

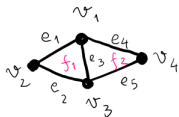
Modelare geometrică 3D aplicată în grafică - teme de interes și repere bibliografice

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Generalități

- Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.



$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$$

Incidente : vârfuri / muchii : de ex. $(v_1, e_1); (v_1, e_3); (v_1, e_4);$
etc.

vârfuri / fețe : de ex. $(v_1, f_1); (v_1, f_2); (v_2, f_1)$
etc.

muchii / fețe : de ex. $(e_1, f_1); (e_3, f_1); (e_3, f_2);$
etc.

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.
- ▶ Referințe (câteva...):
[Botsch et al., 2006]

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.
- ▶ Referințe (câteva...):
 - [Botsch et al., 2006]
 - [Bischoff, Kobbelt, 2004]

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.
- ▶ Referințe (câteva...):
 - [Botsch et al., 2006]
 - [Bischoff, Kobbelt, 2004]
 - Curs Princeton: *Advanced Topics in Computer Science: Geometric Modeling for Computer Graphics*

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.
- ▶ Referințe (câteva...):

[Botsch et al., 2006]

[Bischoff, Kobbelt, 2004]

Curs Princeton: *Advanced Topics in Computer Science: Geometric Modeling for Computer Graphics*

Curs Berkeley: *Mesh Generation and Geometry Processing in Graphics, Engineering, and Modeling*.

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.
- ▶ Referințe (câteva...):
 - [Botsch et al., 2006]
 - [Bischoff, Kobbelt, 2004]
 - Curs Princeton: *Advanced Topics in Computer Science: Geometric Modeling for Computer Graphics*
 - Curs Berkeley: *Mesh Generation and Geometry Processing in Graphics, Engineering, and Modeling*.
- ▶ Soluții software / tehnologii:

Generalități

- ▶ Rețele de poligoane și de triunghiuri (*Polygonal meshes and triangle meshes*): $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{I})$, unde \mathcal{V} =mulțimea de vârfuri, \mathcal{E} =mulțimea de muchii, \mathcal{F} =mulțimea de fețe, \mathcal{I} : incidențele dintre vârfuri, muchii, fețe, astfel ca o serie de condiții naturale să fie verificate.
- ▶ Referințe (câteva...):
 - [Botsch et al., 2006]
 - [Bischoff, Kobbelt, 2004]
 - Curs Princeton: *Advanced Topics in Computer Science: Geometric Modeling for Computer Graphics*
 - Curs Berkeley: *Mesh Generation and Geometry Processing in Graphics, Engineering, and Modeling*.
- ▶ Soluții software / tehnologii:
 - Software dedicat pentru generarea / manevrarea de rețele poligonale: [MeshLab](#), [Triangle](#), [CGAL](#)
 - Software dedicat pentru integrarea acestor obiecte în modelare 3D grafică: de exemplu [Blender](#)

Formate disponibile

Obiecte 3D: disponibile in format "triangle mesh" sau "polygonal mesh" - diverse formate de date (.OBJ, .PLY). Astfel de formate conțin informații despre vârfuri, muchii, fețe, conectivitate (incidențe), precum și alte informații relevante pentru randare (coordonate de texturare, normale, proprietăți de material, etc.)

[The Stanford 3D Scanning Repository](#)

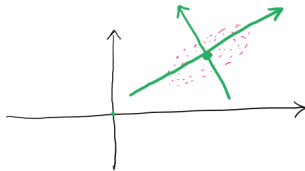
[Large Geometric Models Archive - Georgia Institute of Technology](#)

[A Benchmark for 3D Mesh Watermarking](#)

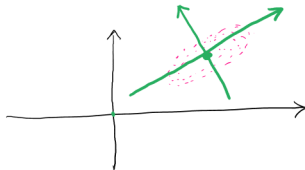
Metode de reconstrucție

Reconstrucția poate porni de la nori de puncte [Hoppe et al., 1992], [Pauly et al., 2002] sau de la imagini nestructurate 2D sau 3D (cum sunt de exemplu cele din imagistica medicală [Lorensen și Cline, 1997]).

