Probabilități și statistică

Tema 1

Exercițiul 1

a) A singur se realizează

Fiind date A, B și C trei evenimente, evenimentul A singur se realizează este echivalent cu A se realizează și B nu se realizează și C nu se realizează.

Notând cu A^c evenimentul contrar evenimentului A, atunci evenimentul A singur se realizează este echivalent cu A se realizează și B^c se realizează și C^c se realizează. Exprimând ultima relație în funcție de A, B, C și de operațiile cu mulțimi, evenimentul cerut va fi $A \cap B^c \cap C^c$.

b) A și C se realizează, dar nu și B.

Acest eveniment este echivalent cu A se realizează și C se realizează și B^c se realizează. Știind că realizarea a două evenimente simultan se exprimă cu ajutorul intersecției („$\cap$"), atunci cerința devine $A \cap C \cap B^c = A \cap B^c \cap C$

c) cele trei evenimente se produc

Producerea celor trei evenimente înseamnă producerea și lui A, și lui B și lui C, relație echivalentă cu $A \cap B \cap C$.

d) cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce

Dacă cel puțin unul se produce, înseamnă că nu este necesar să se producă toate; este suficientă producerea unui singur eveniment (dar se pot produce și două sau trei). Așadar, folosim reuniunea de evenimente pentru a rescrie relația, iar aceasta devine $A \cup B \cup C$.

e) cel puțin două evenimente din cele trei se produc.

Acest eveniment este echivalent cu exact două evenimente se produc(1) sau cele trei evenimente se produc(2).

(2) este aflat la punctul c.

(1) este echivalent cu se produc A și B, dar nu

și C, sau se produc A și C, dar nu și B, sau se produc B și C, dar nu și A. Evenimentul cerut este reprezentat de (1) ∪ (2), deci de $(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$.

f) Cel mult un eveniment se produce

Înseamnă că nu se produce niciun eveniment (1) sau se produce exact un eveniment (2).

(1) $\Leftrightarrow$ A nu se produce și B nu se produce, și C nu se produce $\Leftrightarrow A^c\cap B^c\cap C^c$.

(2) $\Leftrightarrow$ A se produce și B și C nu se produc sau B se produce și A și C nu se produc sau C se produce și A și B nu se produc $\Leftrightarrow (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)$.

Deci evenimentul căutat este (1) ∪ (2), adică $(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)$.

g) Niciunul din cele trei evenimente nu se produce

Adică nu se produce nici A și nu se produce nici B și nu se produce nici C, deci $A^c\cap B^c\cap C^c$.

h) Exact două evenimente din cele trei se produc

Este echivalent cu A și B se produc și C nu sau A și C se produc și B nu sau B și C se produc și A nu. Evenimentul căutat este $(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c)\cup(A^c\cap B\cap C)$.

Exercițiul 2

Pe parcursul exercițiului considerăm evenimentele:

A_i = la pasul i s-a extras o bilă albă $\forall\, i=\overline{1,5}$

A_i^c = la pasul i s-a extras o bilă neagră = la pasul i nu s-a extras o bilă albă. $\forall\, i=\overline{1,5}$

A_i și A_j se produc = la pașii i și j s-a extras câte o bilă albă $= A_i\cap A_j$
$i,j=\overline{1,5}$

A_i se produce sau A_j se produce $= A_i\cup A_j$.
$i,j=\overline{1,5}$

a) A = Numai o bilă este albă

A = se extrage numai o singură dată o bilă albă
<=> A = la extragerea 1 se ia o bilă albă, iar la celelalte 4 negre <u>sau</u> la extragerea 2 se ia o bilă albă, iar la 1,3,4,5 câte una neagră <u>sau</u> la extragerea 3 se ia o bilă albă, iar la 1,2,4,5 câte una neagră <u>sau</u> la extragerea 4 se ia o bilă albă, iar la 1,2,3,5 câte una neagră <u>sau</u> la extragerea 5 se ia o bilă albă, iar la 1,2,3,4 câte una neagră.

$<=> A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)$

b) B = Cel puțin o bilă este neagră

B - este exact o bilă neagră SAU
sunt exact 2 bile negre SAU
sunt exact 3 bile negre SAU
sunt exact 4 bile negre SAU
sunt exact 5 bile negre

Fie B_{i}, $i=\overline{0,5}$ evenimentul prin care spunem că s-au extras exact i bile negre.

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$ (1)

$B_1 = \bigcup_{i=1}^{5}$ (la extragerea i s-a luat o bilă neagră și la celelalte 4 s-au extras numai bile albe)

$<=> B_1 = (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$ (analog pct. a doar că pentru bile negre)

$= \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})$ (2)

$B_2 = \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})$ (3)

$= (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5)$

$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$

$$B_3 = \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4} \cap A_{i_5}) \quad (4)$$

$$B_4 = \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5})$$

$\Leftrightarrow B_4 = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$ (5)

B_5 = toate bilele sunt negre $\Leftrightarrow$ nu este nicio bilă albă

$\Leftrightarrow B_5 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$ (6)

Din (1), (2), (3), (4), (5) și (6) rezultă că:

$$B = \left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})\right) \cup \left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})\right) \cup \left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})\right) \cup \left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5})\right) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$$

c) C - obținerea a cel mult două bile albe

C = se obține exact o bilă albă sau se obțin exact două bile albe sau nu se obține nicio bilă albă

$$\Leftrightarrow C = A \cup \left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})\right) \cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)}_{\text{la toate extragerile s-au obținut numai bile negre}}$$

d) D = obținerea a cel puțin trei bile albe

D = se obțin exact trei bile albe sau se obțin exact patru bile albe sau se obțin toate bilele albe

$D = \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)}_{\text{toate bilele sunt albe}} \cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)}_{\text{doar prima nu e albă}} \cup$
$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup$
$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup$
$\left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})\right)$

$\Leftrightarrow D = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \left(\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5}\right)$
$\bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5})$

e) Numai două bile sunt negre – E

$E = \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} (A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap A_{i_3} \cap A_{i_4} \cap A_{i_5}) = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$
$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup$
$(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup$
$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup$
$(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup$
$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$

Exercițiul 3

O aplicație $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ s.n. <u>distanță</u> pe X dacă au loc:

D1. $d(x,y) \geq 0, \ \forall \ x,y \in X$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

D2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall \ x,y \in X$

D3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall \ x,y,z \in X$

Proprietăți ale diferenței simetrice:

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate și funcția $d(A,B) = \mathbb{P}(A \Delta B)$. Vrem să arătăm că funcția este o distanță pe $\mathcal{F}$ și, pentru aceasta vom verifica condițiile distanței enunțate mai sus.

