有界变量线性规划问题

原创 王子淞 LOA算法学习笔记 2021-12-14 22:53

引言

在实际的许多线性规划问题中，决策变量都是有上下界的。对于一般的有界变量线性规划问题总可以转化为如下的形式:

$$\begin{aligned} \min x_0 &= \mathbf{cx} \\ \text{s.t. } A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ 0 \leqslant \mathbf{x} &\leqslant \mathbf{d} \end{aligned} \tag{1}$$

其中$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdot,x_n)^T$。如果引入n个松弛变量$x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n}$，则问题可以化为标准形式的线性规划如下：

$$\begin{aligned} \min x_0 &= \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ x + x_s &= d \\ x \geqslant 0, x_s &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

进而对问题(2)采用单纯形法就可以得到最优解。但是这里新增了n个变量和n个等式约束，导致计算量和存储量大大增加，因此介绍一种单纯性法的推广形式，可以直接求解(1)式，而不必增加变量。

定义

定义两类非基变量R_1,R_2。对于系数矩阵A，记其基变量为$(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_m})$，则其余变量称为非基变量。若$x_j^{(0)}=0$，则称$x_j$为第一类非基变量，其中的j构成的集合记为$R_1$。若$x_j^{(0)}=d_j$，则称$x_j$为第二类非基变量，其中的j构成的集合记为$R_2$。

有界变量单纯形法

第一步：计算下式

$$z_{i0}=b_{i0}-\sum_{j\in R_2}b_{ij}d_j \quad (i=0,1,\cdots,m).$$

第二步：若$b_{0j}\leqslant 0(j\in R_1),\quad b_{0j}\geqslant 0(j\in R_2)$，则此时得到最优解，迭代终止，否则继续进行第三步。其中最优解如下：

$$\begin{aligned} x_j &= 0 \qquad (j\in R_1) \\ x_j &= d_j \qquad (j\in R_2) \\ x_{j_i} &= z_{i0} \qquad (i=1,2,\cdots,m) \end{aligned}$$

第三步：确定进基变量x_r，其中$r=\min\{j\mid j\in R_1\text{使 }b_{0j}>0,\text{或 }j\in R_2\text{ 使}b_{0j}<0\}$。若$r\in R_1$，则第四步。若$r\in R_2$，则第七步。

第四步：求下面两个式子：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \min\left\{\frac{z_{i0}}{b_{ir}}\mid b_{ir}>0,1\leqslant i\leqslant m\right\} \\ \theta_2 &= \min\left\{\frac{z_{i0}-d_{j_i}}{b_{ir}}\mid b_{ir}<0,1\leqslant i\leqslant m\right\} \end{aligned}$$

计算$\theta=\min\{d_r,\theta_1,\theta_2\}$。若$\theta=+\infty$，则没有最优解，迭代终止。否则继续第五步。

第五步：若$\theta=d_r$，则改变R_1,R_2，返回第一步。其中$\bar{R}_1=R_1\setminus\{r\},\bar{R}_2=R_2\cup\{r\}$。

否则确定离基变量x_{j_s}，其中j_s为取得θ的那个x的下标。然后进行第六步。

第六步：将x_r作为新基与x_{j_s}替换。

若$b_{sr} > 0$，则$\bar{R}_1 = (R_1 \diagdown \{r\}) \cup \{j_s\}, \quad R_2 = R_2$

若$b_{sr} < 0$，则$\bar{R}_1 = R_1 \diagdown \{r\}, \bar{R}_2 = R_2 \cup \{j_s\}$

同时重新计算表格返回第一步。

第七步：这一步与4到6步几乎相同，只是符号略有差异。

计算

$$\bar{\theta}_1 = \min\left\{ \frac{d_{j_i} - z_{i0}}{b_{ir}} \mid b_{ir} > 0, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$$
$$\bar{\theta}_2 = \min\left\{ \frac{z_{i0}}{-b_{ir}} \mid b_{ir} < 0, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$$
$$\theta = \min\{d_r, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\}$$

