Université Paris Cité – UFR d'Informatique
L2 Informatique, Math-Info, Bio-Info, Japonais-Info

Automates et analyse lexicale
Année 2025–2026

TD n°2

Expressions rationnelles et automates

Exercice 1 (Langage d'une expression rationnelle) *Soit L le langage exprimé par l'expression rationnelle $a^*(ab+ba)^*b^+$. Donner :*

1. *les mots de L de longueur 4 ;*
2. *les mots de L de longueur 5 et commençant par b ;*
3. *les quatre mots les plus courts qui ne sont pas dans L.*

Exercice 2 (Écriture d'expressions rationnelles) *Donner des expressions rationnelles décrivant les langages ci-dessous, sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:*

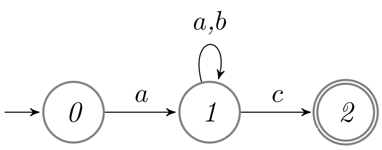
1. *les mots contenant le facteur aa ;*
2. *les mots ne contenant pas le facteur ab ;*
3. *les mots ne contenant pas le facteur aa ;*
4. *($*$) les mots ne contenant pas le facteur aba ;*
5. *les mots contenant le même nombre de a que de b.*

Exercice 3 (Équivalences d'expressions) *Dans cet énoncé, a et b désignent des lettres.*

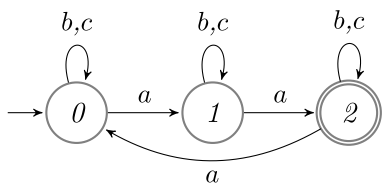
1. *Simplifier les expressions rationnelles suivantes :*
   (a) $(aa)^*a + (aa)^*$;
   (b) $(a+\varepsilon)a^*b$;
   (c) $(a+\varepsilon)(\varepsilon+aa)^+a$.
2. *Montrer les égalités suivantes :*
   (a) $(a^2+a^3)^* = a^2a^* + \varepsilon$;
   (b) $a^*(a+b)^* = (a+ba^*)^*$;

Exercice 4 (Automates) *Soient les deux automates ci-dessous :*

$\mathcal{A}_1$:



$\mathcal{A}_2$:



1. *Donner, pour chacun d'entre eux : son ensemble d'états, ses états initiaux/acceptants, et sa fonction de transition.*
2. *Les mots abc, $abbbc$ et $abacabcc$ sont-ils reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$? Sont-ils reconnus par l'automate $\mathcal{A}_2$?*
3. *Décrire les langages reconnus par ces automates, (a) en français, et (b) avec une expression rationnelle.*

Exercice 5 (Écriture d'automates) *Pour chacun des langages suivants, dessiner un automate déterministe le reconnaissant.*

1. *Le langage* $\{car, bar, or\}$ *(faire en sorte qu'il y ait le moins possible d'états).*
2. *Le langage des mots de longueur paire sur l'alphabet* $\{a\}$.
3. *Le langage des mots sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *qui contiennent un nombre pair de* a *et un nombre impair de* b.
4. *(∗) Le langage donné par l'expression rationnelle* $a^*(\varepsilon + b)c^*$.

Exercice 6 (Binaire) *Dans cet exercice, on considère l'alphabet* $\Sigma = \{0, 1\}$. *Montrer que les langages suivants sont reconnaissables en donnant pour chacun un automate le reconnaissant. Pour cet exercice, une représentation binaire d'un nombre commence avec le bit de poids fort, et se termine sur le bit de poids faible : par exemple,* 001100 *et* 1100 *sont des représentations binaires du nombre douze.*

$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ *est la représentation binaire d'une puissance de 2*$\}$,

$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ *est la représentation binaire d'un multiple de 4*$\}$,

(∗) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ *est la représentation binaire d'un multiple de 3*$\}$.