Știm din definiție că $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$, deci $\mathbb{P}$ ia valori pozitive.
Totodată, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$, $B \setminus A \in \mathcal{F}$ $\Bigg\} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{F}$

Deci $\mathbb{P}(A \Delta B) \geq 0$.

Vrem să arătăm că $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

„$\Leftarrow$" $A = B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A \Delta A) = \mathbb{P}((\underbrace{A \cup A}_{=A}) \setminus (\underbrace{A \cap A}_{=A}))$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{A \setminus A}_{=\emptyset}) = \mathbb{P}(\emptyset) \overset{def}{=} 0 \quad (3)$$

„$\Rightarrow$" $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B))$
$A \cap B \subseteq A \cup B$ $\Bigg\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

Conform proprietății probab.: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \quad (1)$

$\mathbb{P}$ e o funcție monotonă crescătoare, deci cum $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ înseamnă că $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \quad (2)$

Din (1) și (2) rezultă că $A \cap B = A \cup B$.

Vrem să arătăm că dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci $A = B$.

$A \subseteq B$: Fie $x \in A$. Atunci $x \in A \cup B$
Cum $A \cup B = A \cap B$ $\Bigg\} \Rightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$. $(*)$

$B \subseteq A$. Fie $z \in B$. Atunci $z \in A \cup B$
Cum $A \cup B = A \cap B$ $\Bigg\} \Rightarrow z \in A \cap B \Leftrightarrow$

$z \in A \wedge z \in B \Rightarrow z \in A \Rightarrow B \subseteq A \quad (**)$

Din $(*)$ și $(**)$ rezultă că dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci $A = B$.
Deci, am demonstrat că $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0 \Rightarrow A = B$. (4)
Din (3) și (4) rezultă că $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0 \Leftrightarrow A = B$. Deci $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

D2. Vrem să demonstrăm că $\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(B \Delta A)$, $\forall A, B \in \mathcal{F}$.
Știm că $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$\cup$ e comutativă $\Bigg\} \Rightarrow A \Delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \Leftrightarrow A \Delta B = B \Delta A$

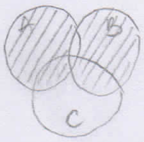
Deci $\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(B \Delta A)\ \forall A, B \in \mathcal{F}$, adică $d(A,B) = d(B,A)$.

$\Delta 3$. Fie $A, B, C \in \mathcal{F}$. Vrem să arătăm că:

$d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B) \Leftrightarrow$

$\mathbb{P}(A \Delta B) \le \mathbb{P}(A \Delta C) + \mathbb{P}(C \Delta B)$. $(*)$

Scriem $A\Delta B$, $A \Delta C$, $B \Delta C$ ca reuniuni de termeni de forma $A^{\varepsilon_1} \cap B^{\varepsilon_2} \cap C^{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_i \in \{0;1\}$ $i = \overline{1,3}$ și $A^{\varepsilon_i} \to A,\ \varepsilon_i = 1$; $\to A^c,\ \varepsilon_i = 0$



$A \Delta B = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C)$

$A \Delta C = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

$B \Delta C = (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C)$

$(*)$ se rescrie ca: $\mathbb{P}((A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C)) \le \mathbb{P}((A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)) + \mathbb{P}((A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C))$

Cum termenii fiecărei reuniuni din $A \Delta B$, $B \Delta C$, $A \Delta C$ sunt dijuncți, putem transforma reuniunea în sumă:

$\cancel{\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c)} + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C)} + \cancel{\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c)} + \cancel{\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C)} \le \cancel{\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c)} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) + \cancel{\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C)} + \cancel{\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c)} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C)}$ și reducem termenii egali.

Deci: $0 \le \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C)$

Cum $\mathbb{P}(A) \ge 0$, $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) \ge 0$ și $\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) \ge 0$

$\Rightarrow$ afirmația e adevărată, deci: $\mathbb{P}(A \Delta B) \le \mathbb{P}(A \Delta C) + \mathbb{P}(C \Delta B) \Leftrightarrow$

$d(A,B) \le d(A,C) + d(B,C)$

b) Trebuie să demonstrăm că:

$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \le \mathbb{P}(A \Delta B) \Leftrightarrow$

$-\mathbb{P}(A \Delta B) \underset{(*)}{\le} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \underset{(**)}{\le} \mathbb{P}(A \Delta B)$

$(*)$: $-\mathbb{P}(A \Delta B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow$

$-\mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cup B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ proprietatea e $\Big\} \Rightarrow$

$2\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$\Leftrightarrow 2\mathbb{P}(A \cap B) \le 2\mathbb{P}(A)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A)$ adevărat, deoarece $A \cap B \subseteq A$ și $\mathbb{P}$ e crescătoare

$(**)$ $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A \Delta B) \iff$

$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \iff$

$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad ((A \cup B) \subseteq (A \cap B)) \iff$

$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

$2\mathbb{P}(A \cap B) \le 2\mathbb{P}(B) \iff$

$\mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(B)$ adevărat ($\mathbb{P}$ monotonă)

Din $(*)$ și $(**)$ rezultă că $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \le \mathbb{P}(A \Delta B)$.

Exercițiul 4

Notăm cu : R = nr. de șosete roșii

N = nr. de șosete negre.

