

切割卷纸问题

原创 郭帅辉 LOA算法学习笔记 2021-01-16 23:47

01 问题描述

假设你有一个工厂，负责加工不同宽度的卷纸提供给客户。你有无限的大卷卷纸作为原材料，每卷纸的宽度均为 W ，你可以对卷纸进行切割以满足客户的需求。有 m 个客户需要不同宽度的卷纸，其中客户 i 需要 b_i 卷宽度为 w_i 的卷纸。其中 $w_i \leq W$ 且 w_i 为正整数，如何能在满足客户需求的前提下消耗最少的原材料。

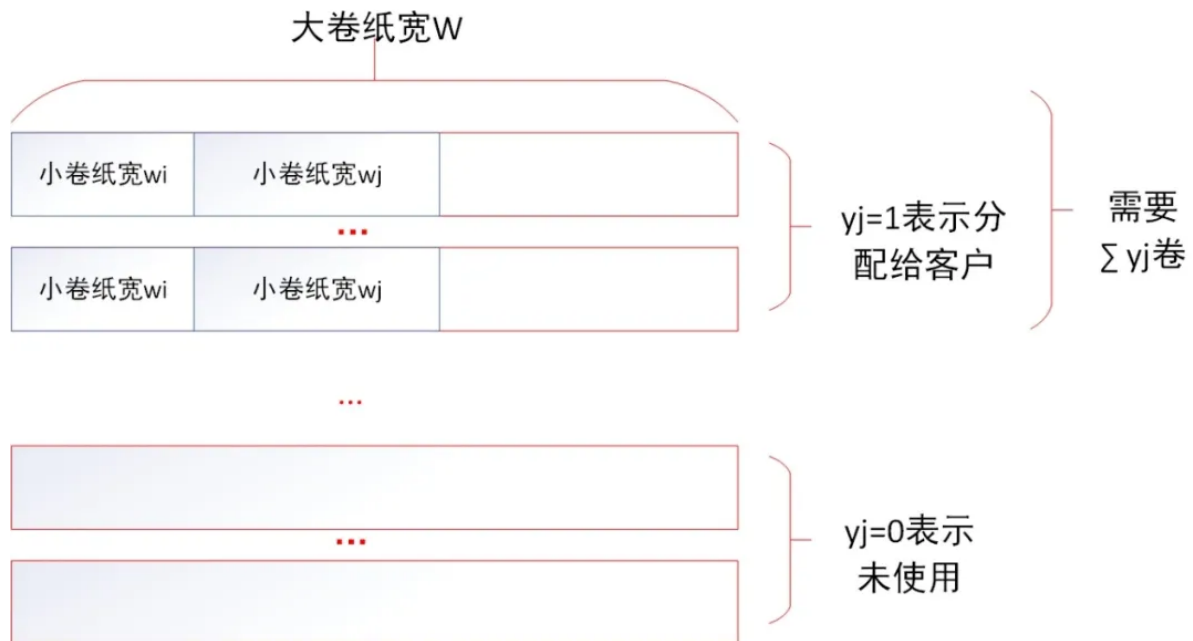
02 解决方法

这个问题我们可以从两个角度考虑，第一个角度是从客户需求考虑，第二个角度是从卷纸的切割方式考虑，因此存在两种解决方法。

- 法一：从客户的需求入手**
首先我们思考一种最简单的方式来满足客户需求，即对每一个客户提的一个需求都分配一个完整的大卷纸去满足它，共需 $\sum b_i$ 卷纸，为了方便，我们将这个数定义为 N 。这样显然能够满足客户需求，但也存在着严重的浪费，能不能进行优化？



我们知道在不进行切割的情况下，最多需要 N 卷大卷纸就可以满足需求，下面我们对这 N 卷纸进行切割来满足客户的需求，我们假设用 y_j 是否将这卷纸切割并提供给客户（我们把大卷纸直接提交给客户，看作是一种将大卷纸切割为宽度为 0 和 W 的特殊切割方式来满足用户需求），如果我们将这卷纸提供给客户， $y_j=1$ ，否则 $y_j=0$ 视为我们节约了一卷纸。



对大纸卷进行切割后，每卷纸能够同时满足多个客户的需求。我们假设在第j卷纸上给客户i提供了 x_{ij} 卷纸满足该客户的需求。我们可以建立相应的线性规划模型。

优化的目标：用于切割提供用户的大卷纸数最少。

约束条件1：满足所有客户的需求。

约束条件2: 每个大卷纸上切割提供给客户的总宽度不超过大卷纸本身宽度。

形式化表示线性规划模型：

优化目标:

$$\min \sum_{j=1}^N y_j$$

约束条件:

