SAT solving - Exercício de avaliação

Laura Nunes Rodrigues PG50542 MEI

Exercício 1

Defina um conjunto adequado de variáveis proposicionais para modelar o problema. Depois indique um conjunto de fórmulas proposicionais que descrevem o problema e converta essas fórmulas para CNF.

Variáveis proposicionais:

- CPU1 e CPU2 - representam os dois modelos de CPU
- RAM1 e RAM2 - representam os dois modelos de memória
- MB1 e MB2 - representam os dois modelos de motherboard
- PG1, PG2 e PG3 - representam os três modelos de placa gráfica
- MON1, MON2 e MON3 - representam os três modelos de monitor

Fórmulas proposicionais:

- Cada computador tem que ter obrigatoriamente uma única motherboard, um único CPU, uma única placa gráfica e uma única memória RAM.

```
(CPU1 ∧ ¬ CPU2) ∨ (¬ CPU1 ∧ CPU2)
(RAM1 ∧ ¬ RAM2) ∨ (¬ RAM1 ∧ RAM2)
(MB1 ∧ ¬ MB2) ∨ (¬ MB1 ∧ MB2)
(PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ ¬ PG3) ∨ (¬ PG1 ∧ PG2 ∧ ¬ PG3) ∨ (¬ PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ PG3)
```

- A motherboard MB1 quando combinada com a placa gráfica PG1, obriga à utilização da RAM1.

```
(MB1 ∧ PG1) → RAM1
```

- A placa gráfica PG1 precisa do CPU1, excepto quando combinada com uma memória RAM2.

```
(PG1 ∧ ¬ RAM2) → CPU1
```

```
CPU2 → MB2
```

- O monitor MON1 para poder funcionar precisa da placa gráfica PG1 e da memória RAM2.

```
MON1 → (PG1 ∧ RAM2)
```

- O monitor MON2 precisa da memória RAM2 para poder trabalhar com a placa gráfica PG3.

```
(MON2 ∧ PG3) → RAM2
```

Fórmulas CNF:

- (CPU1 ∧ ¬ CPU2) ∨ (¬ CPU1 ∧ CPU2)

```
≡ ((CPU1 ∧ ¬ CPU2) ∨ ¬ CPU1) ∧ ((CPU1 ∧ ¬ CPU2) ∨ CPU2)
≡ (CPU1 ∨ ¬ CPU1) ∧ (¬ CPU2 ∨ ¬ CPU1)) ∧ ((CPU1 ∨ CPU2) ∧ (¬ CPU2 ∨ CPU
≡ (T ∧ (¬ CPU2 ∨ ¬ CPU1)) ∧ ((CPU1 ∨ CPU2) ∧ T)
≡ (¬ CPU2 ∨ ¬ CPU1) ∧ (CPU1 ∨ CPU2)
```

- (RAM1 ∧ ¬ RAM2) ∨ (¬ RAM1 ∧ RAM2)

```
≡ ((RAM1 ∧ ¬ RAM2) ∨ ¬ RAM1) ∧ ((RAM1 ∧ ¬ RAM2) ∨ RAM2)
≡ ((RAM1 ∨ ¬ RAM1) ∧ (¬ RAM2 ∨ ¬ RAM1)) ∧ ((RAM1 ∨ RAM2) ∧ (¬ RAM2 ∨ RA
≡ (T ∧ (¬ RAM2 ∨ ¬ RAM1)) ∧ ((RAM1 ∨ RAM2) ∧ T)
≡ (¬ RAM2 ∨ ¬ RAM1) ∧ (RAM1 ∨ RAM2)
```

- (MB1 ∧ ¬ MB2) ∨ (¬ MB1 ∧ MB2)

```
≡ ((MB1 ∧ ¬ MB2) ∨ ¬ MB1) ∧ ((MB1 ∧ ¬ MB2) ∨ MB2)
≡ ((MB1 ∨ ¬ MB1) ∧ (¬ MB2 ∨ ¬ MB1)) ∧ ((MB1 ∨ MB2) ∧ (¬ MB2 ∨ MB2))
≡ (T ∧ (¬ MB2 ∨ ¬ MB1)) ∧ ((MB1 ∨ MB2) ∧ T)
≡ (¬ MB2 ∨ ¬ MB1) ∧ (MB1 ∨ MB2)
```

