Résolution d'une équation différentielle du second ordre par la méthode de NIGAM

Résumé :

Nous présentons dans ce document, une méthode de résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre obtenue lors du calcul d'un spectre d'oscillateur.

1 Introduction

Lors du calcul d'un spectre d'oscillateur, on est amené à résoudre une équation différentielle du second ordre dont la solution est une intégrale de DUHAMEL.

Si cette intégrale peut être calculée exactement à l'aide de la transformée de LAPLACE pour certaines fonctions analytiques simples (Dirac, Sinus, Cosinus, Heavyside, …) [bib1] elle doit être intégrée numériquement dans le cas général.

Ce document présente une méthode efficace pour résoudre ce problème.

Cette méthode est mise en œuvre dans *Code_Aster*, dans l'opérateur `CALC_FONCTION`, mot clé facteur `SPEC_OSCI`.

2 Solution analytique de l'équation

Lors du calcul du spectre d'oscillateur d'un accélérogramme [R4.05.03], on est amené à résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\ddot{q}+2\,\xi\,\omega\,\dot{q}+\omega^2 q=-\alpha(t)$$

où $q(t)$ est le déplacement relatif
$\alpha(t)$ est l'accélération du mouvement imposé à la base
ω est la pulsation de l'oscillateur
ξ est l'amortissement réduit de l'oscillateur

Avec des conditions initiales sur q et $\dot{q}$.

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$q(t)=+\int_0^t h(t-\tau)\,.\,\alpha(\tau)\,d\tau+q(0)\,g(t)+\dot{q}(0)\,h(t) \qquad \text{éq 2-1}$$

où $q(0)$ et $\dot{q}(0)$ sont le déplacement et la vitesse à l'instant initial.

- Expression de $h(t)$ et $g(t)$ selon la valeur de l'amortissement réduit ξ .
    - Si $\xi<1$ (amortissement sous critique) :

$$\begin{aligned} h(t)&=\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega\sqrt{1-x^2}}\sin\left(\omega\,t\sqrt{1-\xi^2}\right)\\ g(t)&=e^{-\xi\omega t}\left[\cos\left(\omega\,t\sqrt{1-\xi^2}\right)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega\,t\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]\end{aligned} \qquad \text{éq 2-2}$$

- Si $\xi=1$ (amortissement critique) :

$$h(t)=te^{-\omega t}$$
$$g(t)=(1-\omega)e^{\omega t}$$

- Si $\xi>1$ (amortissement sur-critique) :

$$h(t)=\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega\sqrt{\xi^2-1}}.sh\left(\omega t\sqrt{\xi^2-1}\right)$$
$$g(t)=e^{-\xi\omega t}\left[ch\left(\omega t\sqrt{\xi^2-1}\right)+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}sh\left(\omega t\sqrt{\xi^2-1}\right)\right]$$

3 Méthode numérique

La méthode numérique implantée dans *Code_Aster* a été proposée par NIGAM et JENNINGS [bib2] dans le cas de l'amortissement sous critique qui correspond à notre problème sismique initial [R4.05.03].

En introduisant la formulation [éq 2-2] dans [éq 2-1] on est donc conduit à résoudre l'équation différentielle :

$$\ddot{q}(t)+2\xi\omega\dot{q}(t)+\omega^2 q(t)=-\alpha(t)$$

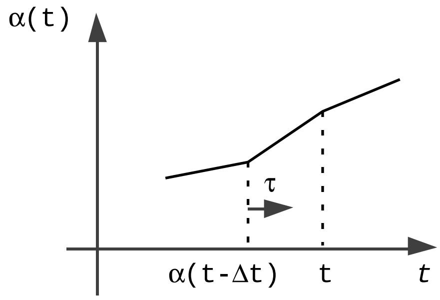
avec conditions initiales nulles, dont la solution s'écrit :

$$q(t)=\frac{1}{\omega_d}\int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\left[\omega_d(t-\tau)\right]\alpha(\tau)\,d\tau$$

avec $\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$

En supposant que $\alpha(t)$ varie linéairement à l'intérieur de chaque intervalle $\Delta(t)$, on peut alors écrire :