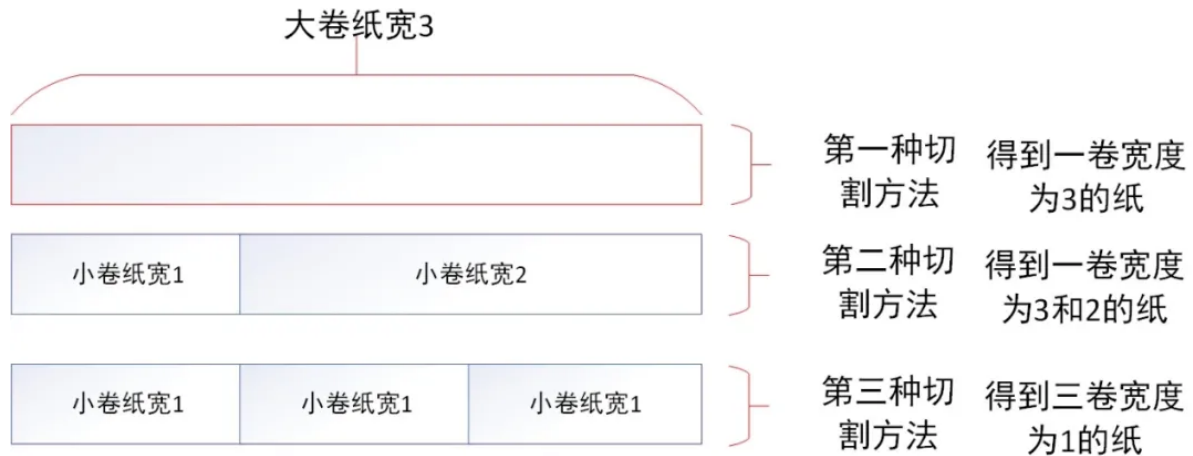
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N x_{ij} &\geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m (w_i * x_{ij}) &\leq W \quad j = 1, 2, \dots, N \\ x_{ij} &\in N \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, N \\ y_j &= 0 \quad or \quad 1 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

- **法二：从卷纸的切割方式入手**

从题目中我们知道客户需求的卷纸宽度总是整数，这也就意味着我们将卷纸进行切割后提供给客户的小卷纸也必定是整数，我们可以知道，对一卷宽度为整数W的卷纸切割成不同的整数宽度的小卷纸，切割方式总是有限的。以长度为3的卷纸为例。

1.切割成一卷纸（特殊的切割方式，实际没有切割）得到一卷长度为3的卷纸。

- 2.切割成两卷纸，从距左侧一米处开始切割，得到一卷长度为1和一卷长度为2的小卷纸。
- 3.切割成三卷纸，则我们可以每隔一米切割一次，得到三卷长度为1的小卷纸。



在规定了切割的小卷纸只能是正整数的前提下，长度为3的大卷纸只有这三种切割方式，第一种切割方式能够满足一卷宽度为3客户需求，第二种切割方式能够同时满足一卷宽度为1的客户需求，两卷宽度为1的客户需求。第三种切割方式能够同时满足三卷宽度为1的客户需求。

同样的，我们将这种方法推广，假设长度为W的大纸卷一共有n种切割方式，第j种切割方式可以满足客户i的 x_{ij} 卷纸的需求。用 y_j 来表示用第j种切割方式切分了几个大卷纸。

则问题的优化目标：各种切割方式使用大卷纸的总和最少。

约束条件一：各种切割方式得到的各种宽度小卷纸的数量总和能够满足客户的需求。

由于切割方式是我们预先定义好的，所以切割后小卷纸的宽度一定不超过大卷纸，约束条件二可以省去。

形式化表示线性规划模型：

优化目标：

$$\min \sum_{j=1}^n y_j$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^n (y_j * x_{ij}) \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_j \in N \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in N \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

03 总结

1.我们在建立线性规划模型时可以从两个方面考虑，一是从问题出发，思考如何满足客户的需求。二是从已知出发，想想我们有什么/能做到什么？应该如何对纸卷进行切分？

2.我们可以从最简单的模型出发，假设给每个客户的需求都分配一整卷纸，建立最简单的模型来满足客户的需求，然后优化模型，思考能否用一卷纸来满足客户的多个需求？

3.在客户需求的纸宽度是整数的前提下，我们对大卷纸的切割方式是有限的，我们也可以从大卷纸的切割方式入手，来思考如何满足客户的需求。

喜欢此内容的人还喜欢

LOA公众号关闭通知

LOA算法学习笔记





加州惊现全美首例Omicron确诊病例！患者曾到过南非，症状曝光！

美国房地产资讯





排名下滑"一哥"位置不保 丁俊晖目前斗志已成问题

台球教学



