线性规划的建模方法

原创 吴洋 LOA算法学习笔记 2021-02-27 19:45

建模和求解是应用线性规划解决问题的重要步骤，当面对实际问题，首先需要做的就是对实际问题建模，接着再求解模型，得到结果。。如今，随着许多可以求解线性规划问题的软件包的成熟，线性规划模型的求解已经不再是难题，而建模的问题却没有得到很好的解决。由于实际生活中的问题种类繁多、约束和目标各不相同，所以建模的方法、技巧都并不统一。一般而言，面对实际生活中的问题，总是把它转变成对应的数学问题，用数学语言进行描述，得到问题的初步模型。但是初步模型常常不符合标准型的条件，无法直接求解，需要进一步改进模型。

1. 最大最小值或最小最大值

算法题中经常出现类似问题。例如，一个农夫有m头牛，n个隔间，隔间的坐标分别为x1,x2,...，xn，这些牛如果在一个隔间就会相互攻击，因此农夫希望把牛分的越远越好，即使得m头牛之间的最小距离尽可能大。

对问题进行简单建模可以得到如下目标:

$$\max \min_{i,j} |d_i - d_j|$$

其中，di，dj分别是第i、j头牛所在的隔间坐标。为了简化讨论，将i、j间的距离记为dij，得到:

$$\max \min_{i,j} d_{ij}$$

进一步改进模型以得到符合标准型的形式,记

$$u = \min d_{ij}$$

改写目标和约束。

max u

$$s.t\ \ u \le d_{ij}$$

2. 多选一约束

一台机器可以用原材料A,B生产物品。生产的原材料需求和产能与机器的运行模式有关。机器有两种不同的运行模式, 模式1下, 机器用2个A和3个B生产3个物品，如果处于模式1; 模式2下, 机器用1个A和1个B生产1个w。

我们假设原料的价格均是1, 在模式1下，会进150个两种材料，在模式2下会进50个两种材料。因此，问题存在两种不能同时共存的约束，需要在约束间选择其中一个。可以很容易的列出模式1和模式2的约束分别是2x+3y≤150,x+y≤50, 其中x是原料A的数量，y是原料B的数量。但因为模式不同，所以无法列入线性规划的条件中。

下面改进模型，引入0-1变量c, 和足够大的常数M。将上述两个式子合并成:

2x+3y≤150+cM

x+y≤ 50+(1-c)M

c∈{0,1}

通过控制变量c的取值实现不同模式间的转换，因为M足够大，当c=0时，x+y≤50+M实质上等价于没有约束，所以机器处于模式1; 同理，当c=1时，机器处于模式2。

3. 多选一约束

如果上例中还有模式3，满足约束3x+4y≤200，需要在三个模式中满足其中两个约束，可对2的方法进行改进，加入0-1控制变量c1,c2,c3。

2x+3y≤150+c1M

x+y≤ 50+c2M

3x+4y≤200+c3M

c1+c2+c3=1

c1,c2,c3∈{0,1}

通过控制变量c1,c2,c3的取值实现不同模式间的转换，当c1=1时，由于M足够大，所以2x+3y≤150+M实质上等价于没有约束，而c2,c3是0，其余约束仍起作用,所以机器处于模式2和3。

4. 分段线性函数

实际生活中，经常会遇到分段线性的函数。例如下式:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & 0\leq x\leq 1\\ 3x, & 1<x\leq 3\\ -x+12, & 3<x\leq 4\end{cases}$$

当分段线性函数作为约束时，不同的定义域对应着不同的约束，需要对分段线性函数进行改进，使得分段函数的描述符合标准型要求。下面将问题一般化，设n段线性函数f(x)的分割点从小到大依次为b0,b1,b2,...,bn,bn+1(其中b0=0)。注意到,f(x)是分段线性函数，任意x都可以用所在区间端点值a,b线性表示, 同时f(x)的值也可以由x所在区间端点的函数值线性表示。例如3.5是端点3,4的线性组合0.5x3+0.5x4, 其函数值8.5 = 0.5x(-3+12)+0.5x(-4+12)。基于上述性质，可以把x,f(x)用同一组系数表示。给f(x)的每个段[bk,bk+1]设置两个权值wk和wk+1。

同时，因为n个段在同一时间只能有1个段作为约束, 所以为每个段分配0-1控制参数c1,c2,...,cn。当ck=1时,x位于第k段，其他段的控制参数均是0，此时只有第k段的权值wk-1和wk非零。改进后的公式如下:

$$x=\sum_{k=1}^{n+1}w_kb_k, f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}w_kf(b_k)$$
$$w_1\leq c_1, w_2\leq c_1+c_2, \ldots, w_n\leq c_{n-1}+c_n, w_{n+1}\leq c_n$$
$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=1, c_k\in 0,1$$
$$w_1+w_2+\cdots+w_n+w_{n+1}=1, w_k\geq 0$$

至此，我们把分段线性函数用标准型的形式表示出来。

总结来看，线性规划的建模有很多技巧, 难以一一掌握,但是不同技巧的思想有共同之处，其中设置控制参数的方法不仅应用于多选一约束，也适用于分段函数的改写。在遇到实际问题时，需要根据问题的性质，巧妙的进行设计，得到适合的模型。