隐马尔科夫模型中的动态规划

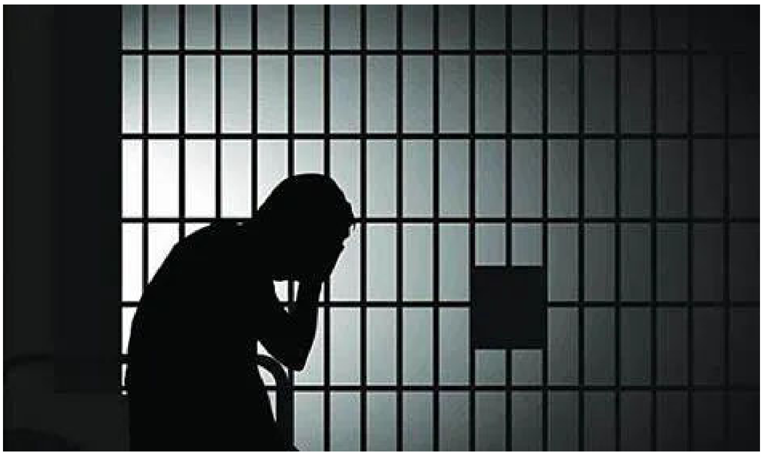
原创 盛欢欢 LOA算法学习笔记 2021-02-05 16:07

隐马尔科夫模型，是学习如模式识别、自然语言处理等领域中必须掌握的模型之一。关于隐马尔科夫模型，有三个基本问题：（1）计算观测序列概率（2）计算最优隐状态序列（3）估计模型参数。上述三个问题的解决涉及到的如前向/后向概率计算，Viterbi算法等，都离不开动态规划。下面以刘洋老师自然语言处理课中天气预测的例子，分析隐马尔科夫模型中的动态规划。

01 问题描述

假设一个囚徒被关在一个没有窗户的监狱中，仅仅能通过监狱地面的潮湿程度（潮湿或干燥，分别用a,b表示）来判断外面的天气状况（晴天，阴天，雨天，分别用 1，2，3表示）。

给定天气的初始概率 s_i ($i=1,2,3$)、天气间的转移概率 a_{ij} ($i=1,2,3,\ j=1,2,3$)和天气对地面潮湿程度的生成概率 $g_{ia}, g_{ib}(i=1,2,3)$ ，计算生成某一长度为n的地面潮湿程度序列（如潮湿，潮湿，干燥，……，潮湿等）的概率。



02 问题分析

观察上述问题，直观看来，为了计算地面潮湿程度序列的概率，我们需要枚举出所有可能的天气序列并计算出该天气序列下出现该地面潮湿程度序列的概率，需要指数级的时间复杂度。动态规划是一种聪明的枚举方法，故可以考虑用动态规划来解决上述问题。

将地面潮湿程度序列（下文简称为序列）记为 $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ ，将生成序列 $(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ 且第n天的天气为i的概率记为 $OPT_i(n)$ ，则生成序列 $(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ 的概率记为 $OPT(n)=\sum_{i=1}^{3} OPT_i(n)$ 。

- 考虑最简单的case:

当n=1时，第一天可能是晴天、阴天或雨天，分别计算出出现三种天气且生成地面潮湿程度 w_1 的概率（初始概率*生成概率）

$$OPT_i(1)=s_i\times g_{iw_1};$$
$$OPT(1)=\sum_{i=1}^{3} OPT_i(1)$$

- 考虑复杂的case:

可以看成多步决策问题，生成长度为n的序列的概率可由生成长度为n-1的序列的概率得到。已知生成前n-1序列且第n-1天的天气为j的概率，将此概率乘上天气由j转为i的概率，再乘上由天气i生成潮湿程度 w_n 的概率，即可得到生成长度为n且第n-1天的天气为j、第n天的天气为i的序列的概率，再进行累加即可。状态转移方程为：

$$OPT_i(n) = (\sum_{j=1}^{3} OPT_j(n-1) \times a_{ji}) \times g_{iw_n};$$
$$OPT(n) = \sum_{i=1}^{3} OPT_i(n)$$

03 小结

上述分析过程与隐马尔科夫模型中通过前向概率计算观测状态序列的思想相同。若在考虑多步决策过程时反向考虑，由最后一天的概率得到最后两天的概率，进而反向得到n天序列的概率，则是使用后向概率的思想。若将上述求和的过程变为求最大，则为Viterbi算法，可用于计算最优隐状态序列。在估计模型参数时，也要用到前向概率与后向概率。以上内容即为动态规划在隐马尔科夫模型中的使用。

以上为个人总结，欢迎批评指正。