$$\alpha(\tau)=\alpha(t-\Delta t)+\frac{\tau}{\Delta t}\left[\alpha(t)-\alpha(t-\Delta t)\right]\text{ pour }\tau\in[0,\Delta t]$$



d'où l'équation à résoudre (exprimée dans la nouvelle variable τ) :

$$\ddot{q}(t)+2\xi\omega\dot{q}(\tau)+\omega^2 q(\tau)=a+b\tau \text{ pour } \tau\in[0,\Delta t]$$

où
$$a=\alpha(t-\Delta t)$$
$$b=[\alpha(t)-\alpha(t-\Delta t)]/\Delta t$$

avec les conditions initiales :
$$q(0)=q(t-\Delta t)$$
$$\dot{q}(0)=\dot{q}(t-\Delta t)$$

La solution de cette équation est la superposition d'une solution particulière et des solutions du problème homogène.

- une solution particulière : $q_p(t)=-\dfrac{a}{\omega^2}+\dfrac{2\xi b}{\omega^3}-\dfrac{b}{\omega^2}\tau$
- les solutions du problème homogène : $q_h(t)=e^{-\xi\omega\tau}\left[C_1.\cos(\omega_d\tau)+C_2.\sin(\omega_d\tau)\right]$

Par suite : $q(\tau)=e^{-\xi\omega\tau}\left[C_1.\cos(\omega_d\tau)+C_2.\sin(\omega_d\tau)\right]-\dfrac{a}{\omega^2}+2\dfrac{\xi b}{\omega^3}-\dfrac{b.\tau}{w^2}$

et en dérivant q (par rapport à t) on a :

$$\dot{q}(\tau)=(-\xi\omega)\,e^{-\xi\omega\tau}\left(C_1\cos\omega_d\tau+C_2\sin\omega_d\tau\right)+e^{-\xi\omega\tau}\left(-C_1\omega_d\sin\omega_d\tau+C_2\omega_d\cos\omega_d\tau\right)-\frac{b}{\omega^2}$$

Les coefficients C_1 et C_2 sont alors déterminés par les conditions initiales au début de l'intervalle (c'est-à-dire pour $\tau=0$).

$$C_1=q(t-\Delta t)+\frac{a}{\omega^2}-\frac{2\xi b}{\omega^3}$$
$$C_2=\frac{1}{\omega_d}\left[\dot{q}(t-\Delta t)+\xi\omega q(t-\Delta t)+\frac{\xi a}{\omega}-\frac{2\xi^2-1}{\omega^2}b\right]$$

et en reportant C_1 et C_2 dans l'expression de q et $\dot{q}$ on obtient l'égalité matricielle pour $\tau=\Delta t$:

$$\begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}=A(\xi,\omega,\Delta t)\begin{Bmatrix} q(t-\Delta t) \\ \dot{q}(t-\Delta t) \end{Bmatrix}+B(\xi,\omega,\Delta t)\begin{Bmatrix} \alpha(t-\Delta t) \\ \alpha(t) \end{Bmatrix}$$

4 Coefficients des matrices A et B du système à résoudre

Matrice A **:**

$$a_{11}=e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_d\Delta t\right)+\cos\left(\omega_d\Delta t\right)\right]$$

$$a_{12}=\frac{e^{\xi\omega\Delta t}}{\omega_d}\sin\left(\omega_d\Delta t\right)$$

$$a_{21}=-\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega\Delta t}\sin\left(\omega_d\Delta t\right)$$

$$a_{22}=e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\cos\left(\omega_d\Delta t\right)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_d\Delta t\right)\right]$$

