TD n°1

Langages et expressions rationnelles

Exercice 1 (Facteurs et occurrences)

1. *Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $titi$, $aabgjdd$.*
2. *Donner l'ensemble des couples de mots (u, v) tels que $uv = abaac$.*
3. *Un mot u est un* facteur *d'un mot v si u apparaît à l'intérieur de v : v s'écrit w_1uw_2 pour certains mots w_1 et w_2 (qui peuvent être vides). Le nombre d'*occurrences *d'un facteur u dans un mot w est le nombre de façons de voir u comme facteur de w.*

   Donner le nombre d'occurrences du facteur aba dans le mot $v = ababab$.
4. *Déterminer un mot de longueur 7 sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ ayant le plus petit (respectivement, le plus grand) nombre possible de facteurs différents.*

Exercice 2 (Opérations sur les langages)

1. *Calculer $\mathcal{L}\mathcal{M}$ pour les couples de langages suivants :*
   (a) $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ *et* $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
   (b) $\mathcal{L} = \emptyset$ *et* $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   (c) $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ *et* $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   (d) $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ *et* $\mathcal{M} = \{a, b\}^*$.
2. *Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, on a : $\mathcal{L}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L}\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}\mathcal{N})$. Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.*
3. *Pour chacune des égalités entre langages, dire si elle est correcte (justifier) ou incorrecte (donner un contre-exemple) :*
   (a) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
   (b) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
   (c) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
   (d) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
   (e) $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
   (f) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
   (g) $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
   (h) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$
   (i) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 (Écriture d'expressions rationnelles) *Donner une expression rationnelle pour le langage sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *des mots :*

1. *contenant exactement un a ;*
2. *contenant exactement deux a ;*
3. *contenant au moins deux a ;*
4. *contenant au moins un a et un b ;*
5. *contenant un nombre pair de a.*

Exercice 4 (Expressions rationnelles pour un même langage) *Parmi les expressions rationnelles suivantes, lesquelles décrivent le langage des mots sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *contenant un nombre impair de a.*

☐ $(b^*ab^*a)^*b^*ab^*$

☐ $b^*ab^*(ab^*ab^*)^*$

☐ $b^*ab^*(a + b^* + a + b^*)^*$

☐ $(a + b)^*a(b^*ab^*a)^*b^*$

☐ $(a + b)^*a(b^*ab^*a)$

☐ $b^*a(b^*ab^*a)^*b^*$

☐ $(a + b)^*a(a + b)^*(aa)^*(a + b)^*$

☐ $(a + b)^*a((a + b)a(a + b)a)^*$

Exercice 5 (Écriture d'expressions rationnelles) *Donner une expression rationnelle pour le langage sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *des mots :*

1. *contenant le facteur aa ;*
2. *ne contenant pas le facteur aa ;*
3. *ne contenant pas le facteur ab ;*
4. *ne contenant pas le facteur aba ;*
5. *contenant le même nombre de a que de b.*

Exercice 6 (Expressions rationnelles) *Soit L le langage exprimé par l'expression rationnelle* $a^*(ab + ba)^*b^+$*. Donner*

1. *les mots de L de longueur* 4 *;*
2. *les mots de L de longueur* 5 *et commençant par b ;*
3. *un mot le plus court possible qui n'appartient pas à L et qui contient (au moins) un b.*

Exercice 7 (Commutation) *Soient u et v deux mots. On dit que u et v* commutent *si l'on a* $uv = vu$*. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe un mot w et deux entiers positifs ou nuls m et n vérifiant* $u = w^m$ *et* $v = w^n$*.*