Reconstrucție pornind de la nori de puncte

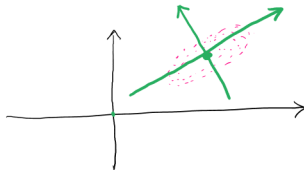


Reconstrucție pornind de la nori de puncte



Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

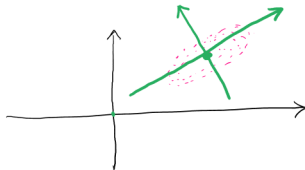
Reconstrucție pornind de la nori de puncte



Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

Originea “valoare medie” \longrightarrow

Reconstrucție pornind de la nori de puncte

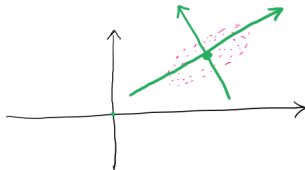


Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

Originea “valoare medie” \longrightarrow

“Matrice de corelație” (matrice pătratică de ordinul 2 sau 3)

Reconstrucție pornind de la nori de puncte



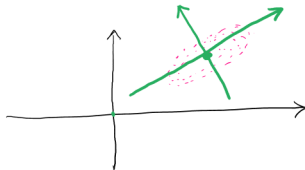
Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

Originea “valoare medie” \longrightarrow

“Matrice de corelație” (matrice pătratică de ordinul 2 sau 3)

Calcul valori proprii/vectori proprii \longrightarrow

Reconstrucție pornind de la nori de puncte



Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

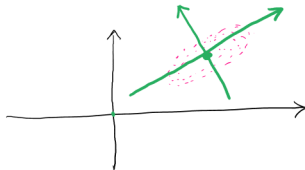
Originea “valoare medie” \longrightarrow

“Matrice de corelație” (matrice pătratică de ordinul 2 sau 3)

Calcul valori proprii/vectori proprii \longrightarrow

“Direcții principale” (variabilitatea este maximă în aceste direcții)

Reconstrucție pornind de la nori de puncte



Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

Originea “valoare medie” \longrightarrow

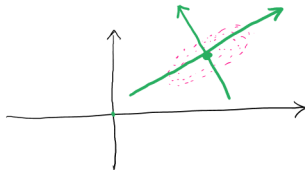
“Matrice de corelație” (matrice pătratică de ordinul 2 sau 3)

Calculul valori proprii/vectori proprii \longrightarrow

“Direcții principale” (variabilitatea este maximă în aceste direcții)

În cazul 3D: a treia direcție indică normala.

Reconstrucție pornind de la nori de puncte



Dat un nor de puncte ($2D, 3D$) \longrightarrow (translație)

Originea “valoare medie” \longrightarrow

“Matrice de corelație” (matrice pătratică de ordinul 2 sau 3)

Calcul valori proprii/vectori proprii \longrightarrow

“Direcții principale” (variabilitatea este maximă în aceste direcții)

În cazul 3D: a treia direcție indică normala.

Analiză în componente principale / PCA (*Principal Component Analysis*)

Trebuie combinată cu alte tehnici

De la puncte eşantionate într-un grid regulat la curbe / suprafețe

Cazul 2D: de la valori eşantionate la curbe de contur

De la puncte eșantionate într-un grid regulat la curbe / suprafețe

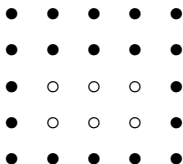
Cazul 2D: de la valori eșantionate la curbe de contur

Exemplu

15	12	20	17	15		0	0	0	0	0
14	13	21	22	18		0	0	0	0	0
18	31	32	34	17	(valoare de prag 30) \Rightarrow	0	1	1	1	0
19	41	43	40	16		0	1	1	1	0
18	20	21	21	20		0	0	0	0	0

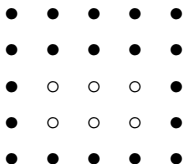
Algoritmul *Marching squares*

● = 0; ○ = 1



Algoritmul *Marching squares*

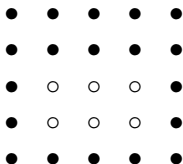
● = 0; ○ = 1



Se lucrează cu o fereastră 2×2 care glisează și se analizează valorile (● sau ○)

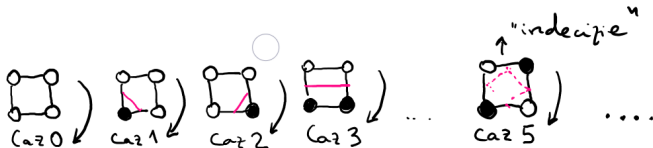
Algoritmul *Marching squares*

● = 0; ○ = 1



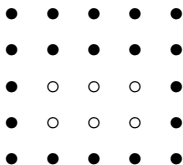
Se lucrează cu o fereastră 2×2 care glisează și se analizează valorile (● sau ○)

Diverse cazuri (câte?: 16)...



