博弈论 硬币行（coins-in-a-line）游戏

原创 杨浩 LOA算法学习笔记 2021-01-24 19:45

01 问题描述

在硅谷的互联网公司面试中，经常会问到这个游戏，游戏是这样的：有偶数枚硬币排成一行，硬币来自不同的国家且具有不同的面值。两名玩家Alice和Bob轮流从剩余的硬币行的两端取走一个硬币。也就是说，当轮到一个玩家玩时，他或她取走硬币行左边或右边的硬币，并将硬币添加到他或她的收藏中。最后收集到总面值最大的玩家赢，假设Alice和Bob知道每枚硬币兑换为某种通用货币的价格，如美元。见下表：

硬币编号	1	2	3	4
可兑换的美元价格	$2	$11	$8	$1

假设你是Alice，并且是先手，请你设计一个使得自己收藏价值最大的策略。

02 解决方案

这个问题很容易想到**贪心**，每次选择两端价值最大的。

第一轮：　Alice $2　Bob $11

第二轮：　Alice $8　Bob $1

Alice的总收藏价值是$10，　Bob的总收藏价值是$12

但是假设Alice不用上述贪心策略，先取4号硬币，获得价值$1，Bob只能在1号和3号里面取，无论选择哪个，Alice最终将获得2号硬币，获得总价值$12。看来，贪心策略并非是个最优策略。

动态规划求解

硬币最初从1到n编号，由于Alice和Bob可以从两端取出硬币，合理的方法是用硬币行的索引区间定义子问题。因此定义以下索引参数：

$M_{i,j}$:在Bob使用最优策略的条件下，Alice在编号i到j硬币行取得的最大值。

因此，Alice的最优值是 $M_{1,n}$ 。

假设硬币的价值存储在一个数组V中，如第一枚硬币的价值是V[1]第二枚硬币的价值是V[2]，等等。要得到 $M_{i,j}$ 的递归定义，注意，给定包好从i到j的硬币行，Alice此刻选择是取硬币i或者硬币j，从而获得一个硬币面值V[i]或者V[j]。Alice一旦选定后，Bob使用最优策略选择。因此，他将在可能的取法中选择最大限度地减少Alice可以从剩下的硬币中获得的总金额。换言之，Alice必须根据下面的推理决策：

1) 如果j=i+1,那么她将取V[i]和V[j]中最大值，游戏结束。

2) 否则，如果Alice选择i号硬币，那么她获得的总金额是

$$\min\{M_{i+1,j-1}, M_{i+2,j}\} + V[i]$$

3) 否则，如果Alice选择了j号硬币，那么她获得的总金额是

$$\min\{M_{i,j-2}, M_{i+1,j-1}\} + V[j]$$

因为这里包含了Alice的所有决策，并且她试图最大化的自己获得价值，有的得到如下地推方程：

$$M_{i,j} = \max\{\min\{M_{i+1,j-1}, M_{i+2,j}\} + V[i], \min\{M_{i,j-2}, M_{i+1,j-1}\} + V[j]\}$$

其中j>i+1,j-i+1是偶数。

此外，对于i=1,2,...,n-1初始条件为 $M_{i,j+1} = max(V[i], V[i+1])$ ，从上述初始条件开始，然后计算j-i+1为4，6，8等等的所有 $M_{i,j}$ 。由于在该算法中有 $O(n)$ 次迭代，每次迭代在 $O(n)$ 时间内运行，所以该算法的总运行时间是 $O(n^2)$ 。

03 总结

我们看到贪心策略有时并不能得到最优解，如果贪心不行，尝试发现能否定义子问题，发掘其中的递归关系。上面的例子，如果Alice是后手，利用动态规划的方法，即使Alice失败，她能获得的价值也是所能获得的价值中最大。