

ITAM

Métodos Numéricos y Optimización (MAT-34420)

Práctica 1

J. Ezequiel Soto S.
[ezequiel.soto@itam.mx]

Una función implícita es una función de la forma:

$$F(x, y) = 0.$$

Las funciones implícitas se pueden utilizar para modelar objetos geométricos. Así, un objeto geométrico puede estar definido en términos de $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Considera la región \mathcal{G} determinada por la función:

$$F(x, y) = (x^2 + y - 10)^2 + (x + y^2 - 12)^2 - 100$$

1. Calcula la caja contenedora (*bounding box*) de la región \mathcal{G} .
2. Calcula el área de \mathcal{G} usando el método de Monte Carlo con $10^2, 10^3, \dots, 10^8$ muestras.
3. Diseña un método recursivo para calcular el área en el que se subdividen regiones cuadradas sólo cuando la función implícita tiene signos distintos en sus esquinas. Use este método para calcular el área de \mathcal{G} .
4. Calcula la probabilidad de que un punto aleatorio (x, y) esté en la región \mathcal{G} . Las componentes de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se distribuyen como normal bivariada con medias μ_x, μ_y , desviaciones estándar σ_x, σ_y , y correlación ρ_{xy} .

$$\mathbb{P}[(x, y) \in \mathcal{G}] = ?$$

- (a) Formula la integral para calcular esta probabilidad.
- (b) Explica el uso del método de Monte Carlo en este caso.
- (c) Calcula la probabilidad usando el método de Monte Carlo con $10^2, 10^3, \dots, 10^8$ suponiendo que las componentes de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se distribuyen como normal bivariada con $\mu_x = \mu_y \in \{-6, -5, \dots, 5, 6\}$, $\sigma_x = \sigma_y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y $\rho_{xy} = 0$.
- (d) Calcula esta misma probabilidad para (x, y) uniformes en $[-6, 6] \times [-6, 6]$. Haz el cálculo por Monte Carlo y compara con el cálculo usando las áreas obtenidas en las preguntas 1 y 2.
- (e) Organiza una comparación de todos los resultados anteriores e interpreta.

Bonus: Visualiza el proceso y la comparación de resultados.

Evaluación

[50%] Organiza tus soluciones de la práctica en un notebook de python (*.ipynb), incluye gráficas. Recuerda la diferencia entre discutir una solución y copiarla, siempre opta por lo primero.

[50%] Comunica tus resultados en un documento usando texto, figuras y tablas. Usa \LaTeX para producir un documento de formato y extensión libre.

Si utilizas literatura (formal o informal), incluye las referencias.

Fecha de entrega: 10 de octubre, 2024. Dos archivos: .pdf, .ipynb