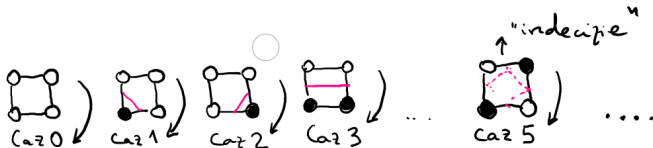
Algoritmul *Marching squares*

● = 0; ○ = 1



Se lucrează cu o fereastră 2×2 care glisează și se analizează valorile (● sau ○)

Diverse cazuri (câte?: 16)...



Crescător binar prin parcurgere în sens orar; în cazurile de indecizie se poate apela la o vecinătate mai largă.

Simplificare (Simplification of 3D meshes)

- ▶ Mesh optimization [Hoppe et al., 1993]
- ▶ Progressive meshes [Hoppe, 1996]

Simplificare (Simplification of 3D meshes)

- ▶ Mesh optimization [Hoppe et al., 1993]
- ▶ Progressive meshes [Hoppe, 1996]
- ▶ Quadric error metric [Garland & Heckbert, 1997]

Problematizare; ideea de bază

- Necesitatea simplificării modelelor 3D complexe, păstrând însă caracteristici esențiale ale acestora (model 3D=rețea de triunghiuri, care are ca elemente vârfuri, muchii și fețe).

Problematizare; ideea de bază

- ▶ Necesitatea simplificării modelelor 3D complexe, păstrând însă caracteristici esențiale ale acestora (model 3D=rețea de triunghiuri, care are ca elemente vârfuri, muchii și fețe).
- ▶ Tehnici de simplificare: *decimare* [Schroeder et al., 1992] sau *generarea unei grile regulate* [Rossignac, Borrel, 1992]

Problematizare; ideea de bază

- ▶ Necesitatea simplificării modelelor 3D complexe, păstrând însă caracteristici esențiale ale acestora (model 3D=rețea de triunghiuri, care are ca elemente vârfuri, muchii și fețe).
- ▶ Tehnici de simplificare: *decimare* [Schroeder et al., 1992] sau *generarea unei grile regulate* [Rossignac, Borrel, 1992]
- ▶ **Metodă de simplificare - Metrica eroare cuadrică** (*Quadric error metric*) [Garland & Heckbert, 1997]: bazată pe manevrarea perechilor de vârfuri (colapsare) **algoritmul dezvoltat stabilește reguli de colapsare (când este adecvat ca o pereche de vârfuri să fie colapsată, cum are loc colapsarea).**

Despre colapsarea perechilor de vârfuri

O pereche de vârfuri (v_1, v_2) e este **validă** pentru a fi colapsată dacă

Despre colapsarea perechilor de vârfuri

O pereche de vârfuri (v_1, v_2) e este **validă** pentru a fi colapsată dacă

- fie (v_1, v_2) este o muchie

Situații de colapsare:

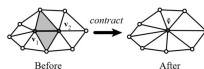


Figure 1: **Edge contraction.** The highlighted edge is contracted into a single point. The shaded triangles become degenerate and are removed during the contraction.

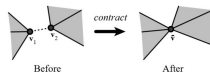


Figure 2: **Non-edge contraction.** When non-edge pairs are contracted, unconnected sections of the model are joined. The dashed line indicates the two vertices being contracted together.

Sursa: [Garland & Heckbert, 1997]

Despre colapsarea perechilor de vârfuri

- O pereche de vârfuri (v_1, v_2) este **validă** pentru a fi colapsată dacă
- fie (v_1, v_2) este o muchie
 - fie $\|v_1 - v_2\| < t$, unde t este o valoare de prag (*threshold*) prestabilită

Situații de colapsare:

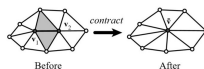


Figure 1: **Edge contraction.** The highlighted edge is contracted into a single point. The shaded triangles become degenerate and are removed during the contraction.

