TD1

Exercice 1 :

1. Nombre d'occurrence des lettres a et b dans les mots : $a^3cbbca, titi, aabgjdd$.
   - $|a^3cbbca|_a = 4$ et $|a^3cbbca|_b = 2$;
   - $|titi|_a = 0$ et $|titi|_b = 0$;
   - $|aabgjdd|_a = 2$ et $|aabgjdd|_b = 1$.
2. L'ensemble des couple de mots (u, v) tel que $uv = abaac$.

   $(\mathcal{E}, abaac), (a, baac), (ab, aac), (aba, ac), (abaa, c), (abaac, \mathcal{E})$.
3. Nombre d'occurrence du facteur aba dans $ababab$:

   $\overline{aba}bab$ et $ab\overline{aba}b = 2$;
4. Mot de longueur 7 sur $\{a, b, c\}$ ayant le plus petit nombre possible de facteurs différents :

   $aaaaaaa$.

   Mot de longueur 7 sur $\{a, b, c\}$ ayant le plus petit nombre possible de facteurs différents :

   $abcbaca$ (y'en a d'autres)

Exercice 2 :

1. Calculer $\mathcal{LM} =$
   a. $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ et $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$.

      $\mathcal{LM} = \{a, ab, a^3, abb, aba^2, bb, bbb, bbaa\}$;

   b. $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$.

      $\mathcal{LM} = \emptyset$;

   c. $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ et $\mathcal{M} = \{a, ab, bb\}$.

      $\mathcal{LM} = \mathcal{M} = \{a, ab, bb\}$

   d. $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ et $\mathcal{M} = \{a, b\}^*$.

      Le langage de tous les mots commençant par aa, ab, ba. $\{aa, ab, ba\} \cdot \{a, b\}^*$.
2. Montrer que $\mathcal{L}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{LM}) \cup (\mathcal{LN})$

   Soit $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \Leftrightarrow w = w_1 \cdot w_2$ avec $w_1 \in \mathcal{L}$ et $w_2 \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$

   $\Leftrightarrow w = w_1 \cdot w_2$ avec $w_1 \in \mathcal{L}$ et $w_2 \in \mathcal{M}$ ou $v_2 \in \mathcal{N}$

   $w \in (\mathcal{LM}) \cup (\mathcal{LN})$

   Montrer que$\mathcal{L}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = (\mathcal{LM}) \cap (\mathcal{LN})$

   $\mathcal{L} = \{b, \mathcal{E}\}, \mathcal{M} = \{b\}, \mathcal{N} = \{\mathcal{E}\}$

   $\mathcal{L}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \{b, \mathcal{E}\}$ $\quad$ $\mathcal{LM} = \{b^2, b\}, \mathcal{LN} = \{b, \mathcal{E}\}$, donc $(\mathcal{LM}) \cap (\mathcal{LN}) = \{b\}$

   Par exemple : Des langages infinie marchent
3. Dire si ces égalité sont vraie (justifier) ou fausse (contre-exemple) :
   a. $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$. Vrai

      Egalité car les deux mots finiront par être les mêmes car ils sont égaux

      $w \in \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*, w = w_1 w_2$ avec $w_1 \in \mathcal{M}^*$ et $w_2 \in \mathcal{M}^*$.

      Donc $w_1 = w_{11} w_{12} \dots w_{1k}$ avec $w_{1i} \in \mathcal{M}$

      et $w_2 = w_{21} w_{22} \dots w_{2\ell}$ avec $w_{2j} \in \mathcal{M}$

      Ainsi, $w = w_{11} w_{12} \dots w_{1k} w_{21} w_{22} \dots w_{1\ell} \in \mathcal{M}^*$.

b. $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$. Faux

Si on prend $\mathcal{M} = \{a\}$,

avec $\mathcal{M}^* = a^*$ et $(\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^* = (aa)^*$ (puissances paires).

c. $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$. Faux

Si on prend $\mathcal{M} = \{a\}$

On ne pourra pas avoir $\mathcal{E}$, on peut prendre l'exemple précédent

d. $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^{**}$.

Vrai (à chercher mais c logique)

e. $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \mathcal{M}$.

Vrai

f. $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$. Faux

$\mathcal{M} = \{a\}$ et $\mathcal{N} = \{b\}$. A gauche, mélange mais pas à droite

g. $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$.

