TD n°3

Automates : produit, nondéterminisme

Exercice 1 (Digicode) *On veut écrire deux automates déterministes et complets qui reconnaissent le « mot de passe » d'un digicode. Les seules entrées possibles sont les chiffres, et le code est* 1165.

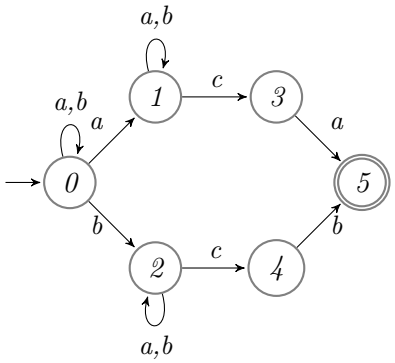
1. *Construire un automate qui accepte séquence tapée qui finit par le bon code.*
2. *Construire un automate qui lit un code de taille 4, l'accepte uniquement si c'est le bon, mais permet ensuite de retenter sa chance.*

Exercice 2 (Produit d'automates) *Pour deux automates déterministes et complets $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ et $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$, on définit l'automate déterministe $\mathcal{A}'' = (\Sigma, Q \times Q', (q_0, q_0'), F'', \delta'')$, dit* automate produit*, avec $\delta''((q, q'), a) = (\delta(q, a), \delta'(q', a))$, et l'ensemble F'' des états acceptants dépend de ce que l'on veut calculer.*

1. *Dessiner un automate $\mathcal{A}_1$ déterministe et complet qui reconnaît le langage $\mathcal{L}_1$ des mots sur $\{a, b\}$ qui commencent par a. (3 états devraient suffire.)*
2. *Dessiner un automate $\mathcal{A}_2$ déterministe et complet qui reconnaît le langage $\mathcal{L}_2$ des mots sur $\{a, b\}$ qui finissent par b. (2 états devraient suffire.)*
3. *Dessiner le produit des deux automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, sans s'occuper des états acceptants. Éliminer le(s) état(s) non accessible(s) éventuel(s).(On dit qu'un état est accessible si on peut atteindre cet état en lisant un mot depuis un état initial.)*
4. *Comment choisir les états acceptants pour obtenir :*

   (a) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, *(b)* $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, *(c)* $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$, *(d)* $\overline{\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$.
5. *(*) Pour lesquels de ces calculs était-il possible d'utiliser des automates déterministes non complets pour $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$?*

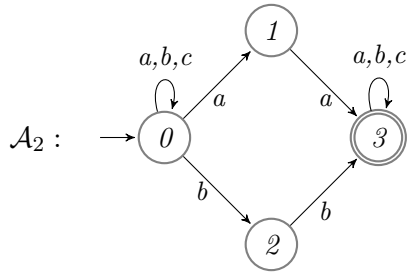
Exercice 3 (Automates non déterministes) *Soit $\mathcal{A}_1$ l'automate fini non déterministe sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ ci-dessous :*

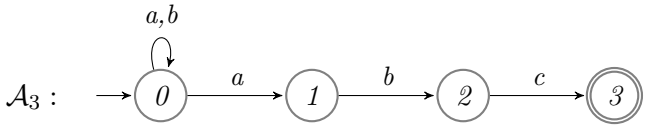


1. *Parmi les mots suivants, lesquels sont acceptés par l'automate $\mathcal{A}_1$?*

   ☐ *abca* ☐ *abaacb* ☐ *bcba* ☐ *aaacb* ☐ *ca*
2. *Donner une expression rationnelle définissant le langage accepté par $\mathcal{A}_1$.*

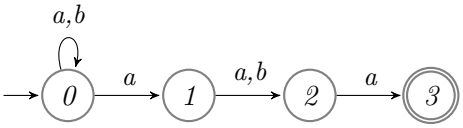
3. *Même question pour les automates suivants*



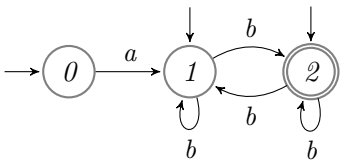


4. *(∗) Donner un automate non déterministe à trois états acceptant le langage* $a^* + (ab)^*$.

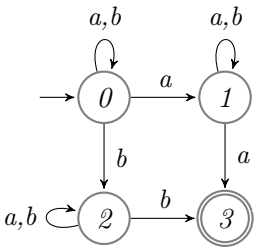
Exercice 4 (Déterminisation) *Déterminiser les automates suivants :*



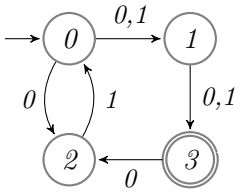
(**) Automate $\mathcal{A}_1$



Automate $\mathcal{A}_2$



Automate $\mathcal{A}_3$



(*) Automate $\mathcal{A}_4$

Exercice 5 (Complémentaire, Miroir) *Pour commencer, on veut déterminer si les langages constitués de tous les mots qui ne contiennent pas un motif donné sont reconnaissables. En particulier, on s'intéressera au langage* $\mathcal{L} = \{u \in \{a,b,c\}^* \mid u \text{ ne contient pas le facteur } aba\}$.

1. *Donner un automate* $\mathcal{A}_1$ *non déterministe pour* $\mathcal{L}_1 = \{u \in \{a,b,c\}^* \mid u \text{ contient le facteur } aba\}$.
2. *Donner un automate* $\mathcal{A}_2$ *déterministe pour* $\mathcal{L}_1$.
3. *Rappeler comment construire un automate reconnaissant le langage complémentaire d'un autre automate. L'appliquer à* $\mathcal{A}_2$ *pour obtenir* $\mathcal{A}_3$ *reconnaissant* $\mathcal{L}$.
4. *Peut-on généraliser ce raisonnement et conclure que le complémentaire d'un langage reconnaissable est toujours reconnaissable ?*
5. *(∗) Si* $u = x_0 \dots x_{n-1}$ *est un mot, on définit le* miroir *de ce mot par* $\widetilde{u} = x_{n-1} \dots x_0$. *On définit le langage miroir de* $\mathcal{M}$ *par* $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\widetilde{u} \mid u \in \mathcal{M}\}$. *Donner un algorithme général qui permet de constuire un automate reconnaissant le langage miroir d'un autre automate. Faut-il que l'automate de départ soit déterministe ?*
6. *Appliquer cet algorithme à* $\mathcal{A}_2$. *L'automate construit est-il déterministe ?*
7. *Appliquer cet algorithme à* $\mathcal{A}_1$. *Que pouvez-vous dire de* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *?*