Tehnica *Ray Tracing* – algoritmi fundamentali

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Despre...

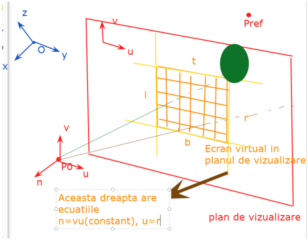
Sursa: https://en.wikipedia.org/wiki/Ray_tracing_(graphics)#/media/File:Glasses_800_edit.png

Ray Tracing este o tehnică legată de detectarea suprafețelor vizibile. În general, această problemă poate fi abordată folosind:

- metode ale spațiului obiectelor;
- metode ale spațiului imagine.

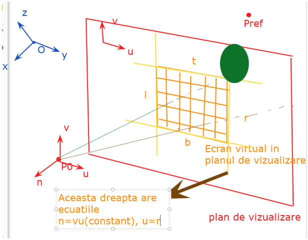
Tehnica *Ray Tracing* combină cele două abordări, "aducând" pixelii în spațiul obiectelor și operând pixel cu pixel.

Ecran virtual în spațiul obiectelor



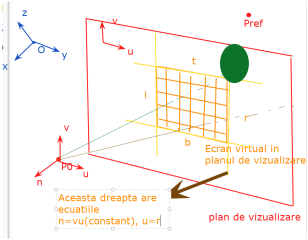
- Punctul P_0 – observator: originea **reperului de vizualizare**.

Ecran virtual în spațiul obiectelor



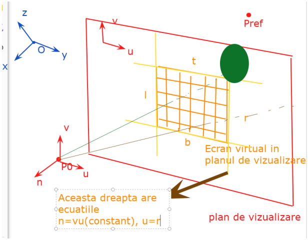
- Punctul P_0 – observator: originea **reperului de vizualizare**.
- Versorii $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{n})$: orizontala și verticala din planul de vizualizare, respectiv normala pe planul de vizualizare
- În continuare, prin abuz de notație, vom folosi aceleași litere pentru a nota coordonatele în raport cu reperul de vizualizare, ca și pentru versorii care le determină, i.e. $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{n})$.

Ecran virtual în spațiul obiectelor



- Punctul P_0 – observator: originea **reperului de vizualizare**.
- Versorii $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{n})$: orizontala și verticala din planul de vizualizare, respectiv normala pe planul de vizualizare
- În continuare, prin abuz de notație, vom folosi aceleași litere pentru a nota coordonatele în raport cu reperul de vizualizare, ca și pentru versorii care le determină, i.e. $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{n})$.
- În particular, planul de vizualizare are o ecuație de forma $\mathrm{n} = \nu(const.)$. În planul de vizualizare se consideră un "ecran virtual", delimitat de dreptele de ecuații $\mathrm{u} = l, \mathrm{n} = \nu$; $\mathrm{u} = r, \mathrm{n} = \nu$; $\mathrm{v} = b, \mathrm{n} = \nu$; $\mathrm{v} = t, \mathrm{n} = \nu$.

Ecran virtual în spațiul obiectelor



- Punctul P_0 – observator: originea **reperului de vizualizare**.
- Versorii $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{n})$: orizontala și verticala din planul de vizualizare, respectiv normala pe planul de vizualizare
- În continuare, prin abuz de notație, vom folosi aceleași litere pentru a nota coordonatele în raport cu reperul de vizualizare, ca și pentru versorii care le determină, i.e. $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{n})$.
- În particular, planul de vizualizare are o ecuație de forma $\mathrm{n} = \nu(const.)$. În planul de vizualizare se consideră un "ecran virtual", delimitat de dreptele de ecuații $\mathrm{u} = l, \mathrm{n} = \nu$; $\mathrm{u} = r, \mathrm{n} = \nu$; $\mathrm{v} = b, \mathrm{n} = \nu$; $\mathrm{v} = t, \mathrm{n} = \nu$.
- Obiectele sunt indicate în raport cu **reperul de modelare** $Oxyz$.

Despre pixeli

- Fie P centru al unui pixel virtual. Determinăm în continuare forma coordonatelor sale.

Despre pixeli

- Fie P centru al unui pixel virtual. Determinăm în continuare forma coordonatelor sale.
- Fie n_x numărul de coloane și n_y numărul de linii din structura de pixeli.