Même exemple : A gauche, l'ensemble sera vide mais on aura $\{\mathcal{E}\}$ à gauche. (vrai)

Exercice 3 : Donner une expression rationnelle pour le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$

1. Langage contenant exactement un a : b^*ab^* ;
2. Langage contenant exactement deux aa : $b^*ab^*ab^*$;
3. Langage contenant au moins deux a : $(a+b)^*ab^*a(a+b)^*$;
4. Langage contenant au moins un a et un b :
   $((a+b)^*a(a+b)^*b(a+b)^*) + ((a+b)^*b(a+b)^*a(a+b)^*) = (a+b)^*(ab+ba)(a+b)^*$;
5. Langage contenant un nombre pair de a : $(b^*ab^*ab^*)^* = (b^*ab^*a)^*b^*$

Exercice 5 : **(Fait sur le TD2)**

1. $(a+b)^*aa(a+b)^*$;
2. $(b^*ab)^*(a+\mathcal{E})$.

TD2

Exercice 1 : Soit $L = a^*(ab+ba)^*b^+$. Donner :

1) Les mots de L de longueur 4 : $bbbb$; $abbb$; $babb$; $aabb$; $abab$; $aaab$;
2) Les mots de L de longueur 5 et commençant par b : b^5 ; $babab$; $baabb$; $babbb$;
3) Les 4 mots les plus courts qui ne sont pas dans L : ϵ ; a ; aa ; ba.

Exercice 2 : Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donner les expressions rationnelles décrivant les langages :

1) Les mots contenant le facteur aa : $(a+b)^*aa(a+b)^*$;
2) Les mots ne contenant pas le facteur ab : b^*a^* ;
3) Les mots ne contenant pas le facteur aa : $(b^*ab)^*b^*(a+\epsilon)$.
4) Les mots ne contenant pas le facteur $abaa$: $(b^*a^*ab^2)^*b^*a^*(ab+\epsilon)$;
5) Les mots contenant le même nombre de a que de b : Pas possible.

Exercice 3 : Soit $\Sigma = \{a, b\}$

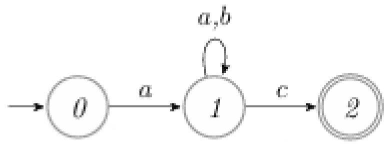
1) Simplifier les expressions rationnelles suivantes :
   a. $(aa)^*a + (aa)^*$: a^* ;
   b. …
   c. $(a+\varepsilon)(\varepsilon + aa)^+a$: a^+.
2) Montrer les égalités suivantes :
   a. …
   b. $a^*(a+b)^* = (a+ba^*)^*$:

      Montrons $\subseteq$.

      Soit $w \in a^*(a+b)^* \Leftrightarrow w = w_1w_2$ avec $w_1 = a^*, w_2 \in (a+b)^*$.

      $w_1 \in (a+ba^*)^*$.

Exercice 4 : Soit l'automate → $\mathcal{A}_1$:



1) Donner pour chacune d'entre eux : Son ensemble d'états, ses états initiaux et acceptants et sa fonction de transition.

   $\mathcal{A}_1 : Q = \{0, 1, 2\}$; $I = \{0\}$; $T = \{2\}$; $\delta \rightarrow$

	a	b	c
0	1	-	-
1	1	1	2
2	-	-	-

2) Le mot abc, $abbc$ et $abacabcc$ est-il reconnu par les automates ?

   $\mathcal{A}_1$:
   - $abc : 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{c} 2$;
   - $abbbc : 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{c} 2$;
   - $abacabcc : 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} ?$.
3) Décrire les langages reconnus par ces automates : Expression rationnel puis Français.

   $\mathcal{A}_1$:
   - <u>Expression rationnelle</u> : $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = a(a+b)^*c$;
   - <u>Français</u> : Les mots qui commencent et un unique c à la fin.

   $\mathcal{A}_2$:
   - <u>Expression rationnelle</u> : $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = (b+c)^*a(b+c)^*a(b+c)^*(a(b+c)^*a(b+c)^*a(b+c)^*)^*$;
   - <u>Français</u> : Les mots qui ont a égale à $2 \ mod \ 3$.

Exercice 5 : Pour chacun des langages suivants, dessiner un automate déterministe le reconnaissant.

1. Le langage $\{car, bar, or\}$ (faire en sorte d'avoir le moins d'états possible) ;
2. Le langage des mots de longueur paire sur l'alphabet $\{a\}$;
3. Le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui contient un nombre pair de a et un nombre impair de b.
   [OneNote]

TD3

Exercice 1 : On veut écrire deux automate déterministes et complets qui reconnaissent le « mot de passe » d'un digicode. Les seules entrées possibles sont les chiffres, et le code est « 1165 ».

