男女配对问题以及博弈思想

原创 万文俊 LOA算法学习笔记 2021-02-08 15:20

01 问题描述

n名男士，n名女士想要配对，他们每个人都对每一名异性有打分排名。

你需要给出一个稳定的匹配方案，使得按照该方案匹配的结果中没有不稳定匹配。（不稳定匹配指的是，匹配集M中存在一个元素A，比起匹配集W中与A既成匹配的元素，A更喜欢匹配集W中的另一个元素B，并且对B来说，A也比M中与B既成匹配的元素更好）。选择一个条件，形式化为一个整数线性规划问题。

1.已知：对于每两个可能的匹配对儿（男士 m_i 与女士 w_j ，男士 m_k 与女士 w_l ，如果他们稳定，则 $S_{i,j,k,l}=1$ ，否则

$$S_{i,j,k,l}=0 \text{（} i,j,k,l\in\{1,2,\ldots,n\} \text{）}$$

2.已知：对于每一个男士 m_i ，如果他喜欢女士 w_j 胜过 w_k ，则 $p_{i,j,k}=1$ ，否则 $p_{i,j,k}=0$ 。类似的，如果女士 w_i ，如果她喜欢男士 m_j 胜过 m_k ，则 $q_{i,j,k}=1$ ，否则

$$q_{i,j,k}=0 \text{（} i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\} \text{）}$$

02 线性规划方法

问一：因为题目中明确给出了相应匹配结果(i,j)，可以建立如下模型：

1) 设置示性函数 x_{ij} 表示男士和女士j是否匹配成功，令：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & ifmatch\ ; \\ 0 & otherwise;\end{cases} i,j=1,2,\ldots,n$$

2) 由于 $x_{ij}=1$ 就表示匹配成功，而目标正是满足条件的最高匹配数，那么不妨设目标函数为：

$$\max\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

3) 约束：

约束1：每个男士仅与一名女士匹配

约束2：对于任意的i≠k，j≠l，只有男士i与女士j、男士k与女士l这两个匹配为稳定状态时，匹配结果才成立。

将上述问题形式化为

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } x_{ij} = 0 or 1, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} + x_{kl} \le S_{i,j,k,l} + 1, \quad i,j,k,l = 1,2,\ldots,n; i \ne k, j \ne l$$

问二：此时由于配对的双方被拆开考虑了，所有不得不考虑所有不符合条件的情况，我们先假设此时有四名参与者，分别是男士 m_i 、男士 m_k 、女士 w_j 、女士 w_l ，如果男士 m_i 喜欢女士 w_j 胜过女士 w_l ，但女士 w_j 却更喜欢男士 m_k ,则无法形成稳定匹配，即 $p_{i,j,k}=1$ 和 $q_{i,j,k}=1$ 不同时成立，其他不符合条件的情况况也可以用相同的形式表达。

与问题一的区别就是此时

$$x_{ij} + x_{kl} \le 3 - p_{i,j,l} - q_{j,k,i}, \quad i,j,k,l = 1,2,\ldots,n; i \ne k, j \ne l$$

此时问题转换为

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } x_{ij} = 0 or 1, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} + x_{kl} \le 3 - p_{i,j,l} - q_{j,k,i}, \quad i,j,k,l = 1,2,\ldots,n; i \ne k, j \ne l$$

03 发散思考

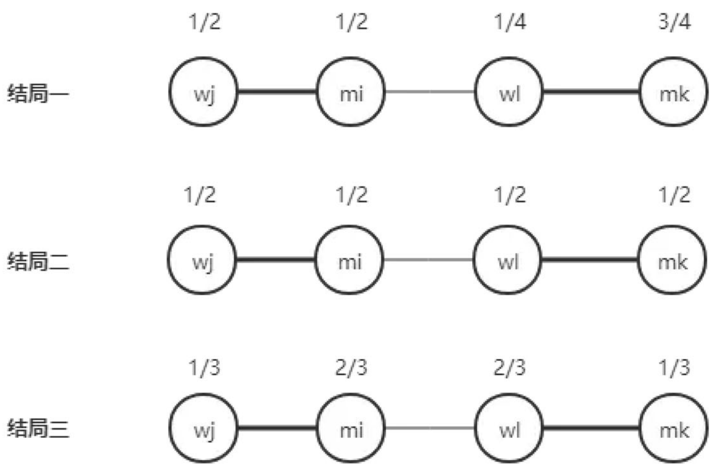
对于配对问题往往涉及到参与者的重要性，在该问题的场景下，某个人被异性喜欢的程度越高那么其在该群体中就越重要。把该群体看成是一个网络，每个人就是网络上的节点。配对游戏实际上就是一个博弈过程，我们根据根据每个人受欢迎的程度不同，可以将每个人赋予网络中不同的位置，比如越受欢迎的人就与越多节点相连。

我们以男士 m_i 为例，并用“报价”来替换“喜欢”这个概念。假如女士 w_j 的“报价”比女士 w_k 的“报价”低，说明男士 m_i 能在女士 w_j 上获取更多的价值。

再定义结局的稳定性：

1. 不稳定边是指对于结局中未参与配对的边，如果边的两个端点获得的收益之和小于1，则称这条边为不稳定边。

2. 不稳定边的存在则说明两个端点可以改变“报价”而改变结局。
3. 若是一个结局中不存在不稳定边，则该结局为稳定结局。



上图中表示了三种不同的结局，其中黑边表示配对。

这三种结局中只有结局二和结局三才是稳定结局，此时如果用喜欢来替代“报价”，结局一中男士 m_i 相比男士 m_k 的“报价”更高，对于女士 w_l 而言应该是更喜欢男士 m_i ，所以此时还不稳定。

对于结局二和结局三哪个更体现节点的议价权呢？对于 m_i 有备选项 w_j ，其“报价”为 $x = w_j$ ，对于 w_l 有备选项 m_k ，其“报价”为 $y = m_k$ 。此时要求x+y≤1，议价的对象就是“剩余价值”s=1-x-y。对于结局二，虽然为稳定状态，但是男士 m_i 对女士 w_j 和女士 w_l 的喜欢程度相同，也可能出现 m_i 与 w_l 匹配的情况。回到线性规划的问题上来，为了找到最优的情况，也就是

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

则匹配数目越多，该值越大，则不得不人为强制两两配对， m_i 和 w_l 就丧失了原本的多选择性。引入纳什议价解，其中 m_i 的纳什议价解是

$$w_j + s/2 = (1 + w_j - m_k)/2$$

w_l 的纳什议价解是

$$m_k + s/2 = (1 + m_k - w_j)/2$$

只有结局三符合条件。

那么是否处于网络的中心就一定能配对成功呢？

上图为第四种结局，女士 w_q 虽然在网络的中心，但是经过计算可以得知最终却无法匹配。

04 总结

该线性规划问题如果用博弈中的知识来理解也是比较有意思的。如果最终想要匹配成功，一是要在网络中的位置要好，比如结局四的情况，二是对他人的打分要有区分度，比如结局二的情况。