TD6

<u>Exercice 1</u> : Pour chacun des automates ci-dessous, calculer une expression rationnelle pour le langage reconnu, en appliquant la méthode de Brozowski-McCluskey.

- $\mathcal{A}_1$: $(b+ab)^*ba$;
- $\mathcal{A}_2$: $(a+bb)(ab)^*$;
- $\mathcal{A}_5$: $E_1E_2^*$ Avec $E_1 = (ab)^*(b+aa)$ et $E_2 = b+c+aE_1$.

<u>Exercice 3</u> : Construire et résoudre le système d'équations associé à chacun des automates de l'exercice 1.

- $\mathcal{A}_5$: $\begin{cases} L_1 = aL_3 + bL_2 \\ L_2 = aL_2 + bL_3 \\ L_3 = aL_2 + (b+c)L_3 + \varepsilon \end{cases} \xRightarrow{ard(3)} \begin{cases} L_1 = \cdots \\ L_2 = \cdots \\ L_3 = (b+c)^* + aL_2 + \varepsilon \end{cases}$

$$\xRightarrow[sub(3,2)]{sub(3,1)} \begin{cases} L_1 = bL_2 + a(b+c)^*(aL_2+\varepsilon) \\ L_2 = aL_1 + b(b+c)^*(aL_2+\varepsilon) \\ L_3 = \cdots \end{cases}$$

$L_2 = b(b+c)^*aL_2 + aL_1 + b(b+c)^*$, on pose $E = b(b+c)^*a$

$$\xRightarrow{ard(2)} \begin{cases} L_1 = \cdots \\ L_2 = E^*(aL_1 + b(b+c)^*) \\ L_3 = \cdots \end{cases}$$

$$\xRightarrow{sub(2,1)} \begin{cases} L_1 = bE^*(aL_1 + b(b+c)^*) + a(b+c)^*(aE^*(aL_1 + b(b+c)^*) + \varepsilon) \\ L_2 = \cdots \\ L_3 = \cdots \end{cases}$$

$L_1 = (bE^*a + a(b+c)^*aE^*a)L_1 + bE^*b(b+c)^* + a(b+c)^*(aE^*b(b+c)^* + \varepsilon)$

On a ainsi, $L_1 = F^*G$ avec $F = bE^*a + a(b+c)^*aE^*a$
et $G = bE^*b(b+c)^* + a(b+c)^*(aE^*b(b+c)^* + \varepsilon)$.

<u>Exercice 2</u> : Pour chacun des couples (S,T) de systèmes, indiquer la ou les suite(s) d'opération pour passer de S à T.

1) On a fait $ard(3)$, $sub(1,2)$ donc la 1e et la 4e.
2) On a fait $ard(1)$, puis $sub(2,3)$, puis $sub(1,3)$ donc la 1e et 4e (à revoir)

2. 3e

TD7

<u>Exercice 1</u> : Pour chacun des langages, montrer s'il est rationnel ou non :

1) $\{a^m b^n \mid m,n \in \mathbb{N}\} \in Rat$ car $= a^*b^*$;

2) $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

Soit N un entier quelconque (≥ 0) et soit w le mot $a^N b^N$.

Soit $w = xyz$ un découpage de w avec $|y| > 0$ et $|xy| \leq N$ (faire un dessin)

On déduit $x = a^i, y = a^j$ ($j > 0$) et $z = a^{N-i-j} b^N$.

Soit $k = 0$ le mot $xy^0 z = a^{N-j} b^N \notin L$ car $N - j \neq N$ (car $j > 0$).

3) $\{a^m b^n \mid m > n\}$:

Soit N un entier quelconque (≥ 0) et soit w le mot $a^{N+1} b^N$.

Soit $w = xyz$ un découpage de w avec $|y| > 0$ et $|xy| \leq N$

On déduit $x = a^i, y = a^j$ ($j > 0$) et $z = a^{N+1-i-j} b^N$.

Soit $k = 0$ le mot $xy^0 z = a^{N+1-j} b^N \notin L$ car $N + 1 - j \leq N$ (car $j > 0$).

4) $\{u \in \{a, b\}^* \mid u = \tilde{u}\}$

Soit N un entier quelconque (≥ 0) et soit w le mot $a^N b a^N$.

