Assignment 2

Cavenati Laura matricola: 864000

29 aprile 2020

Problema 1

Consideriamo il seguente ILP:
max $9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$
s.t.
$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$
$x_3 + x_4 \leq 1$
$-x_1 + x_3 \leq 0$
$-x_2 + x_4 \leq 0$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

1) I nodi che saranno visitati dall'algoritmo BB, in ordine, sono:
   $P_0, P_1, P_2, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}$
   Definiamo come upper bound il valore di z per la soluzione rilassata associata al nodo e come lower bound il valore di z per la soluzione rilassata arrotondata per difetto (in questo caso si verifica che siano rispettati i vincoli). La soluzione intera ottima sara' compresa entro questi limiti.
   Nel nostro caso abbiamo:
   $P_0 : UB = \frac{5}{6}x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 16.5 \quad LB = 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 9$
   $P_1 : UB = 16.2 \quad LB = 9$
   $P_2 : UB = 9 \quad LB = 9$
   $P_7 : UB = 16 \quad LB = 14$
   $P_8 : unfeasible$
   $P_9 : UB = 16 \quad LB = 14$
   $P_{10} : unfeasible$
   $P_{11} : UB = 14 \quad LB = 14$
   $P_{12} : UB = 13.8 \quad LB = 9$
   Per i lower bound sono rispettati i vincoli. Alternativamente si potrebbe definire il lower bound come la miglior soluzione trovata fino a quel momento dall'algoritmo in esecuzione.
   La soluzione ottima e' quella associata al nodo 11, $x^* = (1, 1, 0, 0)$, a cui e' associata una funzione obiettivo pari a 14.

2) Risoluzione del problema in R
   La libreria che useremo e':

```
library(lpSolve)
```

Definiamo la funzione obiettivo e la matrice dei vincoli:

```
obj.fun<-c(9,5,6,4)
constr<-matrix (c(6,3,5,2,
                  0,0,1,1,
                  -1,0,0,1,
                  0,-1,0,1),
                ncol=4 , byrow =TRUE)
```

```
constr.dir<-c("<=","<=","<=","<=")
rhs<-c(10,1,0,0)
```

Creiamo il modello lineare intero con le quattro variabili, la funzione obiettivo e i vincoli:

```
model<-lp("max", obj.fun, constr, constr.dir, rhs, compute.sens=TRUE, binary.vec=1:4)
```

Visualizziamo i risultati:

```
model$solution
```

```
## [1] 1 1 0 0
```

```
model$objval
```

```
## [1] 14
```

