

整数线性规划之律师招募问题

原创 李雪婷 LOA算法学习笔记 2021-03-01 17:32



01 问题描述

此题出自线性规划作业。在大选结束后，懂王拒绝接受失败，故招募一批律师为他进行反对大选结果的法律诉讼。诉讼将在 N 个州展开，并且第 i 个州至少需要 L_i 名律师。设不同律师事务所的数量为 F ，第 j 个律师事务所的一名律师可以在某些州（以集合 S_j 表示）提供法律服务，其中第 j 个律师事务所的一名律师的雇佣费用为 C_j 。 S_j 是 $N=\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集，即 S_j 的并集等于 N 。

要求将上述问题形式转化为ILP问题，目标是在招募足够多的律师的前提下，尽可能地为懂王省钱。

02 解决方案

在线性模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划，即 ILP。对于线性规划问题，重点在于建立模型，把复杂的问题抽象化。

2.1 目标函数

题目要设计一个招募方案来确保花费最少来招够足够的律师，关键在于确定在第 j 个律师事务所招募的律师人数。所以，设在第 j 个律师事务所招募律师人数为 x_j ，其中 $x_j \in \mathbb{Z}$ ， $x_j \geq 0$ ， $j = 1, 2, \dots, F$ 。

故使得招募律师费用最小的目标函数为：

$$\min \sum_{j=1}^F C_j x_j$$

2.2 建立约束

由于第 j 个律师事务所的一名律师服务集合 S_j 里的州，并非涵盖所有州，所以可以定义一个指示函数来表示第 j 个律师事务所的一名律师是否为某个州提供法律服务。其中， $I_j(i)$ 表示第 j 个律师事务所是否为第 i 个州提供法律服务，若提供法律服务，值为1，反之为0。因此，指示函数可以表示为：

$$I_j(i) = \begin{cases} 1, & i \in S_j \\ 0, & i \in N - S_j \end{cases}$$

题目要求第*i*个州至少需要 L_i 名律师，即对于第*i*个州而言所有律师事务所提供的律师总数要大于等于 L_i ，由此建立约束：

$$\sum_{j=1}^F I_j(i) x_j \geq L_i \quad (i \in Z, i \in [1, N])$$

2.3 综上

通过分析题意确立所需每个变量的含义，由原始需求得到目标函数，定义对于目标函数的约束。综上所述得：

$$\min \sum_{j=1}^F c_j x_j$$

$$s. t. \quad \sum_{j=1}^F I_j(i) x_j \geq L_i \quad (i \in Z, i \in [1, N])$$

$$x_j \in Z, \quad x_j \geq 0, \quad (j \in Z, j \in [1, F])$$

$$I_j(i) = \begin{cases} 1, & i \in S_j \\ 0, & i \in N - S_j \end{cases}$$

03 总结

对于整数线性规划问题，决策变量要求为整数。可以先确立目标函数，准确定义变量，再添加约束。在初学这部分内容时，往往在变量的定义描述方面有一定困难，不知从何下手。题中定义了指示函数来表示是否为集合中的州提供法律服务，也可以将其用向量（由0和1组成的向量）表示，解法不唯一。如有谬误，还请指正。

LOA公众号关闭通知

LOA算法学习笔记



乐高2022年新款陆续发布，涉及漫威，哈利波特，星战，幻影忍者等！

MOCOZONE



海峡时评 | 增进交流合作是推动两岸关系和平发展的良方

今日台湾

