# Probabilități și statistică
## Temă 2

### Exercițiul 1

1. $E_n$ = evenimentul prin care în primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 5, nici suma 7, iar la a $n$-a aruncare a apărut suma 5.

Notăm cu:

$C_i$ = evenimentul că la a $i$-a aruncare suma fețelor superioare ale celor două zaruri e 5

$S_i$ = evenimentul că la a $i$-a aruncare suma fețelor superioare ale celor două zaruri e 7

Trebuie să aflăm $P(E_n)$. Îl putem scrie ca:

$$P(E_n) = P\left((C_1^c \cap S_1^c) \cap (C_2^c \cap S_2^c) \dots \cap (C_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c) \cap C_n\right)$$

Adică la prima aruncare suma nu e nici 5, nici 7, la a doua suma nu e nici 5, nici 7 etc. până la a $n$-a aruncare când suma e 5.

Deoarece e stabilit că aruncările sunt independente, atunci putem spune că $(C_1^c \cap S_1^c), (C_2^c \cap S_2^c), \dots (C_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c)$ și $C_n$ sunt independente.

$$P(E_n) \overset{\text{indep.}}{=\!=} P(C_1^c \cap S_1^c) \cdot P(C_2^c \cap S_2^c) \dots P(C_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c) \cdot P(C_n)$$

Însă știm că $P(C_1^c \cap S_1^c) = P(C_2^c \cap S_2^c) = \dots = P(C_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c)$ deoarece, aruncările fiind independente, probabilitatea rămâne aceeași, indiferent de aruncare.

$$P(E_n) = \left(P(C_1^c \cap S_1^c)\right)^{n-1} \cdot P(C_n)$$

Suma 5 se poate obține în 4 moduri: $\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$.

Suma 7 se poate obține în 6 moduri: $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.

Mulțimea evenimentelor elementare este:

$\Omega = \{(i,j) \,/\, 1 \le i,j \le 6\}$

$P(C_n) = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

nr. cazuri posibile $= |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

nr. cazuri fav. $= 4$ (4 moduri de a obține suma 5)

$\Rightarrow P(C_n) = \dfrac{4}{36}$

$P(C_1^c \cap S_1^c) = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

nr. cazuri posibile $= |\Omega| = 36$

nr. cazuri fav $= 36 - 4 - 6 = 26$ (să nu obțin nici 5, nici 7)

$\Rightarrow P(C_1^c \cap S_1^c) = \dfrac{26}{36}$

Deci, $P(E_n) = \left(\dfrac{26}{36}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9} \cdot \left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1}$

Notăm cu A evenimentul că la aruncarea zarurilor, suma 5 se obține înaintea sumei 7.

$P(A) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$

$E_1, E_2, \dots$ sunt incompatibile, deoarece dacă la a $i$-a aruncare am obținut suma 5, iar la cele anterioare nici 5, nici 7, atunci petrecerea evenimentului $E_j$ cu $j > i$ ar însemna că până la aruncarea $j$ nu am obținut suma 5, contradicție.

Deci, $P(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9} \cdot \left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow P(A) = \dfrac{1}{9} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{9} \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(\frac{13}{18}\right)^n - 1}{\left(\frac{13}{18}\right) - 1} = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}4$

2. $F_n$ = evenimentul prin care la primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2, nici suma 7, iar la a $n$-a aruncare a apărut suma 2.

Păstrăm notația $S_i$ de la subpunctul anterior și adăugăm $\Delta_i$ evenimentul că suma fețelor superioare la a $i$-a aruncare e 2.

Trebuie să aflăm $P(F_n)$:

$P(F_n) = P((D_1^c \cap S_1^c) \cap (D_2^c \cap S_2^c) \cap \ldots \cap (D_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c) \cap D_n)$

$\Leftrightarrow P(F_n) \overset{\text{indep.}}{=\!=} P(D_1^c \cap S_1^c) \cdot P(D_2^c \cap S_2^c) \cdot \ldots \cdot P(D_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c) \cdot P(D_n)$

Cum $P(D_1^c \cap S_1^c) = \ldots = P(D_{n-1}^c \cap S_{n-1}^c)$, relația devine:

$P(F_n) = (P(D_1^c \cap S_1^c))^{n-1} \cdot P(D_n)$

$\Omega = \{(i,j) / 1 \le i,j \le 6\}$

$P(D_n) = \dfrac{\text{nr. cazuri favor.}}{\text{nr. cazuri posib.}}$

nr. cazuri posibile $= |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

Suma 2 se poate obține într-un mod : (1,1).