若$\theta = d_r$，令$\bar{R}_1 = R_1 \cup \{r\}, \quad \bar{R}_2 = R_2 \diagdown \{r\}$，返回第一步。

否则同第五步第六步，确定离基变量x_{j_s}和新基。

若$b_{sr} > 0$，$\bar{R}_1 = R_1, \quad \bar{R}_2 = (R_2 \diagdown \{r\}) \cup \{j_s\}$

若$b_{sr} < 0$，$\bar{R}_1 = R_1 \cup \{j_j\}, \bar{R}_2 = R_2 \diagdown \{r\}$

同时重新计算表格返回第一步。

例子

题目：求解如下的有界变量线性规划问题

$$\begin{gathered} \min x_0 = -2x_1 - x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 3, 0 \leqslant x_2 \leqslant 2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{gathered}$$

解：首先找一个初始基可行解，$x^{(0)} = (0,0,5,0,21)^T$。此时基为$B = (p_3, p_4, p_5)$，$R_1 = \{1,2\}$，$R_2 = \emptyset$，则可以得到下表。

	常数列	x_1	x_2
x_0	0	2	1
x_3	5	1	1
x_4	0	-1	1
x_5	21	6	2

第一次迭代：

1. 计算$z_{00} = 0; z_{10} = 5, z_{20} = 0, z_{30} = 21$
2. 由于$b_{01} = 2 > 0$不满足条件，继续第三步。
3. 确定$r = 1 \in R_1$
4. 计算$\theta_1 = \min\{\frac{5}{1}, \frac{21}{6}\} = \frac{21}{6}$，$\theta_2 = +\infty$，$\theta = \min\{\theta_1, \theta_2, d_1\} = 3$
5. $\theta = 3 = d_1$，因此改变$R_1 = \{2\}, R_2 = \{1\}$，此时新基与原基相等，只是此时x_1取上界3。

第二次迭代：

1. 计算$z_{00}=-6;z_{10}=2,z_{20}=3,z_{30}=3$
2. $b_{02}=1>0$不满足条件。此时$r=2\in R_1$
3. $\theta_1=\min\{\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{3}{2}\}=\frac{3}{2}$， $\theta_2=+\infty$，此时$\theta=\frac{3}{2}$
4. $\theta=\theta_1$。故$j_s=5$。令新基为B=(p_3,p_4,p_2)，$R_1=\{5\},R_2=\{1\}$。可得新表如下：

	常数列	x_1	x_5
x_0	$-\frac{21}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{11}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$
x_4	$-\frac{21}{2}$	-4	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{21}{2}$	3	$\frac{1}{2}$

第三次迭代：

1. 计算$z_{00}=-\frac{15}{2},z_{10}=\frac{1}{2},z_{20}=\frac{3}{2},z_{30}=\frac{3}{2}$
2. $b_{01}=-1<0$不满足条件。此时$r=1\in R_2$
3. $\bar{\theta}_1=\min\left\{\frac{2-3/2}{3}\right\}=\frac{1}{6}$， $\bar{\theta}_2=\min\left\{\frac{1/2}{2},\frac{3/2}{4}\right\}=\frac{1}{4}$，此时$\theta=\frac{1}{6}$
4. $\theta=\theta_1$。故$j_s=2$。令新基为B=(p_3,p_4,p_1)，$R_1=\{5\},R_2=\{2\}$。可得新表如下：

	常数列	x_2	x_5
x_0	-7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$
x_4	$\frac{7}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$
x_1	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

第四次迭代：

1. 计算$z_{00}=-\frac{23}{3};z_{10}=\frac{1}{6},z_{20}=\frac{5}{6},z_{30}=\frac{17}{6}$
2. 检查满足条件，故得到最优解$z_{00}=-\frac{23}{3}$。且有：

$$x_1=\frac{17}{6},\quad x_2=2,\quad x_3=\frac{1}{6},\quad x_4=\frac{5}{6},\quad x_5=0$$

参考文献：

张干宗.线性规划[M].第二版.武汉大学出版社