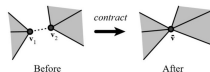


Figure 2: **Non-edge contraction.** When non-edge pairs are contracted, unconnected sections of the model are joined. The dashed line indicates the two vertices being contracted together.

Sursa: [Garland & Heckbert, 1997]

Terminologie - conceptul de cuadrică

Cuadrică: loc geometric din spațiul \mathbb{R}^3 dat printr-o ecuație implicită de gradul II

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Terminologie - conceptul de cuadrică

Cuadrică: loc geometric din spațiul \mathbb{R}^3 dat printr-o ecuație implicită de gradul II
 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$.

Cuadrica este dată de matricea

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

Terminologie - conceptul de cuadrică

Cuadrică: loc geometric din spațiul \mathbb{R}^3 dat printr-o ecuație implicită de gradul II
 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$.

Cuadrica este dată de matricea

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

Ecuația cuadricei se rescrie

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Terminologie - conceptul de cuadrică

Cuadrică: loc geometric din spațiul \mathbb{R}^3 dat printr-o ecuație implicită de gradul II
 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$.

Cuadrica este dată de matricea

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

Ecuația cuadricei se rescrie

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemple (vizualizare cu [VisuMath](#)):

- ▶ Sferă: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
- ▶ Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.
- ▶ Hiperboloid cu o pânză: $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.
- ▶ Paraboloid hiperbolic: $x^2 - y^2 - 2z = 0$.

Terminologie - conceptul de cuadrică

Cuadrică: loc geometric din spațiul \mathbb{R}^3 dat printr-o ecuație implicită de gradul II
 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$.

Cuadrica este dată de matricea

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix},$$

Ecuația cuadricei se rescrie

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemple (vizualizare cu [VisuMath](#)):

- ▶ Sferă: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
- ▶ Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.
- ▶ Hiperboloid cu o pânză: $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.
- ▶ Paraboloid hiperbolic: $x^2 - y^2 - 2z = 0$.
- ▶ Con: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la un plan π de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ (pentru care putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i.e. $\|(a, b, c)\| = 1$) este

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la un plan π de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ (pentru care putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i.e. $\|(a, b, c)\| = 1$) este

$$d(P_0, \pi) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \Rightarrow$$

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la un plan π de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ (pentru care putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i.e. $\|(a, b, c)\| = 1$) este

$$d(P_0, \pi) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \Rightarrow$$

$$d^2(P_0, \pi) = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2 \text{ (polinom de gradul II în } (x_0, y_0, z_0)) =$$

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la un plan π de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ (pentru care putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i.e. $\|(a, b, c)\| = 1$) este

$$d(P_0, \pi) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \Rightarrow$$

$$d^2(P_0, \pi) = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2 \text{ (polinom de gradul II în } (x_0, y_0, z_0)) =$$

$$= (x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la un plan π de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ (pentru care putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i.e. $\|(a, b, c)\| = 1$) este

$$d(P_0, \pi) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \Rightarrow$$

$$d^2(P_0, \pi) = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2 \text{ (polinom de gradul II în } (x_0, y_0, z_0)) =$$

$$= (x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$P_0^T \cdot K_\pi \cdot P_0 \text{ (scriere matriceală)}$$

Distanța de la un punct la un plan

Distanța de la un punct $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ la un plan π de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ (pentru care putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, i.e. $\|(a, b, c)\| = 1$) este

$$d(P_0, \pi) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \Rightarrow$$

$$d^2(P_0, \pi) = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2 \text{ (polinom de gradul II în } (x_0, y_0, z_0)) =$$

$$= (x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$P_0^T \cdot K_\pi \cdot P_0 \text{ (scriere matriceală)}$$

În concluzie, unui plan π îi este asociată o matrice 4×4 , notată K_π .