Suma 7 se poate obține în 6 moduri.

nr. cazuri favorabile $= 1$ (să ai suma 2, adică (1,1))

$\Rightarrow P(D_n) = \dfrac{1}{36}$

$P(D_1^c \cap S_1^c) = \dfrac{\text{nr. cazuri favorab.}}{\text{nr. cazuri posib.}}$

nr. cazuri posibile $= |\Omega| = 36$

nr. cazuri favorab. $= 36 - 1 - 6 = 29$

$\Rightarrow P(D_1^c \cap S_1^c) = \dfrac{29}{36}$

Deci, $P(F_n) = \left(\dfrac{29}{36}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{36}$

Notăm cu B evenimentul că suma 2 apare înainte de suma 7.

$P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{\text{incom.}}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$

$\Leftrightarrow P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{29}{36}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{36}$

$\Leftrightarrow P(B) = \dfrac{1}{36} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{29}{36}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{36} \cdot \lim_{n \to \infty} \dfrac{\left(\frac{29}{36}\right)^n - 1}{\frac{29}{36} - 1} = \dfrac{1}{36} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{29}{36}}$

$\Leftrightarrow P(B) = \dfrac{1}{7} \approx 0,142$

# Exercițiul 2

Introducem notațiile:

$Z_i$ = evenimentul prin care Maria e la zi după săptămâna $i$, $i \in \mathbb{N}$

$U_i$ = evenimentul prin care înțelegem că Maria a rămas în urmă cu materia după săptămâna $i$, $i \in \mathbb{N}$

Din ipoteză știm că:

$P(Z_{i+1} / Z_i) = 0,8$ (probabilitatea să fie la zi cu materia după săptămâna ce urmează, știind că în săptămâna curentă e la zi)

$P(U_{i+1} / Z_i) = 0,2$

$P(Z_{i+1} / U_i) = 0,4$ $\quad \forall i \in \mathbb{N}$

$P(U_{i+1} / U_i) = 0,6$

De asemenea, este precizat că atunci când a început cursul era cu materia la zi, astfel că putem considera, prin convenție, că:

$P(Z_0) = 1$

$P(U_0) = 0$

Pentru a afla $P(Z_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, aplicăm formula probabilității totale:

$$P(Z_n) = P(Z_n / Z_{n-1}) \cdot P(Z_{n-1}) + P(Z_n / Z_{n-1}^c) \cdot P(Z_{n-1}^c)$$

$$\Leftrightarrow P(Z_n) = P(Z_n / Z_{n-1}) \cdot P(Z_{n-1}) + P(Z_n / U_{n-1}) \cdot P(U_{n-1})$$

Înlocuind cu valorile din ipoteză, obținem:

$$\Leftrightarrow P(Z_n) = 0,8 \cdot P(Z_{n-1}) + 0,4 \cdot P(U_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow P(Z_n) = 0,8 \cdot P(Z_{n-1}) + 0,4 \cdot (1 - P(Z_{n-1}))$$

$$\Leftrightarrow P(Z_n) = 0,4 \cdot P(Z_{n-1}) + 0,4$$

Deci:

$P(Z_1) = 0,4 \cdot P(Z_0) + 0,4 = 0,8$

$P(Z_2) = 0,4 \cdot P(Z_1) + 0,4 = 0,32 + 0,4 = 0,72$

$P(Z_3) = 0,4 \cdot P(Z_2) + 0,4 = 0,288 + 0,4 = 0,688$

În concluzie, probabilitatea ca Maria să fie la zi cu materia după săptămâna 3 este de 0,688.

Vrem să aflăm probabilitatea de a fi cu materia la zi și la sfârșitul cursului.