RR = evenimentul prin care ambele șosete sunt roșii

$1R$ = evenimentul prin care la prima extragere s-a luat o șosetă roșie.

$2R$ = evenimentul prin care la a doua extragere s-a luat o șosetă roșie.

a) $\mathbb{P}$(prima șosetă e roșie și a doua șosetă e roșie) = $\mathbb{P}$(prima șosetă să fie roșie) $\cdot$ $\mathbb{P}$(a doua șosetă să fie roșie dacă prima e roșie). - din definiția probabilității condiționate

$$\mathbb{P}(RR) = \mathbb{P}(1R) \cdot \mathbb{P}(2R / 1R) \quad (*)$$

Din enunț știm că $\mathbb{P}(RR) = \frac{1}{2}$.

Probabilitatea ca prima bilă extrasă să fie roșie este egală cu $\frac{R}{R+N}$, deoarece sunt R cazuri favorabile când extragem șoseta roșie din $R+N$ (numărul total de șosete) posibile.

Deci, $\mathbb{P}(1R) = \frac{R}{R+N}$

Probabilitatea ca a doua șosetă extrasă să fie roșie când prima extrasă este roșie este $\frac{R-1}{R+N-1}$, deoarece acum mai sunt $R-1$ șosete roșii (una a fost extrasă) și $R+N-1$ șosete în total.

Deci, $\mathbb{P}(2R / 1R) = \frac{R-1}{R+N-1}$.

Acum relația $(*)$ poate fi scrisă:

$$\frac{1}{2} = \frac{R}{R+N} \cdot \frac{R-1}{R+N-1}$$

$$2R^2-2R = R^2+RN-R+NR+N^2-N \iff$$
$$R^2-R-2NR-N^2+N=0$$
$$\Delta = (-1-2N)^2-4(N-N^2)$$
$$\Delta = 4N^2+4N+1-4N+4N^2$$
$$\Delta = 8N^2+1$$

$$R = \frac{1+2N+\sqrt{\Delta}}{2}$$

Fie $K=\sqrt{\Delta}$. Pentru ca R să fie natural, K trebuie să fie un nr. natural și impar.

$$R = \frac{1+2N+K}{2}$$

$$K = \sqrt{8N^2+1} \iff K^2-8N^2=1.$$

Deoarece trebuie să aflăm nr. minim de șosete din sertar, căutăm cea mai mică soluție a ecuației. Se găsește $(K,N)=(3,1)$. (soluția fundamentală a ecuației Pell).

Deci, $N=1$

$$\left.\begin{array}{l} N=1 \\ R=\frac{1+2N+K}{2}=\frac{1+2+3}{2}=3. \end{array}\right\} \Rightarrow R+N=4$$

Numărul minim de șosete din sertar e 4.

b) Vrem să aflăm numărul minim de șosete din sertar știind că N e par. Căutăm $N\in\{2,4,6,\dots 2n\dots\}$ minim care să verifice ecuația, astfel încât K e natural și impar.

$N=2 \Rightarrow K^2=1+8\cdot 4=33 \quad K=\sqrt{33}\notin\mathbb{N}$

$N=4 \Rightarrow K^2=1+8\cdot 16=129 \quad K=\sqrt{129}\notin\mathbb{N}$

$N=6 \Rightarrow K^2=1+8\cdot 36=289 \quad K=17\in\mathbb{N}$ și impar

Deci, cea mai mică soluție e $(K,N)=(17,6)$.

$$R=\frac{1+12+17}{2}=15.$$

Numărul minim de șosete din sertar a.î. numărul de șosete negre e par este $N+R=15+6=21$.

Exercițiul 5

a) Știm că $x_1, x_2, \dots x_r \geq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ \vdots \\ x_r \geq 1 \end{array}\right\} \oplus$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r \geq r$$

$$n \geq r$$

Deci pentru $n < r$ ecuația nu are nicio soluție.

Pentru $n = r$ ecuația are o singură soluție și anume $(1, 1, \dots 1)$.

Tratăm cazul când $n > r$:

Notăm cu $y_i = x_i - 1$, $i = \overline{1,r}$, $y_i \geq 0 \in \mathbb{N}$.

Ecuația se rescrie: $y_1 + y_2 + \dots + y_r = n - r$, $y_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = \overline{1,r}$

Putem considera că numărul soluțiilor ecuației este egal cu numărul de posibilități de a plasa $n-r$ bile identice în r cutii. Fiecare bilă reprezintă o unitate, iar cele r cutii sunt numerele.

Notație:

0 - bilă

| - sfârșitul unei cutii

Exemplu: $|0|00||0 \leftarrow r = 5$ $n - r = 4$, $x_1 = 0$ $x_2 = 1$

$x_3 = 2$ $x_4 = 0$ $x_5 = 1$

Deci trebuie să aflăm numărul de posibilități de a amestica cele $r-1$ bare verticale cu cele $n-r$ bile. Valoarea primită de x_1 va fi nr. de bile până la prima bară verticală, cea de x_2 va fi nr. de bile dintre prima și a doua bară, iar cea de x_r este numărul de bile de după ultima |.

Avem $n - r + r - 1 = n - 1$ simboluri în total. Numărul permutărilor acestor elemente e $(n-1)!$. Dintre acestea trebuie să împărțim la numărul de posibilități de a amestica bilele, care e $(n-r)!$, deoarece bilele sunt identice și nu contează ordinea lor, și împarțim și la numărul de aranjări ale |, adică $(r-1)!$.

Deci, rezultatul este $\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}$ soluții ale ecuației.

