

Catalan number.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cn	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

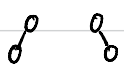
$$C_n(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

用 树 的角度理解 Catalan number — tree aspect

n cn 给定一个有 n 个结点的树, 求它有多少种形态,
= 叉 (每个结点最多 2 个子树)

n=0 ϕ 1

n=1 0 1

n=2  2 固定 1 个为 root, 剩下 1 个, 可放左, 可放右.

n=3 固定 1 个为 root 0, 剩下 2 个自由 node.

left = 0, right = 2 $C_n(0) \times C_n(2) = 2$

left = 1, right = 1 $C_n(1) \times C_n(1) = 1$

left = 2, right = 0 $C_n(2) \times C_n(0) = 2$

+ = 5

$$\Rightarrow C_n(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n(k) C_n(n-1-k) \text{ 递归公式.}$$

$$C_n(n) = \frac{4n-2}{n+1} C_n(n-1) \text{ 递推公式.}$$

$$C_n(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 \text{ 通项公式.}$$