$\mathbb{P}(Z_3) = 0,688$

$\mathbb{P}(Z_4) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_3) + 0,4 = 0,2752 + 0,4 = 0,6752$

$\mathbb{P}(Z_5) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_4) + 0,4 \simeq 0,27 + 0,4 \simeq 0,67$

$\mathbb{P}(Z_6) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_5) + 0,4 \simeq 0,268 + 0,4 \simeq 0,668$

$\mathbb{P}(Z_7) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_6) + 0,4 \simeq 0,2672 + 0,4 \simeq 0,6672$

$\mathbb{P}(Z_8) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_7) + 0,4 \simeq 0,26688 + 0,4 \simeq 0,66688$

$\mathbb{P}(Z_9) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_8) + 0,4 \simeq 0,26675 + 0,4 \simeq 0,66675$

$\mathbb{P}(Z_{10}) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_9) + 0,4 \simeq 0,26668 + 0,4 \simeq 0,66668$

$\mathbb{P}(Z_{11}) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_{10}) + 0,4 \simeq 0,266672 + 0,4 \simeq 0,666672$

$\mathbb{P}(Z_{12}) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_{11}) + 0,4 \simeq 0,266668 + 0,4 \simeq 0,666668$

$\mathbb{P}(Z_{13}) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_{12}) + 0,4 \simeq 0,2666672 + 0,4 \simeq 0,6666672$

$\mathbb{P}(Z_{14}) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_{13}) + 0,4 \simeq 0,2666668 + 0,4 \simeq 0,6666668$

Deci, probabilitatea ca Maria să fie la zi la finalul cursului este de 0,6666668.

Relația putea fi dedusă și inductiv:

Demonstrăm că: $\mathbb{P}(Z_n) = (0,4)^n \cdot \overset{=1}{\mathbb{P}(Z_0)} + 0,4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$P(1)$: $\mathbb{P}(Z_1) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_0) + 0,4 = 0,4 + 0,4 = 0,8$ - adevărat

Presupunem adevărată $P(n-1)$:

$P(n-1)$: $\mathbb{P}(Z_{n-1}) = (0,4)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(Z_0) + (0,4)^{n-1} + (0,4)^{n-2} + \dots + 0,4$

Vrem să demonstrăm $P(n)$:

$\mathbb{P}(Z_n) = (0,4)^n \cdot \underline{\mathbb{P}(Z_0)} + 0,4$

Știm că $\mathbb{P}(Z_n) = 0,4 \cdot \mathbb{P}(Z_{n-1}) + 0,4$.

Folosindu-ne de $P(n-1)$, obținem:

$\mathbb{P}(Z_n) = 0,4 \cdot ((0,4)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(Z_0) + (0,4)^{n-1} + \dots + (0,4)) + 0,4$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z_n) = (0,4)^n \cdot \mathbb{P}(Z_0) + (0,4)^n + (0,4)^{n-1} + \dots + 0,4 \xrightarrow[n]{} \frac{2}{3}$

Deci, $\mathbb{P}(Z_{14}) = (0,4)^{14} + (0,4)^{14} + (0,4)^{13} + \dots + 0,4 = (0,4)^{14} + \frac{(0,4)^{14} - 1}{(0,4) - 1} - 1$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z_{14}) \simeq 0,6666$

# Exercițiul 3

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Repartiția variabilei $3X+7$:

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot(-1)+7=4 \\ 3\cdot 0+7=7 \\ 3\cdot 1+7=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 3X+7 \in \{4,7,10\} \text{ iar } \begin{array}{l} \mathbb{P}(3X+7=4)=0,3 \\ \mathbb{P}(3X+7=7)=0,2 \\ \mathbb{P}(3X+7=10)=0,5 \end{array}$$

$$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Repartiția variabilei aleatoare $X^2$:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^2=1 \\ (0^2)=0 \\ (1)^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow X^2 \in \{0;1\} \text{, iar } \mathbb{P}(X^2=1)=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=-1)$$

$$=0,3+0,5=0,8$$

$$\mathbb{P}(X^2=0)=0,2$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Repartiția variabilei aleatoare $X^3$:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^3=-1 \\ 0^3=0 \\ 1^3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow X^3 \in \{-1;0;1\} \text{, iar } \begin{array}{l} \mathbb{P}(X^3=-1)=\mathbb{P}(X=-1)=0,3 \\ \mathbb{P}(X^3=0)=\mathbb{P}(X=0)=0,2 \\ \mathbb{P}(X^3=1)=\mathbb{P}(X=1)=0,5 \end{array}$$

