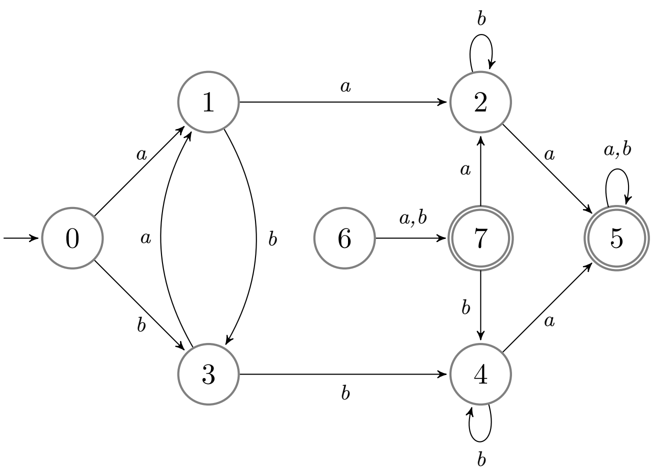
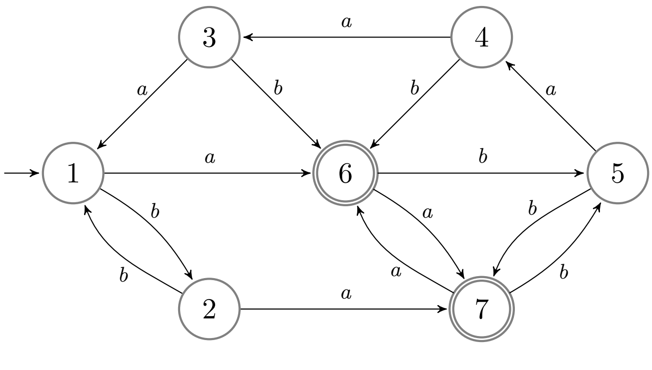
TD n°11

Algorithmes de Moore et théorème de Myhill–Nerode

Exercice 1 *Minimiser chacun deux automates ci-dessous avec l'algorithme de Moore et en déduire s'ils reconnaissent le même langage.*





Exercice 2 *En utilisant le théorème de Myhill–Nerode, montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels.*

1. $\mathcal{L}_4 = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a \leq |u|_b\}$
2. $\mathcal{L}_5 = \{(ab)^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathcal{L}_6 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathcal{L}_7 = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$
5. $\mathcal{L}_8 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$
6. $\mathcal{L}_9 = \{a^p \mid p \text{ premier}\}$

Pour un mot fixé s, on note $|u|_s$ le nombre d'occurrences de s dans u en tant que facteur, ainsi $|aababba|_{ab} = 2$.

7. $\mathcal{L}_{10} = \{u \in \{0,1,2\}^* \mid |u|_{01} = |u|_{10}\}$
8. $\mathcal{L}_{11} = \{u \in \{0,1\}^* \mid |u|_{0011} = |u|_{1100}\}$

Exercice 3 (automates déterministe vs. non-déterministe)
Soit $L_n = \mathcal{L}\left((a+b)^* a (a+b)^n\right)$.

1. *Construire un automate non-déterministe à $n+2$ états reconaissant L_n.*
2. *Montrer que pour tous mots $x, y \in \{a,b\}^*$ de longueur $n+1$, si $x \neq y$ alors $x \not\sim_{L_n} y$.*
3. *En déduire qu'un automate déterministe reconaissant L_n nécessite au moins 2^{n+1} états.*

Exercice 4 (minimalité de l'automate des résiduels)
Soit L un langage rationnel.

1. *Montrer que si $x^{-1}L \neq y^{-1}L$, alors $x \not\sim_L y$.*
2. *En déduire, en utilisant le critère de minimalité vu dans le cours, que l'automate des résiduels d'un langage est toujours minimal pour ce langage.*

Exercice 5 (optionnel – caractérisation des ensembles 1-automatiques)
Soit L un langage rationnel et $v \in \Sigma^*$.

1. *Montrer qu'il existe deux entiers $0 < n < m$ tels que, pour tout $w \in \Sigma^*$, $v^n w \in L$ si et seulement si $v^m w \in L$.*

On considère désormais $\Sigma = \{a\}$, et on veut montrer que la propriété précédente caractérise les langages rationnels. Dans la suite de l'exercice, on pose ainsi L un langage vérifiant la propriété de la question 1.

2. *Soient n et m correspondants au mot $v = a$ pour cette propriété, et R l'ensemble de résiduels $\left\{\left(a^i\right)^{-1} L \mid 0 \leq i \leq m-1\right\}$. Montrer que si $\left(a^j\right)^{-1} L \in R$ pour tout $j \leq k$, alors $\left(a^{k+1}\right)^{-1} L \in R$.*
3. *En déduire que le nombre de résiduels est borné et conclure.*