Rezultatul este echivalent cu toate posibilitățile de a așeza cele $r-1$ | în $n-1$ căsuțe, știind că nu contează ordinea, deci C_{n-1}^{r-1}.

b) Făcând referire la punctul a, problema este de a număra soluțiile când avem $r-1$ bare și $n+r-1$ căsuțe; deci numărul soluțiilor ecuației $x_1+\dots+x_r=x_n$ cu componentele naturale pozitive este: $C_{n+r-1}^{r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(r-1)!\cdot n!}$

Exercițiul 6

Pentru început, vom stabili punctele de plecare:
→ fiecare persoană primește câte 5 cărți
→ sunt 52 de cărți, dintre care: → 13 figuri
↘ de câte 4 culori

Cum într-o mână de cărți nu contează ordinea primirii, atunci:

$\Omega = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} / x_i$ e o carte de joc din cele 52, $x_i \neq x_j$, $i,j=\overline{1,5}$ $i \neq j\}$

Deci, numărul cazurilor posibile pentru a), ... (e), i.e. numărul tuturor posibilităților de 5 cărți într-o mână este $|\Omega|$:

$$|\Omega| = C_{52}^{5} = \frac{52!}{5!\cdot 47!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2\,598\,960$$

a) Trebuie să aflăm P(Careu)

$$P(\text{Careu}) = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

Careu = 4 cărți de aceeași figură + una diferită

Numărul cazurilor favorabile:

Dacă ordonăm cartile din mână, punându-le pe cele 4 de aceeași figură la început:

$\boxed{x_♥}\ \boxed{x_♠}\ \boxed{x_♦}\ \boxed{x_♣}\ \boxed{y}$ ← cartea diferită

Avem C_{13}^{1} posibilități de a alege numărul (figura de pe primele 4 cărți, deoarece din 13 figuri alegem una. Cum avem toate culorile, atunci pe cele 4 culori le împărțim la 4 poziții, iar ordinea nu contează, deci C_4^4.

Pe a 5-a poziție punem una din cele 48 rămase, deci C_{48}^1.

Așadar, nr. cazuri favorabile e: $C_{13}^1 \cdot C_4^4 \cdot C_{48}^1$.

$$P(\text{Careu}) = \frac{C_{13}^1 C_4^4 \cdot C_{48}^1}{2\,598\,960} = \frac{13 \cdot 1 \cdot 48}{2\,598\,960} = \frac{624}{2\,598\,960}$$

$$P(\text{Careu}) \simeq 0{,}00024009 \simeq 0{,}024\%$$

b) Trebuie să aflăm $P(\text{Full-House})$:

3 cărți de un tip și 2 de același tip

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că în cazurile favorabile cele 3 cărți de același tip sunt pe primele 3 poziții, iar celelalte 2 de același tip pe ultimele 2 poziții.

Numărul de cazuri favorabile:

Pentru a alege numărul de pe primele 3 cărți, trebuie să alegem din 13 figuri una, deci C_{13}^1.
În cea ce privește culoarea, cele 3 cărți pot lua 4 culori, deci C_4^3.

Pentru a alege numărul de pe ultimele 2 cărți, alegem unul din 12 numere rămase (unul a fost deja ales pt. primele 3 cărți), deci C_{12}^1, iar cele 4 culori ale numărului ales sunt împărțite de data aceasta la 2 cărți, deci C_4^2.

$$\text{nr. fav.} = C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2$$

$$P(\text{Full}) = \frac{\text{nr. cazuri favorab.}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{13 \cdot \overset{4}{\frac{4!}{3! \cdot 1!}} \cdot 12 \cdot \overset{6}{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}}{2\,598\,960}$$

$$P(\text{Full}) = \frac{3744}{2\,598\,960} \simeq 0{,}00144 \simeq 0{,}14\%$$

c) Trebuie să aflăm $P(\text{3 cărți de același tip}) = \frac{\text{nr. fav.}}{\text{nr. posibile}}$

Pentru a alege figura celor 3 cărți de același tip, avem 13 posibilități de a alege, deci C_{13}^1.
Cele 3 cărți au 4 variante de alegere a culorii: C_4^3.
Următoarele 2 cărți trebuie să aibă figura diferită și de primele 3 (ca să nu formeze careu) și între ele

(ca să nu formeze full-house), deci din 12 figuri alegem 2, C_{12}^2, iar fiecare carte are de ales din câte 4 culori, deci $C_4^1 \cdot C_4^1$.

$$\text{nr. cazuri fav.} = C_{13}^1 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1$$

$$P(3 \text{ de acelaşi tip}) = \frac{13 \cdot \frac{12!}{10! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 4 \cdot 4}{2\,598\,960} = \frac{54\,912}{2\,598\,960} \simeq 0{,}0211$$

$$\simeq 2{,}11\%$$

d) Trebuie să calculăm P(să avem 2 perechi)

$$P(\text{să avem 2 perechi}) = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

Nr. cazuri favorabile:

Avem C_{13}^2 alegeri pentru numerele scrise pe cărţile din cele 2 perechi, iar pentru fiecare pereche avem C_4^2 posibilităţi de alegere a culorii, deci: $C_{13}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2$.

Cartea rămasă trebuie să aibă un număr diferit de cele de pe perechi (ca să nu se facă full-house) şi poate lua orice culoare, deci $C_{11}^1 \cdot C_4^1$

$$P(\text{să avem 2 perechi}) = \frac{C_{13}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{11}^1 \cdot C_4^1}{2\,598\,960} = \frac{13 \cdot 6 (3 \cdot 2)^2 \cdot 11 \cdot 4}{2\,598\,960}$$

$$= \frac{123\,552}{2\,598\,960} \simeq 0{,}0475 \simeq 4{,}75\%$$

e) Trebuie să avem o pereche

$$P(\text{o pereche}) = \frac{\text{nr. fav.}}{\text{nr. pos.}}$$

O pereche = 2 cărţi de acelaşi număr şi 3 cărţi toate de nr. diferite (pt. a evita careu sau full-house sau 2 perechi sau 3 de acelaşi tip).

