TD n°9

Relation d'équivalence induite par un langage et révisions

Rappel : Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage. La relation $\sim_L$ sur Σ^* est définie par

$$x \sim_L y \text{ ssi } \forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$$

On rappelle aussi que si x, y et w sont des mots, alors on dit que w sépare x et y par rapport à L si

$$(xw \in L \quad \text{et} \quad yw \notin L) \qquad \text{ou} \qquad (xw \notin L \quad \text{et} \quad yw \in L)$$

Autrement dit, w sépare x et y par rapport à L si l'un des deux mots xw et yw est dans L tandis que l'autre n'y est pas. Ainsi

$$x \sim_L y \qquad \text{ssi} \qquad \text{aucun mot ne sépare } x \text{ et } y$$

Exercice 1 *Soit $\mathcal{L}_1$ le langage des mots u sur $\{a, b\}$ tels que $|u|_a$ est un multiple de 5. Les mots des paires suivantes ne sont pas $\sim_{\mathcal{L}_1}$-équivalents. Indiquer le(s) mot(s) qui les sépare(nt).*

		•	ba
$(aaababb, baabbaaa)$	•	•	$bbabaaaabb$
(aaa, ε)	•	•	a
$(bab, baab)$	•	•	$aaaba$
		•	aba

Exercice 2 *On considère le langage $\mathcal{L}_2 = a(aa + bb)^*b$.*

1. *Calculer l'automate des résiduels de $\mathcal{L}_2$.*
2. *Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies ?*

(1) $a \sim_{\mathcal{L}_2} b$	(3) $a \sim_{\mathcal{L}_2} abb$	(5) $abba \sim_{\mathcal{L}_2} aaab$	(7) $abbaabba \sim_{\mathcal{L}_2} a$
(2) $\varepsilon \sim_{\mathcal{L}_2} aa$	(4) $\varepsilon \sim_{\mathcal{L}_2} bb$	(6) $aba \sim_{\mathcal{L}_2} bb$	(8) $ab \sim_{\mathcal{L}_2} aaabbb$

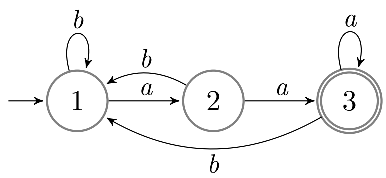
3. *On appelle la classe d'équivalence de u l'ensemble défini par $[u]_{\sim_{\mathcal{L}_2}} = \{w \in \Sigma^* \mid w \sim_{\mathcal{L}_2} u\}$. Quel est le langage $[ab]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$? Même question pour $[\varepsilon]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$, $[a]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$ et $[b]_{\sim_{\mathcal{L}_2}}$.*

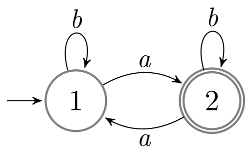
Exercice 3 *Soit $\mathcal{L}_3$ le langage $\{a^n b^n \mid 0 \leq n \leq 3\}$.*

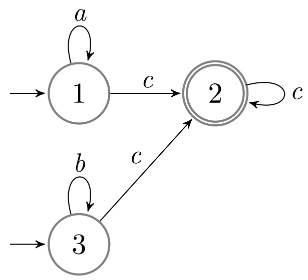
1. *Définir un automate déterministe complet $\mathcal{A}_3$ acceptant $\mathcal{L}_3$.*
2. *Décrire les classes d'équivalence de $\sim_{\mathcal{A}_3}$ par des expressions rationnelles.*
3. *Combien classes d'équivalence a $\sim_{\mathcal{A}_3}$? Que peut-on en déduire en rapport avec le nombre de classes d'équivalence de $\sim_{\mathcal{L}_3}$?*

Révisions : Les exercices suivants permettent de réviser les exercices classiques des derniers TD. Il ne sont pas à finir entièrement durant la séance, et ne se substituent pas à une révision du cours, mais permettent d'assurer par la pratique une efficacité de rédaction.

Exercice 4 (Révisions - BMC) *Pour chacun des automates suivants, calculer une formule rationnelle du langage grâce à l'algorithme de Brzozowski et McCluskey. Vous éliminerez les états dans l'ordre crosisant et décroissant, puis comparerez les deux formules obtenues.*







Exercice 5 (Révisions - Arden) *Construire et résoudre le système d'équation associé à chacun des automates de l'Exercice 4, en spécifiant exactement l'ordre des opérations* $\mathbf{sub}(i, j)$ *et* $\mathbf{ard}(i)$ *que vous utiliserez.*

Exercice 6 (Révisions - Lemme de l'étoile) *Chacun des langages suivants n'est pas rationnel. Donnez-en une preuve utilisant le lemme de l'étoile :*

1. $\{a^n b^m c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^{2n} b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{uv \mid |u| = |v|,\ u \textit{ commence par } a \textit{ et } v \textit{ commence par } b\}$
4. $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 7 (Révisions - Résiduels) *Pour les langages suivants sur l'alphabet* $\{a, b\}$*, donnez :*

a) l'automate des résiduels,
b) toutes les classes d'équivalences

1. $L_1 = a(a + b)^*$
2. $L_2 = (a + b)^* a$
3. $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \textit{ est pair }\}$
4. *Le langage* L_5 *des mots de longueur au moins* 2 *sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *pour lesquels la première lettre et la dernière lettre sont différentes.*
5. $L_5 = a^+ b^+$