Greedy与拟阵

原创 向远洋 LOA算法学习笔记 2021-02-25 19:08

Greedy算法是一种符合直觉、易于理解的算法技巧，使用卜老师的话来说即“短视”：在每一步都选择当前情况下看起来最优的结果。由于这种算法符合直觉，因此研究者很自然地被吸引着去了解其背后的理论基础，究竟满足什么条件Greedy算法可以给出最优解？这个问题的答案就是拟阵。也就是说，如果我们能将一个问题描述成拟阵问题，即可保证Greedy规则给出的解是最优的。

01 拟阵的启发—线性无关向量组

在线性代数中，线性无关组相关的性质有两个1）遗传性质：如果 $X=\{x_1,x_2,...,x_k\}$ 是一个线性无关向量组，对于任意子集X′也是线性无关的2）增长性质：如果 $X=\{x_1,x_2,...,x_r\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ 是两个线性无关组且m>r，则在Y中必定存在一个 y_i 使得 $X\cup\{y_i\}$ 是一个线性无关向量组。最大线性无关组是在线性空间中拥有向量个数最多的线性无关向量组，最大线性无关组中的向量个数称为矩阵的秩，而该组中的向量可以构成该矩阵的一组基。

举一个卜老师课堂上的例子（见ppt-lec7-94页），对于矩阵M，该矩阵由5个行向量组成 $\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5\}$，该向量组满足遗传性质，另一方面，该矩阵的线性无关组为 $A=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$， $B=\{V_1,V_3,V_5\}$ 也是线性无关组，且A中元素个数大于B中元素个数， V_4 在A不在B中， $B\cup\{V_4\}$ 也是线性无关组，满足增长性质。如果这个向量组中每个元素均具备权值，需要选择出有最大权重的最大无关组，则应用Greedy规则：最优的最大线性无关组中一定包含权值最大的矢量。（证明见ppt-lec7-98页）

02 拟阵的定义

拟阵就是在上述的概念上扩展延伸得到的。我们将上述总结为一种子集系统，这个系统中具有两种性质，一方面这个系统中具有一系列非空的独立集合，这些独立集合的子集也是独立的（遗传性），另一方面，对于A与B两个独立组，B中元素个数大于A，那么不属于A却属于B的某个元素并上A组成的集合也是独立的集合，换句话说，如果一个独立集未达到最大独立，那么可以通过选取合适元素使得其变成更大的独立集（增长性）。拟阵就是对这样一个子集系统的定义，它被定义为一个二元组M=(S,L)，须满足以下条件：

1. S是一个有限集。
2. L是由S的一些子集组成的有限非空集。
3. 遗传性：对任意B∈L，任意A⊆B，有A∈L（∅必须是L的元素）
4. 增长性：对任意A∈L，B∈L，|A|<|B|，存在一个x∈B-A，使A∪{x}∈L。

03 Greedy与拟阵

我们在此使用拟阵这一概念的目的，是为了探究Greedy的理论基础，或者是说在何种情况下，运用Greedy算法能获得最优解。由于拟阵这一概念是由Greedy算法可以得出最优解的情形下扩展延伸而来，所以我们首先给出论断：假设M=(S,L)是一个独立系统，要想通过Greedy算法能够扩展得到最小权重的最大独立集合，当且仅当M为拟阵。我们从充分性和必要性来证明。

充分性：如果M是拟阵，对于无论何种权重映射方程，Greedy算法总能得到最小权值最大独立集合。以上命题等价于：M是拟阵，且该拟阵中的每个元素都有一个大于或等于0的权值，我们通过Greedy规则选择出的最大独立组为 $\{x_1,x_2,...,x_r\}$ （按照这个顺序选择的），由于我们按照Greedy的规则选择，因此具有 $w(x_1)\leq w(x_2)\leq...\leq w(x_r)$ 对于其他任意r个独立元素 $y_1,y_2,...,y_r$ 构成的最大独立集合也有 $w(y_1)\leq w(y_2)\leq...\leq w(y_r)$，那么对于所有的i，均有 $w(x_i)\leq w(y_i)$。运用反证法，假设上述情况不满足，即在区间[1,r]存在某个k使得 $w(x_k)\geq w(y_k)$，那么存在独立集合 $S=\{x_1,x_2,...,x_{k-1}\}$，S是最小权最大独立集合X的子集，对于任意k个元素构成的 $T=\{y_1,y_2,...,y_k\}$，此时|S|<|T|，根据拟阵的性质（增长性质），存在 $y_k\in T$， $y_k\notin S$ 使得S∪{yk}也为一个独立集合，记 $S'=S\cup\{y_k\}$。由于 $w(x_k)\geq w(y_k)$，那么存在一个最大

