单纯型法求解线性规划问题并证明

原创 余孙婕 LOA算法学习笔记 2021-01-18 20:59

单纯形法求解线性规划问题的本质是选择某一个未达到最优的方向（即所谓**非基变量**），让它增大到这个变量的最优（图像上另一个**顶点**），通过这样不断地变换自然可以最终达到**最优**的那个顶点。

01 单纯形法求解线性规划问题

第一步：将线性规划方程转换为标准形

$$\max z = cx$$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

如何转化?

1. 目标函数极大化。

$$\max z = cx \rightarrow \max z = cx$$

$$\min z = cx \rightarrow \max z' = -z = -cx$$

2. 约束条件为等式

$$Ax \leq b \rightarrow Ax + x' = b, x' \geq 0$$

$$Ax \geq b \rightarrow Ax - x' = b, x' \geq 0$$

$$Ax = b \rightarrow Ax = b$$

3. 所有变量满足

$$x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$x \leq 0 \rightarrow x' = -x \geq 0$$

$$x \rightarrow x' \geq 0, x'' \geq 0 (x = x' - x'')$$

第二步：单纯形法求解

将相关数据填入到单纯形表中，如下所示：

c_j						
C_B 基变量对应系数	基变量	b	x_1	……	x_n	θ_i
$\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$ (检验数)						

当然，我们重点需要关注的是红框内的部分。单纯形法即更新单纯形表，更新单纯形表的规则如下：

1. 初始化单纯形表，确定基变量。
2. 找到 σ_j 中最大的正数，确定对应的 x_j 为换入变量，若不存在正数 σ_j ，则结束。
3. 计算 $\theta_i = \frac{b_j}{a_{ij}}$ ，找到 θ_i 中最小的正数，确定对应的基变量 x_i 为换出变量，若不存在正数 θ_i ，则该线性规划无最优解，结束。
4. 对 $(b \quad A)$ 矩形做行变换使得 $a_{ij} = 1, a_{kj} = 0(k \neq i)$ ，并替换基向量和对应系数。
5. 重新计算检验数 $\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$ ，重复2-5。

为了演示单纯形法求解线性规划问题，给出如下例题：

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

求解的动态演示过程如下所示：

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

c_j								
C_B 基变量对应系数	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_i
	x_4							
	x_5							
$\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$ (检验数)								

02 单纯形法求解线性规划问题证明

1. **定理准备**

单纯形法标准型如下(证明方便起见，目标函数定义为min，目标函数取极大极小本质是一样的)：

$$\min z = cx$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

将约束矩阵 $A = (B \quad N)$，其中B是方阵。

对应的 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$，则 $x^T = (x_B^T \quad x_N^T)$，因此 $c^T = (c_B^T \quad c_N^T)$

故Ax=b,即

$$(B \quad N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = B \cdot x_B + N \cdot x_N = b$$

故

$$x_B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot x_N$$

目标函数

$$Z = c^T x = \begin{pmatrix} c_B^T & c_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^T \cdot x_B + c_N^T \cdot x_N$$

代入 X_B 可得

$$Z = c_B^T \left(B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot x_N \right) + c_N^T \cdot x_N = c_B^T B^{-1} b - \left(c_B^T B^{-1} N - c_N^T \right) \cdot x_N$$

加0可得

令

代入得

因此原问题转化为

取非基向量部分为 $x_N = 0$，基向量部分为 $x_B = B^{-1}b$，则 $x^T = (B^{-1}b \quad 0)$ 为基解。

2. **定理一**：若 $\zeta \leq 0$，则 $\bar{x}$ 是最优解。

定理一本质证明了单纯形法求解的步骤二所得的x最优解。

任意一个 $x \geq 0$，且 $\zeta \leq 0$，那么 $\zeta^T \cdot x \leq 0$，则

$$Z = c_B^T B^{-1} b - \zeta^T x \geq c_B^T B^{-1} b$$

故原来的 $\bar{x}$ 就是最小值

3. **定理二**：若 ζ 的第k个分量 $\zeta_k > 0$，且 $\bar{A}_k = B^{-1} A_k \leq 0$，则该LP问题无界。这里 A_k 表示矩阵A的第k列。

