Université Paris Cité – UFR d'Informatique — Automates et analyse lexicale
L2 Informatique, Math-Info, Bio-Info, Japonais-Info — Année 2025–2026

TD n°8

Automate des résiduels et relations d'équivalence

Rappel : Étant donnés un langage $L \subseteq \Sigma^*$ et un mot $u \in \Sigma^*$, le résiduel de L par rapport à u est le langage défini par :

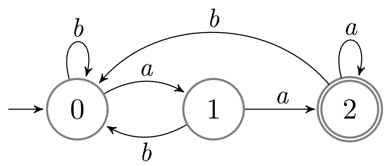
$$u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid u \cdot w \in L\}$$

Exercice 1 *On considère le langage* $L = \{a, ab, ba, aab, bab, abba, bbaa, ababa\}$.
Calculer les résiduels suivants :

— $a^{-1}L$
— $(ab)^{-1}L$
— $(aba)^{-1}L$

Exercice 2 *On considère l'automate* $\mathcal{A}$ *ci-dessous :*

$\mathcal{A}$:



1. *Quel est le langage reconnu par* $\mathcal{A}$ *?*
2. *Donner un automate reconnaissant chacun des langages suivants :* $a^{-1}L(\mathcal{A})$, $(ab)^{-1}L(\mathcal{A})$, $(aa)^{-1}L(\mathcal{A})$.
3. *Montrer que la famille des langages rationnels est close par résiduel par rapport à un mot : pour tout langage rationnel* L *et pour tout mot* u, *le langage* $u^{-1}L$ *est rationnel.*
   On donnera la construction d'un automate qui reconnaît $u^{-1}L$.

Exercice 3 *Calculer l'automate des résiduels des langages suivants.*

— L_1, *l'ensemble des mots de taille* ≥ 2 *sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *dont la première et la dernière lettre sont égales.*
— $L_2 = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a + 2|u|_b \equiv 0 \mod 3\}$.
— $L_3 = (ab + ba)^* a^*$

Exercice 4 *Pour chacune des égalités ci-dessous, dire si elle est vraie (en justifiant) ou fausse (donner un contre-exemple).* $K, L \subseteq \Sigma^*$ *sont des langages, et* $u \in \Sigma^*$ *est un mot.*

1. $u^{-1}(u \cdot L) = L$
2. $u \cdot (u^{-1}L) = L$
3. $u^{-1}L \cup u^{-1}K = u^{-1}(L \cup K)$
4. $u^{-1}L \cap u^{-1}K = u^{-1}(L \cap K)$

Rappels : Une *relation* R sur un ensemble E est un sous-ensemble de $E \times E$. Une relation est donc un ensemble de couples d'éléments de E. Si un couple $(x, y) \in R$, on dira que x est en relation avec y, et on notera cela xRy.
Une relation est dite :
- *réflexive* si $\forall x \in E,\ xRx$: chaque élément est en relation avec lui-même.
- *symétrique* si $\forall x, y \in E,\ xRy \implies yRx$: si x est en relation avec y, alors y est en relation avec x.
- *transitive* si $\forall x, y, z \in E,\ xRy \wedge yRz \implies xRz$: si x est en relation avec y, et que y est en relation avec z, alors x est en relation avec z.

Une relation R est une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 5 *Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations ci-dessous, dire si elle est réflexive, symétrique ou transitive.*
- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- $R_4 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

Exercice 6 *Parmi les relations suivantes sur Σ^*, lesquelles sont des relations d'équivalence ?*
- $R_5 = \{(w, w') \mid w' \textit{ est le miroir de } w\}$
- $R_6 = \{(w, w') \mid w \textit{ et } w' \textit{ sont de même longueur}\}$
- $R_7 = \{(w, w') \mid |w|_a \equiv |w'|_a \mod 2\}$
- $R_8 = \{(w, w') \mid w \textit{ est un préfixe de } w' \textit{ ou } w' \textit{ est un préfixe de } w\}$
- $R_9 = \{(w, w') \mid w \textit{ et } w' \textit{ sont de longueur au moins un et commencent par la même lettre}\}$

Rappel : Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage. Ce langage engendre une relation d'équivalence $\sim_L$ sur Σ^*, définie comme suit :

$$x \sim_L y \quad \text{ssi} \quad x^{-1}L = y^{-1}L$$

Exercice 7 *On considère le langage $L = a(aa + bb)^*b$.*
1. *Calculer l'automate des résiduels de L.*
2. *Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies ?*

(1) $a \sim_L b$	(3) $a \sim_L abb$	(5) $abba \sim_L aaab$	(7) $abbaabba \sim_L a$
(2) $\varepsilon \sim_L aa$	(4) $\varepsilon \sim_L bb$	(6) $aba \sim_L bb$	(8) $ab \sim_L aaabbb$

3. *On appelle la classe d'équivalence de u l'ensemble défini par $[u]_{\sim_L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \sim_L u\}$. Quel est le langage $[ab]_{\sim_L}$? Même question pour $[\varepsilon]_{\sim_L}$, $[a]_{\sim_L}$ et $[b]_{\sim_L}$.*

Exercice 8 *(S'il reste du temps...)*
Montrer que si L est K sont deux langages rationnels sur un alphabet Σ alors le résiduel de K relativement à L, défini par :

$$L^{-1}K = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in L \textit{ tel que } vw \in K\}$$

est rationnel aussi. On donnera la construction d'un automate qui reconnaît $L^{-1}K$.