

多牛过河问题算法及最优性证明

原创 吴鑫健 LOA算法学习笔记 2021-01-06 14:54

01 问题描述

鲍勃有N头牛需要赶到河对岸去，其中每头牛的过河时间分别为 t_1, t_2, \dots, t_n ，河里同一时刻最多容纳2头牛而且鲍勃骑在一头牛身上一起过河。求解鲍勃将所有的牛都赶过河所需要的最短时间。

02 解决方案

2.1 算法描述

为了便于分析，假设首先已经对每头牛的过河时间做了不降序排列，排列顺序为 T_1, T_2, \dots, T_n

分别考虑以下case：

- 1) 最简单的，当 $N=1$ 或者 $N=2$ ，只需要一次穿越河流，所需要的时间为 T_1 或者 T_2 ；
- 2) 当 $N=3$ ，最优解法为先把最快的2头牛赶过去，再赶最快的一头牛回来一起把剩下的第三头牛赶过去，所需要的时间为 $T_1 + T_2 + T_3$ ；
- 3) 当 $N=4$ ，此时需要对2种可能的最优方案进行对比，进一步得到最终的最优方案。**方案一是每次选最快的牛和最慢的牛一起过河，然后骑最快的牛返回（这套方案贪的是最快回来时间）**，最后把最快的2头牛赶过去，这种方案所需的总时间为 $2T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ ；**方案二是选最快的2牛过河，骑最快牛回来，再赶剩下的2头最慢牛过河，骑第二快的牛回（这套方案贪得是节省次慢牛过河的时间）**，最后再把这2头最快牛赶过去，这种方案所需的总时间为 $T_1 + 3T_2 + T_4$ ；可以看到这2种贪心方案是无法同时满足的，最终应该选择的方案由 $\min\{T_1 + T_3, 2T_2\}$ 结果给出。
- 4) 当 $N > 4$ ，考虑贪心算法，每次决策都只看 T_1, T_2, T_{N-1}, T_N 这4头牛，考虑到2种方案中最后一步都是赶 T_1, T_2 这2头最快牛过河，这一步如果不执行，相当于每次其实是赶了最慢的2头牛过去，从而将原问题转化为 T_1, T_2, \dots, T_{N-2} 这样的子问题。重复如上迭代过程最终只会剩下4头牛或者3头牛，即前面分析过的2种情况，所以本问题得到了解决。

2.2 正确性证明

想证明本算法是最优的，主要难点是在于 $N > 4$ 的时候，为什么每次选择最快的2牛和最慢的2牛来考虑是最优的，下面给出证明：

按照本算法，事实上是可以得到总过河时间如下：

$$T_{min} = \sum_{k=2}^m \min\{2T_1 + T_{2k-1} + T_{2k}, T_1 + 2T_2 + T_{2k}\} + T_2, \quad n = 2m$$

$$T_{min} = \sum_{k=2}^m \min\{2T_1 + T_{2k} + T_{2k+1}, T_1 + 2T_2 + T_{2k+1}\} + T_1 + T_2 + T_3, \quad n = 2m + 1$$

现在欲证本解即为整个问题的最优解，这里根据N的奇偶性分了2种情况讨论，影响的是最后一次是赶4头牛还是3头牛过河，不影响前面的选择除最快的2牛之外的其他2牛的策略，所以只需证明前面的求和这一块是最优解即可。

观察求和的每一个子项，由于我的策略每次都是选择最快2牛+最慢2牛的组合，以N为偶数的情况为例（事实上奇数情况同理），表达式是：

$$\min\{2T_1 + T_{2k-1} + T_{2k}, T_1 + 2T_2 + T_{2k}\}$$

首先说明一下为什么每次的选择都有最快2牛，其根本原因在于每次运了2头最慢牛过去后，2头最快牛都在河这边，这2头牛其实就是鲍勃的“工具牛”，易知选最快的2牛做为“工具牛”是最优的（不妨反证法，把上式中的 T_1, T_2 换成任意

其他2头牛的过河时间对总时间来说都是负优化）。

然后解释为什么每次选最慢2牛，不妨考虑最快2牛+任意2头其他的牛这种情况，表达式即为：

$$\min\{2T_1 + T_i + T_j, T_1 + 2T_2 + T_j\}, i < j$$

考虑一般性，即参考上式，其实比较的都是N=4时的方案一和方案二的时间，有以下2种情况：

- 如果每一子项中方案一（**每次选最快的牛和最慢的牛一起过河，然后骑最快的牛返回**）时间最短，那么其实如何选择除最快的2牛之外的其他牛用时都是一样的，**相当于每头牛都是单独带着最快的牛过了趟河**，本方案给出的最优解依然是最优解；
 - 如果有一个子项中方案二用时最短，那么这时候就要注意到方案二（**选最快的2头牛过河，骑最快的牛回来，再赶剩下的2头最慢的牛过河，骑第二快的牛回来**）的本质了，其本质是省的**次慢牛单独过河的时间，最慢牛是一定要过河的，其过河时间是无法节省**，如果和最慢牛搭配的不是次慢牛，此时次慢牛就成了余下牛群中的最慢牛，总用时必然会比本方案要长，这是为什么每次都让最快2牛+最慢2牛一起考虑的原因；
- 类似于反证法的思路证明了本算法的最优性。

03 小结

写到这里感觉可以用更精炼的语言小结一下：

第一点，最慢牛是一定要过河的；

第二点，最慢牛和次慢牛一起送过去对节省总的过河时间来说是最优的；

第三点，为啥每次都从最慢牛开始考虑呢，其原因其实基于上面2点，如果先把最慢牛扔在一边考虑其他牛，相当于打乱了最初的排序，破坏了整体结构，无法严格做到每次都节省次慢牛的过河时间；

每次决策考虑当前的最优解法且不要求解出所有的子问题最优解，体现了贪心算法的思想。

以上，如有错漏恳请指正！

喜欢此内容的人还喜欢

LOA公众号关闭通知

LOA算法学习笔记



新冠病毒疫苗接种情况

健康中国



『千家诗会·第141期』片叶飘飞即是诗

千家诗词