Despre pixeli

- Fie P centru al unui pixel virtual. Determinăm în continuare forma coordonatelor sale.
- Fie n_x numărul de coloane și n_y numărul de linii din structura de pixeli.
- Un pixel real s este dat de o pereche $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu $i = 0, \ldots, n_x - 1, j = 0, \ldots, n_y - 1$, iar pixelul virtual asociat are coordonatele

$$\begin{cases} \mathrm{u}_s = l + \dfrac{(r-l)}{n_x}(i+0.5) \\ \mathrm{v}_s = b + \dfrac{(t-b)}{n_y}(j+0.5) \\ \mathrm{n}_s = \nu \end{cases} \tag{1}$$

Despre pixeli

- Fie P centru al unui pixel virtual. Determinăm în continuare forma coordonatelor sale.
- Fie n_x numărul de coloane și n_y numărul de linii din structura de pixeli.
- Un pixel real s este dat de o pereche $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu $i = 0, \ldots, n_x - 1, j = 0, \ldots, n_y - 1$, iar pixelul virtual asociat are coordonatele
$$\begin{cases} \mathrm{u}_s = l + \dfrac{(r-l)}{n_x}(i+0.5) \\ \mathrm{v}_s = b + \dfrac{(t-b)}{n_y}(j+0.5) \\ \mathrm{n}_s = \nu \end{cases} \tag{1}$$
- Acestea pot fi transferate ulterior în coordonate de modelare, folosind matricea de trecere de la reperul de modelare la reperul de vizualizare.

Pașii algoritmului

Pașii algoritmului *Ray Tracing* fundamental (*basic Ray Tracing*) sunt următorii:

- se duce o rază prin punctul P_0 care unește acest punct cu centrul unui pixel *virtual*;

Pașii algoritmului

Pașii algoritmului *Ray Tracing* fundamental (*basic Ray Tracing*) sunt următorii:

- se duce o rază prin punctul P_0 care unește acest punct cu centrul unui pixel *virtual*;
- se găsește primul obiect intersectat (eventual se găsesc toate obiectele intersectate) de rază;

Pașii algoritmului

Pașii algoritmului *Ray Tracing* fundamental (*basic Ray Tracing*) sunt următorii:

- se duce o rază prin punctul P_0 care unește acest punct cu centrul unui pixel *virtual*;
- se găsește primul obiect intersectat (eventual se găsesc toate obiectele intersectate) de rază;
- pentru pixelul *real* proprietățile sunt determinate pe baza valorilor obținute pentru intersecție (culoare, material, normale, coeficient α, etc.).

Pașii algoritmului

Pașii algoritmului *Ray Tracing* fundamental (*basic Ray Tracing*) sunt următorii:

- se duce o rază prin punctul P_0 care unește acest punct cu centrul unui pixel *virtual*;
- se găsește primul obiect intersectat (eventual se găsesc toate obiectele intersectate) de rază;
- pentru pixelul *real* proprietățile sunt determinate pe baza valorilor obținute pentru intersecție (culoare, material, normale, coeficient α, etc.).
- *Implementarea* are doi pași, aplicați pentru fiecare pixel virtual: (i) reprezentarea razelor și (ii) determinarea intersecțiilor.

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.

- Raza dusă prin P_0 care trece prin P are reprezentarea (ca dreaptă)

$$r(t) = P_0 + t\mathrm{d} = P_0 + t(P - P_0) = (1 - t)P_0 + tP,\ t \in \mathbb{R};\ \mathrm{d} = P - P_0 \quad (2)$$

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.

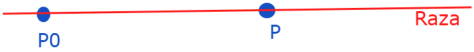
- Raza dusă prin P_0 care trece prin P are reprezentarea (ca dreaptă)

$$r(t) = P_0 + t\mathrm{d} = P_0 + t(P - P_0) = (1 - t)P_0 + tP,\ t \in \mathbb{R};\ \mathrm{d} = P - P_0 \tag{2}$$

- Orice punct de pe rază este dat de un t și reciproc. În concluzie, a stabili poziția relativă a două puncte $P_1(t_1)$ și $P_2(t_2)$ revine la a compara valorile t_1 și t_2 corespunzătoare.

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.



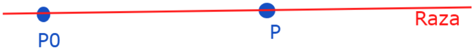
- Raza dusă prin P_0 care trece prin P are reprezentarea (ca dreaptă)

$$r(t) = P_0 + t\mathrm{d} = P_0 + t(P - P_0) = (1-t)P_0 + tP, \ t \in \mathbb{R}; \ \mathrm{d} = P - P_0 \tag{2}$$

- Orice punct de pe rază este dat de un t și reciproc. În concluzie, a stabili poziția relativă a două puncte $P_1(t_1)$ și $P_2(t_2)$ revine la a compara valorile t_1 și t_2 corespunzătoare.
- Valorile lui t au diferite semnificații geometrice referitoare la poziția punctului $r(t)$, de exemplu:

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.