独立集合 $X'=\{x_1,x_2,...,x_{k-1},y_k,...,x_r\}$ 的权值比X更小，与X为最小权值最大独立集合的假设矛盾，故充分性得到证明。

必要性：如果Greedy算法对于任意权重映射方程都能得到最小权值最大独立集合，那么M是拟阵。由于命题与逆否命题真假的等价性，我们证明其逆否命题为真即可证明原问题为真（因为逆否命题构建反例比直接证明要容易一些）。其逆否命题为：假设我们的独立集合不符合拟阵条件，那么至少有一种权重映射方程使得Greedy算法失效。根据以上，也就是说，对于不符合拟阵定义的独立集合系统，我们只要构建一个特殊的权值映射方程使得Greedy失效即可证明必要性。那么我们首先定义一个独立集合系统，存在两个独立集合A、B，其中|A|=|B|+1，但对于a∈A\B ，B∪{a}不是独立集，即这个独立集合系统不符合拟阵定义中的增长性质。第二步需要构建权值映射方程，我们的目的是通过该权值映射方程使得Greedy算法失效，那么我们需要考虑通过权值映射方程: 1）选择哪些元素以及2）以怎样的顺序去选择元素。我们首先给出构造好的权值映射方程，然后看是否可以满足Greedy算法失效的条件，如果存在该权值映射方程且满足条件即可证明逆否命题。

$$w(x)=\begin{cases} w_1 & x\in A\cap B \\ w_2 & x\in B-A \\ w_3 & x\in A-B \\ w_4 & otherwise \end{cases}$$

根据该权重映射方程，我们使得算法失效需要两个步骤：

一、我们首先需要设计一个条件，使得Greedy算法是按照我们所期望的顺序去选择我们所期望的元素，这个条件即为下式：

这个顺序即首先选取A∩B的所有元素，它们具有权值 w_1 ，然后再选取集合B-A中的所有元素，它们具有权值 w_2 ，由于独立集合系统不具备拟阵的增长性质，故不能选择A-B集合内的元素，否则就不是独立集合了，然后最后选择权值为 w_4 的元素 ，即X-(A∪B) 。

二、按照上述Greedy算法给出的顺序得到的最大独立集合的权值并不是最小的。令包含A的最大独立集合的权值会比上述Greedy算法得出的最大独立集合的权值更小，则可以写出第二个不等式

根据|A|=|B|+1，可将上式化简为

注意：该条件保证了包含A的最大独立集合的权值虽然会比Greedy算法得出的最大独立集合的权值更小，但不能保证其就是最小权最大独立集合，但我们的约束只要到这一层就足以说明Greedy算法失效。

综上二者，我们需要构造4个w的值，同时满足(1)和(2)两个约束即可构造出使得Greedy算法失效的权重映射函数，就可以证明了逆否命题，从而证明了必要性。因此我们引入一个常量ε，使得0<ε<1，可以设计出：

$$\begin{cases} w_1=\varepsilon/|X| \\ w_2=\varepsilon/|B-A| \\ w_3=(1+\varepsilon)/|A-B| \\ w_4=1+\varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

将上式代入条件(2)

$$1+\varepsilon>|A-B|^*(1+\varepsilon)/|A-B|-|B-A|^*\varepsilon/|B-A|$$

$$1+\varepsilon>1$$

满足条件(2)

根据(3)，易证 $w_1 < w_2$ 和 $w_3 < w_4$ 。又因为|A|=|B|+1，所以|A-B|=|B-A|+1，这就保证了 $w_2 < w_3$ ，故条件(1)也满足。

综上所述，必要性得到证明。最终可得出结论：Greedy能得到最优解的条件是当且仅当问题可用拟阵来描述。

04 总结

需要说明的是拟阵这一概念被提出本意并不是用来证明Greedy算法，另一方面拟阵也不能覆盖所有Greedy算法（例如ppt中的weighted interval scheduling）。但通过以上的证明，我们可以看到，如果一个问题被证明是拟阵，那么运用Greedy算法即可得到最优的解，如果说Greedy算法对于一个问题可以能很好地求解，那么给了我们一个提示，这个问题可能为拟阵。再回看我们必要性部分的证明过程，其实很多地方需要“喝杯咖啡，灵光一现”，例如我们的权重映射方程为什么一开始要写成那样，但后面反思起来，有些“直觉”的地方其实也是按照经验来的，例如我们根据约束设计具体的权重值的时候，是通过不断观察约束不等式的形式去尝试构建的，再引入了一个常量，因此也需要在今后学习中多思考多尝试。总而言之，整个证明过程也揭示了Greedy算法与拟阵的密切关系，也加深了笔者对于这种关系的理解。