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Repartiția variabilei aleatoare $X+X^2$:

$$\left.\begin{array}{l} -1+(-1)^2=0 \\ 0+0^2=0 \\ 1+1^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow X+X^2 \in \{0;2\} \text{, iar } \mathbb{P}(X+X^2=2)=\mathbb{P}(X=1)$$

$$=0,5$$

$$\mathbb{P}(X+X^2=0)=\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0)$$

$$=0,3+0,2=0,5$$

$$X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Vrem să aflăm $\mathbb{P}(X > -\frac{1}{3})$

Definiție! Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ var. a. Se numește funcție de repartiție a lui $X$, $F : \mathbb{R} \to [0;1]$

$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

Deci, putem scrie $F(-\frac{1}{3}) = \mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{3})$, de unde deducem că $\mathbb{P}(X > -\frac{1}{3}) = 1 - F(-\frac{1}{3}) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{3})$

$\mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{3}) = \mathbb{P}(\{X = -1\}) = 0{,}3$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > -\frac{1}{3}) = 1 - 0{,}3$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X > -\frac{1}{3}) = 0{,}7$

Vrem să aflăm $\mathbb{P}(X < \frac{1}{4} / X \geq -\frac{1}{2})$

Aplicăm definiția probabilității condiționate și obținem:

$$\mathbb{P}(X < \tfrac{1}{4} / X \geq -\tfrac{1}{2}) = \frac{\mathbb{P}((X < \frac{1}{4}) \cap (X \geq -\frac{1}{2}))}{\mathbb{P}(X \geq -\frac{1}{2})} = \frac{\mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4})}{\mathbb{P}(X \geq -\frac{1}{2})}$$

$\mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 0{,}2$

$\mathbb{P}(X \geq -\frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X > -\frac{1}{3}) = 0{,}7$ deoarece variabila aleatoare nu ia nicio valoare în $[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$.

Deci, $\mathbb{P}(X < \frac{1}{4} / X \geq -\frac{1}{2}) = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7} = 0{,}285.$

$\mathbb{P}(X \geq -\frac{1}{2})$ mai putea fi calculată și astfel:

$\mathbb{P}(X = -\frac{1}{2}) = 0$

$\mathbb{P}(X > -\frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(\{X = -1\}) = 0{,}7$

Deci $\mathbb{P}(X \geq -\frac{1}{2}) = 0{,}7 = \mathbb{P}(X > -\frac{1}{2}) + \mathbb{P}(X = -\frac{1}{2})$

## Exercițiul 4

$X$ v.a. cu valori în $\mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) $\lambda > 0$

i) $X \sim Pois(\lambda) \Rightarrow$ ii) $\forall n \geq 1$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

$X \sim Pois(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}}{e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{\lambda}{n} \qquad \forall\, n\geq 1$$

ii) $\Rightarrow$ i) Știm că $\forall n\geq 1$ $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$. Vrem să arătăm că $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda>0$

$$\left.\begin{aligned} n=1 \quad & \frac{p_1}{p_0} = \frac{\lambda}{1} \\ n=2 \quad & \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda}{2} \\ & \vdots \\ & \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \end{aligned}\right\} \odot \Rightarrow \frac{p_n}{p_0} = \frac{\lambda^n}{n!} \iff p_n = p_0\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$$

Cum $X$ e o v.a cu probabilitățile $p_n$, $n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \iff \sum_{k=0}^{\infty} p_0\left(\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\dots\frac{\lambda^n}{n!}\dots\right) = 1 \\ \text{Se știe că: } e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$p_0\cdot e^{\lambda} = 1 \iff p_0 = \frac{1}{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow p_n = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$$

b) $X\sim\mathrm{Pois}(\lambda)$

i) $k=?$ a.î. $\mathbb{P}(X=k)$ maximă

Știm că $\forall n\geq 1$ $\frac{\mathbb{P}(X=n)}{\mathbb{P}(X=n-1)} = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X=n)\geq\mathbb{P}(X=n-1) \\ \quad\Rightarrow \lambda\geq n \\ \mathbb{P}(X=n)<\mathbb{P}(X=n-1) \\ \quad\Rightarrow \lambda<n \end{cases}$

Fie $k$ aî $\mathbb{P}(X=k)$ max.