- Raza dusă prin P_0 care trece prin P are reprezentarea (ca dreaptă)

$$r(t) = P_0 + t\mathrm{d} = P_0 + t(P - P_0) = (1-t)P_0 + tP, \ t \in \mathbb{R}; \ \mathrm{d} = P - P_0 \tag{2}$$

- Orice punct de pe rază este dat de un t și reciproc. În concluzie, a stabili poziția relativă a două puncte $P_1(t_1)$ și $P_2(t_2)$ revine la a compara valorile t_1 și t_2 corespunzătoare.
- Valorile lui t au diferite semnificații geometrice referitoare la poziția punctului $r(t)$, de exemplu:
  (i) Pentru $t < 0$ punctul curent $r(t)$ se află ”în spatele” observatorului;

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.

- Raza dusă prin P_0 care trece prin P are reprezentarea (ca dreaptă)

$$r(t) = P_0 + t\mathrm{d} = P_0 + t(P - P_0) = (1 - t)P_0 + tP, \ t \in \mathbb{R}; \ \mathrm{d} = P - P_0 \tag{2}$$

- Orice punct de pe rază este dat de un t și reciproc. În concluzie, a stabili poziția relativă a două puncte $P_1(t_1)$ și $P_2(t_2)$ revine la a compara valorile t_1 și t_2 corespunzătoare.
- Valorile lui t au diferite semnificații geometrice referitoare la poziția punctului $r(t)$, de exemplu:
  (i) Pentru $t < 0$ punctul curent $r(t)$ se află "în spatele" observatorului;
  (ii) Pentru $0 < t_1 < t_2$ punctul $r(t_1)$ este mai aproape de observator decât punctul $r(t_2)$, etc.

Reprezentarea razelor

- Fie P_0 observatorul și P un punct de pe ecranul virtual (coordonatele sale sunt obținute din ecuația (1), transferate în reperul de modelare.

- Raza dusă prin P_0 care trece prin P are reprezentarea (ca dreaptă)

$$r(t) = P_0 + t\mathrm{d} = P_0 + t(P - P_0) = (1 - t)P_0 + tP,\ t \in \mathbb{R};\ \mathrm{d} = P - P_0 \tag{2}$$

- Orice punct de pe rază este dat de un t și reciproc. În concluzie, a stabili poziția relativă a două puncte $P_1(t_1)$ și $P_2(t_2)$ revine la a compara valorile t_1 și t_2 corespunzătoare.
- Valorile lui t au diferite semnificații geometrice referitoare la poziția punctului $r(t)$, de exemplu:
  - (i) Pentru $t < 0$ punctul curent $r(t)$ se află "în spatele" observatorului;
  - (ii) Pentru $0 < t_1 < t_2$ punctul $r(t_1)$ este mai aproape de observator decât punctul $r(t_2)$, etc.
  - (iii) Semidreapta este caracterizată de condiția $t > 0$

Principiu și formalizare

- Principiul fundamental este: *Găsirea punctului de intersecție de pe dreaptă este echivalentă cu determinarea parametrului t corespunzător.*

Principiu și formalizare

- Principiul fundamental este: *Găsirea punctului de intersecție de pe dreaptă este echivalentă cu determinarea parametrului t corespunzător.*
- Din punct de vedere formal, *Ray Tracing* poate fi privit ca o procedură

$$\mathtt{RT}(\mathtt{vec3}\ P_0, \mathtt{vec3}\ \mathrm{d}, \mathtt{real}\ t_0, \mathtt{real}\ t_1).$$

Principiu și formalizare

- Principiul fundamental este: *Găsirea punctului de intersecție de pe dreaptă este echivalentă cu determinarea parametrului t corespunzător.*
- Din punct de vedere formal, *Ray Tracing* poate fi privit ca o procedură

$$\mathtt{RT}(\mathtt{vec3}\ P_0, \mathtt{vec3}\ \mathrm{d}, \mathtt{real}\ t_0, \mathtt{real}\ t_1).$$

  - *Datele de intrare* sunt: punctul P_0 (poziția observatorului), direcția d a razei, numerele reale t_0, t_1; $[t_0, t_1]$ fiind intervalul în care se caută soluția t - de obicei este ales $[0, \infty)$.

