

TD n°1

Langages et expressions rationnelles

Exercice 1 (Facteurs et occurrences)

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca , $titi$, $aabgjdd$.
2. Donner l'ensemble des couples de mots (u, v) tels que $uv = abaac$.
3. Un mot u est un facteur d'un mot v si u apparaît à l'intérieur de v : v s'écrit w_1uw_2 pour certains mots w_1 et w_2 (qui peuvent être vides). Le nombre d'occurrences d'un facteur u dans un mot w est le nombre de façons de voir u comme facteur de w .
Donner le nombre d'occurrences du facteur aba dans le mot $v = ababab$.
4. Déterminer un mot de longueur 7 sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ ayant le plus petit (respectivement, le plus grand) nombre possible de facteurs différents.

Exercice 2 (Opérations sur les langages)

1. Calculer \mathcal{LM} pour les couples de langages suivants :
 - (a) $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ et $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
 - (b) $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
 - (c) $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
 - (d) $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ et $\mathcal{M} = \{a, b\}^*$.
2. Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages \mathcal{L} , \mathcal{M} et \mathcal{N} , on a : $\mathcal{L}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{LM}) \cup (\mathcal{LN})$. Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.
3. Pour chacune des égalités entre langages, dire si elle est correcte (justifier) ou incorrecte (donner un contre-exemple) :
 - (a) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
 - (b) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
 - (c) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
 - (d) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
 - (e) $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
 - (f) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
 - (g) $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
 - (h) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$
 - (i) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 (Écriture d'expressions rationnelles) Donner une expression rationnelle pour le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ des mots :

1. contenant exactement un a ;
2. contenant exactement deux a ;
3. contenant au moins deux a ;
4. contenant au moins un a et un b ;
5. contenant un nombre pair de a .

Exercice 4 (Expressions rationnelles pour un même langage) Parmi les expressions rationnelles suivantes, lesquelles décrivent le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant un nombre impair de a .

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $(b^*ab^*a)^*b^*ab^*$ | <input type="checkbox"/> $b^*ab^*(ab^*ab^*)^*$ |
| <input type="checkbox"/> $b^*ab^*(a + b^* + a + b^*)^*$ | <input type="checkbox"/> $(a + b)^*a(b^*ab^*a)^*b^*$ |
| <input type="checkbox"/> $(a + b)^*a(b^*ab^*a)$ | <input type="checkbox"/> $b^*a(b^*ab^*a)^*b^*$ |
| <input type="checkbox"/> $(a + b)^*a(a + b)^*(aa)^*(a + b)^*$ | <input type="checkbox"/> $(a + b)^*a((a + b)a(a + b)a)^*$ |

Exercice 5 (Écriture d'expressions rationnelles) Donner une expression rationnelle pour le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ des mots :

1. contenant le facteur aa ;
2. ne contenant pas le facteur aa ;
3. ne contenant pas le facteur ab ;
4. ne contenant pas le facteur aba ;
5. contenant le même nombre de a que de b .

Exercice 6 (Expressions rationnelles) Soit L le langage exprimé par l'expression rationnelle $a^*(ab + ba)^*b^+$. Donner

1. les mots de L de longueur 4 ;
2. les mots de L de longueur 5 et commençant par b ;
3. un mot le plus court possible qui n'appartient pas à L et qui contient (au moins) un b .

Exercice 7 (Commutation) Soient u et v deux mots. On dit que u et v commutent si l'on a $uv = vu$. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe un mot w et deux entiers positifs ou nuls m et n vérifiant $u = w^m$ et $v = w^n$.