Matrice B **:**

$$b_{11}=e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega^2\Delta t}+\frac{\xi}{\omega}\right).\frac{\sin\left(\omega^d\Delta t\right)}{\omega^d}+\left(\frac{2\xi}{\omega^3\Delta t}+\frac{1}{\omega^2}\right)\cos\left(\omega^d\Delta t\right)\right]-\frac{2\xi}{\omega^3\Delta t}$$

$$b_{12}=e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\frac{2\xi^2-1}{\omega^2\Delta t}.\frac{\sin\left(\omega^d\Delta t\right)}{\omega^d}+\frac{2\xi}{\omega^3\Delta t}.\cos\left(\omega^d\Delta t\right)\right]-\frac{1}{\omega^2}+\frac{2\xi}{\omega^3\Delta t}$$

$$b_{21}=e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega^2\Delta t}+\frac{\xi}{\omega}\right).\left(\cos\left(\omega_d\Delta t\right)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega^d\Delta t\right)\right)-\right.$$
$$\left.\left(\frac{2\xi}{\omega^3\Delta t}+\frac{1}{\omega^2}\right).\left(\omega_d\sin\left(\omega_d\Delta t\right)+\xi\omega\cos\left(\omega_d\Delta t\right)\right)\right]+\frac{1}{\omega^2\Delta t}$$

$$b_{22}=-e^{-\xi\omega\Delta t}\left[\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega^2\Delta t}\right).\left(\cos\left(\omega_d\Delta t\right)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_d\Delta t\right)\right)-\right.$$
$$\left.\left(\frac{2\xi}{\omega^3\Delta t}\right).\left(\omega_d\sin\left(\omega_d\Delta t\right)+\xi\omega\cos\left(\omega_d\Delta t\right)\right)\right]-\frac{1}{\omega^2\Delta t}$$

avec $\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$

5 Calcul de l'accélération $\ddot{q}(\tau)$

Connaissant $q(\tau)$ et $\dot{q}(\tau)$, il est dès lors possible de donner l'expression analytique de l'accélération $\ddot{q}(\tau)$.

$$\begin{aligned}\dot{q}(\tau) &= -(\xi\omega)e^{-\xi\omega}\left[C_1\cos(\omega_d\tau)+C_2\sin(\omega_d\tau)\right]\\ &\quad +e^{-\xi\omega}\left(-C_1\omega_d\sin(\omega_d\tau)+C_2\omega_d\cos(\omega_d\tau)\right)-\frac{1}{\omega^2}\\ \ddot{q}(\tau) &= +(\xi\omega)^2e^{-\xi\omega}\left[C_1\cos(\omega_d\tau)+C_2\sin(\omega_d\tau)\right]\\ &\quad +(\xi\omega)e^{-\xi\omega}\left(-C_1\omega_d\sin(\omega_d\tau)+C_2\omega_d\cos(\omega_d\tau)\right)\\ &\quad -(\xi\omega)e^{-\xi\omega}\left(-C_1\omega_d\sin(\omega_d\tau)+C_2\omega_d\cos(\omega_d\tau)\right)\\ &\quad +e^{-\xi\omega}\left[-C_1\omega_d^2\cos(\omega_d\tau)-C_2\omega_d^2\sin(\omega_d\tau)\right]\\ \ddot{q}(\tau) &= \left[(\xi\omega)^2-\omega_d^2\right]e^{-\xi\omega}.\left[C_1\cos(\omega_d\tau)+C_2\sin(\omega_d\tau)\right]\\ &\text{or}\\ \omega_d^2 &= \omega^2(1-\xi^2)\text{, d'où}\\ \ddot{q}(\tau) &= \omega^2e^{-\xi\omega}\left[C_1\cos(\omega_d\tau)+C_2\sin(\omega_d\tau)\right]\end{aligned}$$

or

$$\omega_d^2=\omega^2(1-\xi^2)$$

d'où :

$$\ddot{q}(\tau)=\omega^2e^{-\xi\omega}\left[C_1\cos(\omega_d\tau)+C_2\sin(\omega_d\tau)\right]$$

6 Bibliographie

1) R.J. GIBERT : Vibrations des structures, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, n°69, Eyrolles 1988.

2) N.C. NIGAM & P.C JENNINGS : Calculation of Response spectra from motion earthquake Bull. of the Seismological society of America, Vol.59 n°2 pp 909 - 922 April 1969.

3) D. SELIGMANN, L. VIVAN : Réponse sismique par méthode spectrale [R4.05.03].

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	D.Selligmann, EDF/DER/MMN O.Boiteau, EDF-R&D/SINETICS	Texte initial