Principiu și formalizare

- Principiul fundamental este: *Găsirea punctului de intersecție de pe dreaptă este echivalentă cu determinarea parametrului t corespunzător.*
- Din punct de vedere formal, *Ray Tracing* poate fi privit ca o procedură

$$\texttt{RT}(\texttt{vec3}\ P_0, \texttt{vec3}\ \mathrm{d}, \texttt{real}\ t_0, \texttt{real}\ t_1).$$

  - *Datele de intrare* sunt: punctul P_0 (poziția observatorului), direcția d a razei, numerele reale t_0, t_1; $[t_0, t_1]$ fiind intervalul în care se caută soluția t - de obicei este ales $[0, \infty)$.
  - *Datele de ieșire* sunt date de o mulțime care poate fi: (i) $\emptyset$ (dacă raza nu intersectează niciun obiect); (ii) $\{t\}$ (dacă raza intersectează un obiect, acesta este parametrul t corespunzător punctului de intersecție). De asemenea, se poate considera procedura $\texttt{rayColor}(P)$, al cărei efect este determinarea culorii pixelului real corespunzător pixelului virtual P.

Intersecții cu obiecte - sfere

- Fie $\mathcal{S}$ o sferă de centru $\mathsf{C} \in \mathbb{R}^3$ și rază $R > 0$. Datorită invarianței ecuației sferei la izometrii, se poate lucra direct în coordonate de vizualizare, fiind necesară cel mult o translație.

Intersecții cu obiecte - sfere

- Fie $\mathcal{S}$ o sferă de centru $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^3$ și rază $R > 0$. Datorită invarianței ecuației sferei la izometrii, se poate lucra direct în coordonate de vizualizare, fiind necesară cel mult o translație.
- Fie $\mathrm{X} = (\mathrm{u_X}, \mathrm{v_X}, \mathrm{n_X})$ un punct; atunci el aparține sferei dacă și numai dacă
$$d(X, C)^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|X - C\|^2 - R^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{C}) \cdot (\mathrm{X} - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
Raza r dată de (2) intersectează sfera dacă și numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$(r(t) - \mathrm{C}) \cdot (r(t) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$

Intersecții cu obiecte - sfere

- Fie $\mathcal{S}$ o sferă de centru $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^3$ și rază $R > 0$. Datorită invarianței ecuației sferei la izometrii, se poate lucra direct în coordonate de vizualizare, fiind necesară cel mult o translație.
- Fie $\mathrm{X} = (\mathrm{u_X}, \mathrm{v_X}, \mathrm{n_X})$ un punct; atunci el aparține sferei dacă și numai dacă
$$d(X, C)^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|X - C\|^2 - R^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{C}) \cdot (\mathrm{X} - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
Raza r dată de (2) intersectează sfera dacă și numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$(r(t) - \mathrm{C}) \cdot (r(t) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
- Notând $\mathrm{d} = P - P_0$, ecuația de mai sus este echivalentă cu
$$((P_0 + t\mathrm{d}) - \mathrm{C}) \cdot ((P_0 + t\mathrm{d}) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$

Intersecții cu obiecte - sfere

- Fie $\mathcal{S}$ o sferă de centru $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^3$ și rază $R > 0$. Datorită invarianței ecuației sferei la izometrii, se poate lucra direct în coordonate de vizualizare, fiind necesară cel mult o translație.
- Fie $\mathrm{X} = (\mathrm{u_X}, \mathrm{v_X}, \mathrm{n_X})$ un punct; atunci el aparține sferei dacă și numai dacă
$$d(X, C)^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|X - C\|^2 - R^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{C}) \cdot (\mathrm{X} - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
Raza r dată de (2) intersectează sfera dacă și numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$(r(t) - \mathrm{C}) \cdot (r(t) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
- Notând $\mathrm{d} = P - P_0$, ecuația de mai sus este echivalentă cu
$$((P_0 + t\mathrm{d}) - \mathrm{C}) \cdot ((P_0 + t\mathrm{d}) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
- Această ecuație revine la
$$(\mathrm{d} \cdot \mathrm{d})t^2 + 2\mathrm{d} \cdot (P_0 - \mathrm{C})t + (P_0 - \mathrm{C}) \cdot (P_0 - \mathrm{C}) - R^2 = 0,$$
adică la o ecuație de gradul II în t.

Intersecții cu obiecte - sfere

- Fie $\mathcal{S}$ o sferă de centru $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^3$ și rază $R > 0$. Datorită invarianței ecuației sferei la izometrii, se poate lucra direct în coordonate de vizualizare, fiind necesară cel mult o translație.
- Fie $\mathrm{X} = (\mathrm{u_X}, \mathrm{v_X}, \mathrm{n_X})$ un punct; atunci el aparține sferei dacă și numai dacă
$$d(X, C)^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|X - C\|^2 - R^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{C}) \cdot (\mathrm{X} - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
Raza r dată de (2) intersectează sfera dacă și numai dacă există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$(r(t) - \mathrm{C}) \cdot (r(t) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
- Notând $\mathrm{d} = P - P_0$, ecuația de mai sus este echivalentă cu
$$((P_0 + t\mathrm{d}) - \mathrm{C}) \cdot ((P_0 + t\mathrm{d}) - \mathrm{C}) - R^2 = 0.$$
- Această ecuație revine la
$$(\mathrm{d} \cdot \mathrm{d})t^2 + 2\mathrm{d} \cdot (P_0 - \mathrm{C})t + (P_0 - \mathrm{C}) \cdot (P_0 - \mathrm{C}) - R^2 = 0,$$
adică la o ecuație de gradul II în t.
- Pentru aceasta este verificată mai întâi condiția de existență a soluțiilor reale ($\Delta \geq 0$), apoi, dacă admite soluții se găsește cea mai mică soluție pozitivă, etc.

