

## TD n°7

### Lemme de l’Étoile & Propriétés de Clôture

**Exercice 1 (Lemme de l’étoile)** On rappelle le lemme de l’étoile :

*Si  $\mathcal{L}$  est un langage rationnel, alors :*

*il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  
pour tout mot  $u \in \mathcal{L}$  de taille supérieure ou égale à  $N$ ,  
il existe une factorisation  $u = xyz$ , avec  $y \neq \varepsilon$  et  $|xy| \leq N$ , telle que  
pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $xy^kz \in \mathcal{L}$ .*

*Pour montrer qu’un langage n’est pas rationnel, on peut utiliser sa contraposée :*

*Si le langage  $\mathcal{L}$  satisfait la propriété suivante :*

*pour tout entier  $N \geq 1$ ,  
il existe un mot  $u \in \mathcal{L}$  avec  $|u| \geq N$  tel que  
pour tous mots  $x, y, z \in \Sigma^*$  avec  $u = xyz$ ,  $y \neq \varepsilon$ , et  $|xy| \leq N$ ,  
il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $xy^kz \notin \mathcal{L}$ .*

*alors  $\mathcal{L}$  n’est pas rationnel.*

*Pour chacun des langages suivants, montrer s’il est rationnel ou non.*

1.  $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2.  $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
3.  $\{a^m b^n \mid m > n\}$
4.  $\{u \in \{a, b\}^* \mid \tilde{u} = u\}$ , où  $\tilde{u}$  désigne le miroir de  $u$  : si  $u = a_0 a_1 \dots a_n$ , alors  $\tilde{u} = a_n \dots a_1 a_0$ .  
Par exemple, si  $u = aabba$ , alors  $\tilde{u} = abbaa$ .
5.  $\{u^2 \mid u \in \{a, b\}^*\}$
6. (Facultatif)  $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
7. (Facultatif)  $\{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$
8. (Facultatif)  $\{a^p \mid p \text{ premier}\}$

### Pour aller plus loin dans la non-rationalité...

**Démontrer la non-rationalité d’un langage en utilisant les propriétés de clôture.**

Le lemme d’itération n’est pas le seul outil pour montrer qu’un langage n’est pas rationnel. Pour cela on peut aussi utiliser les propriétés de clôture de la famille des langages rationnels à condition de connaître déjà quelques langages non rationnels.

Vous connaissez déjà beaucoup de ces propriétés, démontrées dans les cours ou TD précédents. On sait notamment que la famille des langages rationnels est close sous : union, concaténation, étoile de Kleene, intersection, complémentaire, différence ensembliste, miroir, préfixes, ...

Vous connaissez déjà également certains langages non rationnels dont vous pourrez vous servir, par exemple le langage  $L_0 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  que l'on a déjà démontré non rationnel par le lemme de l'étoile (Exo 1 ci-dessus).

### Exemple d'application.

On veut montrer que  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$  n'est pas rationnel.

On remarque que :  $L_1 \cap a^* b^* = L_0$ . Or, si  $L_1$  était rationnel alors son intersection avec un autre langage rationnel (dans ce cas  $a^* b^*$ ) le serait aussi car les langages rationnels sont clos sous intersection. Mais on sait que  $L_0$  n'est pas rationnel, donc  $L_1$  ne peut pas l'être.

**Note.** Pour appliquer cette technique il faut exprimer un langage dont on a déjà montré la non-rationnalité (dans l'exemple,  $L_0$ ) en fonction :

- du langage dont on veut montrer la non-rationnalité (dans l'exemple,  $L_1$ ) et
- d'autres langages **rationnels** (dans l'exemple,  $a^* b^*$ )
- en utilisant uniquement des opérations pour lesquelles la classe des langages rationnels est close (dans l'exemple  $\cap$ , mais parfois on a besoin d'utiliser plusieurs opérations).

**Exercice 2** Utilisez les propriétés de clôture pour montrer que les langages décrits sous-dessous ne sont pas rationnels.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\{a^p \mid p \text{ n'est pas premier}\}$     | 7. $\{uav \mid u, v \in \{a, b\}^* \text{ et }  u  =  v \}$ |
| 2. $\{a^m b^n \mid m + n \text{ est un carré}\}$  | 8. $\{u\tilde{u} \mid u \in \{a, b\}^*\}$                   |
| 3. $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$                    | 9. $\{u^2 \mid u \in \{a, b\}^*\}$                          |
| 4. $\{u \in \{a, b, c\}^* \mid  u _a =  u _b\}$   | 10. $\{a^m b^n \mid m \geq n\}$                             |
| 5. $\{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ | 11. $\{a^m b^n \mid m < n\}$                                |
| 6. $\{a^{n+2} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$        |   |

**Exercice 3 (Facultatif : Clôture par préfixes, suffixes...)** La clôture sous préfixe d'un langage  $L$  est définie comme

$$\text{Pref}(L) = \{u \mid \text{il existe } v \text{ tel que } u \cdot v \in L\}$$

Il s'agit de l'ensemble des préfixes des mots de  $L$ .

1. Montrer que si  $L$  est reconnaissable, alors  $\text{Pref}(L)$  est également reconnaissable. On pourra par exemple donner un algorithme pour transformer un automate pour  $L$  en un automate pour  $\text{Pref}(L)$ .
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si  $L$  est reconnaissable, alors l'ensemble des suffixes de  $L$ , l'ensemble des facteurs de  $L$  et l'ensemble des sous-mots de  $L$  sont également reconnaissables. On pourra procéder de manière similaire à la question 1, ou également utiliser de manière astucieuse les propriétés de clôture de  $\text{Rec}$ .