1 Breve repaso

El exerimento de Young consiste en hacer insidir un frente de onda plano (caracterizado por una longitud de onda y una frecuencia) a traves de una pantalla óptica con 2 rendijas de grosor a, que se separan una distancia d. Lo que se quiere es observar el efecto de puntos p lejanos que se encuentran a una distancia L_0 con la caracteristica de $L_0 >> d >> a$

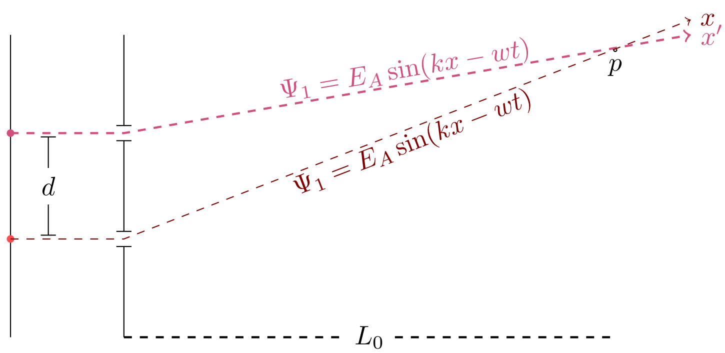
Se otiene que el efecto neto en el punto p está dado por:

$$\psi(p) = A(\delta)\sin(wt - \gamma)$$

Donde:

$A(\delta) = E_A \cos(\frac{k\delta}{2})$

$\gamma = kx + \frac{k\delta}{2} + \pi$



Recordemos que la energía que transporta una onda electromagnética está dada por el vector de Poynting, cuya magnitud es la intensidad ($\frac{watts}{\mathrm{m}^2}$)

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{T\,m/A}$

- Propiedades de las ondas electromagnéticas

  $\vec{E} \perp \vec{B}$

  $E = cB$ donde c es la velocidad de la rediación en el vacío

Por lo que se tiene que

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0}\widehat{\perp} = \frac{cB^2}{\mu_0}\widehat{\perp}$$

con $\widehat{\perp}$ siendo la dirección perpendicular al plano que contiene a $\vec{E}$ y a $\vec{B}$. De esta forma si $\psi(p) = E(p) = A(\delta)\sin(wt - \gamma)$, entonces

$$S = \frac{(A(\delta))^2 \sin^2(wt - \gamma)}{c\mu_0}$$

y la intensidad romedio en el tiempo está dada por

$$\begin{aligned}
\langle S \rangle_T &= \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt && (1)\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{(A(\delta))^2 \sin^2(wt - \gamma)}{c\mu_0}dt && (2)\\
&= \frac{(A(\delta))^2}{2c\mu_0} && (3)\\
&= \frac{4E_A^2 \cos(\frac{k\delta}{2})}{2c\mu_0} && (4)\\
&= I_{nmax}\cos^2(\frac{k\delta}{2}) && (5)
\end{aligned}$$

2 Rendija Ancha

ESPACIO PARA GRAFIQUITAS

Cuando se tiene una rendija ancha, y se hace insidir un frente de onda plano, provoca que cada punto del frente de onda sea un emisor isotrópico de ondas, cuyo efecto neto es la superposición de todas las ondas que llegan a un punto p.

Por el principio de super posición, se tendrá que el efecto neto será dado por:

$$\begin{aligned}
\psi(P) &= \psi_0 + \psi_1 + ... + \psi_N && (6)\\
&= \sum_{i=0}^{N} \psi_i && (7)\\
&= \sum_{i=0}^{N} E_A \sin(kx - wt + ik\delta) && (8)
\end{aligned}$$

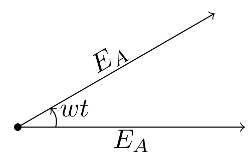
donde $ik\delta$ es el valor de desfase respecto a ψ_0 y $\delta = \Delta y \sin(\theta)$

Para poder calcular el valor de la sumatoria primero reescribimos ψ_0:

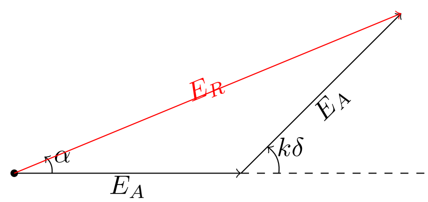
$$\begin{aligned}
\psi(P) &= E_A \sin(kx - wt) && (9)\\
&= E_A \sin(wt - kx + \pi) && (10)\\
&= E_A \sin(wt + \gamma) && (11)
\end{aligned}$$

con $\gamma = \pi - kx$

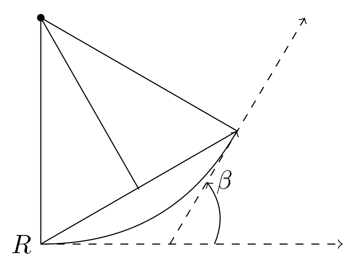
Luego, definimos el fasor ψ_{f0} como un vector que va rotando a una frecuencia angular w y tamaño E_A



Si sumamos 2 fasores ψ_0 y ψ_1 de tamaño E_A, ψ_1 desfazado un ángulo $k\delta$ con respecto a ψ_0, entonces se consigue un fasor resultante de magnitud E_R



Cuando N tiende a infinito, el tamaño del fasor y el desfase entre fasores tiende a un diferencial. De esta manera, la curva que describen los fasores tiende a un arco de circunferencia.