Intersecții cu obiecte - triunghiuri (I)

- Fie a, b, c vârfurile triunghiului considerat.

Intersecții cu obiecte - triunghiuri (I)

- Fie $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ vârfurile triunghiului considerat.
- Un punct din *planul* triunghiului poate fi reprezentat sub formă de *combinație afină / baricentrică* a punctelor $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$

$$(1-\beta-\gamma)\mathsf{a}+\beta\mathsf{b}+\gamma\mathsf{c}, \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

iar un punct situat pe laturile triunghiului sau în interiorul său poate fi reprezentat sub formă de combinație convexă

$$(1-\beta-\gamma)\mathsf{a}+\beta\mathsf{b}+\gamma\mathsf{c}, \qquad \beta, \gamma, 1-\beta-\gamma \in [0,1].$$

Intersecții cu obiecte - triunghiuri (I)

- Fie a, b, c vârfurile triunghiului considerat.
- Un punct din *planul* triunghiului poate fi reprezentat sub formă de *combinație afină / baricentrică* a punctelor a, b, c

$$(1-\beta-\gamma)a+\beta b+\gamma c, \qquad \beta,\gamma \in \mathbb{R},$$

iar un punct situat pe laturile triunghiului sau în interiorul său poate fi reprezentat sub formă de combinație convexă

$$(1-\beta-\gamma)a+\beta b+\gamma c, \qquad \beta,\gamma, 1-\beta-\gamma \in [0,1].$$

- A determina (posibila) intersecție dintre rază și triunghi revine la a găsi $t, \in \mathbb{R}, \beta, \gamma \in [0,1]$ cu $1-\beta-\gamma \in [0,1]$ astfel ca

$$P_0 + td = (1-\beta-\gamma)a+\beta b+\gamma c. \qquad (3)$$

Intersecții cu obiecte - triunghiuri (II)

- În coordonate, ecuația

$$P_0 + t\mathrm{d} = (1 - \beta - \gamma)\mathrm{a} + \beta\mathrm{b} + \gamma\mathrm{c}$$

reprezintă un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, β, γ, t. Compatibilitatea sa și natura soluțiilor (dacă există) dau informații despre intersecția dintre rază și triunghi:

Intersecții cu obiecte - triunghiuri (II)

- În coordonate, ecuația

$$P_0 + t\mathrm{d} = (1 - \beta - \gamma)\mathrm{a} + \beta\mathrm{b} + \gamma\mathrm{c}$$

reprezintă un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, β, γ, t. Compatibilitatea sa și natura soluțiilor (dacă există) dau informații despre intersecția dintre rază și triunghi:

  - dacă $\beta, \gamma, 1 - \beta - \gamma \in [0, 1]$ și $t \in \mathbb{R}$ există, atunci raza intersectează triunghiul sau interiorul său;
  - dacă $\beta \notin [0, 1]$ sau $\gamma \notin [0, 1]$ sau $1 - \beta - \gamma \notin [0, 1]$ (dar β, γ există în $\mathbb{R}$), atunci raza intersectează planul, însă în afara triunghiului;
  - dacă β, γ nu există, dreapta este paralelă cu planul sau triunghiul este degenerat, etc.

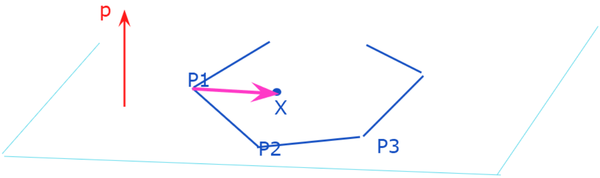
Intersecții cu obiecte - poligoane convexe (I)

- Fie $P_1 P_2 \ldots P_m$ un poligon convex; fie p normala la planul triunghiului (este bine definită, deoarece poligonul este convex!).