$$\mathbb{P}(X=k-1)\nearrow\mathbb{P}(X=k)\searrow\mathbb{P}(X=k+1)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k-1)\leq\mathbb{P}(X=k) \Rightarrow \lambda\geq k \\ \mathbb{P}(X=k)>\mathbb{P}(X=k+1)\Rightarrow \lambda<k+1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow k\leq\lambda<k+1\,,\ k\in\mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow k=[\lambda]$ este punctul maxim și

$\mathbb{P}(X=[\lambda]) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}$ este valoarea maximă.

ii) Valoarea lui $\lambda$ care maximizează $\mathbb{P}(X=k)$, pentru $k$ fixat.

Anterior, am văzut că:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=k-1)} = \frac{\lambda}{k} \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(X=k) \geq \mathbb{P}(X=k-1) \Rightarrow \lambda \geq k \\ \mathbb{P}(X=k) > \mathbb{P}(X=k+1) \Rightarrow \lambda < k+1 \end{array}\right\} \Rightarrow k \leq \lambda < k+1$$

Pentru a maximiza:

$$\frac{\partial \mathbb{P}(X=k)}{\partial \lambda} = 0 = \frac{1}{k!} \cdot \left(e^{-\lambda} k \cdot \lambda^{k-1} - \lambda^k \cdot e^{-\lambda}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(k \cdot \lambda^{k-1} - \lambda^k\right) \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ sau } \lambda = k \ (*)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{P}(X=k)}{\partial^2 \lambda} < 0 \ (**) \qquad \frac{\partial^2 \mathbb{P}(X=k)}{\partial^2 k} = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^{k-2}(\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 - k)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 - k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = k + \sqrt{k}, \quad \lambda_2 = k - \sqrt{k}$$

| $\lambda$ | $0$ | | $k-\sqrt{k}$ | | $k+\sqrt{k}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 - k$ | | $+$ | $0$ | $-\ -$ | $0$ | $+$ | |

Din $(*)$ și $(**)$ $\Rightarrow$ $\lambda = k$ valoarea care maximizează $\mathbb{P}(X=k)$

## Exercițiul 5

$X$ v.a. discretă

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{(1-p)^k}{-k \log p}, \quad k \geq 1 \qquad 0 < p < 1$$

$$\mathbb{P}(X=0) = 0$$

$E[X] = ?$

Definiție! Fie $X$ o v.a. discretă $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \, f(x_i) = \sum_i x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \, \mathbb{P}(X=k)$$

$$\Leftrightarrow E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k} \cdot \frac{(1-p)^k}{-\cancel{k} \log p} = \frac{-1}{\log p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X] = -\frac{1}{\log p} \cdot \lim_{n \to \infty} \left( \frac{(1-p)^{n} - 1}{\cancel{1}-p \cancel{+1}} - 1 \right) \qquad (1-p)^n \to 0$$

$$\Leftrightarrow E[X] = -\frac{1}{\log p} \cdot \frac{1-p}{p}$$

$$\Leftrightarrow E[X] = \frac{p-1}{p \log p}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = ? \qquad E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \, \mathbb{P}(X=k)$$

Pentru $k=0$ termenul e 0, deci putem începe suma de la 1

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\cancel{2}} \cdot \frac{(1-p)^k}{-\cancel{k} \log p} = -\frac{1}{\log p} \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^k$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X^2] = -\frac{1}{\log p}(1-p)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^{k-1}$$
$$(x^k)' = kx^{k-1}. \text{ Pt. } x = 1-p \Rightarrow \left((1-p)^k\right)' = k\cdot(1-p)^{k-1}$$
$\Rightarrow$ ↖ derivat după $1-p$

$$\mathbb{E}[X^2] = -\frac{1}{\log p}(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-p)^k\right)' = -\frac{1}{\log p}(1-p)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right)'$$

Calculăm $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-p)^{n}-1}{1-p-1} - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$
($(1-p)^n \to 0$)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = -\frac{1}{\log p}(1-p)\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)'$$

$$\left(\frac{1-p}{p}\right)' = \frac{(1-p)'p - (1-p)\cdot p'}{p^2} = \frac{p+1-p}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$ (derivat după $1-p$)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = -\frac{(1-p)}{p^2\log p}$$

