

整数线性规划之UCAS换厨师问题

原创 张倩倩 LOA算法学习笔记 2021-12-07 23:19

01 问题描述

此题出自线性规划作业。有 N 个摊位要更换厨师，第 i 个摊位至少需要 n_i 个厨师，招聘公司的数量为 F 。第 j 家招聘公司的厨师可以在几个摊位上烹饪不同的食物，第 j 家招聘公司的一名厨师的招聘费用是 c_j 。

要求将上述问题形式转化为ILP问题，用最少的钱招足够多的厨师。

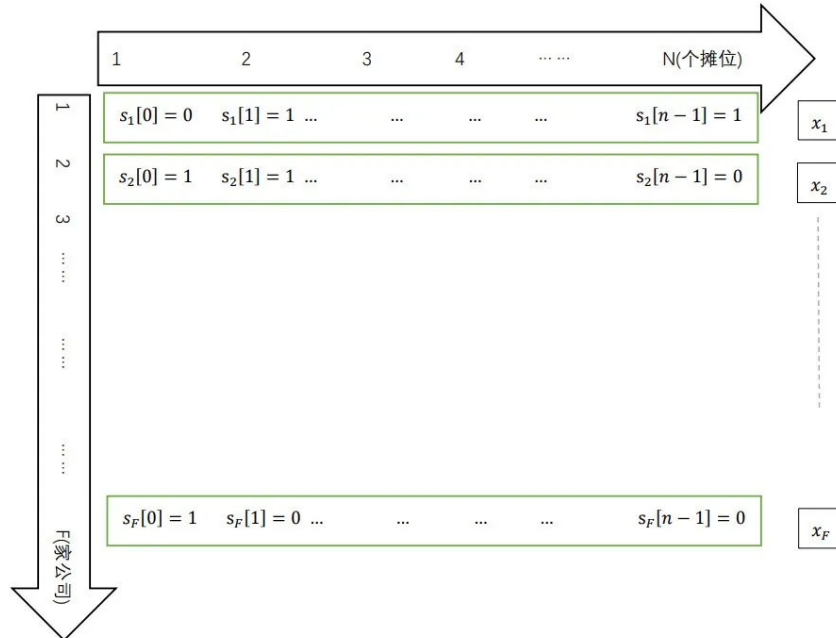
02 解决方案

本题需要给出一个招募方案，确定每一家公司招的厨师数量。为了更好的分析题目绘制如下分析图。共有 N 个摊位， F 家公司。招募第 j 家公司的厨师数量为 x_j , ($j = 1, 2 \dots F$) 并且 $(x_j \in \mathbb{Z}, x_j \geq 0)$ 。 $[P_j, T_j]$ 表示第 j 家招聘公司的厨师可以在几个摊位上烹饪不同的食物的范围。

同学们可能不能理解为什么厨子可以服务于不同的摊位，在这里给出解释：大家一定在UCAS食堂二楼吃过饭，那一定会发现某些窗口的菜品是一样的，但是每个窗口之间的菜品又不完全一样。所以你可以想象成是所有的厨子都在中央厨房炒菜，他们各自负责几个窗口的供菜。比如，厨师A负责窗口1、3、4的供应。厨师B负责2、5

窗口。每个窗口要保证有8道菜，A厨师负责1、3、4个窗口的西红柿炒鸡蛋和杏鲍菇炒肉2道菜。明显这3个窗口还需要6道菜，那么还要招厨师C和厨师D保证够8道菜。

所以要有“第 i 个摊位至少需要 n_i 个厨师”这个约束。



2.1 目标函数

我们的目标是用最少的钱招足够多的厨师以满足每个摊位的需求。假设招募第 j 家公司的厨师数量为 x_j , ($j = 1, 2 \dots F$) 并且 ($x_j \in \mathbb{Z}, x_j \geq 0$)。则目标函数为：

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_F x_F$$

2.2 建立约束

约束条件可以理解为有两个：

约束一：第 i 个摊位至少需要 n_i 个厨师。

约束二：第 j 家招聘公司的厨师可以在几个摊位烹饪不同的食物。

显然对每个摊位（列）厨师人数建立约束即可满足题意，为方便起见，定义以下函数：

$$\varphi_j(i) = \begin{cases} 1, & i \in Z \cap S_j \\ 0, & i \in Z \cap ([1, N] - S_j) \end{cases}$$

其中 j 表示公司类型， i 表示摊位的第 i 个， $\varphi_j(i)$ 表示第 j 家公司的厨师在第 i 个摊位是否提供服务。于是，每一个摊位厨师人数的约束表示为：

$$\sum_{j=1}^F x_j \varphi_j(i) \geq n_i, (i = 1, 2 \dots N)$$

2.3 综上

通过分析题意确立所需每个变量的含义，由原始需求得到目标函数，定义对于目标函数的约束。综上所述即可形式化为：

目标函数：

$$\min \sum_{j=1}^F c_j x_j$$

s.t.

$$x_j \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, F$$

$$\sum_{j=1}^F x_j \varphi_j(i) \geq n_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

其中

$$\varphi_j(i) = \begin{cases} 1, & i \in Z \cap S_j \\ 0, & i \in Z \cap ([1, N] - S_j) \end{cases}$$

j 表示公司类型， i 表示摊位的第 i 个，

$\varphi_j(i)$ 表示第 j 家公司的厨师在第 i 个摊位是否提供服务。

03 总结

求解线性规划问题时，可能用自然语言直接描述不好叙述，可以先根据题目画出分析图，就像本题给出的图片一样。也许读题时有些地方不理解（比如厨师可以服务多个摊位），没关系，先按照题目画出图片，画出来以后，就懂了，问题都是来源于生活的，生活经验会帮助你理解题目要表达的意思。另外就是ILP问题一定会用到0/1，如果你发现列出来的表达式中没有，那就可能有问题。

本文中通过设函数 $\varphi_j(i)$ ，第 j 家公司的厨师在第 i 个摊位提供服务，则 $\varphi_j(i)=1$ ，否则为 0。进而列出了约束条件。

解法不唯一。如有谬误，还请指正。

喜欢此内容的人还喜欢

北大最神博士论文：为什么学校打印店老板大多是湖南人？
深度学习初学者



四年制成主流，读一个博士到底要多少年？
草原蔡博士科研共享



读研比例最高的十二大专业，第一名依旧稳！ 读研比例最高的十二大专业，第一名依旧是它！
考研揭秘