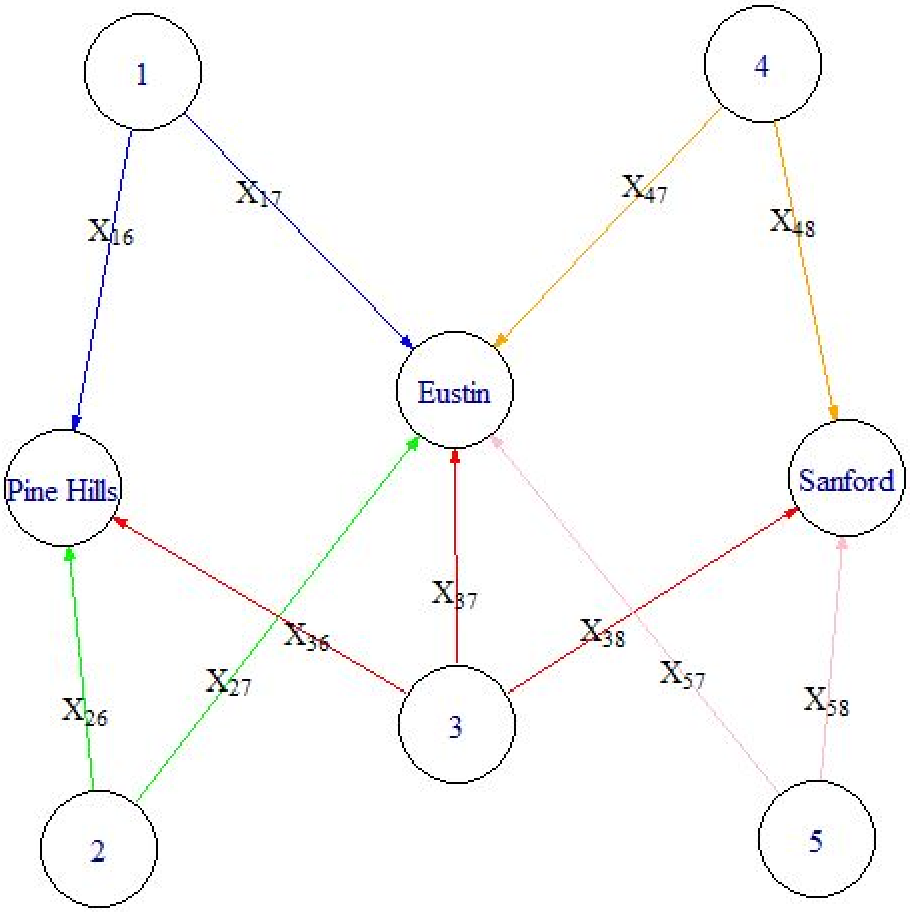
La soluzione e la funzione obiettivo, come ci aspettavamo, assumono gli stessi valori trovati al punto 1.

Problema 2

SunNet e' un provider di servizi Internet residenziale nella zona centrale della Florida. Attualmente, la compagnia gestisce una struttura centralizzata che tutti i suoi clienti usano per l'accesso a Internet. Per migliorare il servizio, la societa' prevede di aprire tre uffici satelliti nelle citta' di Pine Hills, Eustis e Sanford. La societa' ha identificato cinque diverse regioni che saranno servite da questi tre uffici. SunNet desidera determinare il numero di clienti da ciascuna regione da assegnare a ciascun centro servizi per ridurre al minimo il costo totale.

Network flow model che rappresenta il problema

I nodi 1,2,3,4,5 indicano le rispettive regioni che saranno servite. Gli archi che collegano i vari nodi hanno una lunghezza proporzionale al costo mensile per cliente per portare il servizio da ogni ufficio a ogni regione.



Definizione delle variabili

X_{16} = # di clienti della regione 1 (nodo 1) assegnati all'ufficio della citta' di Pine Hills (nodo 6)
X_{17} = # di clienti della regione 1 (nodo 1) assegnati all'ufficio della citta' di Eustis (nodo 7)
X_{26} = # di clienti della regione 2 (nodo 2) assegnati all'ufficio della citta' di Pine Hills (nodo 6)
X_{27} = # di clienti della regione 2 (nodo 2) assegnati all'ufficio della citta' di Eustis (nodo 7)
X_{36} = # di clienti della regione 3 (nodo 3) assegnati all'ufficio della citta' di Pine Hills (nodo 6)
X_{37} = # di clienti della regione 3 (nodo 3) assegnati all'ufficio della citta' di Eustis (nodo 7)
X_{38} = # di clienti della regione 3 (nodo 3) assegnati all'ufficio della citta' di Sanford (nodo 8)
X_{47} = # di clienti della regione 4 (nodo 4) assegnati all'ufficio della citta' di Eustis (nodo 7)
X_{48} = # di clienti della regione 4 (nodo 4) assegnati all'ufficio della citta' di Sanford (nodo 8)
X_{57} = # di clienti della regione 5 (nodo 5) assegnati all'ufficio della citta' di Eustis (nodo 7)
X_{58} = # di clienti della regione 5 (nodo 5) assegnati all'ufficio della citta' di Sanford (nodo 8)

