线性规划经典问题总结

原创 蓝鑫 LOA算法学习笔记 2021-01-11 19:29

01 运输问题（产销平衡）

某商品有m个产地、n个销地，各产地的产量分别为$a_1,\dots,a_m$，各销地的需求量分别为$b_1,\dots b_n$。若该商品由产地运到销地的单位运价为c_{ij}，问应该如何调运才能使总运费最省？

解：引入变量x_{ij}，其取值为由产地i运往销地j的该商品数量，数学模型为：

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i=1,\cdots,m & (1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j=1,\cdots,n & (2) \\ x_{ij} \ge 0 & (3) \end{cases}$$

- 约束(1)表示产地i的商品运往每个销地j的总量为a_i；
- 约束(2)表示销地j接收从每个产地i运送的商品总量为bj；
- 约束(3)表示商品数量总是不小于0。

在产销平衡的运输问题中，隐含了 $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$ 。

如果是产销不平衡问题，若**产大于销**（即 $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$ ），则此时的约束条件(1)应修改为：$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$ ；

若**产小于销**（即 $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$ ），则此时的约束条件(2)应修改为： $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j$ 。

02 指派问题

分配n人去干n项工作，每人仅干一项工作，若分配第i人去干第j项工作，需花费c_{ij}单位时间，问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少？

解：引入变量x_{ij}，若分配i干j工作，则取$x_{ij}=1$，否则取$x_{ij}=0$，则数学模型为：

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=1,\cdots,n & (1)\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1,\cdots,n & (2)\\ x_{ij}=0\text{或}1 & (3)\end{cases}$$

- 约束(1)表示一个人只能做一份工作；
- 约束(2)表示一份工作只能由一个人做。

在该问题中x_{ij}只能取0或1，从而是一个 **0-1 规划问题**。指派问题可以被转化为一个**特殊的运输问题**，其中$m=n,a_i=b_j=1$。因为一般的0-1规划问题求解极为困难。但指派问题并不难解，其约束方程组的系数矩阵十分特殊（被称为全单位模 矩阵，其各阶非零子式均为±1），其非负可行解的分量只能取0或1，故约束$x_{ij}=0$或1可改写为$x_{ij}\geq 0$而不改变其解。

03 去绝对值

规划问题为：

$$\min \ |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

$$s.t. \ Ax\leq b$$

其中，$x=[x_1,\ldots,x_n]^T$，A和b为相应维数的矩阵和向量。要把上面的问题变换成线性规划问题，只要注意到事实：对任意的x_i，存在$u_i,v_i>0$满足：$x_i=u_i-v_i$，$|x_i|=u_i+v_i$。

事实上，只需取$u_i=0.5(x_i+|x_i|),v_i=0.5(|x_i|-x_i)$即可。

记$u=[u_1,\ldots,u_n]^T,v=[v_1,\ldots,v_n]^T$，就可以把上规划问题转化为：

$$\min \ \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$$

$$s.t. \begin{cases}A(u+v)\leq b\\ u,v\geq 0\end{cases}$$

又如：$min_{x_i}(max_{y_i}|\epsilon_i|)$，其中 $\epsilon_i=x_i-y_i$，将该问题转化为线性规划问题。

解：取 $x_0=max_{y_i}|\epsilon_i|$，则该问题可转化为：

$$\min \quad x_0$$

$$s.t. \; x_i - y_i \le x_0 \quad i = 1, \cdots, n$$

04 旅行商问题（TSP）

一名推销员准备前往若干城市推销产品。如何为他（她）设计一条最短的旅行路线(从驻地出发，经过每个城市恰好一次，最后返回驻地)?