1. Construire un automate qui accepte les séquences saisies qui finissent par le bon code ;
2. Construire qui lit un code a 4 chiffres, qui l'accepte uniquement si c'est le bon, mais permet ensuite de retenter sa chance.
   [OneNote]

Exercice 2 : Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ et $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ deux automates,
et on définit $\mathcal{A}'' = (\Sigma, Q \times Q', (q_0, q_0'), F'', \delta'')$ dit automate produit
avec $\delta''\big((q, q'), a\big) = \big(\delta(q, a), \delta'(q', a)\big)$,
et F'' des états acceptants dépendant de ce que l'on veut calculer.

1. Dessiner un automate $\mathcal{A}_1$ déterministes et complet qui reconnaît le langages L_1 des mots sur $\{a, b\}$ qui commencent par a.
2. Dessiner un automate $\mathcal{A}_2$ déterministes et complet qui reconnaît le langages L_2 des mots sur $\{a, b\}$ qui finissent par b.
3. Dessiner le produit des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sans s'occuper des états acceptants. Eliminer le(s) état(s) non accessible(s) éventuel(s).
   [OneNote]
4. Comment choisir les états acceptants pour obtenir :
   - $L_1 \cap L_2$: Etat $(1|4)$;
   - $L_1 \cup L_2$: Etats $(1|3)$, $(2|4)$, $(1|4)$;
   - $L_1 \setminus L_2$: Etat $(1|3)$;
   - $\overline{L_1 \cap L_2}$: Etats $(0|3)$, $(1|3)$, $(2|4)$, $(2|3)$.
5. Pour lesquels de ces calculs était-il possible d'utiliser des automates déterministes non complets pour $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$?
   Si un automate n'est pas complet, le produit des 2 ne pourra pas faire toutes ses transitions.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{A}_1$ l'automate fini non déterministes

1. Parmi les mots suivants, lesquels sont acceptés par l'automate $\mathcal{A}_1$.
   - $abca$: 01135 → Accepté ;
   - $abaacb$: 022245 → Accepté ;
   - $bcba$: $024?$ → Refusé ;

- $aaacb$: 0113? → Refusé ;
- ca : 013 → Refusé.

2. Donner une expression rationnelle définissant le langage accepté par $\mathcal{A}_1$:
   $(a+b)^*[a(a+b)^*ca + b(a+b)^*cb]$
3. Même question pour les automates suivants $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$:
   2) Expression rationnelle :
   - $\mathcal{A}_2 : (a+b+c)^*(a^2+b^2)(a+b+c)^*$;
   - $\mathcal{A}_3 : (a+b)^*abc$.

Exercice 4 : Déterminiser les automates suivants $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.

TD4

Exercice 2 : Pour chacun des automates avec ε-transitions suivants, calculer l'ε-clôture de chaque état, puis construire un automate déterministes équivalent.

1) $\mathcal{A}_1$: $\overline{\{0\}} = \{0,1,2\}$; $\overline{\{1\}} = \{1,2\}$; $\overline{\{2\}} = \{2\}$.
   $Q' = \{0,1,2\}$; $I' = \overline{\{0\}} = \{0,1,2\}$
   $\delta'(0,a) = \overline{\delta(0,a)} = \overline{\{0\}} = \{0,1,2\}$; $\delta'(0,b) = \overline{\delta(0,b)} = \emptyset$
   $\delta'(1,b) = \overline{\delta(1,b)} = \overline{\{1\}} = \{1,2\}$; $\delta'(2,c) = \overline{\delta(2,c)} = \overline{\{2\}} = \{2\}$.
2) $\mathcal{A}_2$: $\overline{\{0\}} = \{0\}$; $\overline{\{1\}} = \{1,3\}$; $\overline{\{2\}} = \{2,1,3\}$; $\overline{\{3\}} = \{3\}$
   $Q' = \{0,1,2,3\}$; $I' = \overline{\{0,1\}} = \{0,1,3\}$
   $\delta'(0,b) = \overline{\delta(0,b)} = \overline{\{1\}} = \{1,3\}$; $\delta'(1,b) = \overline{\delta(1,b)} = \overline{\{2\}} = \{1,2,3\}$;
   $\delta'(2,a) = \overline{\{3\}} = \{3\}$; $\delta'(3,b) = \overline{\{0\}} = \{0\}$.
3) $\mathcal{A}_3$: $\overline{\{0\}} = \{0\}$; $\overline{\{1\}} = \{1,2,3\} = \overline{\{2\}} = \overline{\{3\}}$; $Q' = \{0,1,2,3\}$; $I' = \overline{\{0\}} = \{0\}$;
   $\delta'(0,a) = \overline{\delta(0,a)} = \overline{\{1\}} = \{1,2,3\}$; $\delta'(1,b) = \overline{\delta(1,b)} = \overline{\{2\}} = \{1,2,3\}$
   $\delta'(2,c) = \overline{\delta(2,c)} = \overline{\{3\}} = \{1,2,3\}$; $\delta'(3,a) = \overline{\delta(3,a)} = \overline{\{3\}} = \{1,2,3\}$.