Soit $w = xyz$ un découpage de w avec $|y| > 0$ et $|xy| \leq N$

On déduit $x = a^i, y = a^j$ ($j > 0$) et $z = a^{N-i-j} b a^N$.

Soit $k = 0$ le mot $xy^0 z = a^{N+1-j} b^N \notin L$ car $a^{N-j} b a^N \neq a^N b a^{N-j}$ (car $j > 0$).

5) $\{u^2 \mid u \in \{a, b\}^*\}$

On prend $w = a^N b a^N b$ puis même raisonnement.

6) $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} = (aa)^*$

7) $\{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

On prend $w = a^{N^2}$. Si on prend $k = 2$, $xy^2 z = a^{N^2 + j}$.

Or $N^2 + j > N^2$ car $j > 0$, et $N^2 + j \leq N^2 + N$ car $j < N$

$< N^2 + 2N + 1 = (N + 1)^2$.

Donc $N^2 < N^2 + j < (N + 1)^2$, donc $xy^2 z \notin L$.

8) $\{a^p \mid p \text{ premier}\}$

Non

Exercice 2 :

1) $L_1 = \{a^p \mid p \neg\text{premier}\}$

On utilise le complémentaire : $\mathcal{C}(L_1) = \{a^p \mid p \text{ premier}\}$ qui est non rationnelle.

2) $L_2 = \{a^m b^n \mid m + n = \text{carré}\}$

On a $L_2 \cap L(a^*) = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ qui est non rationnelle.

3) $L_3 = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$

On a $\mathcal{C}(L_3) \cap L(a^* b^*)$ car $babaa \in \mathcal{C}(L_3)$

4) $L_4 = \{u \in \{a, b, c\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$

$L_4 \cap L(a^* b^*) = L_0$

5) $L_5 = \{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

$L_5 \cap L(a^* c^*) = \{a^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

6) $L_6 = \{a^{n+2} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L_6 bb + \{\varepsilon\} + \{ab\}$

TD8

Exercice 1 : $L = \{a, ab, ba, aab, bab, abba, bbaa, ababa\}$. Calculer les résiduels suivantes :

- $a^{-1}L = \{\varepsilon, b, ab, bba, baba\}$;
- $(ab)^{-1}L = b^{-1}(a^{-1}L) = \{\varepsilon, ba, aba\}$;
- $(aba)^{-1}L = \{ba\}$.

Exercice 2 : On considère l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessous :

1) Quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}$?
   $L(\mathcal{A}) = (a+b)^*aa$.
2) Donner un automate reconnaissant chacun des langages suivants :
   $a^{-1}L(\mathcal{A}), (ab)^{-1}L(\mathcal{A}), (aa)^{-1}L(\mathcal{A})$.
3) Montrer que la famille des langages rationnels est close par résiduel par rapport à un mot : pour tout langage rationnel L et pour tout mot u, le langage $u^{-1}L$ est rationnel. On donnera la construction d'un automate qui reconnaît $u^{-1}L$.
   $L \in ExpRat \xrightarrow{Thompson} \mathcal{A}, \mathcal{L}(\mathcal{A}) = L \xrightarrow{Dét+complet} \mathcal{A}'$→ Changement d'état initial $\cong u^{-1}L$
   $BMC \downarrow u^{-1}L$ Rationnel.

Exercice 3 : Calculer l'automate des résiduels des langages suivants.

