

线性规划与最佳购物优惠券组合

原创 冯晓妍 LOA算法学习笔记 2021-02-17 19:15

卜老师在算法课上强调我们应该遵循“费曼路径法”，以教促学。在这个思想的鼓励下，我拼命地想，自己有什么有趣的或者好的主题可以去写出来和大家分享。感觉最有趣的问题还是和生活相关的问题。在当下这个电商发达的时代，加上大家生活在雁栖湖，又因学习繁忙，无暇在实体店购物，每年、每季度、每月各个网购平台层出不穷的购物节活动就成了我们囤货的大好时机。下面这个问题来源于真实生活，极具代表性。本文希望提供的是一种求解最佳购物方案的思路，大家可以在实际运用时把数字替换成商家具体的优惠条件，这样购物节的时候，怎么买，买多少，就有一个非常具体的参考。

双十一购物节某平台推出满400-50活动，商铺也推出满减活动：199-20，299-30，399-50，499-110。淘宝和商品的满减都需要领优惠券，不领券则视为不用优惠，领了商铺优惠券则系统会先使用满足条件的优惠金额最大的商品优惠券，然后再使用平台优惠券。商品优惠券不可以叠加使用，平台优惠券可以叠加使用。

将购物券问题转化成线性规划问题：

设购买商品的**原始价格**为 y 元，使用199-20的商品优惠券 x_1 张，299-30的商品优惠券 x_2 张，399-50的商品优惠券 x_3 张，499-110的商品优惠券 x_4 张，使用300-30的平台优惠券 x_5 张，则可以得到**目标函数**

$$\text{minimize } z = y - 20x_1 - 30x_2 - 50x_3 - 110x_4 - 30x_5$$

z 是优惠后的实际**支付金额**，我们需要找到使支付金额最小的优惠券组合。

由于购物原价要满足指定金额才可以使用优惠券

对于商铺优惠券得到，由于只能使用一次优惠，得到约束条件

$$y - 199x_1 - 299x_2 - 399x_3 - 499x_4 \geq 0$$

$$x_1, \dots, x_4 = 0, 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

对于平台优惠券，由于可以叠加使用，得到约束条件

$$y - 20x_1 - 30x_2 - 50x_3 - 110x_4 - 400x_5 \geq 0$$

$$x_5 = 0, 1, 2, \dots$$

用GLPK求解这个线性规划，采用**.lp格式**的文件作为输入，输入文件内容如下

```
1 maximize
2 o: 20x1+30x2+50x3+110x4+50x5
3
```

```

1
2
3  subject to
4  199x1+299x2+399x3+499x4≤y
5  20x1+30x2+50x3+110x4+400x5≤y
6  x1+x2+x3+x4=1
7  x5>=0
8
9
10
11
12  binary
13  x1
14  x2
15  x3
16  x4
17
18
19  integer
20  x5
21
22
23  end

```

上述输入文件中的y应该替换成**具体的数字**，表示购买商品的原始金额。注意输入文件中的目标函数和约束条件与最开始分析中写的略有不同：目标函数中不含y，约束条件中的y在不等式的单独一侧。如果不这么写的话，求解时会提示如下错误：

Reading problem data from 'test.lp'...

test.lp:2: missing variable name

CPLEX LP file processing error

输入文件中的**binary**表示变量x1,x2,x3,x4是0,1变量；**integer**表示x5是整数变量。可以看出，输入文件的写法是非常**灵活自由的**，我们不需要把线性规划转化成特定的形式。

其实初中生大概都能看出来，原始金额y和最佳优惠金额z是一个分段线性函数。

通过观察可以发现，当y不超过400元时，只能使用商铺优惠券，由于商铺优惠券只能使用一次，选择优惠额度最高的商铺优惠券最佳。

当原始金额等于399时，我们应该使用399-50的商铺优惠；当原始金额等于400时，可以使用400-50的平台优惠，他们的结果是一样的。

当 $420 \leq y < 430$ 时，应该先使用199-20的商铺优惠券，再使用400-50的平台优惠券。

当 $430 \leq y < 450$ 时，应该先使用299-30的商铺优惠券，再使用400-50的平台优惠券。

当 $450 \leq y < 499$ 时，应该先使用399-50的商铺优惠券，再使用400-50的平台优惠券。

当 $499 \leq y < 510$ 时，应该使用499-110的商品优惠券。

当 $510 \leq y$ 时，应该先使用499-110的商铺优惠券，再叠加使用400-50的平台优惠券.于是得到如下分段函数：

$z = y$, $0 \leq y < 199$
$z = y - 20$, $199 \leq y < 299$
$z = y - 30$, $299 \leq y < 399$
$z = y - 50$, $y = 399, 400$
$z = y - 70$, $420 \leq y < 430$
$z = y - 80$, $430 \leq y < 450$
$z = y - 100$, $450 \leq y < 499$
$z = y - 110$, $499 \leq y < 510$
$z = y - 110 - 30 * \frac{y - 110}{400}$, $510 \leq y$

我们可以通过求解线性规划，验证一下分类讨论的结果。

1. 当 $y=420$ 时，最佳组合是 $x_1=1$, $x_5=1$ ，优惠金额为70元。

Problem:

Rows: 4

Columns: 5 (5 integer, 4 binary)

Non-zeros: 14

Status: INTEGER OPTIMAL

Objective: $z = 70$ (MAXimum)