Definizione della funzione obiettivo

In questo caso noi vogliamo minimizzare il costo P, che e' funzione delle 11 variabili definite e del costo mensile medio per cliente per portare il servizio a ogni regione da ogni ufficio.
$P = 6.50 * X_{16} + 7.50 * X_{17} + 7.00 * X_{26} + 8.00 * X_{27} + 8.25 * X_{36} + 7.25 * X_{37} + 6.75 * X_{38}$
$+7.75 * X_{47} + 7.00 * X_{48} + 7.50 * X_{57} + 6.75 * X_{58}$

Definizione dei vincoli

- La somma dei clienti relativi a una certa regione e facenti riferimento a diversi centri di servizio deve essere pari al numero di clienti totali della regione:

  $X_{16} + X_{17} = 30000$
  $X_{26} + X_{27} = 40000$
  $X_{36} + X_{37} + X_{38} = 25000$
  $X_{47} + X_{48} = 35000$
  $X_{57} + X_{58} = 33000$

- La somma dei clienti per ogni centro di servizio non deve superare la capacita' dei centri di servizio:

  $X_{16} + X_{26} + X_{36} \leq 60000$
  $X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{47} + X_{57} \leq 70000$
  $X_{38} + X_{48} + X_{58} \leq 40000$

- Le variabili devono essere intere non negative:
  $X_{ij} \geq 0$, $X_{ij} \in \mathbb{N}$

La somma dei clienti di tutte le regioni, pari a 163000, e' infiore alla capacita' totale dei tre centri, pari a 170000. Cio' vuol dire che i centri di servizio potrebbero servire altri 7000 clienti.

Risoluzione del problema in R

Le librerie che useremo sono:

```
library(lpSolveAPI)
library(lpSolve)
```

Definiamo la funzione obiettivo e la matrice dei vincoli:

```
obj.fun<-c(6.5,7.5,7,8,8.25,7.25,6.75,7.75,7,7.5,6.75)
constr<-matrix (c(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                  0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,
                  0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,
                  0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,
                  0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,
                  1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,
                  0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,
                  0,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1),
                  ncol=11, byrow =TRUE)
constr.dir<-c("=","=","=","=","=","<=","<=","<=")
rhs<-c(30000,40000,25000,35000,33000,60000,70000,40000)
```

Creiamo il modello lineare intero con le undici variabili, la funzione obiettivo e i vincoli definiti precedentemente:

```
model<-lp("min", obj.fun, constr, constr.dir, rhs, compute.sens=TRUE,int.vec=1:11)
```

Risolviamo il problema e visualizziamo i risultati:

```
model$solution
```

```
##  [1] 20000 10000 40000     0     0 25000     0     0 35000 28000  5000
```

```
model$objval
```

```
## [1] 1155000
```

Il costo totale sara' $1155000.
La soluzione ottima prevede che:

$X_{16} = 20000, X_{17} = 10000$
$X_{26} = 40000, X_{26} = 0$
$X_{36} = 0, X_{37} = 25000, X_{38} = 0$
$X_{47} = 0, X_{48} = 35000$
$X_{57} = 28000, X_{58} = 5000$
Cio' vuol dire per esempio che 20000 clienti della regione 1 saranno assegnati al centro di servizio di Pine Hills e i restanti 10000 al centro di Eustin. Quelli della regione 2 invece saranno assegnati tutti al centro di Pine Hills (infatti portare il servizio da Pine Hills alla regione 2 costa $1.00 meno che da Eustis). La seguente tabella rappresenta piu' chiaramente i risultati:

Regione	Ufficio	costo	model.solution
1	Pine Hills	6.50	20000
1	Eustis	7.50	10000
2	Pine Hills	7.00	40000
2	Eustis	8.00	0
3	Pine Hills	8.25	0
3	Eustis	7.25	25000
3	Sanford	6.75	0
4	Eustis	7.75	0
4	Sanford	7.00	35000
5	Eustis	7.50	28000
5	Sanford	6.75	5000

Facendo la somma dei clienti serviti da ogni centro di servizio si vede un avanzo di 7000 clienti per la stazione di Sanford.