^{-8}}$:

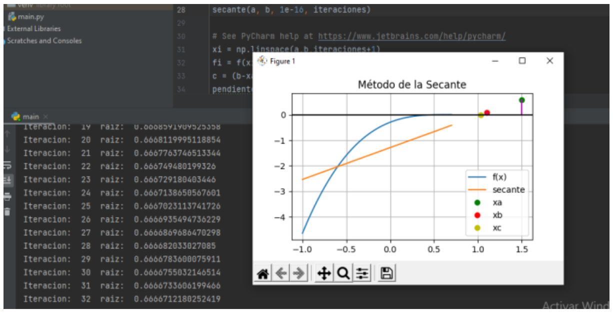
Secante:



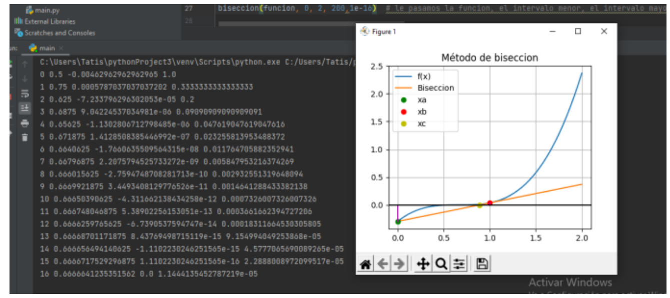
Bisección:

$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Secante:

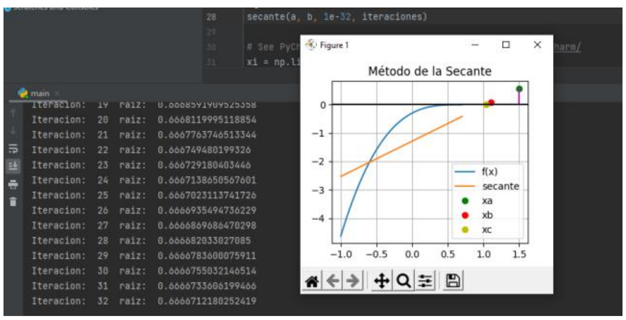


Bisección:

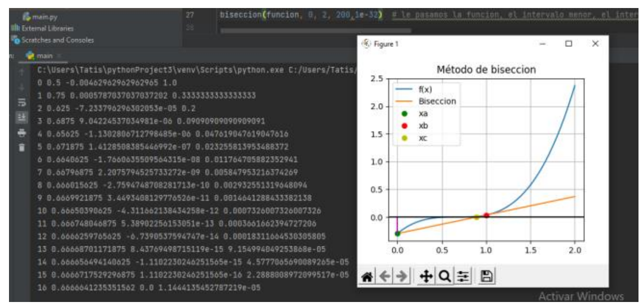


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Secante:

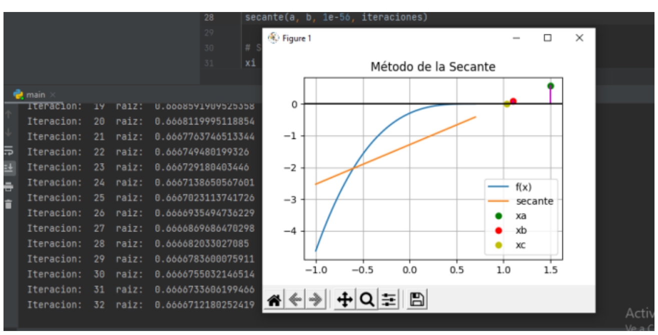


Bisección:

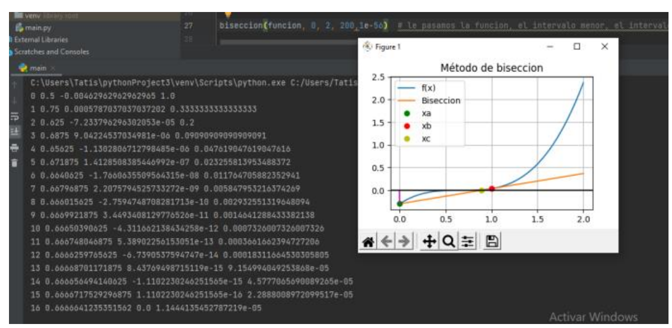


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Secante:



Bisección:



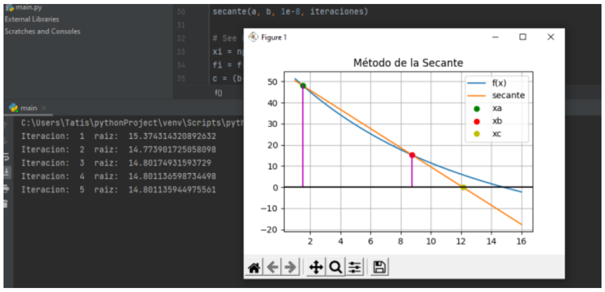
d) Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.

La ecuación que se utilizará será:

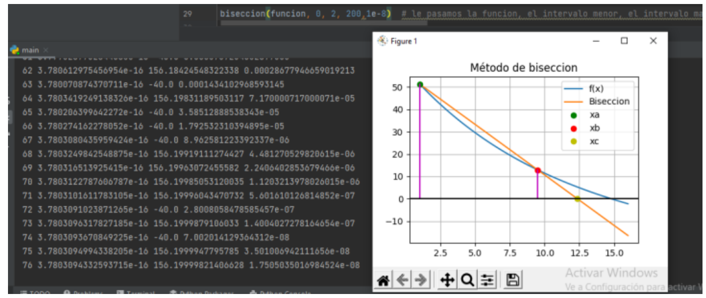
```
((68.1*9.81)/x)*(1-(math.e)**(-(10/68.1)*x))-40
```

$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Secante:

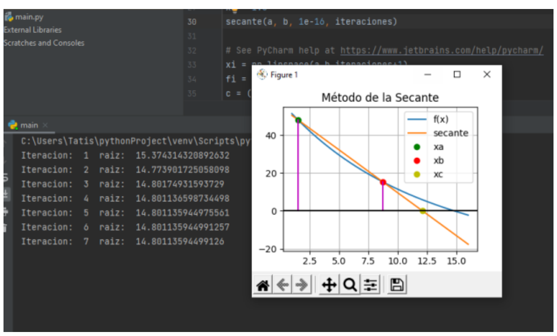


Bisección:

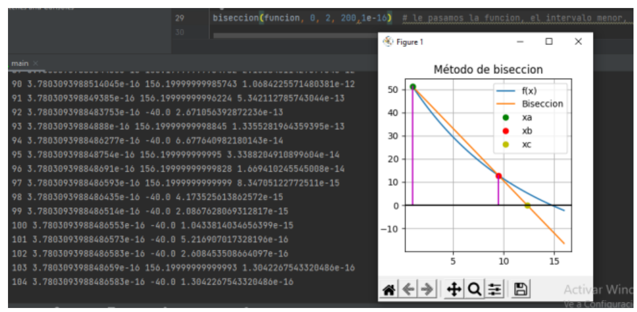


$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Secante:

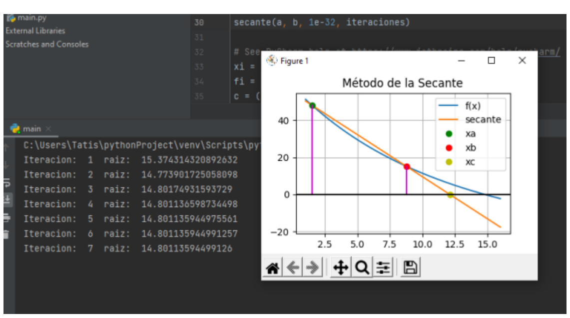


Bisección:

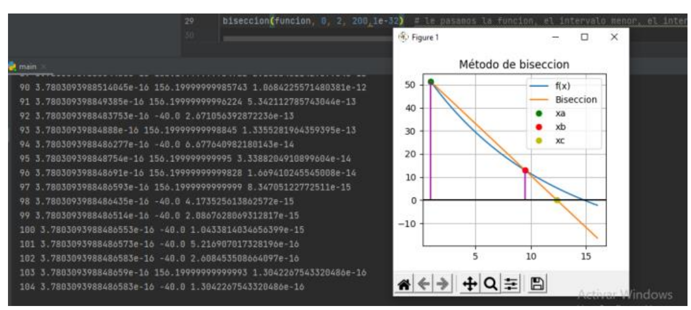


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Secante:

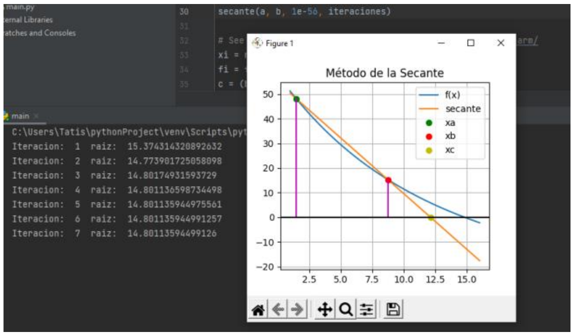


Bisección:

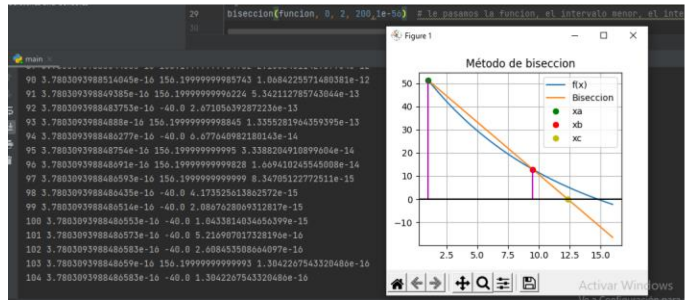


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Secante:



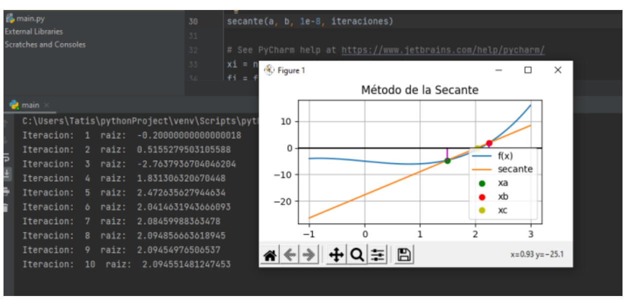
Bisección:



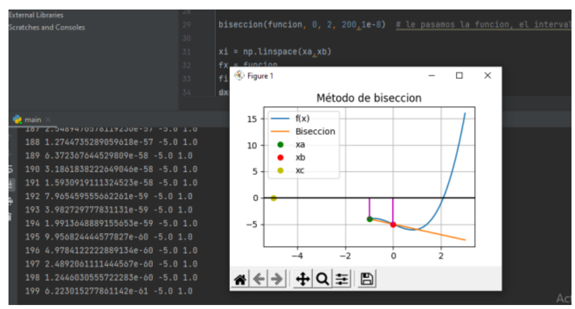
e) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Secante:

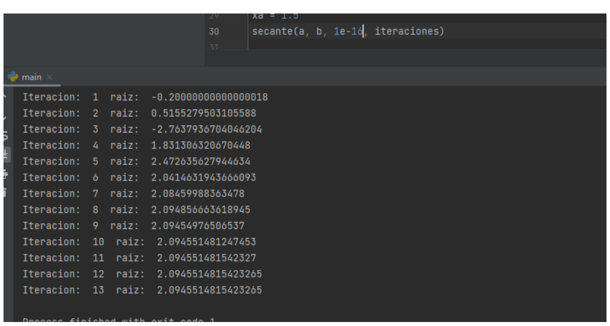


Bisección:

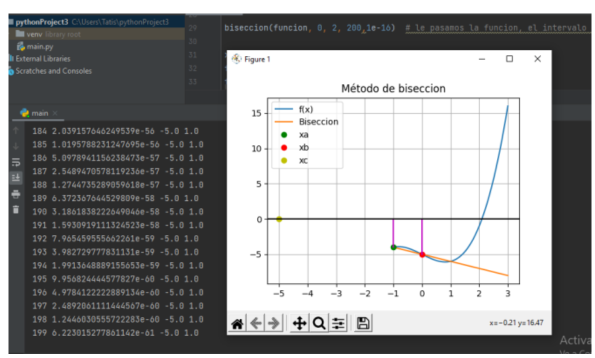


$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Secante:

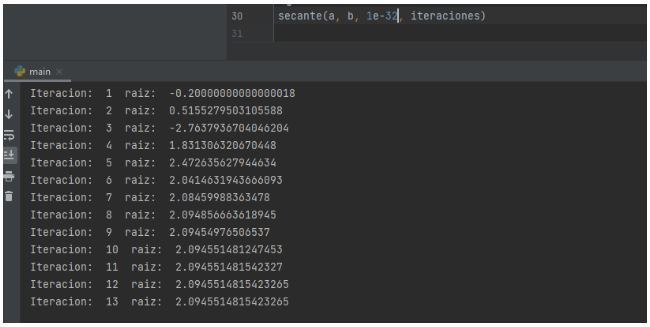


Bisección:

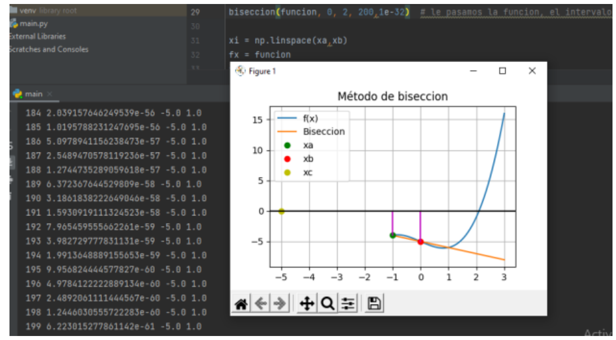


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Secante:

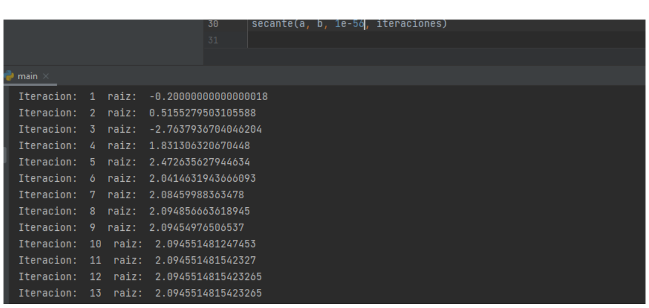


Bisección:

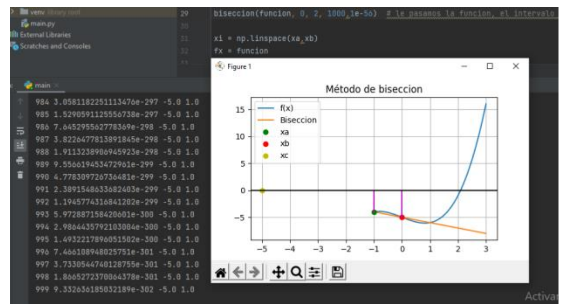


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Secante:



Bisección:



4. **Preguntas:**

4.1 ¿Cuáles son condiciones para aplicar el método?

El método de la secante, es un método que viene del método Newton; en este método se requiere conocer el valor de la primera derivada de la función entrante en un punto. En muchas ocasiones se dificulta encontrar la derivada de esa función; cuando esto sucede se debe recurrir al método de la secante.

