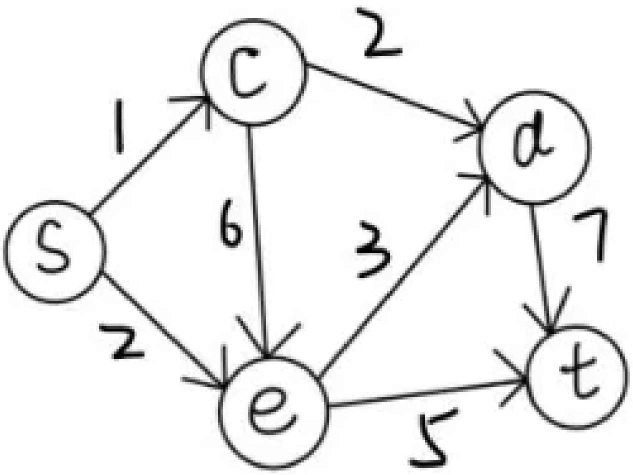
求有向图的单源最短路径——动态规划法

原创 韩倩倩 LOA算法学习笔记 2021-03-06 20:45

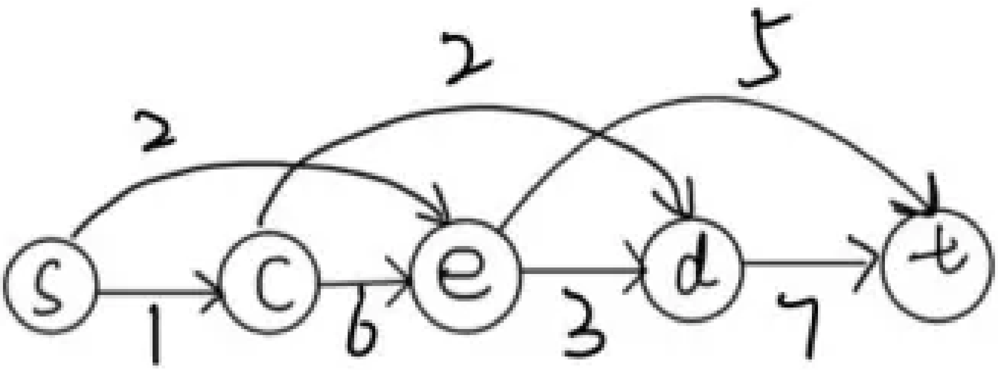
有向图的单源最短路径问题是图论中的一个经典问题，目的是求有向图中某一点到其他节点的最短路径，下面介绍如何运用动态规划法求解该问题。

01 有向无环图

对于有向无环图，可以先进行拓扑排序，使之线性化，再进行动态规划。拓扑排序就是将所有顶点排成一个顶点序列，使得每个顶点都在它的前驱顶点之后。



如上所示有向图G<V,E>，我们计算图中s点到其他节点的最短路径，先进行拓扑排序如下。



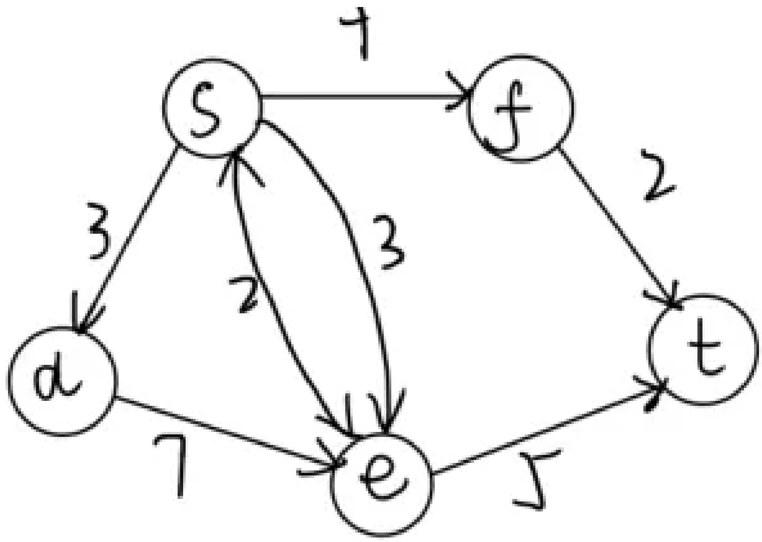
寻找该问题的子问题，可以看出，要想求s点到t点的最短路径，可以先求s点到d点的最短路径和s点到e点的最短路径，比较经过d点还是经过e点能使路径更短，同理，求s点到d点的最短路径，需要先求s点到e点的最短路径和s点到c点的最短路径，以此类推，直至遇到s点。

可以得出如下递推式：

$$d(v)=\begin{cases}0, v=s\\ \min\limits_{(u,v)\in E}\{d(u)+w(u,v)\}\end{cases}$$

02 一般有向图

一般有向图中如果存在环，会对最短路径造成影响。一般有向图中的环包括正环、负环和零环。如果是负环，显然不存在最短路径，每次经过负环都会减小路径长度，导致无限循环下去，最短路径为负无穷；如果存在正环，每次经过会增加路径长度，所以最短路径不会包含正环，无需考虑；如果存在零环，对最短路径没有什么影响，所以可以去掉。综上，我们在计算最短路径时，只需要考虑不超过n-1条边的、无重复顶点的简单路径即可。



如图所示，我们求该图中s点到其他顶点的最短路径。如果按与无环图同样的算法是无法计算的，要知道到s的最短路径，就要知道到e的最短路径，要知道到e的最短路径，就要知道到s的最短路径，这样就形成了死循环。

解决方法是定义更细的子问题，先考虑不存在负环的情况，引入一个新的变量 - 步数，每一步确定最短路径中的一条边，求s点到t点的最短路径、最多经过n-1步，它的子问题是，求s点到f点的最短路径、最多要经过n-2步，以及求s点到e点的最短路径，最多要经过n-2步，这样递推公式就是

$$d(v,k)=\min\{d(v,k-1),\min_{(u,v)\in E}\{d(u,k-1)+w(u,v)\}\}$$

那么如果存在负边呢？我们可以通过上述算法判断出来是否有负边，如果

$$d(v,n)<d(v,n-1)$$

那么说明对某些点来说，恰好有n条边使路径更得短，n条边意味着有环，路径变短，说明这是一个负环。

总结：运用动态规划求解，在寻找子问题时，如果遇到困难，可以将子问题细化，比如引入新的变量来定义子问题。