- (PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ ¬ PG3) ∨ (¬ PG1 ∧ PG2 ∧ ¬ PG3) ∨ (¬ PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ PG3)

```
≡ ((PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ ¬ PG3) ∨ ¬ PG1) ∧ ((PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ ¬ PG3) ∨ PG2) ∧ ((P
≡ (((PG1 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG3 ∨ ¬ PG1)) ∧ ((PG1 ∨ PG2) ∧
≡ ((T ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG3 ∨ ¬ PG1)) ∧ ((PG1 ∨ PG2) ∧ T ∧ (¬ PG3
≡ (((¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG3 ∨ ¬ PG1)) ∧ ((PG1 ∨ PG2) ∧ (¬ PG3 ∨ PG2))
≡ ((¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∨ (¬ PG1 ∧ ¬ PG2 ∧ PG3)) ∧ ((¬ PG3 ∨ ¬ PG1) ∨ (¬ PG1
≡ ((¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ ¬ PG2) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨
≡ ((¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ PG3)) ∧ ((¬ PG3
≡ ((¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ PG3)) ∧ ((¬ PG3
≡ ((¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ PG3)) ∧ ((¬ PG3
≡ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ PG3) ∧ (¬ PG3 ∨
≡ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1 ∨ PG3) ∧ (¬ PG3 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG3 ∨
≡ (¬ PG2 ∨ ¬ PG1) ∧ (¬ PG3 ∨ ¬ PG1) ∧ (PG1 ∨ PG2 ∨ PG3) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG
≡ (PG1 ∨ PG2 ∨ PG3) ∧ (¬ PG1 ∨ ¬ PG2) ∧ (¬ PG1 ∨ ¬ PG3) ∧ (¬ PG2 ∨ ¬ PG
```

- (MB1 ∧ PG1) → RAM1

```
≡ ¬ (MB1 ∧ PG1) ∨ RAM1
≡ ¬ MB1 ∨ ¬ PG1 ∨ RAM1
```

- (PG1 ∧ ¬ RAM2) → CPU1

```
≡ ¬ (PG1 ∧ ¬ RAM2) ∨ CPU1
≡ ¬ PG1 ∨ RAM2 ∨ CPU1
```

- CPU2 → MB2

```
≡ ¬ CPU2 ∨ MB2
```

- MON1 → (PG1 ∧ RAM2)

```
≡ ¬ MON1 ∨ (PG1 ∧ RAM2)
≡ (¬ MON1 ∨ PG1) ∧ (¬ MON1 ∨ RAM2)
```

- (MON2 ∧ PG3) → RAM2

```
≡ ¬ (MON2 ∧ PG3) ∨ RAM2
≡ ¬ MON2 ∨ ¬ PG3 ∨ RAM2
```

Exercício 2

Codifique o problema num SAT solver e comprove que o conjunto de fórmulas é consistente.

```
# cat tp1.cnf
c CPU1  1
c CPU2  2
c RAM1  3
c RAM2  4
c MB1   5
c MB2   6
c PG1   7
c PG2   8
c PG3   9
c MON1  10
c MON2  11
c MON3  12

p cnf 12 16
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
```

```
# minisat tp1.cnf OUT
============================[ Problem Statistics ]=============================
|                                                                             |
WARNING! DIMACS header mismatch: wrong number of variables.
|  Number of variables:            11                                         |
|  Number of clauses:              16                                         |
|  Parse time:                   0.00 s                                       |
|  Eliminated clauses:           0.00 Mb                                      |
|  Simplification time:          0.00 s                                       |
|                                                                             |
============================[ Search Statistics ]==============================
| Conflicts |          ORIGINAL         |          LEARNT          | Progress |
|           |    Vars  Clauses Literals |    Limit  Clauses Lit/Cl |          |
===============================================================================
```

```
==================================================================================
restarts              : 1
conflicts             : 0              (0 /sec)
decisions             : 1              (0.00 % random) (162 /sec)
propagations          : 0              (0 /sec)
conflict literals     : 0              (-nan % deleted)
Memory used           : 11.00 MB
CPU time              : 0.006183 s

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
-1 2 -3 4 -5 6 7 -8 -9 -10 -11 0
```

Como o resultado é SATISFIABLE, concluímos que o conjunto de regras é consistente.

