旅行商问题的整数线性规划

原创 余孙婕 LOA算法学习笔记 2021-01-25 15:44

01 问题描述

考虑 LP 作业题一（懂王旅行商问题）：懂王目前位于华盛顿，需要去四个摇摆州进行竞选集会，需要每个州经过一次并最后返回起点，每个州之间的距离记为 c_{ij} （简单起见，这里的，与原题稍有不同）。我们需要对该问题进行整数线性规划的建模。

02 解决方案

这题的求解过程比较简单，我直接列出解答如下：

$x_{ij} = 0 or 1$ 表示是否选择从州 i 到州 j 的道路，整数线性规划表达式如下：

$$\min \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i, i \neq j} x_{ij} = 1 \\ \sum_{j, j \neq i} x_{ij} = 1 \\ \sum_i \sum_j x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \\ x_{ij} = 0 or 1 \end{cases}$$

其中约束条件 1 表示每个点都被离开一次，约束条件 2 表示每个点都被到达一次，合起来就是每个点经过且只经过一次；约束条件 3 表示不包含子环路（即 A、B、C、D、E 五点，不存在 A->B->C->A 的子环）。

首先看条件三为什么可以约束五个点不包含子环路：假设五点存在子环路，那么只可能是两个点子环路+三个点子环路，我们只要约束不存在两个点的子环路即可，也就是不可以出现 $x_{AB} + x_{BA} = 2$ 这种情况，故只需要限制

$$\sum_i \sum_j x_{ij} + x_{ji} \leq 1$$

就可以限制不出现五个点的子环路。

那么问题就来了，如果我们的点不止五个呢？一般来说，对于 N 个点消除子环路我们有两种解决方案：

1) subtour-elimination 约束：

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, 2 \leq |S| \leq N - 1, S \subset V$$

这里 V 指的是点集，N 指的是点集大小，S 是点集中的真子集。

首先我们观察子环路出现会有什么现象，假设 S={ A, B,C }点集构成了一个环，那么必有 $x_{AB}+x_{BC}+x_{CA}=3$ ，扩展一下，

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij}=|S|$$

是 S 点集构成子环路的充要条件；反过来说，只要对任意 V 的真子集 S，满足

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij}\le|S|-1$$

即说明对 V 的任意的真子集 S 都不存在环，也即 V 中不存在子环路。

该约束的本质是遍历了点集 V 的真子集（所有可能导致子环路出现的节点集合），只保留点集 V 的环，遍历的复杂度达到了 2^N 。这里特别注意一下，这里的真子集 S 是从大小为2 开始遍历的（|S|≥2），即这里是没有考虑 $x_{ii}=1$ 自环的，因此在约束入度和出度时需要加入i≠j。

2) Miller-Tucker-Zemlin(MTZ)约束：

$$\mu_i-\mu_j+Mx_{ij}\le M-1,\forall i,j\in V,i\ne j$$

决策变量 $\mu_i\ge0$ ，在很多地方被理解为点 i 的访问次序，例如 $\mu_1=5$ ：从出发点开始，第 5 个被访问到的点是点1，因此 $\mu_i\ge0$ 就很容易理解了。M 可以理解成 INF。但显然，这里的 M 可以不需要取到 INF（因为 μ_i 和 x_{ij} 都是有界的，理论上 M 也可以找到紧的下界）。我们对这个公式移项：

$$\mu_i-\mu_j+1\le M(1-x_{ij})$$

当 $x_{ij}=1$ 时，说明选择了 i 到 j 的通路，不妨假设点 i 是第 k 个被访问到的点，即 $\mu_i=k$ ，显然 $\mu_j=k+1$ ，因此有

$$\mu_i-\mu_j+1=k-(k+1)+1=0\le0$$

当 $x_{ij}=0$ ，则有

$$\mu_i-\mu_j+1\le M$$

因此 M 取 $\mu_i-\mu_j+1$ 的一个上界即可。可以找到紧的 $\mu_i-\mu_j+1$ 上界为 N

这里简单地理解一下：假设点 i 是第 k 个被访问到的点，点 j 是第 q 个被访问到的点，即

$$\mu_i=k\text{，}\quad\mu_j=q$$

那么 $\mu_i-\mu_j=k-q$ 表示点 i 与点 j 之间访问距离差，显然最远是在最后一个点访问到了 i，在第一个点访问到了 j，即为

$$\mu_i-\mu_j+1=k-q+1\le N-1+1=N$$

方便起见，在下面的讨论中，我们取 M=N。

为什么 MTZ 约束可以约束子环路呢？我们同样考虑下面这个式子：

$$\mu_i - \mu_j + 1 \le N(1 - x_{ij}), \forall i \ne j$$

假设存在 1->2->3->1 的环路(其中3≤N)，即 $x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1$ ，所以有：

$$\mu_1 - \mu_2 + 1 \le 0$$

$$\mu_2 - \mu_3 + 1 \le 0$$

$$\mu_3 - \mu_1 + 1 \le 0$$

三式相加，那么有3≤N，矛盾。

如果不存在环路，1->2->3->X(不为1)(其中3<N)， $x_{12} = x_{23} = 1$ ， $x_{31} = 0$ ，有

$$\mu_1 - \mu_2 + 1 \le 0$$

$$\mu_2 - \mu_3 + 1 \le 0$$

$$\mu_3 - \mu_1 + 1 \le N$$

三式相加，那么有3≤N，成立。

可以发现确实

$$\mu_i - \mu_j + 1 \le N(1 - x_{ij}), \forall i \ne j$$

可以消除环路，但问题是如果不做一些处理，该约束消除了所有环，找到的是一条经过 N 个点的路而非环，但原旅行商问题需要保留经过 N 个点回到原点的环。因此我们需要做一些额外的处理。

我们创建一个虚拟点 N+1 作为终止点，该点的位置和 1 点的位置是一样的，那么我们最终找到的是从 1 点到 N+1 的路，本质也就是找到从 1 点出发回到 1 点的环。更正 LP 公式如下：

$$\min \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i, i \ne j} x_{ij} = 1, \forall j = 2, \dots, N+1 \\ \sum_{j, j \ne i} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, N \\ \mu_i - \mu_j + (N+1) x_{ij} \le N, \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 2, \dots, N+1, i \ne j \\ x_{ij} = 0 or 1 \\ \mu_i \ge 0 \end{cases}$$

至此，我们再看对于 1->2->...->N->N+1(值与 1 相同)的路径，显然有

$$x_{12}=x_{23}=\ldots=x_{N,N+1}=1, x_{N+1,1}=0$$

也即

$$\mu_1-\mu_2+1\le 0$$

$$\ldots$$

$$\mu_N-\mu_{N+1}+1\le 0$$

$$\mu_{N+1}-\mu_1+1\le N+1$$

相加有N+1≤N+1成立。

假设这 N+1 个点中存在任何的子环路，那么一定会导致 0<0≤K，K 表示造成环路的点集的大小，从而引发矛盾。

通过上述约束，我们可以保证找到一条点 1 到点 N+1 的路，其中每个点经过一次且仅一次，其中起点为 1，终点为 N+1。也即找到了一条从点 1 出发回到点 1 的环。

通过引入 MTZ 约束，使得原问题增加了 N 个连续遍历和 N^2 复杂度个逻辑约束。从subtour-elimination 约束的指数级约束下降到了多项式级约束，因此从实现上来说 MTZ 约束要比 subtour-elimination 约束更容易，也因此在许多涉及旅行商问题的整数规划中，大多数采用的消除子环路约束为 MTZ 约束。