Aditivitate; definirea matricei Q_v

Observație. Pentru un punct fixat P_0 și $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ plane, are loc relația

$$d^2(P_0, \pi_1) + \dots + d^2(P_0, \pi_n) = P_0^T \cdot K_{\pi_1} \cdot P_0 + \dots + P_0^T \cdot K_{\pi_n} \cdot P_0 =$$

Aditivitate; definirea matricei Q_v

Observație. Pentru un punct fixat P_0 și $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ plane, are loc relația

$$\begin{aligned} d^2(P_0, \pi_1) + \dots + d^2(P_0, \pi_n) &= P_0^T \cdot K_{\pi_1} \cdot P_0 + \dots + P_0^T \cdot K_{\pi_n} \cdot P_0 = \\ &= P_0^T \cdot (K_{\pi_1} + \dots + K_{\pi_n}) \cdot P_0. \end{aligned}$$

Aditivitate; definirea matricei Q_v

Observație. Pentru un punct fixat P_0 și $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ plane, are loc relația

$$\begin{aligned} d^2(P_0, \pi_1) + \dots + d^2(P_0, \pi_n) &= P_0^T \cdot K_{\pi_1} \cdot P_0 + \dots + P_0^T \cdot K_{\pi_n} \cdot P_0 = \\ &= P_0^T \cdot (K_{\pi_1} + \dots + K_{\pi_n}) \cdot P_0. \end{aligned}$$

Fie v un vârf fixat al unei rețele de triunghiuri. Pentru un punct $P \in \mathbb{R}^3$ se definește

$$\Delta_v(P) = \sum_{\pi, v \in \pi, \pi \text{ față}} d^2(P, \pi) \stackrel{Obs.}{=} P^T \cdot \sum_{\pi} K_{\pi} \cdot P = P^T \cdot Q_v \cdot P$$

Aditivitate; definirea matricei Q_v

Observație. Pentru un punct fixat P_0 și $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ plane, are loc relația

$$\begin{aligned} d^2(P_0, \pi_1) + \dots + d^2(P_0, \pi_n) &= P_0^T \cdot K_{\pi_1} \cdot P_0 + \dots + P_0^T \cdot K_{\pi_n} \cdot P_0 = \\ &= P_0^T \cdot (K_{\pi_1} + \dots + K_{\pi_n}) \cdot P_0. \end{aligned}$$

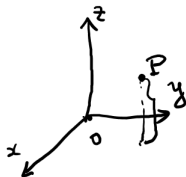
Fie v un vârf fixat al unei rețele de triunghiuri. Pentru un punct $P \in \mathbb{R}^3$ se definește

$$\Delta_v(P) = \sum_{\pi, v \in \pi, \pi \text{ față}} d^2(P, \pi) \stackrel{Obs.}{=} P^T \cdot \sum_{\pi} K_{\pi} \cdot P = P^T \cdot Q_v \cdot P$$

$Q_v = \sum_{\pi} K_{\pi}$ este o matrice 4×4 , derivată din ecuațiile planelor π care trec prin v : depinde de v și corespunde, de fapt, unei **cuadrice**.

Exemplul 1.

Se consideră $v = (0, 0, 0)$; se iau fețele care corespund planelor de coordonate.



Fie $P = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$d(P, 0xy)^2 = \gamma^2$$

$$d(P, 0xz)^2 = \beta^2$$

$$d(P, 0yz)^2 = \alpha^2$$

$$d(P, 0xy)^2 + d(P, 0xz)^2 + d(P, 0yz)^2 =$$

$$= \underline{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = (\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$



Exemplul 2.

Se consideră $v = (0, 0, 0)$; se iau fețele care corespund planelor Oyz , Oxy ,
 $\pi : \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0$.

$$\begin{aligned}
 &\text{Fie } P = (\alpha, \beta, \gamma) : \\
 &\sum d(P, \omega)^2 = \\
 &= \alpha^2 + \gamma^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2 - \alpha\beta \\
 &= \underline{\underline{\frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta}}
 \end{aligned}
 \quad \Leftarrow \quad
 \begin{aligned}
 &d(P, Oyz)^2 = \alpha^2 \quad \left(\begin{array}{l} Oyz \text{ are} \\ \text{ec. } x = 0 \end{array} \right) \\
 &d(P, Oxy)^2 = \gamma^2 \quad \left(\begin{array}{l} Oxy \text{ are} \\ \text{ec. } z = 0 \end{array} \right) \\
 &d(P, \pi)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \beta \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2
 \end{aligned}$$

Principiu de lucru

- Pentru un vârf fixat v , se consideră forma pătratică Δ_v dată de matricea Q_v ; altfel spus $\Delta_v(P) = P^T \cdot Q_v \cdot P$; are loc relația $\Delta_v(v) = 0$. O suprafață de nivel constant $\Delta_v = \theta$ este o cuadrică.