$\underbrace{\boxed{x}\boxed{x}}_{\text{pereche}}\boxed{y}\boxed{z}\boxed{t}$

Pentru a alege figura perechii, avem C_{13}^1 posibilităţi, iar pentru culoare C_4^2. Celelalte 3 cărţi au C_{12}^3 posibilităţi de a alege figura, iar fiecare are C_4^1 posibilităţi de a alege culoarea. Deci:

$$P(\text{o pereche}) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{2\,598\,960}$$

$$= \frac{13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{2\,598\,960} = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \simeq 0{,}4225 \simeq 42{,}25\%$$

Exercițiul 7

Notăm cu:

A = evenimentul prin care un automobilist a depășit nivelul de alcool autorizat

T = evenimentul prin care testul este pozitiv.

Din ipoteză știm că:

$\mathbb{P}(A) = 0{,}005 \Leftrightarrow 0{,}5\%$ dintre automobiliști depășesc nivelul autorizat

$\mathbb{P}(T/A)$ = probabilitatea ca dacă un automobilist a depășit nivelul, testul să iasă pozitiv $= 0{,}99$

$\mathbb{P}(T^c/A^c) = 0{,}99$ (ipoteză)

Vrem să aflăm $\mathbb{P}(A/T)$.

$$\mathbb{P}(A/T) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}(A\cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

$$\mathbb{P}(A/T) \overset{Bayes}{=} \frac{\mathbb{P}(T/A)\cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T/A)\cdot\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T/A^c)\cdot \mathbb{P}(A^c)} \quad (*)$$

Se știe că $\forall A, B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A^c/B) = 1 - \mathbb{P}(A/B)$$

Deci:

$$\mathbb{P}(T/A^c) = 1 - \mathbb{P}(T^c/A^c) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

Știm că $\forall A \in \mathcal{F}$:

$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (proprietate a probabilităților)

$\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 0{,}995$

Înlocuind cu valori numerice în relația (*) obținem:

$$\mathbb{P}(A/T) = \frac{0{,}99\cdot 0{,}005}{0{,}99\cdot 0{,}005 + 0{,}01\cdot 0{,}995} = \frac{0{,}00495}{0{,}00495 + 0{,}00995} = \frac{0{,}00495}{0{,}0149} \simeq 0{,}3322$$

2. Știm că:

$\mathbb{P}(A/T) = 0{,}95$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}005$

Vrem să aflăm $p = \mathbb{P}(T/A)$.

$$\mathbb{P}(A/T) \overset{Bayes}{=} \frac{p\cdot \mathbb{P}(A)}{p\cdot\mathbb{P}(A) + (1-p)\cdot(1-\mathbb{P}(A))}$$

$$p\,\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/T)\cdot p\cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A/T) - \mathbb{P}(A/T)\cdot\mathbb{P}(A) - p\cdot \mathbb{P}(A/T) + p\cdot\mathbb{P}(A/T)\cdot\mathbb{P}(A)$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\mathbb{P}(A/T)\cdot(1-\mathbb{P}(A))}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A/T)-2\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(A/T)}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{0,95\cdot 0,995}{0,005+0,95-2\cdot 0,005\cdot 0,95} = \frac{0,94525}{0,9455} \simeq 0,999735$$

3. Se știe că:

$\mathbb{P}(A)' = 0,3$

$\mathbb{P}(T/A) = 0,99$

$\mathbb{P}(T^c/A^c) = 0,99$

Vrem să demonstrăm că testul este mai fiabil în acest caz (sâmbătă seara).

$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T/A)\cdot\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T/A^c)\cdot\mathbb{P}(A^c)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(T) = 0,99\cdot 0,3 + 0,01\cdot 0,7$

$\Rightarrow \mathbb{P}(T) \simeq 0,304$

Iar $\mathbb{P}(A/T) = \frac{\mathbb{P}(T/A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T/A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(T/A^c)\cdot\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{P}(T/A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T)}$

$\mathbb{P}(A/T) = \frac{0,99\cdot 0,3}{0,304}$

$\mathbb{P}(A/T) \simeq 0,9769$

Deci, testul e mai fiabil sâmbătă seara, deoarece $\mathbb{P}(A/T)$ are o valoare mai mare decât la pct. 1.

Exercițiul 8

Introducem notațiile:

$1r$ = evenimentul prin care prima bilă extrasă e roșie

$2r$ = ——— // ——— a doua ——— // ———

$1b$ = evenimentul prin care prima bilă extrasă e albastră

$2b$ = ——— // ——— a doua ——— // ———

$\mathbb{P}(r)$ = probabilitatea de a extrage o bilă roșie prima dată

$\mathbb{P}(b)$ = ——— // ——— albastră prima dată

a) Se cere $\mathbb{P}(2b)$.

$\mathbb{P}(2b) = \mathbb{P}$ (să extrag o bilă albastră a doua oară știind că prima e albastră) $\cdot\,\mathbb{P}(b) + \mathbb{P}$ (să extrag o b. albastră știind că prima e roșie) $\cdot\,\mathbb{P}(r)$ (am aplicat formula probabilității totale, deoarece $1r \cap 1b = \emptyset$ și $1r \cup 1b = \Omega$)

$\Leftrightarrow P(2b) = P(2b/1b)\cdot P(b) + P(2b/1r)\cdot P(r)$

$P(b) = \dfrac{\text{nr. cazuri fav}}{\text{nr cazuri posibile}}$

Nr. cazurilor posibile este $r+b$, adică numărul bilelor din urnă. Sunt b cazuri favorabile, extragerea unei bile albastre.

Deci, $P(b) = \dfrac{b}{r+b}$.

Analog, $P(r) = \dfrac{r}{r+b}$.

$P(2b/1b) = \dfrac{\text{nr. cazuri fav}}{\text{nr. cazuri posib.}}$

Având în vedere că s-a făcut o extragere, știm că numărul total de bile a crescut cu d și avem $b+d$ bile albastre. $\Rightarrow P(2b/1b) = \dfrac{b+d}{r+b+d}$

Analog, $P(2b/1r) = \dfrac{b}{r+b+d}$

$$P(2b) = \frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} = \frac{b(b+r+d)}{(r+b)(b+r+d)} = \frac{b}{r+b}$$

b) Se cere $P(1b/2b)$.