   Dessin des automates [OneNote]

TD5

Exercice 1 : Utiliser l'algorithme de Thompson pour trouver des automates non-déterministes (sans ε-transition) reconnaissant les langages décrits par les expressions rationnelles suivantes.

- $E_1 = (aa+b)^*$:
  $Q' = \{2,3,5,8\}$; $I' = \bar{I} \cap Q' = \overline{\{0\}} \cap Q' = \{2,5,8\}$; $F' = \{8\}$.
  $\delta'(2,a) = \overline{\delta(2,a)} \cap Q' = \overline{\{3\}} \cap Q' = \{3\}$; $\delta'(3,a) = \overline{\delta(3,a)} \cap Q' = \{8,2,5\}$;
  $\delta'(5,b) = \overline{\delta(5,b)} \cap Q' = \overline{\{6\}} \cap Q' = \{2,5,8\}$;
- $E_3 = (a+ba+bba)^*$:
  $Q' = \{3,5,6,9,10,11,14\}$; $I' = \bar{I} \cap Q' = \overline{\{0\}} \cap Q' = \{3,5,9,14\}$; $F' = \{14\}$
  $\delta'(3,a) = \{3,5,9,14\} = \delta'(6,a) = \delta'(11,a)$;
  $\delta'(5,b) = \{6\}$; $\delta'(9,b) = \{10\}$; $\delta'(10,b) = \{11\}$ [OneNote]

Exercice 2 : Construire un automate $\mathcal{A}_3$ en juxtaposant les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ci-dessous et en fusionnant l'état acceptant de $\mathcal{A}_1$ avec l'état initial de $\mathcal{A}_2$, comme lors de la construction d'un automate reconnaissant une concaténation d'expression rationnelles dans l'algorithme de Thompson. [OneNote]

Est-ce que $L(\mathcal{A}_3) = L(\mathcal{A}_1)L(\mathcal{A}_2)$? $abbaab$ ne reconnaît pas l'automate $L(\mathcal{A}_1)L(\mathcal{A}_2)$/

Exercice 3 :

- $E_1 = (a + ba + bba)^*$
  - Etape 1 : « Linéariser » l'expression rationnelle

    $$E_1' = (a_1 + b_2a_3 + b_4b_5a_6)^*$$
  - Etape 2 : Calculer les ensembles $first(E_1')$, $last(E_1')$ et $next(E_1')$.
    - $first(E_1') = \{a_1, b_2, b_4\}$;
    - $last(E_1') = \{a_1, a_3, a_6\}$;
    - $next(E_1') = \{(a_1, a_1), (a_1, b_2), (a_1, b_4),\ (b_2, a_3),\ (a_3, a_1), (a_3, b_2), (a_3, b_4),$
      $(b_4, b_5), (b_5, a_6),\ (a_6, a_1), (a_6, b_2), (a_6, b_4)\}.$
  - Etape 3 : Construction de l'automate.
- $E_2 = (a + ba + bba)^*(\varepsilon + b + bb)$:
  - $E_2 = (a_1 + b_2a_3 + b_4b_5a_6)^*(\varepsilon + b_7 + b_8b_9)$
  - $first(E_2) = \{a_1, b_2, b_4, b_7, b_8\}$; $last(E_2) = \{a_1, a_3, a_6, b_7, b_9\}$;

    $next(E_2) = \{(a_1, a_1), (a_1, b_2), (a_1, b_4), (a_1, b_7), (a_1, b_8); (b_2, a_3);$
    $(a_3, a_1), (a_3, b_2), (a_3, b_4), (a_3, b_7), (a_3, b_8); (b_4, b_5); (b_5, a_6);$
    $(a_6, a_1), (a_6, b_2), (a_6, b_4), (a_6, b_7), (a_6, b_8); (b_8, b_9)\}$