体育彩票是否存在必胜策略？

原创 项天宇 LOA算法学习笔记 2021-12-15 23:47

利用线性规划模型对足球彩票进行分析 声明：

1. 本文不构成任何投资建议，并且强烈不建议大家尝试本文所提出的方式。
2. 本文仅针对实际现象对实际问题进行数学建模和分析，并不代表本文作者支持该做法。

（文中公式可以左右滑动）

背景介绍：

足球彩票是一种常见的彩票娱乐方式，其模式也是多种多样的。最经典的模式就是玩家在比赛结束前对比赛的胜平负进行分析，然后进行相应的投注，如果比赛最终的结果和玩家投注的结果相同则玩家可以获得相应的盈利，如果比赛结果与投注结果不符合那么玩家不但无法得到奖励还会输掉自己的本金。以中国体育彩票官网2021年12月8日11时10分显示的欧洲冠军联赛：拜仁慕尼黑vs巴萨罗那的比赛为例：

比赛结果	胜	平	负
赔率	1.43	4.45	4.65

如果在比赛前购买10元拜仁慕尼黑胜，比赛结果也是胜，那么比赛结束后将会获得14.3元的返还（盈利4.3元），如果比赛结果为负则将返还0元（亏损10元）。

在实际情况中，比赛的赔率是实时变化的。因为彩票发行商只会拿出部分彩票购买者的本金进行返还，以确保自身的盈利，所以如果购买某一种结果的资金比例增多会导致该赔率下降，反之如果减少则赔率会出现上升。显然，在不同彩票公司购买彩票的顾客对比赛的看法不可能是完全一致的，这也就导致了不同公司的赔率存在细微的差别。

本文将利用线性规划模型对这一问题进行建模，并分析是否可以利用赔率上细微的差别找到必胜的策略。

模型建立：

在这里讨论更一般的情况。假设有n家彩票发行公司，对整体事件D发行了彩票。事件D可以被划分为m个子事件（例如整体事件为比赛结果，那么它可以被划分为三个子事件：胜/平/负）。第i家公司针对子事件d_j发行的彩票赔率为p_{ij}。对第i家公司在子事件d_j上购买的彩票份额为x_{ij}。那么整体的成本为c：

$$c = \Sigma_{j=1}^{m}\Sigma_{i=1}^{n}x_{ij}$$

所谓必胜策略就是无论什么事件发生购买彩票的组合方式都可以取得盈利：

$$\Sigma_{i=1}^{n}x_{ij}p_{ij} \geq c, \forall j = 1, 2, \ldots, m$$

当然对购买的份额也是有约束的，首先购买的份额一定是非负的：

$$x_{ij} \geq 0$$

再就是为了方便讨论可以规定购买的总份额为单位1：

$$c = 1$$

如果可以找到满足这些约束的可行解，那么就可以找到不败的购买策略。目标函数的设置可以是多种多样，从某种程度上来讲反映了彩票购买者对事件结果的预期，假设购买者认为事件j发生的概率为α_j那么目标函数可以写为：

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j = 1$$
$$y = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\sum_{i=1}^{n}x_{ij}p_{ij}$$

只需要最大化y即可求得最优解。

因此最终的优化问题可以写成：

$$\begin{gathered}\max \quad y=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_{ij} \\ s.t. \quad c=\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_{ij} \geq 1, \forall j=1,2,\ldots,m \\ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \\ x_{ij} \geq 0\end{gathered}$$

具体示例：以拜仁慕尼黑对阵巴萨罗那俱乐部的比赛为例，在2021年12月8日在某竞彩网站上可以找到多家彩票公司对这场比赛的结果进行开盘。

赔率	胜	平	负
公司1	1.78	4.65	4.10
公司2	1.60	4.43	4.72
公司3	1.55	5.40	5.35
公司4	1.55	5.10	5.60
公司5	1.52	4.90	5.70

假设胜利为事件1，平为事件2，负为事件3。如果投注者倾向于比赛为胜，则可令$\alpha_1=1, \alpha_2, \alpha_3=0$。根据约束求解出购买公司1的胜利彩票0.639376份，公司3的平局的彩票0.185185份，公司5负的彩票0.175439，可以在球队取胜的情况下得到0.1381的利润，而平局或者负的情况均可收回1元的成本。

同理，在选择平局或者负的情况下也可以找到必胜的策略。

讨论与分析：

第一个值得关注的点是这种策略是否可以真正的盈利？虽然理论计算可以证明利用线性规划的思想可以寻求到一个必胜的策略，但是这隐含了一些假设，首先假设了彩票的买入和提出阶段是没有手续费的，这在实际的购买中往往不存在的；其次受限制于法律因素真正可以被纳入选择的体育彩票很少，往往很难找到满足条件的彩票组合；最后，找到合适的组合后还会面临着赔率的动态调整，即买入的实际赔率可能并不是显示出的赔率，尤其是在大笔资金购买彩票的情况下。因此该模型虽然理论可行，在实际的操作中存在着局限性。

第二个需要讨论的点为什么会有这样的现象产生？主要原因是因为在不同彩票公司购买彩票的顾客对比赛的期望是不同的，而彩票公司为了自身的盈利会动态的调整赔率，因此会导致不同的彩票公司对同一比赛的赔率出现波动，利用这个波动可以找到必胜的策略。

第三个点，是否存在一些极端的情况我们无法找到必胜策略。以下两种情可能会出现必胜策略无解的情况：

1. 所有公司为同一场比赛开出的赔率是一样的。
2. 公司为比赛开出的赔率很低。

这两种情况在数学上是可行的，但是在实际操作中几乎没有可能。针对第一种情况如果比赛的赔率都是一样的，考虑到彩票公司要稳赚不赔，所以可以认为是在不同公司购买彩票的顾客对比赛的看法是一致，这种情况在实际中几乎不可能发生，因为人们对一件没有发生的随机事件的看法很难是一样的。第二种情况出现的可能性也很小，因为在实际过程中彩票公司为了吸引顾客会拿出尽可能多的投注来返还给顾客。当然虽然这两种情况出现的概率很低，但是出现的可能性也是存在的，所以更安全的说法是在大多数情况下可以利用该模型找到必胜策略。

最后，仔细观察示例中的求解结果可以发现，如果目标是最大化利润，实际上只需要考虑各个事件的最大赔率，这个结论很符合直觉，下面从数学上来说明这个问题，引入一个变量X_j:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

X_j表示了对事件j的总下注，显然有以下的结论：

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\max_i (p_{ij}) \cdot X_j \right] \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_{ij}$$

原目标函数可以写成：

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_{ij} \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_j \cdot \max_i (p_{ij}) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \max_i (p_{ij}) \cdot X_j \end{aligned}$$

因此在只考虑各个事件最大赔率的情况下可以得到目标函数的上确界，而在彩票问题的背景下，目标是最大化收益，因此只需要考虑最大赔率就可以得到该问题的最优可行解，利用这种$greedy$的做法可以大大减少模型的计算复杂度。