Uma Introdução aos Espaços Vetoriais

Laura Armiliato Sangalli (UTFPR)
Acadêmica de Engenharia de Computação e bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado PICME, sob a orientação da professora Dra. Marieli Musial Tumelero - DAMAT-PB

XXIII Semana Acadêmica de Matemática COMAT/PROFMAT

Outubro, 2023

Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais

Um **Espaço Vetorial** sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto V *não vazio*, munido de duas operações:

- **Soma:**
$$+ : V \times V \to V$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$
- **Multiplicação**:
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$
$$(\alpha, u) \mapsto \alpha u$$

Espaços Vetoriais

Além disso, também satisfazem as seguintes propriedades (dados, $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$):

a) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Associativa)

b) $u + v = v + u$ (Comutativa)

c) Existe um $0 \in V$, tal que $u + 0 = u$ (0 é chamado vetor nulo)

d) Para todo $u \in V$, existe $-u$, tal que $u + (-u) = 0$, ($-u$ é chamado vetor oposto)

e) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributiva)

f) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (Distributiva)

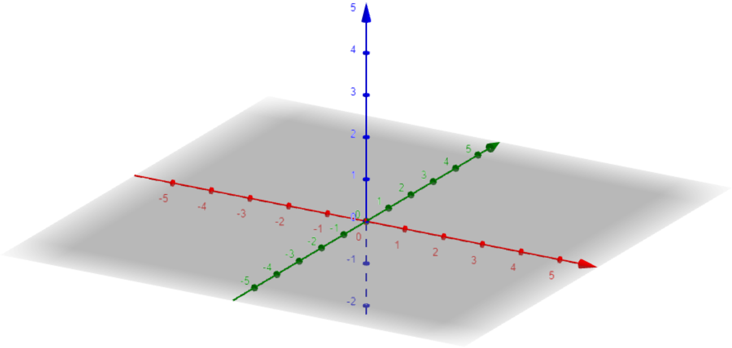
g) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

h) $1 \cdot u = u$

Espaços Vetoriais

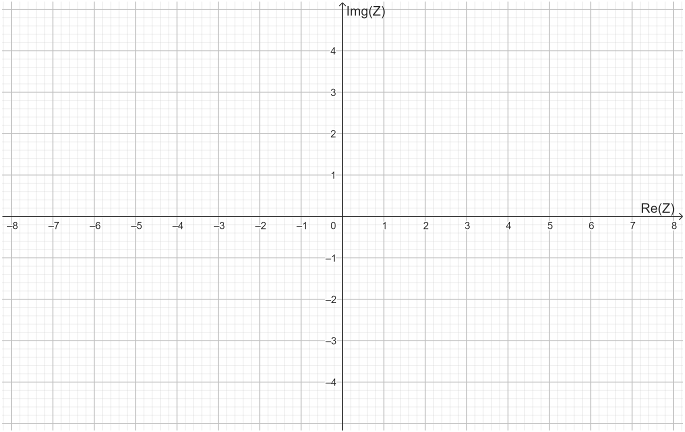
Se definirmos $\mathbb{K}$ como $\mathbb{R}$, teremos que V é chamado $\mathbb{R}$-espaço vetorial ou um espaço vetorial sobre os reais. Do mesmo modo, se $\mathbb{K}$ for igual a $\mathbb{C}$, V é dito $\mathbb{C}$-espaço vetorial ou espaço vetorial sobre os complexos. Além disso, os elementos de qualquer um desses espaços vetoriais são denominados vetores.

Espaços Vetoriais



O $\mathbb{R}^3$ é um exemplo de $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Espaços Vetoriais



O Plano de Argand-Gauss (Plano Complexo) é outro espaço vetorial bastante conhecido.

(**Boldrini, p. 129**) O conjunto das matrizes diagonais $n \times n$ com entradas reais, o qual denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, munido das operações usuais é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.
De fato, note que a soma de duas matrizes diagonais continua sendo uma matriz diagonal e que a multiplicação de uma matriz por um escalar também é uma matriz diagonal.