定理二证明了单纯形法求解的步骤三无可行解。

设

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{（第 k 个分量为 1）}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} -\bar{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + e_k$$

$$x = \bar{x} + \theta \cdot \delta$$

$\bar{x}$ 是基可行解， $\bar{A}_k$ 是基可行解对应的约束矩阵， $\bar{x}$ 是基可行解。
则

$$Ax = b = A(\bar{x} + \theta \cdot \delta) = A\bar{x} + \theta \cdot A \cdot \delta$$

由于

$$A\delta = A\begin{pmatrix} -\bar{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + Ae_k = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -B^{-1}A_k \\ 0 \end{pmatrix} + A_k = 0\text{(其中题设}\bar{A}_k = B^{-1}A_k\text{)}$$

所以

$$Ax = A\bar{x} + \theta \cdot 0 = A\bar{x}$$

由于

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} > 0$$

代入目标函数有

$$
\begin{aligned}
Z &= c_B^T B^{-1} b - \zeta^T x = c_B^T B^{-1} b - \zeta^T (\overline{x} + \theta\delta) \\
&= c_B^T B^{-1} b - \theta \zeta^T \delta (\text{其中} \zeta^T \overline{x} = (0, \ldots) \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0) \\
&= c_B^T B^{-1} b - \theta \left(\zeta^T \begin{pmatrix} -B^{-1} A_k \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta^T e_k \right) (\text{其中} \delta = \begin{pmatrix} -B^{-1} A_k \\ 0 \end{pmatrix} + e_k \text{为自设}) \\
&= c_B^T B^{-1} b - \theta \zeta_k^T < c_B^T B^{-1} b (\text{其中} \theta > 0 \text{可为任意}, \zeta_k > 0)
\end{aligned}
$$

因此Z可以为 $-\infty$ ，即无界。

4. **定理三**：若 ζ 第k个分量 $\zeta_k > 0$ ，且 $\bar{A} = B^{-1} A_k$ 中存在正分量，则 $\exists \quad \hat{x} \geq 0$ ，使得 $A\hat{x} = b$ 且 $c^T \hat{x} < c^T \bar{x}$

   定理三证明了单纯形法步骤2-5仍有更优解。

设

$$
\delta = \begin{pmatrix} -\overline{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + e_k
$$

$$
\hat{x} = \overline{x} + \theta \cdot \delta
$$

其中 $\theta > 0$ 非任意。证法与定理二类似。

取 $\theta > 0$ 使得 $\hat{x}$ 为可行解，则

$$
A\delta = A \begin{pmatrix} -\overline{A}_k \\ 0 \end{pmatrix} + Ae_k = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-1} A_k \\ 0 \end{pmatrix} + A_k = 0 (\text{其中题设} \overline{A}_k = B^{-1} A_k)
$$

所以

$$
A\hat{x} = A\overline{x} + \theta \cdot 0 = A\overline{x}
$$

由于 $\hat{x} \geq 0$ ，因此

$$
\hat{x} = \overline{x} + \theta \cdot \delta = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \left(\begin{pmatrix} -B^{-1} A_k \\ 0 \end{pmatrix} + e_k \right) \geq 0
$$

也就是

$$
B^{-1} b - \theta B^{-1} A_k \geq 0
$$

设

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A_k = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \bar{a}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{pmatrix}$$

由 $\bar{b}_i - \theta\bar{a}_{ik} \geq 0$ 知，取

$$\theta = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \middle| \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

即可

$$\begin{aligned} Z &= c_B^T B^{-1}b - \zeta^T \hat{x} = c_B^T B^{-1}b - \zeta^T(\bar{x} + \theta\delta) \\ &= c_B^T B^{-1}b - \theta\zeta^T\delta = c_B^T B^{-1}b - \theta\left(\zeta^T \begin{pmatrix} -B^{-1}A_k \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta_k\right) \\ &= c_B^T B^{-1}b - \theta\zeta_k < c_B^T B^{-1}b(\text{其中}\,\theta > 0, \zeta_k > 0) \end{aligned}$$

由于 $\theta > 0$ 非任意，所以不能无限大。