- L_1, l'ensemble des mots de taille ≥ 21 sur l'alphabet $\{a, b\}$ dont la première et la dernière lettre sont égales.
  $L_1 = a(ab)^*a + b(a+b)^*b$.
  - $a^{-1}L = a^{-1}(a(ab)^*a + b(a+b)^*b) = a^{-1}(a(a+b)^*a) + a^{-1}(b(a+b)^*b)$
    $= (a+b)^*a$
    - $a^{-1}(a^{-1}L_1) = a^{-1}((a+b)^*a) = a^{-1}(a+b)^*a + a^{-1}a$
      $= a^{-1}(a+b)(a+b)^*a + \varepsilon$
      $= (a+b)^*a + \varepsilon$
      - $a^{-1}((aa)^{-1}L_1) = a^{-1}((a+b)^*a + \varepsilon)$
        $= (a+b)^*a + \varepsilon = (aa)^{-1}L$
      - $b^{-1}((aa)^{-1}L_1) = b^{-1}((a+b)^*a + \varepsilon)$
        $= (a+b)^*a = a^{-1}L$.
    - $b^{-1}(a^{-1}L_1) = b^{-1}((a+b)^*a) = b^{-1}(a+b)(a+b)^*a + b^{-1}a$
      $= (a+b)^*a = a^{-1}L_1$
  - $b^{-1}L = (a+b)^*b$. Par symétrie, on a :
    - $a^{-1}(b^{-1}L_1) = b^{-1}L_1$
    - $b^{-1}(b^{-1}L_1) = (a+b)^*b + \varepsilon$
      - $a^{-1}((bb)^{-1}L_1) = b^{-1}L_1$
      - $b^{-1}((bb)^{-1}L_1) = (bb)^{-1}L_1$.

Exercice 5 : Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.
Pour chacune des relations, dire si elle est réflexive, symétrique ou transitive.

- $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$
  Pas réflexive car on n'a pas $(3,3)$.
  Symétrique et Transitive.
- $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,3)\}$
  Réflexive, symétrique
  Pas transitive, $(2,1)$ et $(1,3)$ mais pas $(2,3)$.
- $R_3 = \{1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
  Réflexive, symétrique et transitive.
- $R_4 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$
  Pas réflexive, symétrique
  Pas transitive car $(1,2)$ et $(2,1)$ mais pas $(1,1)$.

Exercice 6 : Parmi les relations suivantes sur Σ^*, lesquelles sont des relations d'équivalences ?

- R_5 : Pas réflexive $w = ab$.
- R_6 : Relation d'équivalence
- R_7 : Relation d'équivalence
- R_8 : Pas transitive car $aR\varepsilon$ et εRb mais pas aRb.
- R_9 : Pas réflexive car $\varepsilon R\varepsilon$.

TD9

Exercice 1 : Soit $L_1 = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = 0 \; mod \; 5\}$. Indiquer le(s) mots que les sépare(nt).

1) $(aaababb, baabbaaa)$
   a. ba : oui car $aaababbba \in L_1$ mais $baabbaaaba \notin L$
   b. $bbabaaaabb$: oui car $aaababbbbabaaaabb \notin L$ mais $baabbaaabbabaaaabb$
   c. Oui
   d. Non
   e. Non
2) (aaa, ε)
   a. Non
   b. Oui
   c. Non
   d. Non
   e. Oui
3) $(bab, baab)$:
   a. Non
   b. Non
   c. Non
   d. Oui
   e. Non

Exercice 2 : $L_2 = a(aa+bb)^*b$

1) Calculer l'automate des résiduels de L_2 :
$a^{-1}L_2 = (aa+bb)^*b$ et $b^{-1}L_2 = \emptyset$
$(aa)^{-1}L_2 = a^{-1}(a^{-1}L_2) = a^{-1}[(aa+bb)^*b] = a^{-1}(aa+bb)^*b \cup a^{-1}b$
$= a^{-1}(aa+bb)(aa+bb)^*b = a(aa+bb)^*b = L_2$
$(ab)^{-1}L_2 = b(aa+bb)^*b + \varepsilon$
$(aba)^{-1} = \emptyset$
$(abb)^{-1} = b^{-1}((ab)^{-1}L_2) = (aa+bb)^*b = a^{-1}L_2.$
Feuille.
2) Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies ?
Numéro vrai : 2), 3), 6), 8)
3) Quel est le langage $[ab]_{\sim_{L_2}}$? Même question pour $[\varepsilon]_{\sim_{L_2}}$, $[a]_{\sim_{L_2}}$, $[b]_{\sim_{L_2}}$.
$[ab]_{\sim\_L_2} = L_2$; $[\varepsilon]_{\sim_{L_2}}$; $[a]_{\sim_{L_2}} = a(aa+bb)^*$;
$[b]_{\sim_{L_2}} = a(aa+bb)^*ba(ba(a+b)^* + a(aa+bb)^*ba(a+b)^*$.