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

Precisamos agora verificar as propriedades correspondentes à definição de espaço vetorial pra descobrir se esse conjunto de matrizes é um espaço vetorial. Para isso, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

1. $A + [B + C]$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 + c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n + c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 + (b_2 + c_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n + (b_n + c_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2 + b_2) + c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_n + b_n) + c_n \end{bmatrix}$$

$$= [A + B] + C$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

2. $A+B$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2+b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n+b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1+a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n+a_n \end{bmatrix}$$

$$= B+A$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

3. $$\begin{aligned} &A + 0 \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 + 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n + 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

4. $A + (-A)$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

5. $$\alpha(A+B) = \alpha \cdot \left[\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\right]$$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2+b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n+b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1+\alpha b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha a_2+\alpha b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha a_n+\alpha b_n \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

6. $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta)a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha+\beta)a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha a_2 + \beta a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \alpha a_n + \beta a_n & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta a_n \end{bmatrix} = \alpha A + \beta A$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

7. $$(\alpha\beta)A = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha\beta)a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha\beta)a_n \end{bmatrix}$$
$$= \alpha\begin{bmatrix} \beta a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta a_n \end{bmatrix}$$
$$= \alpha(\beta A)$$

Espaços Vetoriais - Exemplo 1

8. $1A = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Subespaços Vetoriais

Subespaços Vetoriais

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um subespaço vetorial W é um subconjunto de V que por si só possui as características de um espaço vetorial definido sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e com as mesmas operações definidas em V e, portanto, é caracterizado como tal.
Para sabermos se um subconjunto W de V é subespaço vetorial, basta verificar se satisfaz as seguintes condições:

a) O vetor nulo de V está em W;
b) $\forall\, u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;
c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, v \in W \Rightarrow \alpha v \in W$.

Combinação Linear

Combinação Linear

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial que possua os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ e sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. Dizemos que o vetor

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \in V$$

é uma **combinação linear** de $v_1, ..., v_n$.

Combinação Linear

Considerando W um subespaço vetorial de V sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\{v_1, \cdots, v_n\}$ um conjunto fixo de vetores de V. Se para todo $u \in W$, tivermos

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n;\ u_i, v_i \in\ V;\ a_i \in\ \mathbb{K},$$

dizemos então que W um **subespaço gerado** por $v_1, \cdots, v_n$, o qual é denotado por $W = [v_1, v_2, ..., v_n]$

Dependência e Independência Linear

Dependência e Independência Linear

Muitas vezes, é de extrema importância sabermos se um vetor é combinação linear de outros ou não, pois essa informação define características do espaço vetorial em que tal vetor está inserido.Além disso, muitas vezes é interessante sabermos se não existe algum vetor que é uma combinação linear de outros vetores já presentes. Para isso, utilizamos os conceitos de dependência e independência linear.

Dependência e Independência Linear

Seja um conjunto de vetores $v_1, ..., v_n \in V$. Dizemos que esses vetores são **linearmente independentes (ou LI's)** se e somente se

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$ implicar que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Em caso de existir ao menos um $a_i \neq 0$, dizemos que o conjunto de vetores é **linearmente dependente** entre si, ou simplesmente dizemos que os vetores são LD'S.

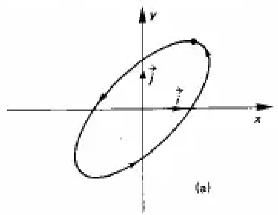
Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

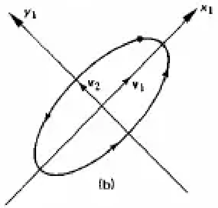
Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

Em determinadas situações, precisamos encontrar um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tais que qualquer vetor v dentro de um determinado espaço vetorial V seja gerado a partir de uma combinação linear deles, sem excesso ou falta de vetores para esse fim. Nomearemos esse conjunto como base e seguiremos algumas regras para determinar sua aceitabilidade.

Espaços Vetoriais

Uma motivação para o conhecimento e manipulação de bases vetoriais está exemplificado abaixo. Muitas vezes, nos deparamos com situações em espaços vetoriais que envolvem um cálculo matemático complexo, como o da elipse em (a). Contudo, se soubermos manipular a base geradora desse espaço, podemos tornar o problema muito mais simples, do mesmo modo que em (b).





Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

Para ser considerado uma base geradora, o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ deve:

a) Ser linearmente independente (LI);

b) $[v_1, v_2, ..., v_n] = V$, ou seja, gerar V.

Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

Se um espaço vetorial V for gerado por um conjunto finito de vetores (finitamente gerado) $v_1, ..., v_n$, qualquer outro conjunto LI de n vetores também será uma base para V. Isso implica que qualquer base geradora para V terá um tamanho n, o qual denomina-se *dimensão*.

A dimensão pode ser representada como $dim_{\mathbb{K}}\ V = n$ ou quando não há necessidade de explicitar o corpo, denota-se $dimV = n$.

Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

Seja um conjunto de vetores não nulos $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ que geram um espaço vetorial V. Entre esses vetores, podemos extrair uma base vetorial de V. Se eles forem LI's, nada será preciso fazer, contudo, se eles forem LD's, precisaremos encontrar os vetores que são formados pela combinação dos demais e removê-los do conjunto. Dessa forma, teremos uma base geradora para V.

Exemplo 1 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

Boldrini, p.131 Mostre que o conjunto $\beta = \{1-t^3, (1-t)^2, 1-t, 1\}$ dos polinômios com coeficientes reais, geram o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3, isto é, geram o $P_3(\mathbb{R})$.

Exemplo 1 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

a) **Provando que os vetores são LI's:**
Seja $a(1-t^3)+b(1-t)^2+c(1-t)+d \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}); a,b,c,d \in \mathbb{R}$:
$a(1-t^3)+b(1-t)^2+c(1-t)+d=0$
$a-at^3+bt^2-2bt+b+c-ct+d=0$
$t(-a)^3+(b)t^2+(-c-2b)t+(a+b+c+d)=0t^3+0t^2+0t+0$
$$\begin{cases} -a=0b=0 \\ -c-2b=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$
$\Rightarrow a=b=c=d=0$
$0(1-t^3)+0(1-t)^2+0(1-t)+0=0$
Portanto, β é LI.

Exemplo 1 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

b) **Provando que $[1-t^3, (1-t)^2, 1-t, 1] = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:**

Seja $xt^3 + yt^2 + zt + w \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}); x, y, z, w \in \mathbb{R}$:

$a(1-t^3) + b(1-t)^2 + c(1-t) + d = wt^3 + xt^2 + yt + z$

$a - at^3 + bt^2 - 2bt + b + c - ct + d = wt^3 + xt^2 + yt + z$

$t^3(-a) + t^2(b) + t(-c-2b) + (a+b+c+d) = wt^3 + xt^2 + yt + z$

$$\begin{cases} -a = x \\ b = y \\ -c - 2b = z \\ a + b + c + d = w \end{cases}$$

$a = -x$

$b = y$

$c = -z - 2y$

$d = w + x + y + z$

Exemplo 1 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

Dessa forma,

$xt^3 + yt^2 + zt + w = (-x)(1-t^3) + (y)(1-t)^2 + (-z-2y)(1-t) + (w+x+y+z)$

Portanto, o conjunto β é base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

Exemplo 2 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

O espaço vetorial $\mathbb{C}$ possui uma base β no corpo dos complexos ($\mathbb{C}$) e outra base diferente, β', em $\mathbb{R}$. Encontre ambas as bases.

Exemplo 2 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

1. **Para a base β:**
   Considerando que todo o elemento $z \in \mathbb{C}$ possui a forma $z = a + bi$, seja $x \in \mathbb{C}$:

   $$z = xz$$

   $$x = 1$$

   Portanto, $\beta = \{1\}$ e $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.

Exemplo 2 - Bases Geradoras de Espaços Vetoriais

2. **Para a base β':**
   Considerando novamente que todo o elemento $z \in \mathbb{C}$ possui a forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z = a + bi$$

$$z = a.1 + b.i$$

   Portanto, $\beta' = \{1, i\}$ e $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.

Método Prático para o Completamento de Base

Método Prático para o Completamento de Base

Como citado anteriormente, muitas vezes temos um conjunto de vetores que pode ser uma base geradora de um espaço vetorial, contudo, supõe-se que há vetores LD's que devem ser descartados do conjunto. Para determinar quais são eles, usamos o método prático para completamento de base apresentado a seguir:

Método Prático para o Completamento de Base

1. Primeiramente, fixamos uma base ordenada $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$;
2. $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ é o conjunto finito de vetores pertencentes ao espaço vetorial V que estão sendo analisados, os quais podem ser LI's ou LD'S.
3. Como α é uma base de V, cada vetor w_i é uma combinação linear de α. Fazendo uso disso, montamos uma matriz em que as linhas i são as respectivas coordenadas de w_i na base α.
4. Escalonamos da matriz. Se uma das linhas zerar, ela é combinação linear das demais e, portanto, LD.

Método Prático para o Completamento de Base

5. Após finalizar o escalonamento, substituímos as linhas zeradas de forma a montar uma matriz triangular superior. O elemento m_{ii} dessa linha deve ser 1 e os demais itens devem ser zero.
6. Por fim, substitui-se as linhas que não zeraram pelas mesmas linhas antes do escalonamento. Com isso, obtém-se a matriz da base. As linhas correspondem as coordenadas de cada um dos vetores nessa base.

Obrigada!