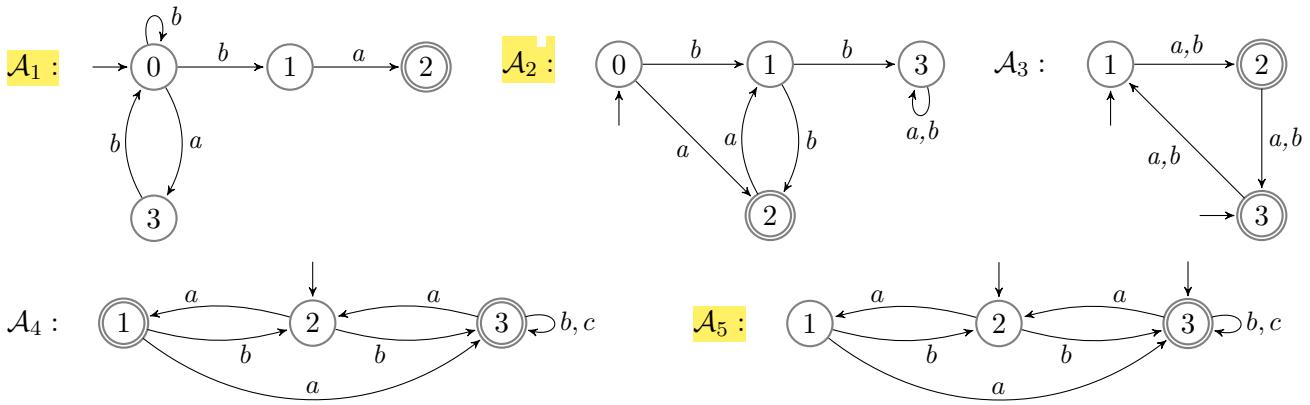


## TD n°6

De l'automate à l'expression rationnelle :  
algorithme de Brzozowski–McCluskey

*vs*  
systèmes d'équations et lemme d'Arden

**Exercice 1** Pour chacun des automates ci-dessous, calculer une expression rationnelle pour le langage reconnu, en appliquant la méthode de Brzozowski–McCluskey.



**Exercice 2** Étant donné un système d'équations aux langages, on considère deux types d'opération :  
**ard( $k$ )** applique le lemme d'Arden sur l'équation  $L_k = \dots$

**sub( $h, k$ )** opère dans  $L_k = \dots$  une substitution de chaque  $L_h$  (par le membre droit de  $L_h = \dots$ )

Pour chacun des couples ( $S, T$ ) de systèmes, indiquer la ou les suite(s) d'opérations pour passer de  $S$  à  $T$  :

$$S_1 : \begin{cases} L_1 = cL_1 + (a+d)L_2 + dL_3 + \varepsilon \\ L_2 = aL_1 \\ L_3 = (c+d)L_1 + bL_3 + \varepsilon \end{cases}$$

$$T_1 : \begin{cases} L_1 = cL_1 + (a+d)L_2 + dL_3 + \varepsilon \\ L_2 = acL_1 + a(a+d)L_2 + adL_3 + a \\ L_3 = b^*(c+d)L_1 + b^* \end{cases}$$

- sub(1, 2)** puis **ard(3)**
- sub(2, 1)** puis **ard(3)**
- ard(3)** puis **sub(2, 1)**
- ard(3)** puis **sub(1, 2)**
- aucune de ces suites

$$S_2 : \begin{cases} L_1 = aL_1 + cL_3 \\ L_2 = (a+d)L_1 + (b+c)L_3 + \varepsilon \\ L_3 = bL_1 + dL_2 \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} L_1 = a^*cL_3 \\ L_2 = (a+d)L_1 + (b+c)L_3 + \varepsilon \\ L_3 = (d(b+c) + (b+d(a+d))a^*)L_3 + d \end{cases}$$

- ard(1)** puis **sub(2, 3)** puis **sub(1, 3)**
- ard(1)** puis **sub(1, 3)** puis **sub(2, 3)**
- sub(1, 3)** puis **ard(1)** puis **sub(2, 3)**
- sub(2, 3)** puis **ard(1)** puis **sub(1, 3)**
- aucune de ces suites

Indiquer finalement la ou les suite(s) d'opérations pour résoudre  $T_2$  :

- sub(1, 2)** puis **sub(3, 1)** puis **sub(3, 2)** puis **ard(3)**
- sub(1, 2)** puis **sub(3, 2)** puis **sub(3, 1)** puis **ard(3)**
- ard(3)** puis **sub(3, 1)** puis **sub(1, 2)** puis **sub(3, 2)**
- aucune de ces suites
- sub(1, 2)** puis **ard(3)** puis **sub(3, 1)** puis **sub(3, 2)**
- sub(3, 2)** puis **sub(3, 1)** puis **sub(1, 2)** puis **ard(3)**
- aucune de ces suites

**Exercice 3** Construire et résoudre le système d'équations associé à chacun des automates de l'Exercice 1.

**Exercice 4** Démontrer le deuxième énoncé du lemme d'Arden : sous l'hypothèse  $\varepsilon \notin A$ ,  $A^*B$  est l'unique solution de l'équation  $L = AL + B$ .