Intersecții cu obiecte - poligoane convexe (I)

- Fie $P_1 P_2 \ldots P_m$ un poligon convex; fie p normala la planul triunghiului (este bine definită, deoarece poligonul este convex!).
- Un punct arbitrar X aparține planului poligonului dacă și numai dacă vectorul format de X și unul dintre vârfuri (de exemplu P_1) este perpendicular pe p, deci

$$(X - P_1) \cdot p = 0.$$



Intersecții cu obiecte - poligoane convexe (II)

- Intersecția dintre raza r și *plan* este dată de condiția

$$(r(t) - P_1) \cdot \mathrm{p} = 0,$$

care este o ecuație de gradul I în t.

Intersecții cu obiecte - poligoane convexe (II)

- Intersecția dintre raza r și *plan* este dată de condiția

$$(r(t) - P_1) \cdot \mathrm{p} = 0,$$

care este o ecuație de gradul I în t.

- Soluția (dacă există) poate fi scrisă sub forma

$$t_0 = \frac{(P_1 - P_0) \cdot \mathrm{p}}{\mathrm{d} \cdot \mathrm{p}}.$$

Intersecții cu obiecte - poligoane convexe (II)

- Intersecția dintre raza r și *plan* este dată de condiția

$$(r(t) - P_1) \cdot \mathrm{p} = 0,$$

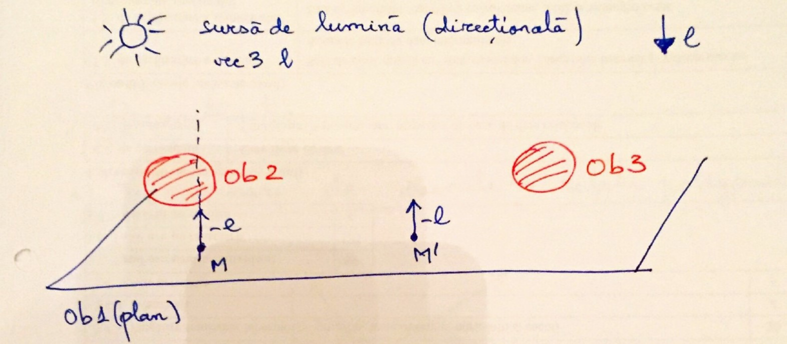
care este o ecuație de gradul I în t.

- Soluția (dacă există) poate fi scrisă sub forma

$$t_0 = \frac{(P_1 - P_0) \cdot \mathrm{p}}{\mathrm{d} \cdot \mathrm{p}}.$$

- Pasul următor este de a stabili dacă, pentru t_0 astfel determinat, punctul $r(t_0)$ este pe laturile sau în interiorul poligonului, ceea ce revine la a stabili dacă $r(t_0)$ poate fi exprimat sub formă de combinație convexă a trei dintre vârfurile poligonului. Din punct de vedere practic, dat fiind faptul că poligonul este convex, el poate fi triangulat folosind un evantai de triunghiuri având un vârf comun (de exemplu P_1), fiind suficiente $m - 2$ teste.

Umbre - figura



Umbre

Se presupune că scena reprezentată are o sursă de lumină (direcțională, cu direcția de propagare l); tehnica *Ray Tracing* poate fi aplicată pentru determinarea umbrelor obiectelor din scenă.

Umbre

Se presupune că scena reprezentată are o sursă de lumină (direcțională, cu direcția de propagare l); tehnica *Ray Tracing* poate fi aplicată pentru determinarea umbrelor obiectelor din scenă.

- Aplicarea *Ray Tracing* se face la nivel de pixel, pentru obiectele ce sunt reprezentate.

Umbre

Se presupune că scena reprezentată are o sursă de lumină (direcțională, cu direcția de propagare l); tehnica *Ray Tracing* poate fi aplicată pentru determinarea umbrelor obiectelor din scenă.

- Aplicarea *Ray Tracing* se face la nivel de pixel, pentru obiectele ce sunt reprezentate.
- Fie M un punct analizat (de exemplu centrul unui pixel virtual), aparținând unui obiect ce trebuie reprezentat și a cărui umbră trebuie calculată.

Umbre

Se presupune că scena reprezentată are o sursă de lumină (direcțională, cu direcția de propagare l); tehnica *Ray Tracing* poate fi aplicată pentru determinarea umbrelor obiectelor din scenă.