Principiu de lucru

- ▶ Pentru un vârf fixat v , se consideră forma pătratică Δ_v dată de matricea Q_v ; altfel spus $\Delta_v(P) = P^T \cdot Q_v \cdot P$; are loc relația $\Delta_v(v) = 0$. O suprafață de nivel constant $\Delta_v = \theta$ este o cuadrică.
- ▶ Pentru o colapsare $(v_1, v_2) \mapsto \bar{v}$ este considerată matricea

$$\bar{Q} = Q_{v_1} + Q_{v_2},$$

cu forma pătratică asociată $\bar{\Delta}$.

Principiu de lucru

- ▶ Pentru un vârf fixat v , se consideră forma pătratică Δ_v dată de matricea Q_v ; altfel spus $\Delta_v(P) = P^T \cdot Q_v \cdot P$; are loc relația $\Delta_v(v) = 0$. O suprafață de nivel constant $\Delta_v = \theta$ este o cuadrică.
- ▶ Pentru o colapsare $(v_1, v_2) \mapsto \bar{v}$ este considerată matricea

$$\bar{Q} = Q_{v_1} + Q_{v_2},$$

cu forma pătratică asociată $\bar{\Delta}$.

- ▶ **Alegerea unui \bar{v} convenabil.**

Principiu de lucru

- ▶ Pentru un vârf fixat v , se consideră forma pătratică Δ_v dată de matricea Q_v ; altfel spus $\Delta_v(P) = P^T \cdot Q_v \cdot P$; are loc relația $\Delta_v(v) = 0$. O suprafață de nivel constant $\Delta_v = \theta$ este o cuadrică.
- ▶ Pentru o colapsare $(v_1, v_2) \mapsto \bar{v}$ este considerată matricea

$$\bar{Q} = Q_{v_1} + Q_{v_2},$$

cu forma pătratică asociată $\bar{\Delta}$.

- ▶ **Alegerea unui \bar{v} convenabil.**
 - ▶ Posibile alegeri: v_1 , v_2 , $(v_1 + v_2)/2$ (acela care are valoarea minimă pentru $\bar{\Delta}$)

Principiu de lucru

- ▶ Pentru un vârf fixat v , se consideră forma pătratică Δ_v dată de matricea Q_v ; altfel spus $\Delta_v(P) = P^T \cdot Q_v \cdot P$; are loc relația $\Delta_v(v) = 0$. O suprafață de nivel constant $\Delta_v = \theta$ este o cuadrică.
- ▶ Pentru o colapsare $(v_1, v_2) \mapsto \bar{v}$ este considerată matricea

$$\bar{Q} = Q_{v_1} + Q_{v_2},$$

cu forma pătratică asociată $\bar{\Delta}$.

- ▶ **Alegerea unui \bar{v} convenabil.**
 - ▶ Posibile alegeri: $v_1, v_2, (v_1 + v_2)/2$ (acela care are valoarea minimă pentru $\bar{\Delta}$)
 - ▶ Determinarea unui punct care minimizează $\bar{\Delta}$; ceea ce revine la a rezolva un sistem de ecuații de forma

$$\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z} = 0$$

Principiu de lucru

- ▶ Pentru un vârf fixat v , se consideră forma pătratică Δ_v dată de matricea Q_v ; altfel spus $\Delta_v(P) = P^T \cdot Q_v \cdot P$; are loc relația $\Delta_v(v) = 0$. O suprafață de nivel constant $\Delta_v = \theta$ este o cuadrică.
- ▶ Pentru o colapsare $(v_1, v_2) \mapsto \bar{v}$ este considerată matricea

$$\bar{Q} = Q_{v_1} + Q_{v_2},$$

cu forma pătratică asociată $\bar{\Delta}$.

▶ Alegerea unui \bar{v} convenabil.

- ▶ Posibile alegeri: v_1 , v_2 , $(v_1 + v_2)/2$ (acela care are valoarea minimă pentru $\bar{\Delta}$)
- ▶ Determinarea unui punct care minimizează $\bar{\Delta}$; ceea ce revine la a rezolva un sistem de ecuații de forma

$$\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial z} = 0$$

- ▶ Deoarece Δ este o formă pătratică, acest lucru revine la a rezolva ecuația $\bar{Q}\bar{v} = (0, 0, 0, 1)^T$; în cazul în care Q este inversabilă, acest lucru este posibil; dacă nu, este ales un punct optim pe segmentul $[v_1, v_2]$.