No.	Row name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	r.5	199		420
2	r.6	420		420
3	r.7	1	1	=
4	r.8	1	0	

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	x1 *	1	0	1
2	x2 *	0	0	1
3	x3 *	0	0	1
4	x4 *	0	0	1
5	x5 *	1	0	

2. 当 $y=430$ 时，最佳组合是 $x_2=1$, $x_5=1$ ，优惠金额为70元。

Problem:
 Rows: 4
 Columns: 5 (5 integer, 4 binary)
 Non-zeros: 14
 Status: INTEGER OPTIMAL
 Objective: $z = 80$ (MAXimum)

No.	Row name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	r.5	299		430
2	r.6	430		430
3	r.7	1	1	=
4	r.8	1	0	

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	x1	*	0	0
2	x2	*	1	0
3	x3	*	0	0
4	x4	*	0	0
5	x5	*	1	0

3. 当 $y=450$ 时, 最佳组合是 $x_3=1$, $x_5=1$, 优惠金额为100元。

Problem:
 Rows: 4
 Columns: 5 (5 integer, 4 binary)
 Non-zeros: 14
 Status: INTEGER OPTIMAL
 Objective: $z = 100$ (MAXimum)

No.	Row name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	r.5	399		450
2	r.6	450		450
3	r.7	1	1	=
4	r.8	1	0	

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	x1	*	0	0
2	x2	*	0	0
3	x3	*	1	0
4	x4	*	0	0
5	x5	*	1	0

3. 当 $y=510$ 时, 最佳组合是 $x_4=1$, $x_5=1$, 优惠金额为160元。

Problem:

Rows: 4

Columns: 5 (5 integer, 4 binary)

Non-zeros: 14

Status: INTEGER OPTIMAL

Objective: $z = 160$ (MAXimum)

No.	Row name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	r.5	499		510
2	r.6	510		510
3	r.7	1	1	=
4	r.8	1	0	

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	x1 *	0	0	1
2	x2 *	0	0	1
3	x3 *	0	0	1
4	x4 *	1	0	1
5	x5 *	1	0	

3. 当 $y > 510$, 比如 $y = 10000$ 时, 最佳组合是 $x_4 = 1, x_5 = 24$, 优惠金额为730元。

Problem:

Rows: 4

Columns: 5 (5 integer, 4 binary)

Non-zeros: 14

Status: INTEGER OPTIMAL

Objective: $z = 1310$ (MAXimum)

No.	Row name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	r.5	499		10000
2	r.6	9710		10000
3	r.7	1	1	=
4	r.8	24	0	

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	x1 *	0	0	1
2	x2 *	0	0	1
3	x3 *	0	0	1
4	x4 *	1	0	1
5	x5 *	24	0	

寻找优惠力度最大的购买方案!

重要假设: 如果我们先下单某样商品, 享受优惠之后再**零成本退货** (实际生活中可以在下单后立即退货, 而不是等商品送达后再退货, 这样对于买家就是零成本退货), 那么实际上我们可以通过**凑单**达到**支付金额/原始金额**比例最大的方案, 而不用担心买到不需要的商品。当然, 我们并不鼓励这样的行为, 因为它特别地浪费平台的计算资源。

那么我们需要凑单到多少钱再进行购买呢?

首先, 我们定义**优惠力度** $r = \text{支付金额}z / \text{原始金额}y$ (实际上相当于日常中说的折扣)。

支付金额	优惠力度	区间	极小值
$z = y$	$r = 1$	$, 0 \leq y < 199$	1
$z = y - 20$	$r = \frac{y - 20}{y} = 1 - \frac{20}{y}$	$, 199 \leq y < 299$	0.8995
$z = y - 30$	$r = \frac{y - 30}{y} = 1 - \frac{30}{y}$	$, 299 \leq y < 399$	0.8997
$z = y - 50$	$r = \frac{y - 50}{y} = 1 - \frac{50}{y}$	$, y = 399, 400$	0.8747
$z = y - 70$	$r = \frac{y - 70}{y} = 1 - \frac{70}{y}$	$, 420 \leq y < 430$	0.8333
$z = y - 80$	$r = \frac{y - 80}{y} = 1 - \frac{80}{y}$	$, 430 \leq y < 450$	0.8140
$z = y - 100$	$r = \frac{y - 100}{y} = 1 - \frac{100}{y}$	$, 450 \leq y < 499$	0.7778
$z = y - 110$	$r = \frac{y - 110}{y} = 1 - \frac{110}{y}$	$, 499 \leq y < 510$	0.7796
$z = y - 110 - 30 * \frac{y - 110}{400}$ $= \frac{7}{40}(y - 110)$	$r = \frac{\frac{37}{40}(y - 110)}{y}$ $= \frac{37}{40} - \frac{407}{4y}$	$, 510 \leq y$	0.7255*

通过上面的分析可以知道，如果在这个平台的这家商铺购物，最好是大于且最接近510元金额的商品，可以达到优惠力度最大。

有了上述解决方案，相信每一次购物节的时候，大家都可以以最大优惠买到自己心仪的商品，毕竟研究生也是学生，经济尚未完全独立，精打细算很值得。

以上讨论都是经我个人思考后得出，无参考答案，可能有许多不正确的地方，欢迎大家指正。

喜欢此内容的人还喜欢

LOA公众号关闭通知

LOA算法学习笔记



雪茄测评——老化房F55德索托

雪茄七天



图：看千人瑜伽别有一番风味

十万个搞笑内涵图

