

## TD n°9

### Relation d'équivalence induite par un langage et révisions

**Rappel :** Soit  $L \subseteq \Sigma^*$  un langage. La relation  $\sim_L$  sur  $\Sigma^*$  est définie par

$$x \sim_L y \text{ssi } \forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$$

On rappelle aussi que si  $x$ ,  $y$  et  $w$  sont des mots, alors on dit que  $w$  sépare  $x$  et  $y$  par rapport à  $L$  si

$$(xw \in L \text{ et } yw \notin L) \quad \text{ou} \quad (xw \notin L \text{ et } yw \in L)$$

Autrement dit,  $w$  sépare  $x$  et  $y$  par rapport à  $L$  si l'un des deux mots  $xw$  et  $yw$  est dans  $L$  tandis que l'autre n'y est pas. Ainsi

$$x \sim_L y \text{ssi aucun mot ne sépare } x \text{ et } y$$

**Exercice 1** Soit  $\mathcal{L}_1$  le langage des mots  $u$  sur  $\{a, b\}$  tels que  $|u|_a$  est un multiple de 5. Les mots des paires suivantes ne sont pas  $\sim_{\mathcal{L}_1}$ -équivalents. Indiquer le(s) mot(s) qui les sépare(nt).

(aaababb, baabbaaa)	•	•	ba
(aaa, ε)	•	•	bbabaaaaabb
(bab, baab)	•	•	a
		•	aaaba
		•	aba

**Exercice 2** On considère le langage  $\mathcal{L}_2 = a(aa + bb)^*b$ .

1. Calculer l'automate des résiduels de  $\mathcal{L}_2$ .
2. Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1) $a \sim_{\mathcal{L}_2} b$	(3) $a \sim_{\mathcal{L}_2} abb$	(5) $abba \sim_{\mathcal{L}_2} aaab$	(7) $abbaabba \sim_{\mathcal{L}_2} a$
(2) $\varepsilon \sim_{\mathcal{L}_2} aa$	(4) $\varepsilon \sim_{\mathcal{L}_2} bb$	(6) $aba \sim_{\mathcal{L}_2} bb$	(8) $ab \sim_{\mathcal{L}_2} aaabbb$

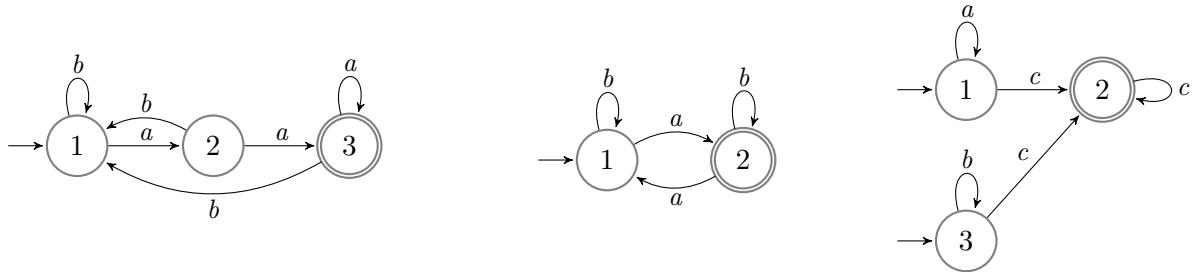
3. On appelle la classe d'équivalence de  $u$  l'ensemble défini par  $[u]_{\sim_{\mathcal{L}_2}} = \{w \in \Sigma^* \mid w \sim_{\mathcal{L}_2} u\}$ . Quel est le langage  $[ab]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$ ? Même question pour  $[\varepsilon]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$ ,  $[a]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$  et  $[b]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$ .

**Exercice 3** Soit  $\mathcal{L}_3$  le langage  $\{a^n b^n \mid 0 \leq n \leq 3\}$ .

1. Définir un automate déterministe complet  $\mathcal{A}_3$  acceptant  $\mathcal{L}_3$ .
2. Décrire les classes d'équivalence de  $\sim_{\mathcal{A}_3}$  par des expressions rationnelles.
3. Combien classes d'équivalence a  $\sim_{\mathcal{A}_3}$ ? Que peut-on en déduire en rapport avec le nombre de classes d'équivalence de  $\sim_{\mathcal{L}_3}$ ?

**Révisions :** Les exercices suivants permettent de réviser les exercices classiques des derniers TD. Il ne sont pas à finir entièrement durant la séance, et ne se substituent pas à une révision du cours, mais permettent d'assurer par la pratique une efficacité de rédaction.

**Exercice 4** (Révisions - BMC) Pour chacun des automates suivants, calculer une formule rationnelle du langage grâce à l'algorithme de Brzozowski et McCluskey. Vous éliminerez les états dans l'ordre croissant et décroissant, puis comparerez les deux formules obtenues.



**Exercice 5** (Révisions - Arden) Construire et résoudre le système d'équation associé à chacun des automates de l'Exercice 4, en spécifiant exactement l'ordre des opérations **sub**(*i, j*) et **ard**(*i*) que vous utiliserez.

**Exercice 6** (Révisions - Lemme de l'étoile) Chacun des langages suivants n'est pas rationnel. Donnez-en une preuve utilisant le lemme de l'étoile :

1.  $\{a^n b^m c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2.  $\{a^{2n} b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
3.  $\{uv \mid |u| = |v|, u \text{ commence par } a \text{ et } v \text{ commence par } b\}$
4.  $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

**Exercice 7** (Révisions - Résiduels) Pour les langages suivants sur l'alphabet  $\{a, b\}$ , donnez :

- a) l'automate des résiduels,
- b) toutes les classes d'équivalences

1.  $L_1 = a(a + b)^*$
2.  $L_2 = (a + b)^* a$
3.  $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ est pair}\}$
4. Le langage  $L_5$  des mots de longueur au moins 2 sur l'alphabet  $\{a, b\}$  pour lesquels la première lettre et la dernière lettre sont différentes.
5.  $L_5 = a^+ b^+$