Algoritmul

1. Calculează matricea Q pentru toate vârfurile inițiale.

Algoritmul

1. Calculează matricea Q pentru toate vârfurile inițiale.
2. Selectează toate perechile valide.

Algoritmul

1. Calculează matricea Q pentru toate vârfurile inițiale.
2. Selectează toate perechile valide.
3. Pentru fiecare pereche validă (v_1, v_2) se determină vectorul \bar{v} de colapsare optim. Eroarea $\bar{v}^T \cdot (Q_{v_1} + Q_{v_2}) \cdot \bar{v}$ devine *costul* colapsării perechii (v_1, v_2) .

Algoritmul

1. Calculează matricea Q pentru toate vârfurile inițiale.
2. Selectează toate perechile valide.
3. Pentru fiecare pereche validă (v_1, v_2) se determină vectorul \bar{v} de colapsare optim. Eroarea $\bar{v}^T \cdot (Q_{v_1} + Q_{v_2}) \cdot \bar{v}$ devine *costul* colapsării perechii (v_1, v_2) .
4. Plasează toate perechile într-o stivă, având perechea de cost minim în vârf.

Algoritmul

1. Calculează matricea Q pentru toate vârfurile inițiale.
2. Selectează toate perechile valide.
3. Pentru fiecare pereche validă (v_1, v_2) se determină vectorul \bar{v} de colapsare optim. Eroarea $\bar{v}^T \cdot (Q_{v_1} + Q_{v_2}) \cdot \bar{v}$ devine *costul* colapsării perechii (v_1, v_2) .
4. Plasează toate perechile într-o stivă, având perechea de cost minim în vârf.
5. Elimină perechea (v_1, v_2) de cost minim din vârful stivei, colapsează această pereche și actualizează costurile pentru toate perechile valide nou apărute.

Suprafețe de subdivizare (Subdivision surfaces)

- [Zorin et al. , 2000]

Curburi discrete

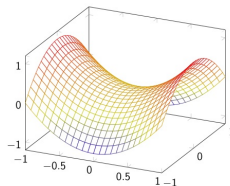
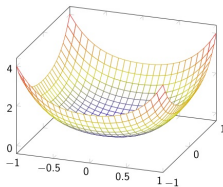
- ▶ Dezvoltate diverse abordări [Magid et al., 2007]
- ▶ Pe lângă caracterul teoretic, aplicabilitate: optimizarea triangulărilor [Dyn et al., 2001], detectarea trăsăturilor proeminente [Watanabe, Belyave, 2001]; eliminarea zgomotului [Hildebrandt, Polthier, 2004]; [Meyer et al., 2002]

Conceptul de curbura

- ▶ Curbura unei curbe

Conceptul de curbura

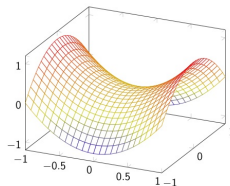
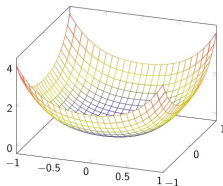
- ▶ Curbura unei curbe
- ▶ Curbura Gauss a suprafețelor



Suprafață cu curbura Gauss pozitivă (stânga) și suprafață cu curbura Gauss negativă (dreapta)

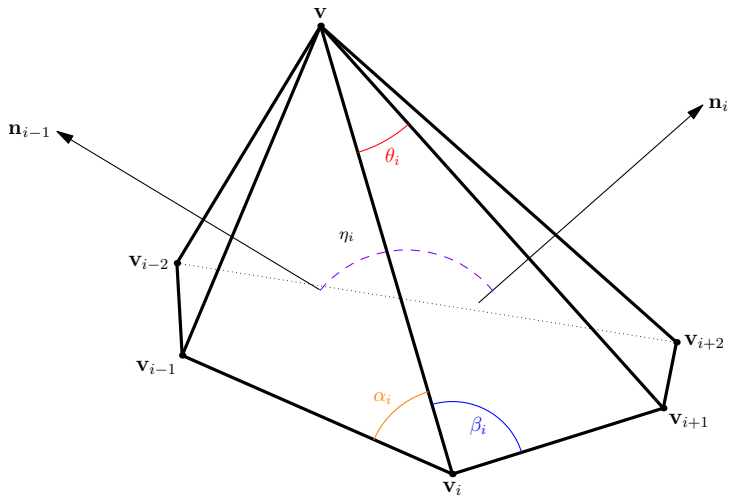
Conceptul de curbura

- ▶ Curbura unei curbe
- ▶ Curbura Gauss a suprafețelor



Suprafață cu curbura Gauss pozitivă (stânga) și suprafață cu curbura Gauss negativă (dreapta)

- ▶ Definițiile se bazează pe lucrul cu derivate parțiale (calcul local). Cum se poate proceda în cazul rețelelor de triunghiuri?