$Var(X) = ?$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$
$$Var(X) = \frac{-(1-p)}{p^2\log p} - \left(-\frac{(1-p)}{p\log p}\right)^2$$
$$Var(X) = \frac{-(1-p)}{p^2\log p} - \frac{p^2-2p+1}{p^2\log^2 p}$$
$$Var(X) = -\frac{1}{p^2\log^2 p}\cdot(1-p)(\log p + 1-p)$$

## Exercițiul 6

$\mathbb{P}$(Fischer câștigă) $= 0,4$ (o partidă)
$\mathbb{P}$(Spassky câștigă) $= 0,3$
$\mathbb{P}$(remiză) $= 0,3$

a) Dacă Fischer câștigă meciul la a i-a partidă (cu $i \leq 10$, deoarece dacă sunt 10 remize meciul e egal) înseamnă că partidele anterioare au fost remiză.

$$\mathbb{P}(\text{Fischer câștigă meciul}) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(\text{Fischer câștigă partida } i)$$
$$= \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(\text{remiză})^{i-1} \cdot \mathbb{P}(\text{Fischer câștigă})$$
$$= \sum_{i=1}^{10} (0,3)^{i-1} \cdot 0,4$$
$$= 0,4 \cdot \frac{(0,3)^{10} - 1}{0,3 - 1} \approx -0,571428 \cdot ((0,3)^{10} - 1)$$
$$\approx 0,5714251$$

b) Care este funcția de masă a duratei meciului?

Știm că meciul poate avea maxim 10 partide.

Fie $L \in \mathbb{N}^*$ lungimea meciului. Dacă $L = 10$, atunci am avut 9 remize și la a 10-a a câștigat Fischer, Spassky sau am avut remiză.

$$\mathbb{P}(L=10) = (0,3)^9 (\underbrace{\mathbb{P}(F.\text{câșt})}_{0,4} + \underbrace{\mathbb{P}(S.c.)}_{0,3} + \underbrace{\mathbb{P}(r)}_{0,3}) = 0,3^9$$

Dacă $L < 10$, atunci am avut $L-1$ remize urmate de câștigul lui Fischer sau al lui Spassky.

$$\mathbb{P}(L=1) = \mathbb{P}(F. \text{ câștigă part. } 1) + \mathbb{P}(S. \text{ câștigă part. } 1)$$
$$= 0,4 + 0,3 = 0,7$$
$$\mathbb{P}(L=2) = \mathbb{P}(F. \text{ câștigă part} 2) \cdot \mathbb{P}(\text{rem.}) + \mathbb{P}(S - \text{„} -) \cdot \mathbb{P}(\text{rem.})$$
$$= 0,4 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,3 = (0,4 + 0,3) \cdot 0,3 = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$$

$$\forall i = \overline{1,9} \Rightarrow \mathbb{P}(L = i) = 0,7 \cdot 0,3^{i-1}$$

$$\mathbb{P}(L = l) = \begin{cases} (0,3)^9 & , l = 10 \\ (0,3)^{l-1} \cdot 0,7 & , l = \overline{1,9} \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$

Def! Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a discretă. S.n. funcție de masă a v.a. discrete $X$ funcția $f_X : X(\Omega) \to [0;1]$, definită prin $f(x_i) = p_i = \mathbb{P}(\{X = x_i\})$

Deci, $L$ = v.a. discretă

$$f_L : L(\Omega) \to [0;1]$$

$$f_L(x) = \begin{cases} (0,3)^9 & , x = 10 \\ (0,3)^{l-1} \cdot 0,7 & , x \in \{1, \ldots, 9\} \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$

# Exercițiul 7

Fie X numărul de mașini vândute de reprezentanță, număr întreg între 0 și $n \geq N$. Notăm cu G câștigul.

Dacă $X \geq N$, adică se vând cel puțin N mașini, atunci nu se înregistrează pierderi, deci $G = a \cdot N$ (primește a unități monetare pe fiecare mașină).