Um computador que:

- tem CPU2
- tem RAM2
- tem MB2
- tem PG1

satisfaz o conjunto formado por todas as regras!

Executando o ficheiro acima com o programa minisat, verificamos que o conjunto de regras é consistente, visto que existe pelo menos uma atribuição que satisfaz a conjunção de todas as regras, o que implica que satisfaz cada uma das regras individualmente

Exercício 3

Justificando a sua resposta, use agora o SAT solver para responder às seguintes questões:

a) O monitor MON1 só poderá ser usado com uma motherboard MB1 ?

```
  MON1 → MB1
≡ ¬ MON1 V MB1
```

```
# cat tp1_1.cnf
p cnf 12 17
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
```

```
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
-10 5 0
```

```
# minisat tp1_1.cnf OUT
# (...)

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
-1 2 -3 4 -5 6 7 -8 -9 -10 -11 0
```

Apesar de encontrarmos uma solução que satisfaz a condição, isto não nos garante que o monitor MON1 só poderá ser usado com uma motherboard MB1.

Negação: ¬ (¬ MON1 V MB1) ≡ MON1 Λ ¬ MB1

```
# cat tp1_1.cnf
p cnf 12 18
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
10 0
-5 0
```

```
# minisat tp1_1.cnf OUT
```

```
# minisat tp1_1.cnf OUT
# (...)

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
1 -2 -3 4 -5 6 7 -8 -9 10 -11 0
```

Como a negação da condição é SATISFIABLE, podemos concluir que, para todos os casos, a afirmação é falsa.

b) Um cliente pode personalizar o seu computador da seguinte forma: uma motherboard MB1, o CPU1, a placa gráfica PG2 e a memória RAM1 ?

```
MB1 ∧ CPU1 ∧ PG2 ∧ RAM1
```

```
# cat tp1_2.cnf
p cnf 12 20
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
5 0
1 0
8 0
3 0
```

```
# minisat tp1_2.cnf OUT
# (...)

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
1 -2 3 -4 5 -6 -7 8 -9 -10 -11 0
```

```
1 -2 3 -4 5 -6 -7 8 -9 -10 -11 0
```

Como foi encontrada a solução que satisfaz a condição, concluímos que a afirmação é verdadeira.

c) É possível combinar a motherboard MB2, a placa gráfica PG3 e a RAM1 num mesmo computador ?

```
MB2 ∧ PG3 ∧ RAM1
```

```
# cat tp1_3.cnf
p cnf 12 19
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
6 0
9 0
3 0
```

```
# minisat tp1_3.cnf OUT
# (...)

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
1 -2 3 -4 -5 6 -7 -8 9 -10 -11 0
```

Como foi encontrada a solução que satisfaz a condição, concluímos que a afirmação é verdadeira.

d) Para combinarmos a placa gráfica PG2 e a RAM1 temos que usar o CPU2 ?

```
  (PG2 ∧ RAM1) → CPU2
≡ ¬ (PG2 ∧ RAM1) ∨ CPU2
≡ ¬ PG2 ∨ ¬ RAM1 ∨ CPU2
```

```
# cat tp1_4.cnf
p cnf 12 17
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
-8 -3 2 0
```

```
# minisat tp1_4.cnf OUT
# (...)

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
1 -2 -3 4 -5 6 -7 -8 9 -10 -11 0
```

Apesar de encontrarmos uma solução que satisfaz a condição, isto não nos garante que para combinarmos a placa gráfica PG2 e a RAM1 temos que usar o CPU2 .

Negação: ¬ (¬ PG2 ∨ ¬ RAM1 ∨ CPU2) ≡ PG2 ∧ RAM1 ∧ ¬ CPU2

```
# cat tp1_4.cnf
p cnf 12 19
-2 -1 0
1 2 0
-4 -3 0
3 4 0
-6 -5 0
5 6 0
7 8 9 0
-7 -8 0
```

```
-7 -9 0
-8 -9 0
-5 -7 3 0
-7 4 1 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
8 0
3 0
-2 0
```

```
# minisat tp1_4.cnf OUT
# (...)

SATISFIABLE
```

```
# cat OUT
SAT
2 3 -4 -5 6 -7 8 -9 -10 -11 0
```

Como a negação da condição é SATISFIABLE, podemos concluir que, para todos os casos, a afirmação é falsa.