解：设城市的个数为n，d_{ij}是两个城市与之间的距离，x_{ij}=0或1（1表示走过城市到城市的路，0表示没有选择走这条路），|s|表示集合s中元素个数，则数学模型为：

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \cdots, n & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \cdots, n & (2) \\ \sum_{i,j \in s} x_{ij} \le |s| - 1, \; 2 \le |s| \le n - 1 & (3) \\ x_{ij} \in \{0,1\} & (4) \end{cases}$$

- 约束(1)表示每个点只有一条出边；
- 约束(2)表示每个点只有一条入边；
- 约束(3)表示除起点和终点外，各边不构成圈。

05 写出原问题的对偶问题

不太严格的说，对偶问题可被看作是原始问题的“行列转置”：
1) 原始问题中的第j列系数与其对偶问题中的第j行的系数相同；
2) 原始目标函数的各个系数行与其对偶问题右侧的各常数列相同；
3) 原始问题右侧的各常数列与其对偶目标函数的各个系数行相同；
4) 在这一对问题中，不等式方向和优化方向相反。
设原问题为：

$$\min\ c^T x \qquad s.t.\ \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix},\ x \geq 0$$

则对偶问题为

$$\max\ \begin{bmatrix} b^T & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad s.t.\ \begin{bmatrix} A & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq c$$

其中，y_1和y_2分别表示对应于约束Ax≥b和-Ax≥-b的对偶变量组。

令$y=y_1-y_2$，则上述对偶问题可写成：

$$\max\ b^T y \qquad s.t.\ A^T y \leq c \quad y \geq 0$$

原问题和对偶的对偶约束之间的关系如下图：

原问题	对偶问题
目标函数max z	目标函数min ω
变量：n个；≥0；≤0；无约束	约束条件：n个；≥；≤；=
约束条件：m个；≤0；≥0；=	变量：m个；≥0；≤0；无约束

约束条件RHS ⇒目标函数变量的系数

目标函数变量系数⇒约束条件的RHS

记忆口诀：**大化小，约束反，变量不变；小化大，约束不变，变量反。**

通过例子说明上述关系图和口诀的含义：

原问题为：

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 & (1) \Rightarrow y_1 \\ 2x_1 \quad + 2x_3 - x_4 \leq 4 & (2) \Rightarrow y_2 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 6 & (3) \Rightarrow y_3 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0,\ x_4\text{无约束} \end{cases}$$

其对偶问题为:

$$\max \quad w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$s.t. \begin{cases} y_1 + 2y_2 \quad \geq 2 & (4) \\ y_1 + \quad + y_3 \leq 3 & (5) \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \leq -5 & (6) \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 & (7) \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

原问题是求min--> 对偶问题是求max--> 对应口诀:**小化大**

- 原问题**约束条件**有3个-->对偶问题**变量**有3个（y_1,y_2,y_3）
- 原问题**约束（1）**为≥ -->对偶对题的**变量**$y_1 \geq 0$
- 原问题**约束（2）**为≤ -->对偶对题的**变量**$y_2 \leq 0$
- 原问题**约束（3）**为= -->对偶对题的**变量**y_3无约束

由此对应口诀：**约束不变**

- 原问题**变量**有4个（x_1,x_2,x_3,x_4）-->对偶问题**约束条件**有4个
- 原问题$x_1 \leq 0$ -->对偶问题约束条件（4）为≥
- 原问题$x_2 \geq 0$ -->对偶问题约束条件（5）为≤
- 原问题$x_3 \geq 0$ -->对偶问题约束条件（6）为≤
- 原问题x_4无约束 -->对偶问题约束条件（7）为=

由此对应口诀：**变量反**

- 原问题目标函数的各变量系数是2，3，-5，1 -->对偶问题约束条件等号/不等号右边的一列系数 -->**目标函数变量系数==>约束条件的RHS**
- 原问题约束条件等号/不等号右边的一列系数是5，4，6 -->对偶问题目标函数的各变量系数 -->**约束条件的RHS==>目标函数变量系数**

06 小结

线性规划问题本身并不难，需要明确目标函数是什么，设置的每一个变量的含义是什么，以及每个约束条件的表达。有时候约束条件可能会漏写，如谈到价钱，那么隐含的约束就是$p_i \geq 0$要一并写上。在求对偶问题时，结合口诀，或许会更容易书写，如有错误，欢迎批评指正。