$P(1b/2b) = \dfrac{P(2b/1b)\cdot P(1b)}{P(2b)}$ (*) (formula lui Bayes)

$P(2b/1b) = \dfrac{b+d}{r+b+d}$

$P(1b) = P(b) = \dfrac{b}{r+b}$ (calculate anterior)

$P(2b) = \dfrac{b}{r+b}$

Înlocuind în (*), obținem:

$$P(1b/2b) = \frac{(b+d)\cdot b}{(r+b+d)(r+b)}\cdot\frac{r+b}{b} = \frac{b+d}{r+b+d}$$

c) Trebuie să demonstrăm că $P(B_n) = P(B_1)$, $\forall n \geq 1$.

Demonstrăm afirmația prin inducție.

Pentru $n=1$: $P(B_1) = P(B_1)$ evident

Pentru $n=2$: $P(B_2) = P(B_1)$

$P(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$; $P(B_2) = \dfrac{b}{r+b}$ (punctul a)

Deci $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}$.

Presupunem că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k = \overline{1, n-1}$.
Dorim să arătăm că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$.
Știm că:

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n / B_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n / B_{n-1}^c) \cdot \mathbb{P}(B_{n-1}^c)$$

Din pasul de inducție știm că:

$$\mathbb{P}(B_{n-1}) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}, \text{ iar } \mathbb{P}(B_{n-1}^c) = 1 - \mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{r}{r+b}$$

Notăm cu $nr_k(b)$ numărul de bile albastre după a k-a extragere (la pasul k).

$\mathbb{P}(B_n / B_{n-1})$ este probabilitatea de a extrage la pasul n o bilă albastră, știind că la pasul $n-1$ s-a extras o bilă albastră. Aceasta este egală cu $\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

Nr. cazuri posibile:

Se observă că numărul total de bile din urnă este:

- la pasul 1: $r+b+d$ (după ce s-a efectuat prima extragere)
- la pasul 2: $r+b+2d$

⋮

- la pasul k: $r+b+kd$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

Deci, înainte de a n-a extragere, vom avea $r+b+(n-1)d$ bile în urnă, ce va reprezenta nr. cazurilor posibile.

Numărul cazurilor favorabile:

Va fi reprezentat de numărul bilelor albastre din urnă, adică $nr_{n-2}(b) + d$ (bile adăugate după a $n-1$-a extragere).

Așadar, $\mathbb{P}(B_n / B_{n-1}) = \frac{nr_{n-2}(b) + d}{r+b+(n-1)d}$. Analog,

$\mathbb{P}(B_n / B_{n-1}^c) = \frac{nr_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}$ (la numărător nu se mai adaugă d, deoarece la a $n-1$-a extragere a fost o bilă roșie, iar cele d bile adăugate sunt roșii).

Acum știm să scriem relația ca:

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{nr_{n-2}(b) + d}{r+b+d(n-1)} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{nr_{n-2}(b)}{r+b+d(n-1)} \cdot \frac{r}{r+b} \quad (*)$$

De asemenea, știm că: (din ip. de inducție)

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{nr_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{r}{r+b}$$

De unde îl scoatem pe $nr_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b}[r+b+(n-2)d]$.
Înlocuind în $(*)$ rezultă că:

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{bd + nr_{n-2}(b)(r+b)}{[r+b+(n-1)d](r+b)} = \frac{bd + (r+b)\cdot\frac{b}{r+b}[r+b+(n-2)d]}{(r+b)[r+b+(n-1)d]}$$

$$= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(r+b)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{r+b}. \text{ (ceea ce trebuia demonstrat)}$$

Așadar, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall n \geq 1$

d) Trebuie să aflăm $\mathbb{P}(B_1 / B_2 \cap B_3 \ldots \cap B_{n+1})$.
Aplicând formula probabilității condiționate (știm că $\mathbb{P}(B_2 \cap \ldots \cap B_{n+1}) > 0$) obținem:

$$\mathbb{P}(B_1 / B_2 \cap B_3 \ldots \cap B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2 \ldots \cap B_{n+1})}$$

Formula:
Fie $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots A_{n-1}) > 0$. Atunci:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2/A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n / A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Aplicând formula pentru $A_k = B_1$ și $A_1 = B_2 \ldots A_{k-1} = B_{n+1}$ obținem:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(B_2/B_1)\ldots\mathbb{P}(B_n / B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{n-1})\cdot\mathbb{P}(B_{n+1} / B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}$$

$$\mathbb{P}(B_2/B_1) = \frac{b+d}{r+b+d}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(B_{n+1} / B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \frac{b+nd}{r+b+nd}$$

probabilitatea ca B_{n+1} să se realizeze, știind că s-au realizat $B_1, B_2 \ldots$ și B_n

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n+1}) = \frac{b}{r+b}\cdot\frac{b+d}{r+b+d}\cdots\frac{b+nd}{r+b+dn} \quad (1)$$

Pentru $\mathbb{P}(B_2 \cap \ldots \cap B_{n+1})$:
Știm că: $B \cup B^c = \Omega$ $\quad \forall A, B \in \mathcal{F}$

$$A \cap \Omega = A$$

Deci:

$$\mathbb{P}(B_2 \cap \ldots \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(\overset{(B_1 \cup B_1^c)}{\Omega} \cap B_2 \ldots \cap B_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}((B_1 \cap B_2 \ldots \cap B_{n+1}) \cup (B_1^c \cap B_2 \ldots \cap B_{n+1}))$$

Deoarece știm că $(B_1 \cap B_2 ... \cap B_{n+1})$ și $(B_1^c \cap B_2 ... \cap B_{n+1})$ sunt incompatibile, putem scrie probabilitatea ca:

$$= \mathbb{P}(B_1 \cap ... \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 ... \cap B_{n+1})$$

