Cozma Laura-Elena

Grupa 344

# Tehnici de Optimizare

Tema 2

## Exercițiul 1

Fie funcția $f: R^2 \to R, f(x) = x_1^3 x_2^2 (a - x_1 - x_2)$.

a) Determinarea extremelor (punctelor staționare) ale funcției f.

Pentru a calcula punctele staționare, trebuie să calculăm gradientul funcției. Acesta va fi:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3ax_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_2^2 - 3x_1^2x_2^3 \\ 2ax_1^3x_2 - 2x_1^4x_2 - 3x_1^3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2x_2^2(3a - 4x_1 - 3x_2) \\ x_1^3x_2(2a - 2x_1 - 3x_2) \end{bmatrix}$$

Punctele staționare $x^*$ vor fi găsite din ecuația:

$$\nabla f(x^*) = 0, echivalent\ cu\ \begin{cases} x_1^2x_2^2(3a - 4x_1 - 3x_2) = 0 \\ x_1^3x_2(2a - 2x_1 - 3x_2) = 0 \end{cases}$$

Distingem cazurile:

I. $x_1 = 0, deci\ x_2 \in R$

II. $x_2 = 0, deci\ x_1 \in R$

III. $\begin{cases} 3a - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2a - 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ x_2 = \frac{a}{3} \end{cases}$

Așadar, mulțimea punctelor staționare va fi $S = \left\{(0, x_2), (x_1, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right) \middle| x_1, x_2 \in R \right\}$

b) Pentru care valori ale lui a, funcția are maxime globale?

Cum funcția este de două ori derivabilă, putem calcula Hessiana funcției. Formula generală este:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Astfel, Hessiana va fi:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6ax_1x_2^2 - 12x_1^2x_2^2 - 6x_1x_2^3 & 6ax_1^2x_2 - 8x_1^3x_2 - 9x_1^2x_2^2 \\ 6ax_1^2x_2 - 8x_1^3x_2 - 9x_1^2x_2^2 & 2ax_1^3 - 2x_1^4 - 6x_1^3x_2 \end{bmatrix}, echivalent\ cu$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6x_1x_2^2(a-2x_1-x_2) & x_1^2x_2(6a-8x_1-9x_2) \\ x_1^2x_2(6a-8x_1-9x_2) & x_1^3(2a-2x_1-6x_2) \end{bmatrix}$$

Înlocuind în Hessiană valorile punctelor staționare din mulțimea S găsite la punctul a, obținem:

$$\nabla^2 f(x^*) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2ax_1^3 - 2x_1^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{a^4}{9} & -\frac{a^4}{12} \\ -\frac{a^4}{12} & -\frac{a^4}{8} \end{bmatrix}, unde\ x_1, a \in R \right\}$$

I. $\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$

Cum valorile proprii sunt 0, testul este inconcluziv.

II. $\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2ax_1^3 - 2x_1^4 \end{bmatrix}, a, x_1 \in R$

Dacă hessiana e negativ definită, atunci funcția are un punct de maxim local. Pentru a fi negativ definită, valorile proprii trebuie să fie negative, deci $2ax_1^3 - 2x_1^4 < 0$, echivalent cu $ax_1^3 - x_1^4 < 0$. Pentru a vedea pe ce intervale se satisface condiția, definim funcția:

$$g: R \to R, g(x) = ax^3 - x^4 = x^3(a-x)$$

a. Dacă a = 0, atunci $g(x) = -x^4 < 0, pentru\ orice\ x \in R$. Așadar, pentru a = 0, punctul staționar $(x_1, 0)$, $x_1 \in R$ este un maxim local.

b. Dacă a > 0:

| | |
|---|---|
| $x$ | -∞ 0 a ∞ |
| $x^3$ | - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + |
| $(a-x)$ | + + + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - |
| $g(x)$ | - - - - - 0 + + + + 0 - - - - - - - |

Așadar, g(x) < 0 pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (a, \infty)$. Deci, punctul staționar $(x_1, 0)$, $x_1 \in (-\infty, 0) \cup (a, \infty)$ este un maxim local pentru a > 0.

c. Daca a < 0:

| | |
|---|---|
| $x$ | -∞ a 0 ∞ |
| $x^3$ | - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + |
| $(a-x)$ | + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - |
| $g(x)$ | - - - - - 0 + + + + 0 - - - - - - - |

Așadar, g(x) < 0 pentru $x \in (-\infty, a) \cup (0, \infty)$. Deci, punctul staționar $(x_1, 0)$, $x_1 \in (-\infty, a) \cup (0, \infty)$ este un maxim local pentru a < 0.

III. $\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} -\frac{a^4}{9} & -\frac{a^4}{12} \\ -\frac{a^4}{12} & -\frac{a^4}{8} \end{bmatrix}, a \in R$

Dacă a=0, atunci Hessiana va fi cea din cazul I.
Dacă a≠0, atunci $\left|-\frac{a^4}{9}\right| < 0, iar\ \det\left(\nabla^2 f(x^*)\right) = \frac{a^8}{72} - \frac{a^8}{144} > 0$ , deci matricea este negativ definită și $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right), a \neq 0$ va fi un punct de maxim.

c) Calculați explicit primele 2 iterații ale metodei gradient cu pas constant 1, pentru valoarea parametrului a = -1.

Funcția devine: $f(x) = -x_1^3 x_2^2 (1 + x_1 + x_2)$.
Gradientul funcției:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^2(-3 - 4x_1 - 3x_2) \\ x_1^3 x_2(-2 - 2x_1 - 3x_2) \end{bmatrix}$$

Plecăm din punctul $x^0 = [1, -1]$.
Calculam gradientul în $x^0$:

$$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 1 * 1 * (-3 - 4 + 3) \\ 1 * (-1) * (-2 - 2 + 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculăm $x^1$ cu metoda gradient cu α = 1.
$x^1 = x^0 - \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f(x^0) = -1(1 + 1 - 1) = -1, f(x^1) = -125(1 + 5 + 1) = -875$$

Calculam gradientul în $x^1$:

$$\nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 25 * 1 * (-3 - 100 - 3) \\ 125 * 1 * (-2 - 50 - 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2650 \\ -7000 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - \nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2650 \\ -7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2655 \\ 7001 \end{bmatrix}$

$$f(x^2) = -2655^3 * (7001)^2 * 9657$$