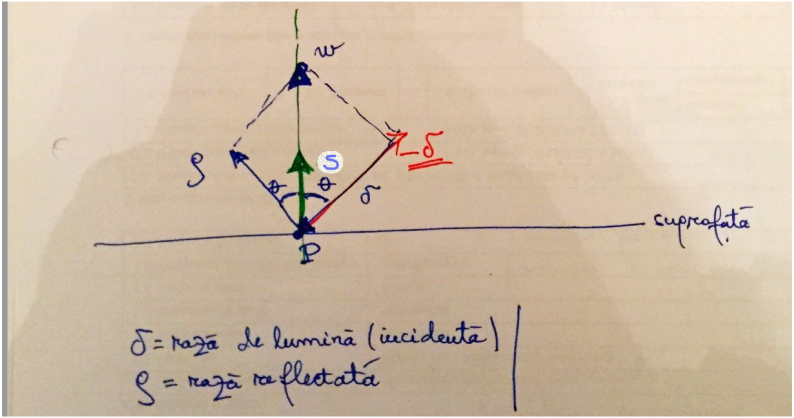
- Aplicarea *Ray Tracing* se face la nivel de pixel, pentru obiectele ce sunt reprezentate.
- Fie M un punct analizat (de exemplu centrul unui pixel virtual), aparținând unui obiect ce trebuie reprezentat și a cărui umbră trebuie calculată.
- Se aplică $\mathtt{RT}(M, -\mathsf{l}, \varepsilon, \infty)$ pentru a determina posibilele obiecte situate în umbră (primul parametru este $\varepsilon > 0$ și nu exact 0, pentru a nu interpreta obiectul căruia în aparține punctul M ca fiind interpus în tre M și sursa de lumină).

Umbre

Se presupune că scena reprezentată are o sursă de lumină (direcțională, cu direcția de propagare l); tehnica *Ray Tracing* poate fi aplicată pentru determinarea umbrelor obiectelor din scenă.

- Aplicarea *Ray Tracing* se face la nivel de pixel, pentru obiectele ce sunt reprezentate.
- Fie M un punct analizat (de exemplu centrul unui pixel virtual), aparținând unui obiect ce trebuie reprezentat și a cărui umbră trebuie calculată.
- Se aplică $\mathtt{RT}(M, -\mathrm{l}, \varepsilon, \infty)$ pentru a determina posibilele obiecte situate în umbră (primul parametru este $\varepsilon > 0$ și nu exact 0, pentru a nu interpreta obiectul căruia în aparține punctul M ca fiind interpus în tre M și sursa de lumină).
- Dacă $\mathtt{RT}(M, -\mathrm{l}, \varepsilon, \infty)$ returnează mulțimea vidă $\emptyset$ (i.e. nu există obiect de intersecție), se calculează culoarea pixelului cu formula modelului de iluminare, iar în caz contrar se utilizează culoarea umbrei.

Reflexie - figura



Reflexie

- Fie s normala la o suprafață $\mathcal{S}$ într-un punct P al acesteia, δ direcția de propagare a luminii. Un observator poate detecta ceea ce se reflectă în direcția $\rho = \rho(\mathsf{s}, \delta)$ dată de egalitatea

$$\rho - \delta = w = 2(-\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s},$$

unde $(-\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s}$ este proiecția ortogonală a lui δ pe dreapta direcționată de s.

Reflexie

- Fie s normala la o suprafață $\mathcal{S}$ într-un punct P al acesteia, δ direcția de propagare a luminii. Un observator poate detecta ceea ce se reflectă în direcția $\rho = \rho(\mathsf{s}, \delta)$ dată de egalitatea

$$\rho - \delta = w = 2(-\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s},$$

  unde $(-\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s}$ este proiecția ortogonală a lui δ pe dreapta direcționată de s.
- Așadar, direcția de reflexie este

$$\rho = \delta - 2(\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s}.$$

Reflexie

- Fie s normala la o suprafață $\mathcal{S}$ într-un punct P al acesteia, δ direcția de propagare a luminii. Un observator poate detecta ceea ce se reflectă în direcția $\rho = \rho(\mathsf{s}, \delta)$ dată de egalitatea

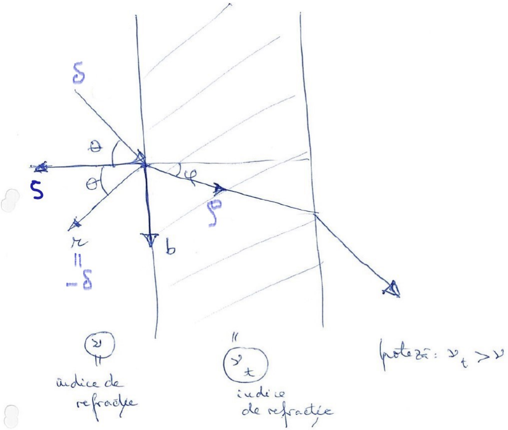
$$\rho - \delta = w = 2(-\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s},$$

  unde $(-\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s}$ este proiecția ortogonală a lui δ pe dreapta direcționată de s.
- Așadar, direcția de reflexie este

$$\rho = \delta - 2(\delta \cdot \mathsf{s})\mathsf{s}.$$

- Aplicând *Ray Tracing* sub forma $\mathtt{RT}(P, \rho, \varepsilon, \infty)$, se poate stabili ce obiecte întâlnește raza reflectată.