Aplicând formula enunțată anterior pentru al doilea termen, obținem:

$$\mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 ... \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_1^c) \cdot \mathbb{P}(B_2 / B_1^c) \cdot \mathbb{P}(B_3 / B_1^c \cap B_2) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(B_{n+1} / B_1^c \cap ... \cap B_n)$$

$$\mathbb{P}(B_1^c) = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbb{P}(B_2 / B_1^c) = \frac{b}{r+b+d}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(B_{n+1} / B_1^c \cap ... \cap B_n) = \frac{b+(n-1)d}{r+b+n \cdot d}$$

Deci, $$\mathbb{P}(B_2 \cap ... \cap B_{n+1}) = \frac{b}{r+b} \cdot \frac{b+d}{r+b+d} \cdot ... \cdot \frac{b+nd}{r+b+nd} + \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b+d} \cdot ... \cdot \frac{b+(n-1)d}{r+b+nd}$$

$$= \frac{b \cdot (b+d) \cdot ... \cdot (b+(n-1)d) \cdot (r+b+dn)}{(r+b)(r+b+d) \cdot ... \cdot (r+b+nd)} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \mathbb{P}(B_1 / B_2 ... \cap B_{n+1}) = \frac{\cancel{b \cdot (b+d) \cdot ... \cdot} (b+nd)}{\cancel{b \cdot (b+d) \cdot ... \cdot (b+(n-1)d)}(r+b+dn)} = \frac{b+nd}{r+b+dn}$$

$$\mathbb{P}(B_1 / B_2 \cap ... \cap B_{n+1}) = \frac{b+nd}{r+b+nd} \xrightarrow[n]{} 1$$

Exercițiul 9

Fie n un număr de 5 cifre format în urma extragerii.

$$n = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e.$$

Caz I: Nu considerăm valide numerele de 4 cifre care au $a=0$.

$$\Omega = \{ \overline{abcde} \; ; a \in \{0,...9\}, b, c, d, e \in \{0,...9\}, a \neq b \neq c \neq d \neq e \}$$

$$\mathbb{P}(n \vdots 495) = \frac{\text{nr. cazuri fav.}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

$$\text{nr. caz. pos} = |\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$$

Nr. cazuri favorabile:

Se observă că $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$.

Deci: $e \in \{0; 5\}$ $(n \vdots 5)$ (criteriul de divizibilitate cu 5)

$(a+b+c+d+e) \vdots 9$ $(n \vdots 9)$ (– // – cu 9)

$(a-b+c-d+e) \vdots 11$ $(n \vdots 11)$ (suma cifrelor de pe pozițiile impare – s. cif. de pe pozițiile pare $\vdots 11$)

Cum cifrele sunt distincte, știm că:

$10 = 1+0+2+3+4 \le a+b+c+d+e \le 9+8+7+6+5 = 35$

Deci $n \vdots 9 \Leftrightarrow a+b+c+d+e \in \{18, 27\}$

I a) $a+b+c+d+e = 18 \mid -2b-2d$

$a-b+c-d+e = 18-2b-2d \vdots 2$

Deci $a-b+c-d+e$ e număr par și $|a-b+c-d+e| < 18$

(< strict deoarece b și d nu pot fi 0 simultan)

Singurul multiplu de 11 par și mai mic ca 18 e

$0. \Rightarrow a+c+e = b+d = 9$

I a 1. Dacă $e = 5$

$a+c = 4$

$b+d = 9$

Am presupus că $a \neq 0$, deci $(a,c) \in \{(1,3), (3,1), (4,0)\}$

$(a,c) \in \{(1,3), (3,1)\} \Rightarrow (b,d) \in \{(2,7), (7,2), (9,0), (0,9)\}$

$\Rightarrow 2 \cdot 4 = 8$ posibilități.

$(a,c) = (4,0) \Rightarrow (b,d) \in \{(1,8), (2,7), (3,6), (6,3), (7,2),$

$(8,1)\}$. $\Rightarrow 6$ posibilități.

În total sunt $6+8 = 14$ cazuri favorabile pt. I a 1.

I a. 2. Dacă $e = 0$

$a+c = 9$

$b+d = 9$

$(a,c), (b,d) \in \{(1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4),$
$(6,3), (7,2), (1,8)\}$

Dacă am ales (a,c) mai avem 6 posibilități pentru (b,d). În total sunt $6 \cdot 8 = 48$ cazuri favorabile pt I a. 2.

În total sunt 62 cazuri favorabile pentru I a.

I b) $a+b+c+d+e = 27 \mid -2b-2d$

$a-b+c-d+e = 27-2b-2d < 27$ și e impar

De asemenea, $a-b+c-d+e \geq 27-2\cdot 9-2\cdot 8=-7$

Deci, $a-b+c-d+e=11$ pentru că e singurul număr impar multiplu de 11 din $[-7;27)$.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d+e=27 \\ a-b+c-d+e=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b+d=8 \\ a+c+e=19 \end{array}$$

Dacă $e=0 \Rightarrow a+c=19$ imposibil, deoarece $a+c \leq 9+8=17$

$\Rightarrow e=5$.

$$\left.\begin{array}{l} a+c=14 \Rightarrow (a,c)\in\{(6,8),(8,6)\} \\ b+d=8 \Rightarrow (b,d)\in\{(1,7),(7,1)\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2=4 \text{ cazuri favorabile.}$$

Sunt 66 numere favorabile pentru cazul când prima cifră nu e 0.

$\Rightarrow P(n:495)=\dfrac{66}{30240}\approx 0{,}00218$

Caz II

Prima cifră poate fi 0.

$\Omega=\{\overline{abcde} \mid a,b,c,d,e\in\{0,1,\dots 9\},\ a\neq b\neq c\neq d\neq e\}$

$P(n:495)=\dfrac{\text{nr. fav}}{\text{nr. pos}}$

nr. posibile $=|\Omega|=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30240$

Cazuri favorabile: (raționamentul e cel din cazul I)

II a.1. Dacă $e=5$.