Fundament geometric - 1-inelul

Defectul unghiular

- Utilizat ca variantă de definire a curburii Gauss în cazul discret

$$DA(v) = 2\pi - \sum_{\theta_i \text{ unghi dintre muchii adiacente}} \theta_i$$

Defectul unghiular

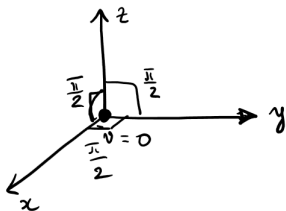
- Utilizat ca variantă de definire a curburii Gauss în cazul discret

$$DA(v) = 2\pi - \sum_{\theta_i \text{ unghi dintre muchii adiacente}} \theta_i$$

- De obicei, ponderat cu arii / alte mărimi similare

Exemplul 1.

Se consideră $v = (0, 0, 0)$; se iau fețele care corespund planelor de coordonate.



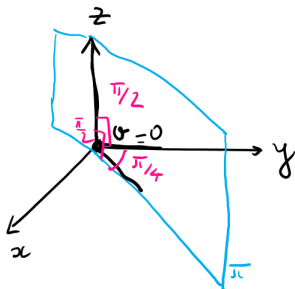
defectul
unghiular :

$$2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Exemplul 2.

Se consideră $v = (0, 0, 0)$; se iau fețele care corespund planelor Oyz , Oxy , $\pi : x - y = 0$.



$$\begin{aligned}
 DA &= \underline{2\pi} \text{ (de calculat)} \\
 &= 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\
 &= \frac{3\pi}{4} \text{ (135^\circ)}
 \end{aligned}$$

Tehnici de netezire (Smoothing techniques)

- ▶ Robust statistics [Jones et al., 2003]

Tehnici de netezire (Smoothing techniques)

- ▶ Robust statistics [Jones et al., 2003]
- ▶ Laplacian [Nealen et al., 2005], [Wardetzky et al., 2007]

Tehnici de netezire (Smoothing techniques)

- ▶ Robust statistics [Jones et al., 2003]
- ▶ Laplacian [Nealen et al., 2005], [Wardetzky et al., 2007]
- ▶ Survey [Belyaev & Ohtake, 2003]

Exerciții

1. Se consideră regiunea cu măsurători de mai jos. Alegeți o valoare de prag în intervalul $[20,30]$ adecvată, astfel încât să nu apară situații de nedeterminare atunci când este aplicat algoritmul *marching squares*. Explicați cum este aplicat algoritmul, indicând conturul delimitat.

17	16	15	18	19
18	19	32	33	18
19	31	25	36	16
15	32	31	34	17
17	31	26	32	19
14	15	17	19	15

Exerciții

2. Se consideră regiunea cu măsurători de mai jos. Dați exemplu de două valori de prag distincte $v_1, v_2 \in \{21, 22, \dots, 29, 30\}$ pentru care, prin aplicarea algoritmului *marching squares*, să se obțină același contur. Sunt v_1, v_2 astfel găsite unice? Justificați!

16	17	16	19	18
17	18	31	32	19
18	32	23	28	18
16	31	32	35	19
18	32	25	27	17
14	17	18	17	16

Exerciții

3. Se consideră punctele $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ și se consideră tetraedrul $OABC$. Determinați metrica eroare-cuadrică pentru vârful O , precum și defectul unghiular în acest vârf (prin raportare la $OABC$).
4. Se consideră punctele $O = (0, 0, 0)$, $M = (2, 0, 0)$, $N = (0, 2, 0)$, $P = (0, 1, 1)$ și se consideră tetraedrul $OMNP$. Determinați metrica eroare-cuadrică pentru vârful O , precum și defectul unghiular în acest vârf (prin raportare la $OMNP$).