Para el método de la secante es necesario conocer dos puntos iniciales los cuales van a estar dados por Xi-1 Xi, con el fin de encontrar el Xi+1, conduciéndonos a la raíz más exacta de la función.

Como se menciona anteriormente es necesario conocer dos puntos, teniendo en cuenta que estos no deben ser afectados por asíntotas, puntos de inflexión, mínimos o máximos locales y pendientes que se aproximen a cero.

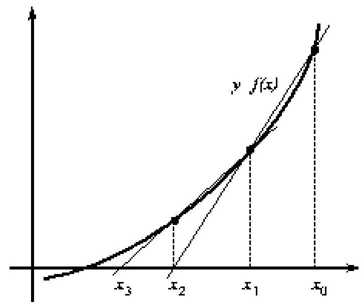
4.2 Proporcione una explicación geométrica del algoritmo

La interpretación geométrica del método de la secante es similar a la del método de Newton. La recta tangente a la curva se reemplaza por una recta secante. El cero de f se aproxima por el cero de la recta secante a f. Si x0 y x1 son las aproximaciones iniciales, la aproximación x2 es la intersección de la recta que une los puntos (xi-1, f(xi-1)) y (xi, f(xi)). La aproximación x3 es la intersección de la recta que une los puntos (xi, f(xi)) y (xi+1, f(xi+1)) y así sucesivamente.

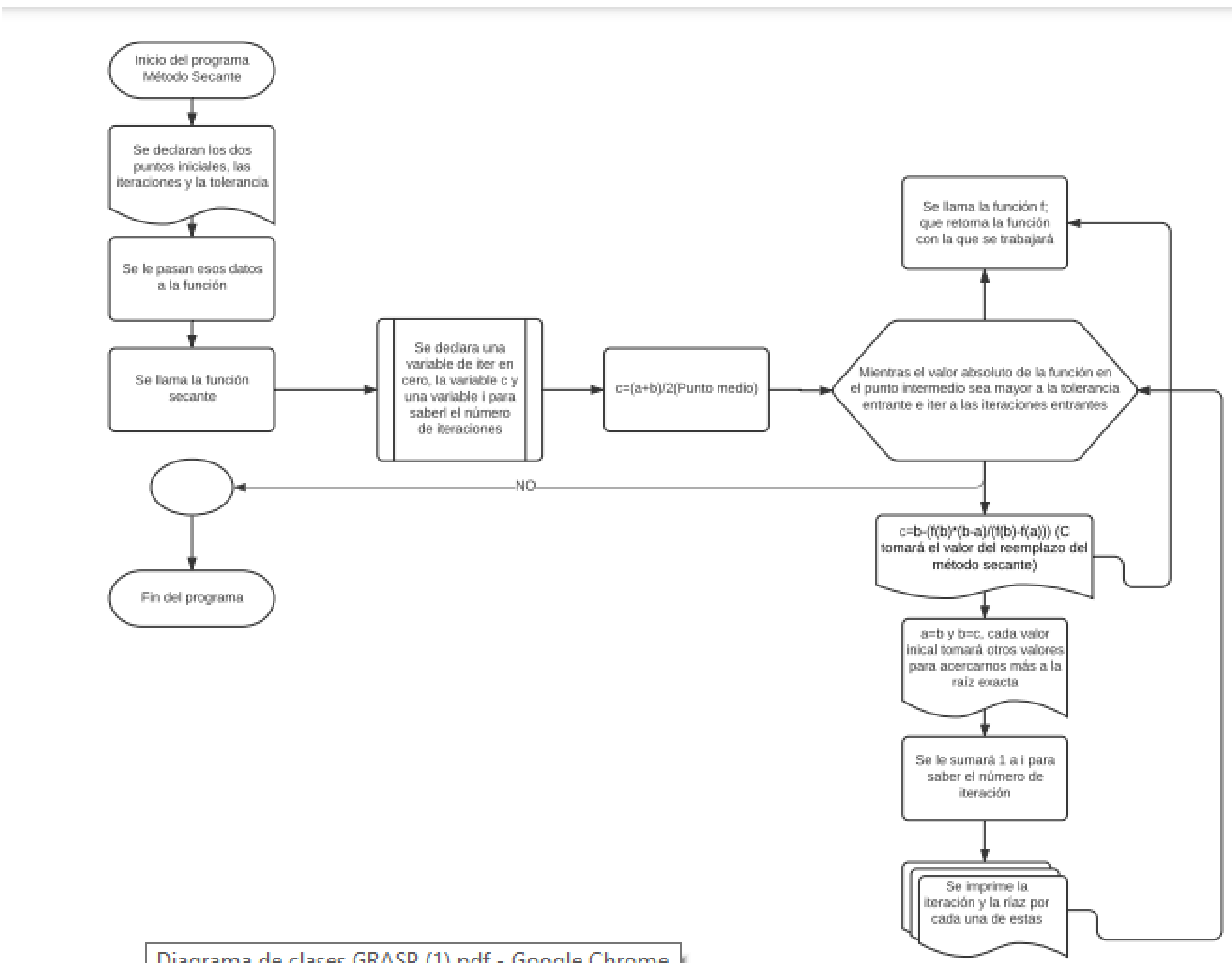
En otras palabras el método de la secante parte de dos puntos y estima la tangente por una aproximación, la expresión del método de la secante que nos proporciona el siguiente punto de iteración:

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0)$$

La cual, gráficamente se ve así:



4.3 Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo



4.4 Cuál son las raíces. Valide su resultado, Se utilizó Wolfram Alfa para verificar

Ejercicio 1: $\boldsymbol{f(x) = cos^2(x) - x^2}$

Solutions

$x \approx 0.739085$

$x \approx -0.739085$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 3.a)

Ejercicio 2: $\boldsymbol{f(x) = xsen(x) - 1 \; en \; [-1, 2]}$

Result:

$x = -1.114157140871930$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 3.b)

Ejercicio 3: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}}$

Exact root result:

$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$

$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$

$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 3.c)

Ejercicio 4: Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.

La ecuación que se utilizará será:

```
((68.1*9.81)/x)*(1-(math.e)**(-(10/68.1)*x))-40
```

Result

$-0.146843 \, x = 0$

Ejercicio 5: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}}$

Result:

$x = 2.094551481542414$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 3.e)

4.5 Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

El método de la Secante tiene un comportamiento directamente (DP) o inversamente (IP) proporcional dependiendo del caso a tratar, dado el caso de aumentar la tolerancia del proceso se obtiene como resultado:

• Aumento en el número de iteraciones, y una disminución en la perdida de significancia (IP)

• Cumple el principio de la convergencia supe lineal pues entre más iteraciones posibles más exacto será el resultado final (DP)

4.6 Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema

El problema de perdida de significancia se presenta al reducir la tolerancia y por ende la cantidad de iteraciones que realizara el proceso, para solucionar esto se debe buscar un proceso más extenso, pero con una mayor precisión aumentando la cantidad de iteraciones que se realizaran.

4.7 Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar)

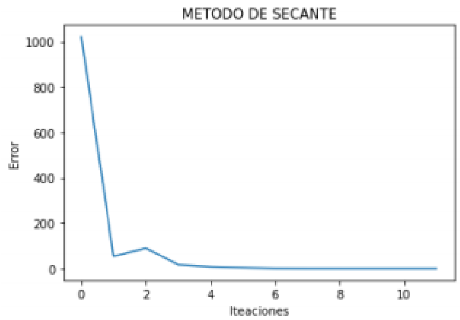
El método presenta limitaciones cuando se desea trabajar algunas funciones pares o impares, pues al momento de presentarse simetría es posible obtener un error al calcular la raíz. El método de la Secante tiene como limitación el solo poder hallar o aproximar a una raíz por proceso, por lo tanto, al tener más de dos raíces no será posible dar con estas.