Dacă $X < N$, adică nu s-au vândut toate mașinile, înseamnă că avem beneficii de la cele X mașini vândute și pierderi de la cele $N - X$ rămase. Deci, câștigul devine $G = a \cdot X - b \cdot (N - X)$. Avem

$$G = \begin{cases} aN & , X \geq N \\ a \cdot X - b(N - X) & , X < N \end{cases}$$

Deci, valoarea medie a câștigului este:

$$\mathbb{E}(G) = a \cdot N \cdot \mathbb{P}(X \geq N) + [aX - b(N - X)] \cdot \mathbb{P}(X < N)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(G) = a \cdot N \cdot \mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1} [aX - b(N - X)] \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(G) = \sum_{x=N}^{n} aN\,\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x=0}^{N-1} [ax - b(N - x)] \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Știm din ipoteză că probabilitățile mașinilor de a fi vândute sunt egale, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(G) = \sum_{x=N}^{n} a \cdot N \cdot \frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N-1} [ax - b(N - x)] \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(G) = \frac{a \cdot N \cdot (n - N + 1)}{n+1} + \sum_{x=0}^{N-1} \frac{(a+b)x - bN}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(G) = \frac{aN(n - N + 1)}{n+1} - \frac{bN^2}{n+1} + \frac{(a+b)N(N-1)}{2(n+1)}$$

$$\mathbb{E}(G) = \frac{N[2an - 2aN + 2a - 2bN + (a+b)N - a - b]}{2(n+1)}$$

$$\mathbb{E}(G) = \frac{N[a(2m+1) - (a+b)N - b]}{2(m+1)}$$

Comanda optimă se obține atunci când $\mathbb{E}(G)$ e maxim, deci numărătorul lui $\mathbb{E}(G)$ e maxim.

Definim:

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$\varphi(N) = N[a(2m+1) - b - (a+b)N]$

Calculăm $\varphi'$:

$\varphi'(N) = a(2m+1) - b - 2(a+b)N$

Calculăm $\varphi''$:

$\varphi''(N) = -2(a+b) < 0 \Rightarrow \varphi'$ str. descresc.

$$\left.\varphi'\left(\frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}\right) = 0\right\} \Rightarrow \varphi' > 0 \text{ pe } \left[0, \frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}\right] \text{ și } \varphi' < 0 \text{ pe } \left(\frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}, +\infty\right)$$

| $N$ | $0$ | | | $\frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $\varphi''$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $-$ | |
| $\varphi$ | $\nearrow$ | | | | $\searrow$ | |

Deci, $\varphi$ e crescătoare pe $\left[0; \frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}\right)$ și descr. pe $\left(\frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}, +\infty\right)$

$\varphi'(N) = 0 \Rightarrow N = \frac{(2m+1)a-b}{2(a+b)}$ valoarea maximă care ne asigură comanda optimă.

## Exercițiul 8

Știm că $X \sim Binom(n,p)$. Aflăm $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$ în funcție de $n$ și $p$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Cum pentru $k = 0$ termenul e 0, putem începe suma de la 1.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \cdot \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$(k-1)!$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-1-k+1}}_{= (p+1-p)^{n-1} = 1}$$

$$\Rightarrow E[X] = np$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{\cancel{2}} \cdot \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{np}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n! \cancel{(k-1)}}{\cancel{(k-1)}!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} \cdot p^{k-2} (1-p)^{n-k}}_{= (p+1-p)^{n-2} = 1} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$Var(X) = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

Din ipoteză știm că:

$E[X] = 2\,Var(X) \Rightarrow np = 2np - 2np^2$

$np - 2np^2 = 0$

$E[X] \notin \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$np \notin \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} np(1-2p) = 0 \\ np \notin \mathbb{N} \Rightarrow np \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-2p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} E[x] = \frac{n}{2} \\ E[x] \notin \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow n$ este impar

Trebuie să calculăm $\mathbb{P}(x < \mathbb{E}[x])$.

$$\mathbb{P}(x < \mathbb{E}[x]) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \mathbb{P}(x = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k$$

Știm că:

$\left.\begin{array}{l} C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n \\ C_n^k = C_n^{n-k} \quad , \forall\, k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ suma va avea un număr par de termeni

$$\overset{n \text{ impar}}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} \quad \text{, deoarece } 2 \cdot C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + \ldots + 2\, C_n^{[\frac{n}{2}]} = 2^n$$

Așadar, $\mathbb{P}(x < \mathbb{E}[x]) = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} = 0,5$