$a+c=4 \Rightarrow (a,c)\in\{(0,4),(1,3),(3,1),(4,0)\}$

$b+d=9 \Rightarrow (b,d)\in\{(0,9),(1,8),(2,7),(3,6),(6,3),(7,2),(8,1),(9,0)\}$

$(a,c)\in\{(0,4),(4,0)\} \Rightarrow (b,d)\in\{(1,8),(2,7),(3,6),(6,3),(7,2),(8,1)\}$

$(a,c)\in\{(3,1),(1,3)\} \Rightarrow (b,d)\in\{(0,9),(2,7),(7,2),(9,0)\}$

$\Rightarrow 2\cdot 6+2\cdot 4=12+8=20$ cazuri favorabile

II a.2. La fel ca I a 2, deoarece ultima cifră e deja 0 $\Rightarrow$ 48 cazuri favorabile

II b. La fel ca I b, deoarece dacă $a=0 \Rightarrow c+e=19$, imposibil.

$\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile.

În total 72 cazuri favorabile.

$\mathbb{P}(m : 495) = \frac{72}{30240} \simeq 0,0023.$

Exercițiul 10

a) A = unul din cei 4 pești e crap.

Folosim schema bilei nerevenite.

$N = 10$ - numărul total de pești

$N_1 = 3$ - numărul de crapi

$N_2 = 7$ - numărul de carași

$n_1 = 1$ - vrem să extragem doar un crap

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{4!\,5\cdot 6\cdot 7}{3!\cdot 4!}}{\frac{10!}{4!\cdot 6!}\,\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{}} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{7\cdot 10\cdot 3} = \frac{1}{2} = 0,5$$

C_3^1 = în câte moduri putem extrage un crap din 3

C_7^3 = în câte moduri putem extrage 3 carași din 7

C_{10}^4 = în câte moduri putem extrage 4 pești din 10.

b) B = cel puțin unul e crap

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$

$\mathbb{P}(B^c)$ = nu am pescuit niciun crap

Folosim schema bilei nerevenite:

$n_1 = 0$ - nu vrem să pescuim niciun crap

$$\mathbb{P}(B^c) = \frac{C_3^0 \cdot C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!}}{\frac{10!}{6!\cdot 4!}} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 3}{8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(B^c) = \frac{\text{nr. fav}}{\text{nr. pos}} = \frac{\text{în câte moduri pot așeza carașii}}{\text{în câte moduri pot așeza peștii}}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \simeq 0,83$

c) C = primul pește prins e crap

$\mathbb{P}(C) = \frac{\text{nr. caz. favorabile}}{\text{nr. caz. posibile}}$ el nu depinde de niciun alt eveniment anterior

Favorabile: 3 - vrem să pescuim unul din cei 3 crapi

Posibile: 10 - putem prinde orice pește

$\Rightarrow \mathbb{P}(C) = \frac{3}{10} = 0,3$

d) D = al doilea pește prins e crap

Aplicăm formula probabilității totale:

$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}$(al doilea e crap / primul e crap) $\cdot \mathbb{P}$(primul e crap) +
$\mathbb{P}$(al doilea e crap / primul e caras) $\cdot \mathbb{P}$(primul e caras)

$\mathbb{P}$(primul e crap) $= \mathbb{P}(C) = \frac{3}{10}$ (calculat anterior)

$\mathbb{P}$ (2 crap / 1 crap) $= \frac{3-1}{10-1} = \frac{2}{9}$ (inițial erau 3 crapi, dar la prima extragere s-a luat 1 și au rămas 2; și numărul total de pești a scăzut cu o unitate)

$\mathbb{P}$(primul e caras) $= \frac{\text{nr. fav}}{\text{nr. pos}} = \frac{7}{10}$ (sunt 7 caraşi în total din 10 peşti)

$\mathbb{P}$(al doilea e crap / primul e caras) $= \frac{3}{9}$ (la prima extragere s-a luat un caras, deci nu a fost afectat nr. de crapi, dar a scăzut nr. total de pești).

Deci, $\mathbb{P}(D) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6+21}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3$

Am putut să aplicăm formula probabilității totale deoarece:

Fie Cr evenim. prin care se pescuiește crap.
Ca evenim. prin care se pescuiește caras.

$C_r \cap C_a = \emptyset$ (putem pescui doar crapi și carași)

$C_r \cup C_a = \Omega$

e) E - primii doi peşti prinşi sunt crapi

Fie C_1 = even. că primul e crap

Fie C_2 = even. că al doilea e crap

$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_2 / C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1)$ - formula probabilității condiționate.

$\mathbb{P}(C_1) = \frac{3}{10} = \mathbb{P}(C)$ (calculată la pct c)

$\mathbb{P}(C_2/C_1) = \frac{2}{9}$ (calculată la pct d)

$\mathbb{P}(E) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \simeq 0,066$

f) F - cel puțin unul din primii doi peşti e crap

$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2)$

Știm formula:

$\mathbb{P}(C_1 \cup C_2) = \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) - \mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$

$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(E) = \frac{1}{15}$

$\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C) = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(D) = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(E)$

$<=> \mathbb{P}(F) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} = \frac{6}{10} - \frac{1}{15} = \frac{\cancel{3}}{5} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0,533$

g) G = fiecare din ultimii 3 pești prinși cântărește mai mult decât cel precedent.

Fie g_i = greutatea peștelui i $i = \overline{1,10}$

Fără a restrânge generalitatea, renumerotăm peștii astfel încât $g_i < g_j$, $\forall i < j$, $i,j = \overline{1,10}$.

$\mathbb{P}(G) = \frac{\text{nr. cazuri fav}}{\text{nr. cazuri pos}}$.

Numărul cazurilor posibile = toate posibilitățile de a aranja peștii în 4 extrageri.

$= A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$

Nr. cazurilor favorabile = toate posibilitățile de a aranja peștii în 4 extrageri a.î. să fie în ordine crescătoare după greutate

$= C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{8} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 210$

$\mathbb{P}(G) = \frac{210}{5040} = \frac{1}{24} \simeq 0,0416$