TD n°10

Théorème de Myhill–Nerode

Exercice 1 *Soit $\mathcal{L}_1$ le langage des mots u sur $\{a, b\}$ vérifiant $4|u|_a + 3|u|_b \equiv 4 \mod 5$. Lesquels des ensembles suivants donnent exactement un représentant pour chaque classe de $\sim_{\mathcal{L}_1}$?*

- $\{bbb, aab, bbbb, aaaaa, \varepsilon\}$
- $\{b, bbb, abb, aabb, aaaaa, aaabbb\}$
- $\{bb, aa, abb, aabb, aaaabb\}$
- $\{aaa, aaaa, aabb, aaaab, aaaabb, \varepsilon\}$
- *$\mathcal{L}_1$ a une infinité de classes d'équivalence distinctes*
- *aucune des cinq propositions ci-dessus*

Exercice 2 *Soit $\mathcal{L}_2$ le langage des mots sur $\{a, b\}$ de longueur multiple de quatre, contenant en leur milieu un bloc d'occurrences de a de taille moitié moindre :*

$$\mathcal{L}_2 = \{ua^{2n}v \mid u, v \in \{a, b\}^n\}.$$

1. *Donner un mot permettant de séparer les mots b et bb.*
2. *Pour $i < j$, donner un mot permettant de séparer les mots b^i et b^j.*
3. *Combien la relation $\sim_{\mathcal{L}_2}$ a-t-elle de classes d'équivalence ?*

Exercice 3 *Soit Σ un alphabet avec au moins deux symboles, et soit $\mathcal{L}_3$ le langage des palindromes sur Σ. Montrer que $x \sim_{\mathcal{L}_3} y$ implique $x = y$: chaque classe de $\sim_{\mathcal{L}_3}$ est un singleton ! On pourra raisonner sur deux cas : soit $|x| = |y|$, soit $|x| > |y|$.*

Exercice 4 *Prouver en utilisant le théorème de Myhill–Nerode que les langages suivants ne sont pas rationnels.*

1. $\mathcal{L}_4 = \{u \in \{a, b\}^* : |u|_a \leq |u|_b\}$
2. $\mathcal{L}_5 = \{(ab)^n a^n : n \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathcal{L}_6 = \{a^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathcal{L}_7 = \{a^{n!} : n \in \mathbb{N}\}$
5. $\mathcal{L}_8 = \{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
6. $\mathcal{L}_9 = \{a^p : p \text{ premier }\}$