Nota: el ángulo que se forma entre los dos vertices de tamaño R también es β

Donde:

$$\begin{aligned} \beta &= Nk\delta && (12) \\ &= N\frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \sin(\theta) && (13) \\ &= \frac{2\pi a \sin(\theta)}{\lambda} && (14) \end{aligned}$$

y se obtiene que:

$$\sin(\frac{\beta}{2}) = \frac{\frac{E_{AR}}{2}}{f_e R}$$

siendo f_e un factor de escala asociado al tamaño del fasor que permite poner la razón en unidades de campo

Podemos ver que

$$R\beta = S$$

que si multiplicamos a ambos lados de la igualdad

$$f_e R\beta = f_e S$$

y nos queda que

$$E_{AS} = f_e S$$

Lo que es la suma de todas las amplitudes que constituyen el arco

Este resultado nos da que

$$\frac{E_{AS}}{\beta} = f_e R$$

Así:

$$E_{AR} = E_{AS}\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}$$

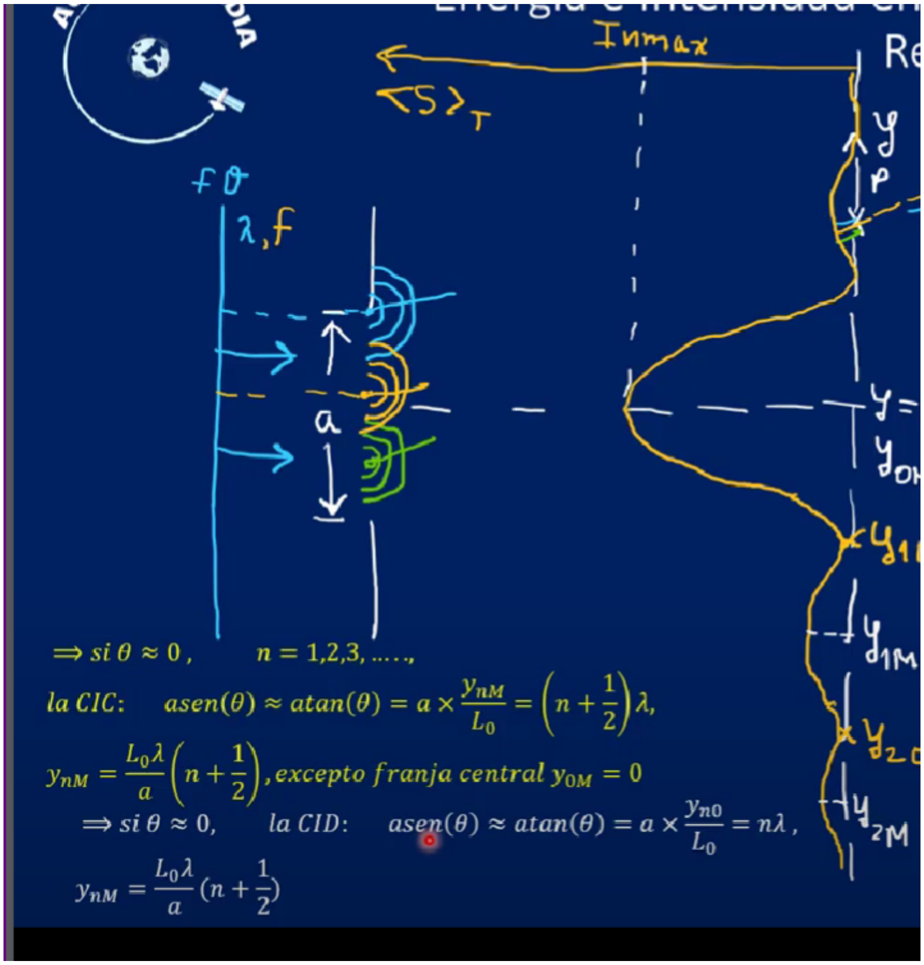
Lo que concluye que el campo electrico en este caso tiene un comportamiento armónico simple con la función de onda en P:

$$E(p) = \psi(p) = E_{AS}\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}}\sin(wt + \frac{\beta}{2}) = E_{AR}\sin(wt + \frac{\beta}{2})$$

3 Energía e intensidad

Retomando el caso de la rendija angosta, la intensidad promedio en el sistema es:

$$\begin{aligned}
\langle S\rangle_T &= \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt && (15)\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{(E_{AR})^2\sin^2(wt + \frac{\beta}{2})}{c\mu_0}dt && (16)\\
&= \frac{(E_{AR})^2}{2c\mu_0} && (17)\\
&= \frac{E_{AS}^2\sin^2(\frac{\pi a\sin(\theta)}{\lambda})}{2c\mu_0(\frac{\pi a\sin(\theta)}{\lambda})} && (18)\\
&= I_{nmax}\frac{\sin^2(\frac{\pi a\sin(\theta)}{\lambda})}{(\frac{\pi a\sin(\theta)}{\lambda})} && (19)
\end{aligned}$$



Recordemos que la condición de interferencia constructiva está dada, bajo la condiciónde que $\theta \approx 0$, entonces: Cuando $a\sin(\theta) \approx a\tan(\theta)$:

$$Y_{nM} = \frac{L_0\lambda}{a}\left(n\frac{1}{2}\right)$$