4.8 ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

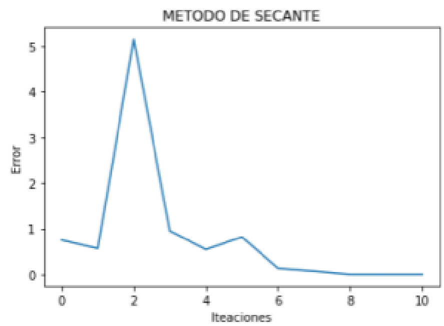
El método presenta limitaciones cuando se desea trabajar algunas funciones pares o impares, pues al momento de presentarse simetría es posible obtener un error al calcular la raíz.

4.9 Realice una gráfica que muestre la relación entre εi+1 y εi , qué representa esa gráfica, encuentre una relación de la forma: εi+1 = f(εi) Utilizando la definición 2.6 verifique el orden de convergencia de forma numérica, también verifique la definición 2.5 acerca de la convergencia lineal (realice un número considerable de iteraciones)

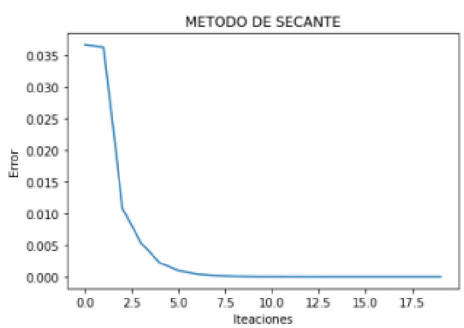
Ejercicio 1:



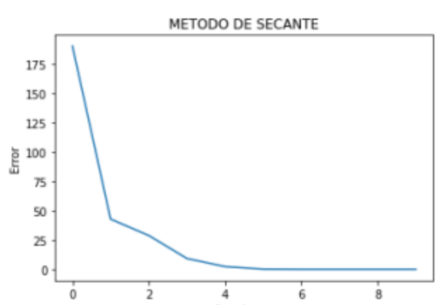
Ejercicio 2:



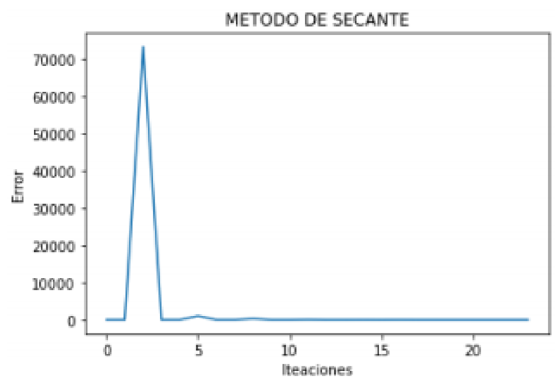
Ejercicio 3:



Ejercicio 4:

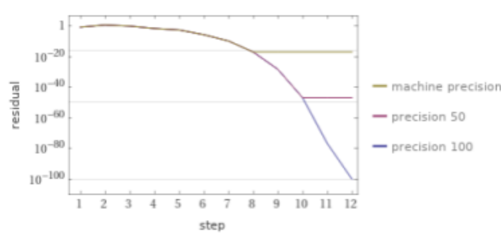


Ejercicio 5:

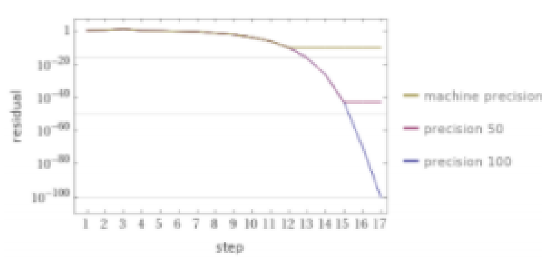


4.10 Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

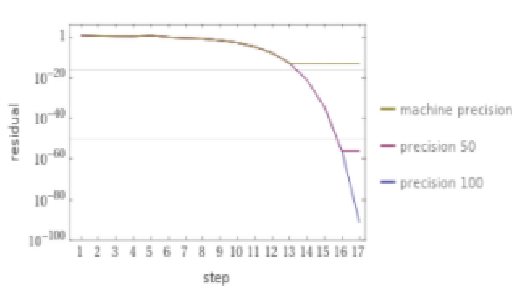
Ejercicio 1:



Ejercicio 2:



Ejercicio 5:



4.11 Como se comporta el método con respecto al de bisección.

En cuanto al método de bisección en el numeral tres podemos ver la comparación cuando empieza a iterar para poder encontrar las raíces, el método de bisección tiene un comportamiento más inestable (esto se puede ver a la hora de analizar el número de iteraciones que este hace). Por parte del método secante este mantiene la convergencia superlineal más rápida y efectiva, pero se debe recalcar que esta raíz de la primera aproximación no es segura, que no es suficientemente cercana, ni cuando es una raíz múltiple, haciendo que este método pueda divergir.

4.12 Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

En cuanto al teorema de Taylor y el método secante, este teorema empieza a ser ineficaz cuando se la derivada de las funciones son complejas, haciendo que no de una aproximación a la raíz exacta.

MÉTODO AITKEN(Se realizará lo mismo que el anteriores puntos pero enfocado al método Aitken)

5. Introducción

En análisis numérico, el método de Aitken es un método de aceleración de la convergencia. Cuando se aplica el método de Aitken a una sucesión obtenida mediante una iteración de punto fijo se conoce como método de Steffensen.

En análisis numérico, el método o proceso Δ^2 de Aitken es un método de aceleración de la convergencia. Lleva el nombre de Alexander Aitken, quien introdujo este método en 1926, fue encontrado en la rectificación del círculo. Es muy útil para acelerar la convergencia de una sucesión que converge linealmente.

Cuando se aplica el método de Aitken a una sucesión obtenida mediante una iteración de punto fijo se conoce como método de Steffensen.

Su fórmula es:

$$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2\,x_{n+1} + x_n}$$

5.1 Código en python

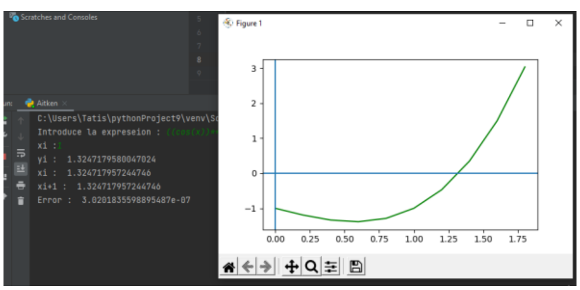
```python
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

fx = input("Introduce la expreseion : ")
xi = float(input("xi :"))
tol = 0.00001
error = 100
xiAnt = 1
fx = sp.sympify(fx)

while True:
    yi = (xi + 1)**(1/3)
    zi = (yi + 1)**(1/3)
    xi1 = zi - ((zi - yi)**2 / (zi - (2*yi)+ xi))
    error = math.fabs((xi1-xiAnt)/xi1)*100

    xiAnt = xi1
    xi = xi1

    if error < tol:
        break
```

6. Encontrar la(s) raíces de:

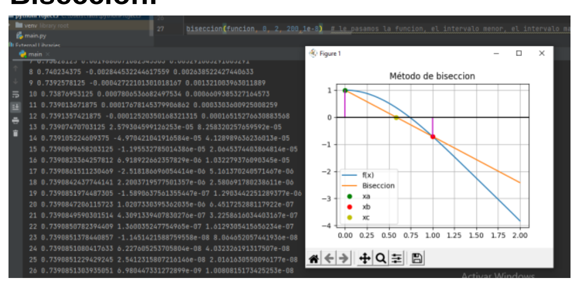
a) $f(x) = cos^2(x) - x^2$

$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Aitken:

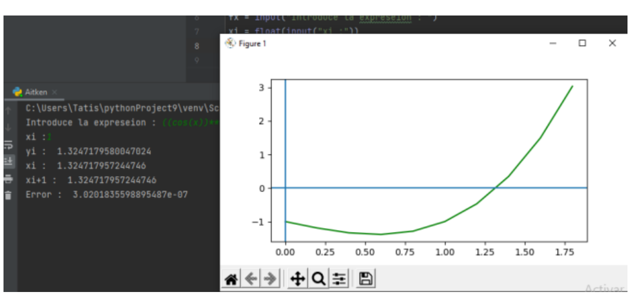


Bisección:

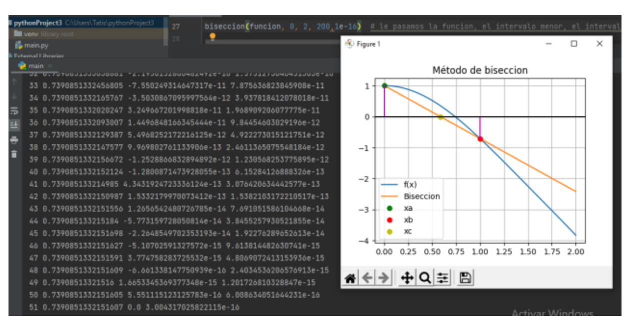


$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Aitken:



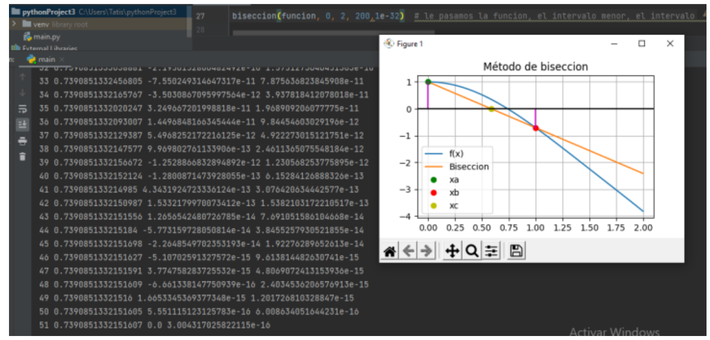
Bisección:



$\boldsymbol{Tolerancia\ 10^{-32}}$:

Aitken:

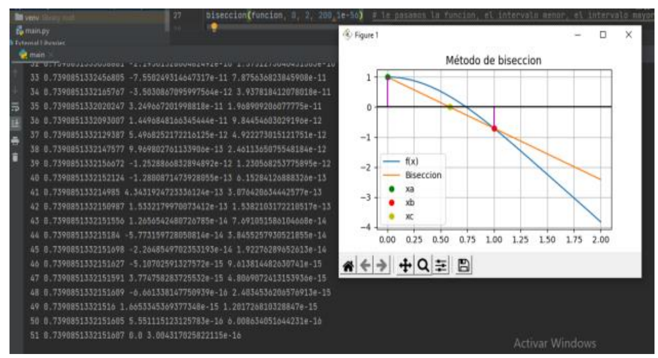
Bisección:



$\boldsymbol{Tolerancia\ 10^{-56}}$:

Aitken:

Bisección:

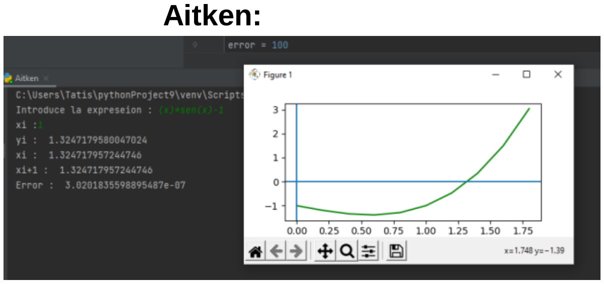


Anotación: Desde la tercera tolerancia, por razones del método ya no aparecen las raíces

b) $\boldsymbol{f(x) = xsen(x) - 1\ en}\ [-1, 2]$

$\boldsymbol{Tolerancia\ 10^{-8}}$:

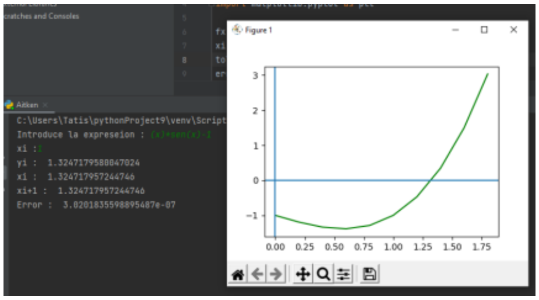
Aitken:



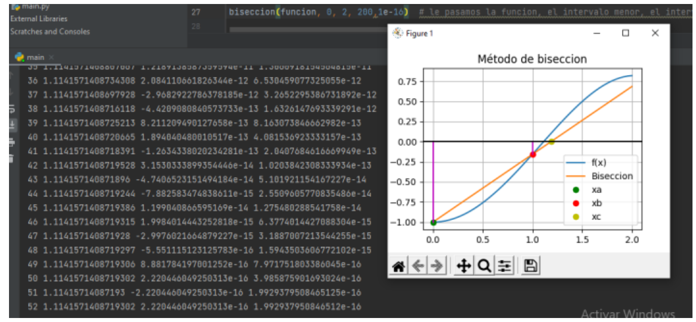
Bisección:

$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Aitken:

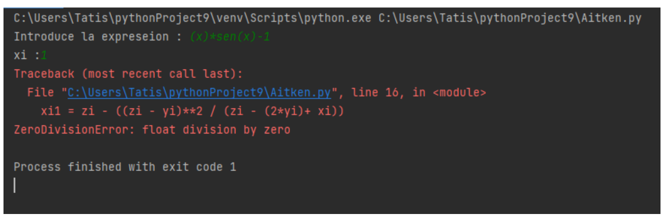


Bisección:

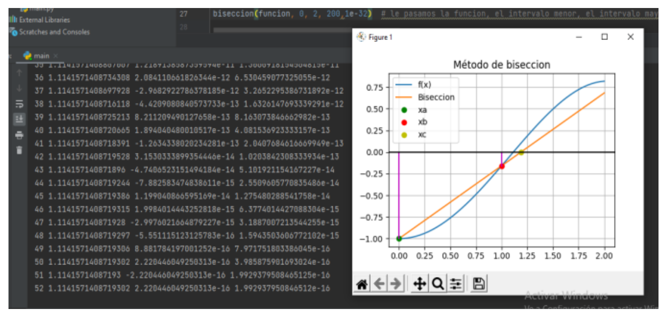


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Aitken:

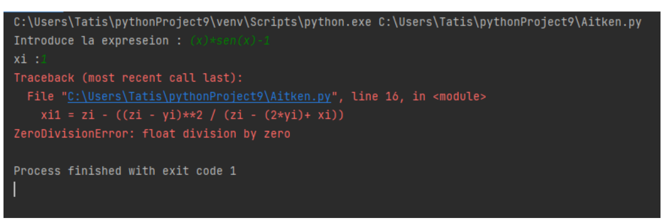


Bisección:

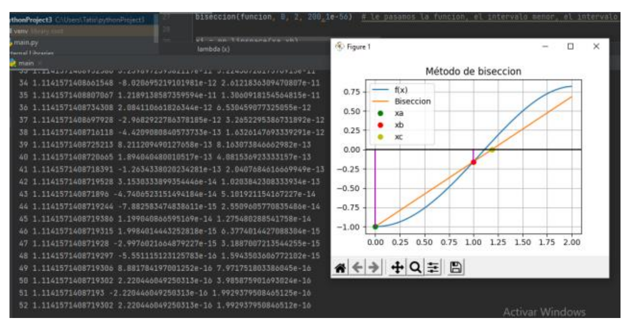


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Aitken:



Bisección:

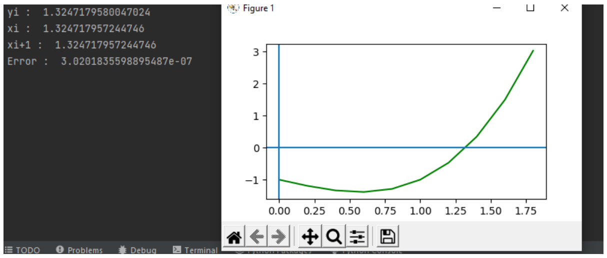


Anotación: Desde la tercera tolerancia, por razones del método ya no aparecen las raíces

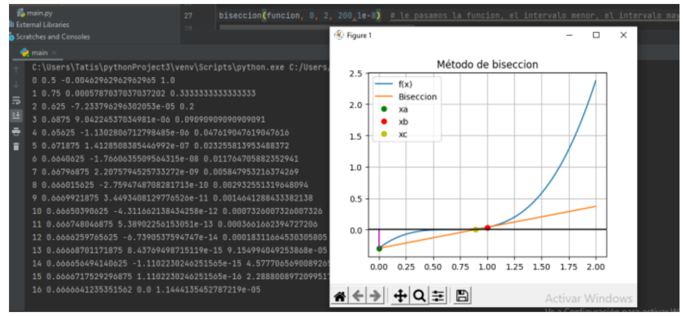
c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Aitken:

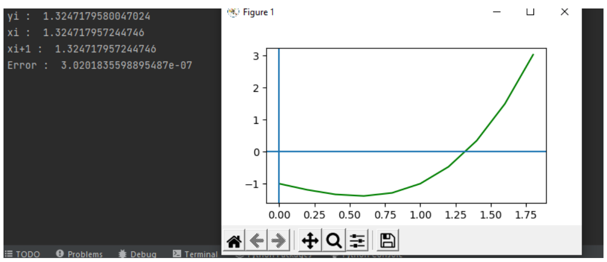


Bisección:

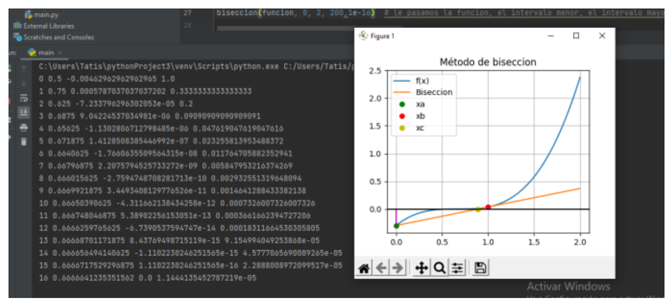


$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Aitken:

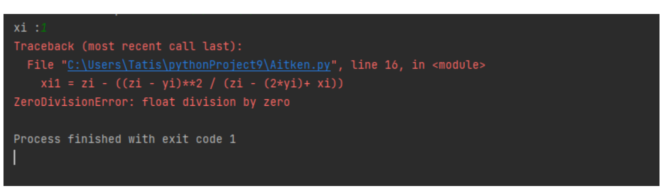


Bisección:

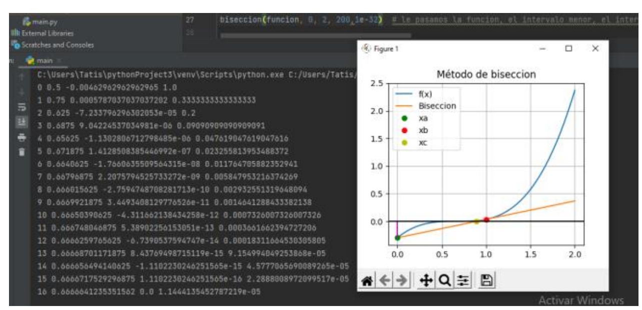


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Aitken:

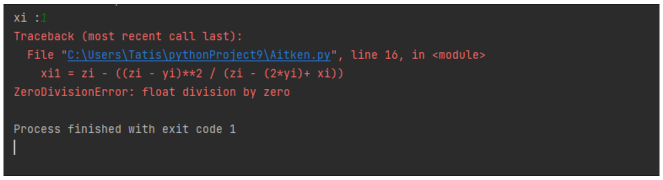


Bisección:

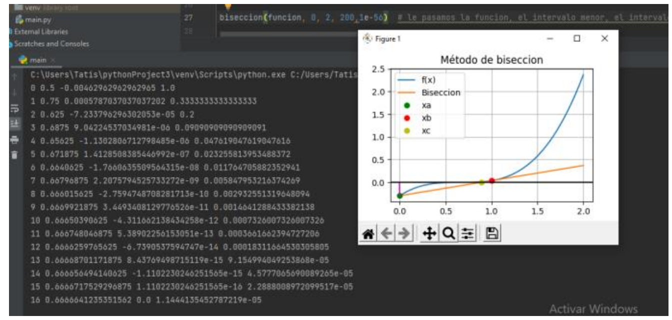


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Aitken:



Bisección:



Anotación: Desde la tercera tolerancia, por razones del método ya no aparecen las raíces

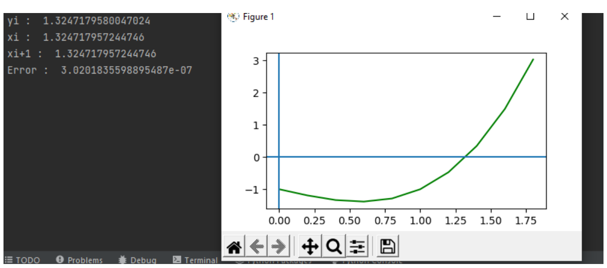
d) Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.

La ecuación que se utilizará será:

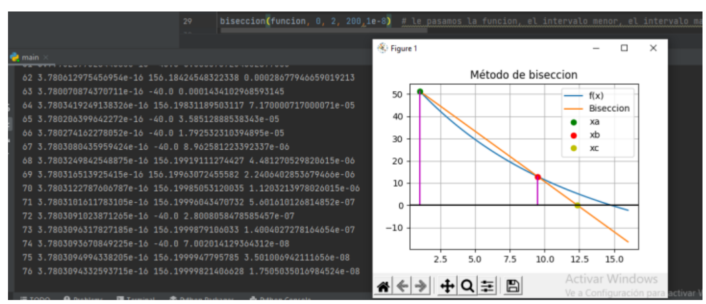
```
((68.1*9.81)/x)*(1-(math.e)**(-(10/68.1)*x))-40
```

$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Aitken:

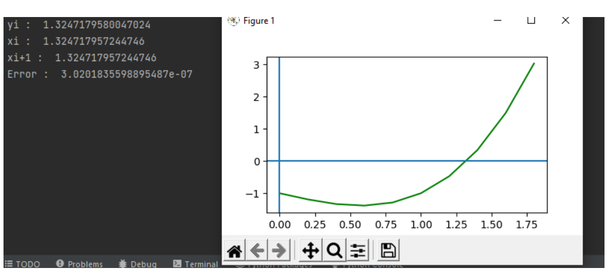


Bisección:

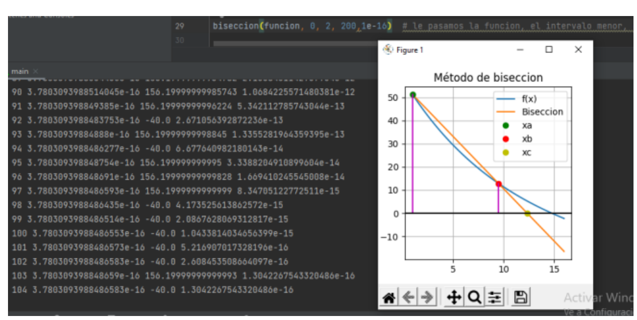


$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Aitken:

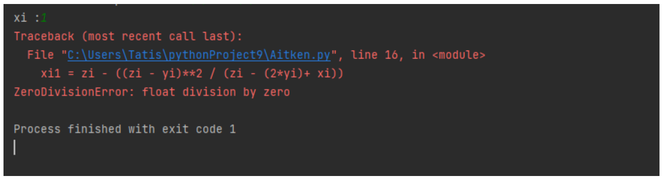


Bisección:

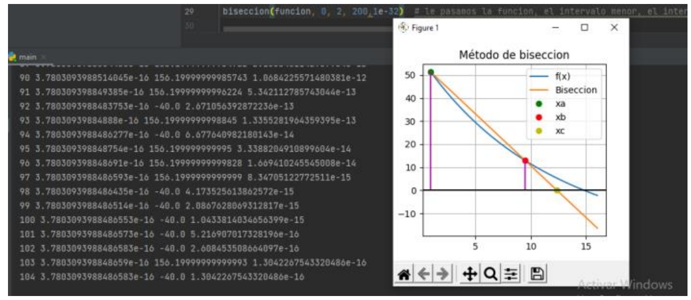


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Aitken:

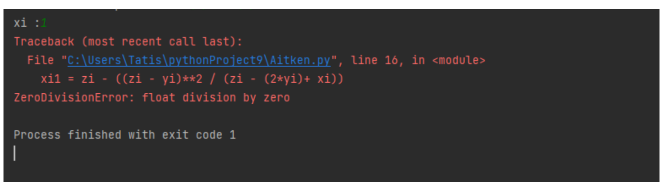


Bisección:

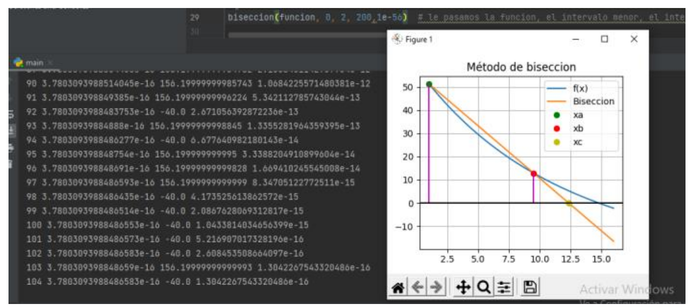


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Aitken:



Bisección:

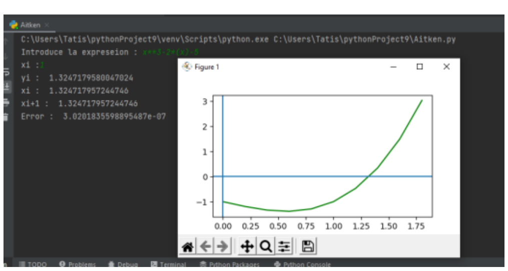


Anotación: Desde la tercera tolerancia, por razones del método ya no aparecen las raíces

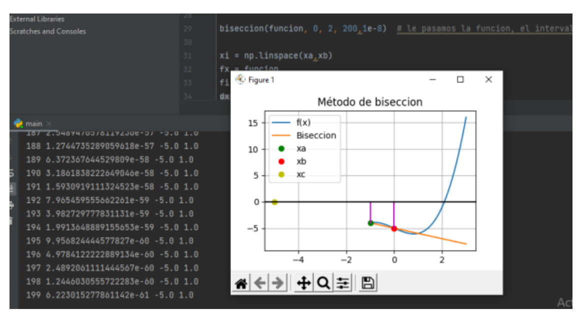
e) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

$Tolerancia\ 10^{-8}$:

Aitken:

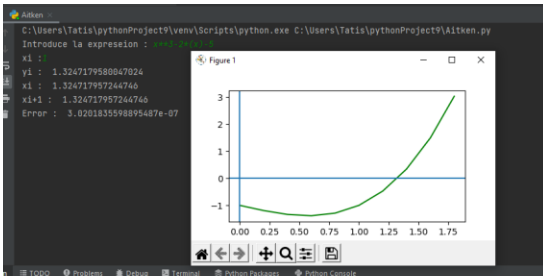


Bisección:

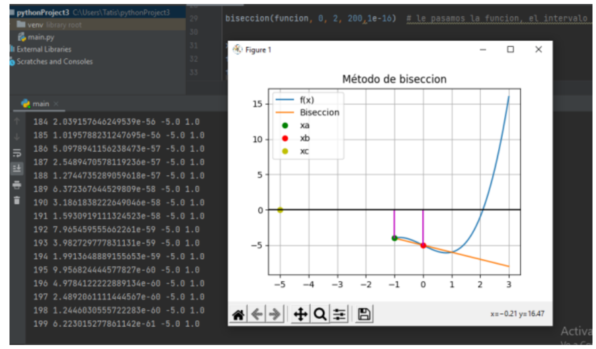


$Tolerancia\ 10^{-16}$:

Aitken:

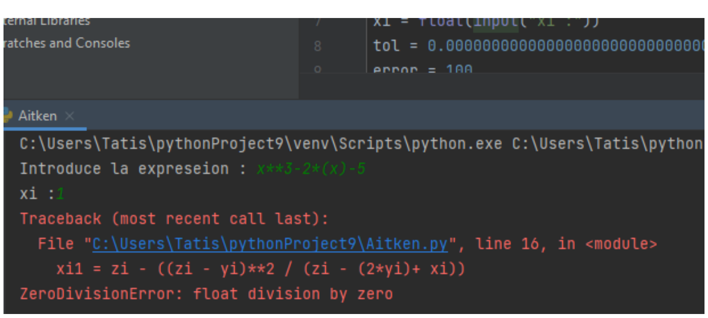


Bisección:

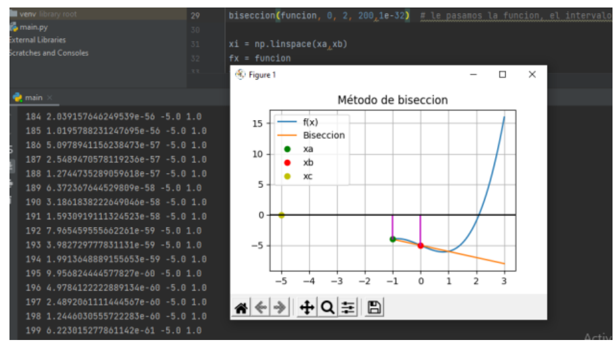


$Tolerancia\ 10^{-32}$:

Aitken:

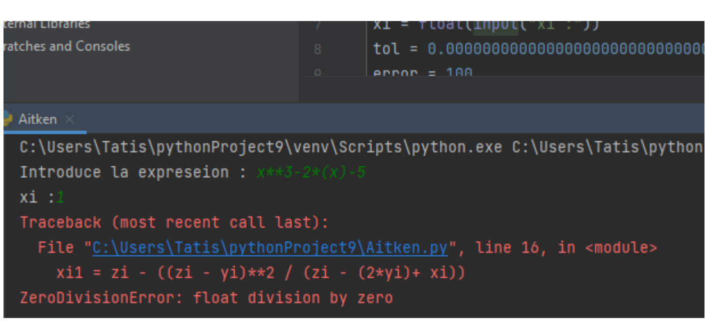


Bisección:

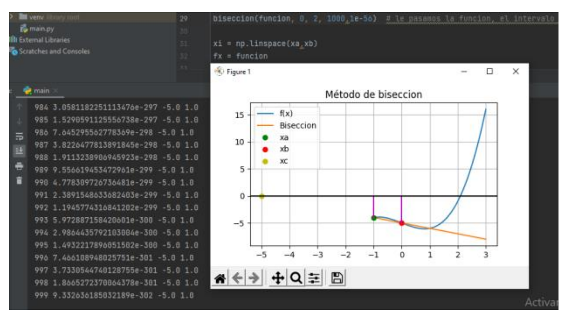


$Tolerancia\ 10^{-56}$:

Aitken:



Bisección:



Anotación: Desde la tercera tolerancia, por razones del método ya no aparecen las raíces

7. **Preguntas:**

7.1 ¿Cuáles son condiciones para aplicar el método?