Refracție - figura



Refracție

- Fie δ direcția razei incidente dintr-un mediu cu indicele de refracție ν și ϱ direcția urmată după trecerea într-un mediu cu un indice de refracție mai mare, ν_t (a cărui frontieră este o suprafață $\mathcal{S}$).

Refracție

- Fie δ direcția razei incidente dintr-un mediu cu indicele de refracție ν și ϱ direcția urmată după trecerea într-un mediu cu un indice de refracție mai mare, ν_t (a cărui frontieră este o suprafață $\mathcal{S}$).
- Notăm cu θ și φ unghiurile formate de vectorii $-\delta$ și $-\varrho$ cu normala s la suprafața $\mathcal{S}$.

Refracție

- Fie δ direcția razei incidente dintr-un mediu cu indicele de refracție ν și ϱ direcția urmată după trecerea într-un mediu cu un indice de refracție mai mare, ν_t (a cărui frontieră este o suprafață $\mathcal{S}$).
- Notăm cu θ și φ unghiurile formate de vectorii $-\delta$ și $-\varrho$ cu normala s la suprafața $\mathcal{S}$.
- Legea lui Snell stabilește relația între aceste elemente

$$\nu \sin\theta = \nu_t \sin\varphi.$$

Refracție

- Fie δ direcția razei incidente dintr-un mediu cu indicele de refracție ν și ϱ direcția urmată după trecerea într-un mediu cu un indice de refracție mai mare, ν_t (a cărui frontieră este o suprafață $\mathcal{S}$).
- Notăm cu θ și φ unghiurile formate de vectorii $-\delta$ și $-\varrho$ cu normala s la suprafața $\mathcal{S}$.
- Legea lui Snell stabilește relația între aceste elemente

$$\nu \sin \theta = \nu_t \sin \varphi.$$

- Considerând ca date de intrare δ, indicii ν, ν', normala s și punctul P, se poate calcula vectorul ϱ, care indică direcția razei refractate

$$\varrho = \frac{\nu}{\nu_t}\delta + \left[\sqrt{1 - \frac{\nu^2(1-(\delta \cdot \mathsf{s})^2)}{\nu_t^2}} - \frac{\nu}{\nu_t}(\delta \cdot \mathsf{s})\right] \mathsf{s}.$$

Refracție

- Fie δ direcția razei incidente dintr-un mediu cu indicele de refracție ν și ϱ direcția urmată după trecerea într-un mediu cu un indice de refracție mai mare, ν_t (a cărui frontieră este o suprafață $\mathcal{S}$).
- Notăm cu θ și φ unghiurile formate de vectorii $-\delta$ și $-\varrho$ cu normala s la suprafața $\mathcal{S}$.
- Legea lui Snell stabilește relația între aceste elemente

$$\nu \sin \theta = \nu_t \sin \varphi.$$

- Considerând ca date de intrare δ, indicii ν, ν', normala s și punctul P, se poate calcula vectorul ϱ, care indică direcția razei refractate

$$\varrho = \frac{\nu}{\nu_t}\delta + \left[\sqrt{1 - \frac{\nu^2(1-(\delta \cdot \mathsf{s})^2)}{\nu_t^2}} - \frac{\nu}{\nu_t}(\delta \cdot \mathsf{s})\right] \mathsf{s}.$$

- Aplicând *Ray Tracing* sub forma $\mathtt{RT}(P, \varrho, \varepsilon, \infty)$, se poate stabili ce obiecte întâlnește raza refractată.

Exerciții

1. Fie $P_0 = (1, 5, 4)$ şi sfera $\mathcal{S}$ de centru $(2, 2, 4)$ şi rază $\sqrt{2}$. Daţi exemplu de vector r astfel ca raza dusă prin P_0 având direcţia dată de r să intersecteze sfera $\mathcal{S}$ în exact un punct.

2. Fie $P_0 = (3, 2, -1)$ şi vectorul $\mathsf{r} = (1, 2, 1)$. Daţi exemplu de sferă $\mathcal{S}$, indicând centrul şi raza acesteia, astfel ca raza dusă prin P_0 având direcţia dată de r să intersecteze sfera $\mathcal{S}$ în exact un punct.

3. O rază este incidentă la o suprafaţă reflectantă după direcţia $(3, 2, 1)$. Determinaţi care este direcţia razei reflectate, dacă normala la suprafaţă în punctul de incidenţă este $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.