Exercice 3 : Soit L_3 le langage $\{a^nb^n \mid 0 \le n \le 3\}$

1) Définir un automate déterministe complet A_3 acceptant L_3.
Feuille
2) Décrire les classes d'équivalence de $\sim_{A_3}$ par des expressions rationnelles.
$[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$; $[a] = \{a\}$; $[aa] = \{aa\}$; $[aaa] = \{aaa\}$; $[ab] = \{ab + a^2b^2 + a^3b^3\}$;
$[aab] = \{a^2b + a^3b^2\}$; $[aaab] = \{a^3b\}$;
$[aaaa] = \{\left(a^4 + (a^3ba + a^2ba + a^3 + b^2a)(a+b)\right)(a+b)^*\}$
$[b] = (b + ab + a^2b^2 + a^3b^3)(a+b)^*$

TD10

Exercice 1 : Soit L_1 le langage des mots u sur $\{a,b\}$ vérifiant $4|u|_a + 3|u|_b \equiv 4 \; mod \; 5$. Lesquels des ensembles suivants donnent exactement un représentant pour chaque classe de $\sim_{L_1}$.

- $\{bbb, aab, bbbb, aaaaa, \varepsilon\}$:
  - $bbb = 4 \; mod \; 5$;
  - $aab = 1 \; mod \; 5$;
  - $bbbb = 2 \; mod \; 5$;
  - $aaaaa = 0 \; mod \; 5$;
  - $\varepsilon = 0 \; mod \; 5$;

  Donc non car $[3]_{L_1}$ n'est pas représenter.
- $\{b, bbb, abb, aabb, aaaaa, aaabbb\}$:
  Non car il y a 6 éléments pour un langage de 5 classes d'équivalence.
- $\{bb, aa, abb, aabb, aaaabb\}$:

- $bb = 1 \, mod \, 5$;
- $aa = 3 \, mod \, 5$;
- $abb = 0 \, mod \, 5$;
- $aabb = 4 \, mod \, 5$
- $aaaabb = 2 \, mod \, 5$.

Donc il a bien un représentant de chaque classe de L_1.

- $\{aaa, aaaa, aabb, aaaab, aaaabb, \varepsilon\}$:

Non car trop d'élément

Exercice 2 : $L_2 = \{ua^{2n}v \mid u, v \in \{a, b\}^n\}$.

1. Donner un mot permettant de séparer les mots b et bb.

   Prenons $w = aab$. On a $bw = baab \in L_2$ mais $bbw = bbaab \notin L_2$.
2. Pour $i < j$, donner un mot permettant de séparer les mots b^i et b^j.

   Prenons $w = a^{2i}b^i$. On a $b^i w = b^i a^{2i} b^i \in L_2$ mais $b^j w = b^j a^{2i} b^i \notin L_2$.
3. Combien la relation $\sim_{L_2}$ a-t-elle de classe d'équivalence.

   Donc les mots de la forme b^i se trouvent chacun dans une classe différente, il existe donc un nombre infini de classes $\Rightarrow L_2$ n'est pas rationnel.

Exercice 3 : L_3 le langage des palindromes sur Σ.
Montrer que $x \sim_{L_3} y \Rightarrow x = y$: chaque classe de $\sim_{L_3}$ est un singleton.
On pourra raisonner sur deux cas : $|x| = |y|$ et $|x| > |y|$.

De façon équivalente, $y \neq v \Rightarrow \exists \, w$ qui sépare u et v.

- Si $|u| = |v|$: On pose $w = \tilde{u}$. On a $uw = u\tilde{u} \in L_3$ mais $vw = v\tilde{u} \notin L_3$ car $u \neq v$.
- Si $|u| < |v|$: Soit x une lettre de l'alphabet à la position $|u| + 1$.

  On sait que $\exists \, y \in \Sigma$ tel que $y \neq x$. Si on pose $w = y\tilde{u}$.

  On a $uw \in L_3$ mais $vw \notin L_3$ car $x \neq y$ aux 2 positions opposés.

TD11

Exercice 1 : Minimiser les deux automates ci-dessous avec l'algorithme de Moore et en déduire s'ils reconnaissent le même langage.

- 6 et 7 non accessibles.