El método de Aitken acelerara la sucesión Xn si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - \ell}{x_n - \ell} = 0.$$

Debe mantenerse un caso de convergencia lineal para poder realizar la respectiva aceleración de la misma.

7.2 Proporcione una explicación geométrica del algoritmo

Para esto, se lustrará con un ejemplo: Miremos que la sucesión {pn}∞ n=0 converge al limite p como una sucesión geométrica decreciente con factor k:

pn+1 − p = k(pn − p), |k| < 1 n = 0, 1, 2, ...

Entonces, k y p pueden ser obtenidos a partir de pn, pn+1 y pn+2 usando las ecuaciones

pn+1 − p = k(pn − p)

pn+2 − p = k(pn+1 − p)

Haciendo la resta de estas ecuaciones:

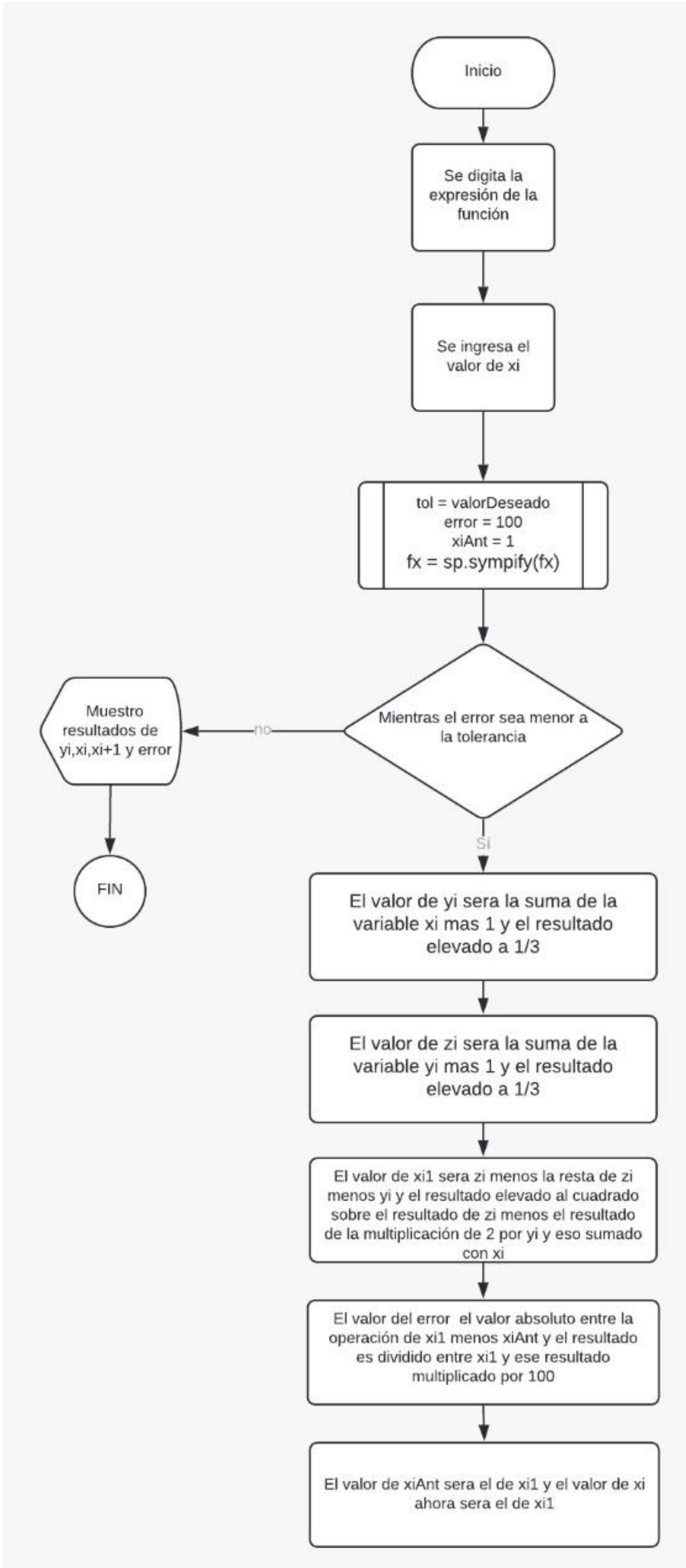
$$k = \frac{pn+2 - pn+1}{pn+1 - pn}$$

Se sustituye en la primera ecuación, dado que k es diferente a uno 1:

$$p = \frac{k\ p_n - p_{n+1}}{k-1} = \frac{p_n\ p_{n+2} - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2\ p_{n+1} + p_n}\ ,$$

En donde se puede observar que se llega a la misma ecuación.

7.3 **Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo**



7.4 Cuál son las raíces. Valide su resultado, Se utilizó Wolfram Alfa para verificar

Ejercicio 1: $\boldsymbol{f(x) = cos^2(x) - x^2}$

Solutions

$x \approx 0.739085$

$x \approx -0.739085$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 6.a)

Ejercicio 2: $\boldsymbol{f(x) = xsen(x) - 1\ en\ [-1, 2]}$

Result:

$x = -1.114157140871930$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 6.b)

Ejercicio 3: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}}$

Exact root result:

$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$

$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$

$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 6.c)

Ejercicio 4: Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.

La ecuación que se utilizará será:

```
((68.1*9.81)/x)*(1-(math.e)**(-(10/68.1)*x))-40
```

Result

$-0.146843\,x = 0$

Ejercicio 5: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}}$

Result:

$x = 2.094551481542414$

El resultado es el mismo que dio al momento de realizar el programa en python.(Ver numeral 6.e)

7.5 Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

Normalmente los valores parecen converger al cabo de unas iteraciones y llegados a un punto empiezan a divergir con un empeoramiento de la estimación. Esto nos indica que pasado cierto punto no se gana precisión al utilizar más nodos de interpelación.

7.6 Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema

En el momento de comenzar el descenso en la precisión del método se obtendrá una constante pérdida de significancia.

7.7 Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar)

Como es bien sabido, para el método de aitken es necesario para su funcionamiento el uso de diversos factores como lo son una respectiva tolerancia o un polinomio, por lo que el agregar una tercera raíz, puede causar la invalidez del método, causando que por definición no sea posible la ejecución de este.

7.8 ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Al ser la función par o impar no influye en el cálculo de la raíz ya que se realiza por sucesiones, pero al ser periódico se empiezan a realizar una mayor cantidad de iteraciones por lo cual el método hace que se empiece a alejar de la respuesta correcta.

7.9 Como se comporta el método con respecto al de bisección.

El método de Aitken presenta una búsqueda más eficaz frente al método de bisección ya que toma menos iteraciones y al aplicar la formula general se pueden verificar diferentes valores mediante sucesiones de tipo n y n+1. Sin embargo, cuando el método Aitken llega a un número variable de iteraciones el valor se comienza a alejar de la respuesta correcta lo cual lo hace ineficiente en problemas más complejos.

7.10 Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

En cuanto al teorema de Taylor y el método Aitken, podemos deducir que el teorema de Taylor es mejor cuando tenemos tolerancias más grandes, pero en cuanto a precisión el método Aitken es mucho mejor debido a que hace menos iteraciones para la aproximación de la raíz.