  Donc la partition initiale est $\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{5\}$:
  - Séparation par a : $\{0, 1, 3\}, \{2, 4\}\{5\}$;
  - Séparation par b : $\{0, 1\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{5\}$;
  - Séparation par a : $\{0\}, \{1\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{5\}$.
- Partition initiale : $\{6, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - Séparation par a : $\{6, 7\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$;
  - Séparation par a : $\{6, 7\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}$;
  - Séparation par a : $\{6, 7\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$.

Exercice 2 : En utilisant le théorème de Myhill Nerode, montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels.

- $L_1 = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a \leq |u|_b\}$:
  On choisit $u_i = b^i$. Soit $i < j$. Le mot a^j les sépare : $u_i a^j = b^i a^j \notin L_1$ et $u_j a^j = b^j a^j \in L_1$.
  Donc $b^i \nsim b^j$.
- $L_2 = \{(ab)^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:
  On choisit $u_i = (ab)^i$. Soit $i < j$. Le mot a^j les sépare $u_i a^j \notin L_2$ et $u_j a^j \in L_2$.
  Donc $(ab)^i \nsim (ab)^j$.
- $L_3 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$:
  On choisit $u_i = a^{2^i}$. Soit $i < j$. Le mot a^{2^i} les sépare $u_i a^{2^i} = a^{2 \cdot 2^i} = a^{2^{i+1}} \in L_3$
  mais $u_j a^{2^i} = a^{2^j + 2^i} = a^{2^i(2^{j-i}+1)} \notin L_3$.
  Donc $a^{2^i} \nsim a^{2^j}$.
- $L_4 = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$:
  On choisit $u_i = a^{i!}$. Soit $i < j$. Le mot $a^{(i+1)!-i!}$ les sépare $u_i a^{(i+1)!-i!} = a^{(i+1)!} \in L_4$
  mais $u_j a^{(i+1)!-i!} = a^{(i+1)!+j!-i!}$
  $= a^{j!+ii!}$.
- $L_7 = \{u \in \{0,1,2\}^* \mid |u|_{01} = |u|_{10}\}$:
  Choisit $u_n = (102)^n$. Soit $m \neq n$, Le mot $(012)^n$ les sépares $(102)^n(012)^n \in L$
  mais $(102)^m(012)^n \notin L$.
- $L_8 = \{u \in \{0,1\}^* \mid |u|_{0011} = |u|_{1100}\}$:
  $u_n = (001101)^n$ et on sépare par $(101100)^n$.

TD12

Exercice 1 : Pour les 2 automates, calculer les automates obtenues par les trois méthodes suivantes et comparez-les :

- Automate 1 :
  - Minimisation de Moore : $\{0,2\},\{1,3\}$
    a et b ne sépare rien donc on a cette partition
  - BMC et résiduels :
    - Langage de BMC : $b(ab)^*$;
    - Automate des résiduels :
      $a^{-1}(b(ab)^*) = \emptyset$; $b^{-1}(b(ab)^*) = (ab)^*$;
      $a^{-1}(ab)^* = b(ab)^*$; $b^{-1}(ab)^* = \emptyset$.

  Feuille
- Automate 2 : Déjà minimal :
  - $\det\Big(mir\big(\det(mir(A))\big)\Big)$: Va nous donner la même chose.
  - Minimisation de Moore :
    $\{0\},\{1,2,3\}$
    a sépare 1 de 2, 3 : $\{0\},\{1\},\{2,3\}$
    b sépare 3 de 2 : $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}$.

Donc la partition est déjà raffinée par le nombre d'état de

- <u>BMC et Résiduels</u> :
    - Langage de BMC : $L = \left(bb + aa + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)\right)^*$
    - Résiduels :

      $a^{-1}L = \left(a + b(aa + bb)^*(ab + ba)\right)L$; $b^{-1} = \left(b + a(aa + bb)^*(ab + ba)\right)L$

      $(aa)^{-1}L = L$; $(bb)^{-1}L = L$;

      $b^{-1}(a^{-1}L) = \left((aa + bb)^*(ab + ba)\right)L$; $a^{-1}(b^{-1}L) = (aa + bb)^*(ab + ba)L.$

<u>Exercice 2 :</u>

1. $R_1R_2R_3$;
2. Pour enlever « sauter », il faudrait mettre ça $"sauter"\ \{\ \}$ avant celui de R_3
3. Non car les mots sont tous différents