Tema 3
Probabilități și statistică

Exercițiul 1

Pentru a determina repartiția lui Z, trebuie să calculăm $\mathbb{P}(Z=k)$, adică probabilitatea ca după k extrageri să avem exact n indivizi de tipul T. Pentru aceasta definim următoarele evenimente:

A_{k-1} = evenimentul că în primele $k-1$ extrageri avem $n-1$ indivizi de tip T

B_k = la a k-a extragere am scos un individ de tip T

Deci $\mathbb{P}(Z=k)$ este echivalentă cu a avea în primele $k-1$ extrageri $n-1$ elem. de tip T și la a k-a extragere mai luăm încă unul.

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(A_{k-1} \cap B_k) = \mathbb{P}(B_k \mid A_{k-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{k-1})$$

$\mathbb{P}(A_{k-1})$ este o hipergeometrică. Vom aplica schema bilei fără revenire $\Rightarrow C_{N_1}^{m-1}$ = în câte moduri putem alege $n-1$ indivizi de tip T, $C_{N-N_1}^{k-1-(m-1)}$ = în câte moduri putem alege restul indivizilor până la $k-1$ care nu sunt de tip T, dacă $m-1$ sunt de tip T, C_N^{k-1} = în câte moduri alegem $k-1$ indivizi din orice tip.

$$\mathbb{P}(A_{k-1}) = \frac{C_{N_1}^{m-1} \cdot C_{N-N_1}^{k-m}}{C_N^{k-1}}$$

$$\mathbb{P}(B_k \mid A_{k-1}) = \frac{\text{nr. cazuri fav}}{\text{nr. cazuri posib.}}$$

$$= \frac{N_1 - m + 1}{N - k + 1} \leftarrow \text{număr rămas de ind. de tip } T$$

$$\text{Deci, } \mathbb{P}(Z=k) = \frac{C_{N_1}^{m-1} \cdot C_{N-N_1}^{k-m}}{C_N^{k-1}} \cdot \frac{N_1 - m + 1}{N - k + 1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z=k) = \frac{\frac{N_1!}{(m-1)!\,\cancel{(N_1-m+1)!}} \cdot \frac{(N-N_1)!}{(k-m)!\,(N-N_1-k+m)!}}{\overset{N_1-m}{}\frac{N!}{(k-1)!\cdot\cancel{(N-k+1)!}}\; N-k} \cdot \frac{N_1 - \cancel{m+1}}{N \cancel{- k+1}}$$

$$\mathbb{P}(Z=k)=\frac{N_1!\cdot(N-N_1)!\cdot(k-1)!\cdot(N-k)!}{(m-1)!\cdot(N_1-m)!\cdot(k-m)!\cdot(N-N_1-k+m)!\cdot N!}$$

$$\mathbb{P}(Z=k)=\frac{C_{k-1}^{m-1}\cdot C_{N-k}^{N_1-m}}{C_N^{N_1}}=\frac{m}{k}\cdot\frac{C_k^{m}\cdot C_{N-k}^{N_1-m}}{C_N^{N_1}}$$

Variabila aleatoare Z va lua valori între:

- n - avem nevoie de cel puțin n extrageri pentru a obține n indivizi de tip T
- $N-N_1+n$ - în cel mai rău caz, îi extragem pe toți indivizii care nu sunt de tip T, adică $N-N_1$, după care mai extragem n indivizi despre care știm sigur că sunt de tip T. Știm că după ce avem n ind. de tip T ne oprim.

$$Z:\begin{pmatrix} n & n+1 & \dots & k & & N-N_1+n \\ & & & \frac{C_{k-1}^{m-1}\cdot C_{N-k}^{N_1-m}}{C_N^{N_1}} & & \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Z:\begin{pmatrix} k \\ \frac{C_{k-1}^{m-1}\cdot C_{N-k}^{N_1-m}}{C_N^{N_1}}\end{pmatrix} \quad k=\overline{n, N-N_1+n}$$

$$\mathbb{E}[Z]=?$$

$$\mathbb{E}[Z]=\sum_{k=m}^{N-N_1+m} k\cdot\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{k=m}^{N-N_1+m}\cancel{k}\cdot\frac{m}{\cancel{k}}\cdot\frac{C_k^{m}\cdot C_{N-k}^{N_1-m}}{C_N^{N_1}}$$

$$=\frac{m}{C_N^{N_1}}\cdot\sum_{k=m}^{N} C_k^{m}\cdot C_{N-k}^{N_1-m}$$

Facem schimbarea de variabilă $j=k+1$ și obținem:

$$\mathbb{E}[Z]=\sum_{j=m+1}^{N-N_1+m+1}\cdot\frac{m}{C_N^{N_1}}\cdot C_{j-1}^{m}\cdot C_{N+1-j}^{N_1-m}$$

$$=\frac{m}{C_N^{N_1}}\cdot\sum_{j=m+1}^{N-N_1+m+1} C_{j-1}^{(m+1)-1}\cdot C_{(N+1)-j}^{(N_1+1)-(m+1)}$$

Astfel, am obținut media unei variabile aleatoare similare celei din ipoteză: avem un număr total de $N+1$ indivizi, N_1+1 de tip T și vrem să extragem $n+1$.

Analog rezolvării anterioare, obținem că:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{C_{k-1}^{n}\cdot C_{N-k+1}^{N_1-n}}{C_{N+1}^{N_1+1}} \iff C_{k-1}^{n}\cdot C_{N-k+1}^{N_1-n}=C_{N+1}^{N_1+1}\cdot\mathbb{P}(X=k)\ (*)$$

Și știu că $\sum\limits_{k=n+1}^{N-N_1+n+1}\mathbb{P}(X=k)=1$

Aveam că: $\mathbb{E}[Z]=\frac{n}{C_N^{N_1}}\cdot\sum\limits_{j=n+1}^{N-N_1+n+1} C_{j-1}^{n}\cdot C_{N-j+1}^{N_1-n}$

Înlocuind cu $(*)$ obținem:

$$\mathbb{E}[Z]=\frac{n}{C_N^{N_1}}\cdot\sum_{j=n+1}^{N-N_1+n+1}\cdot\,\mathbb{P}(X=j)\cdot C_{N+1}^{N_1+1}$$

$$\iff \mathbb{E}[Z]=\frac{n}{C_N^{N_1}}\cdot C_{N+1}^{N_1+1}\cdot\underbrace{\sum_{j=n+1}^{N-N_1+n+1}\mathbb{P}(X=j)}_{=1}$$

$$\iff \mathbb{E}[Z]=\frac{n(N+1)}{N_1+1}$$

$Var(Z)=?$

$$Var(Z)=\mathbb{E}[Z^2]-\mathbb{E}[Z]^2=\mathbb{E}[Z(Z+1)]-\mathbb{E}[Z]-\mathbb{E}[Z]^2$$

$$\mathbb{E}[Z(Z+1)]=\sum_{k=n}^{N-N_1+n}k(k+1)\cdot\frac{C_{k-1}^{n-1}\cdot C_{N-k}^{N_1-n}}{C_N^{N_1}}$$

$$C_{k-1}^{n-1}=\frac{n(n+1)}{k(k+1)}\cdot C_{k+1}^{n+1}$$

$$=\sum_{k=n}^{N-N_1+n}\cdot\frac{n(n+1)}{C_N^{N_1}}\cdot C_{k+1}^{n+1}\cdot C_{N-k}^{N_1-n}$$

Analog raționamentului de mai sus, facem schimbarea $j=k+2$.

$$\mathbb{E}[Z(Z+1)]=\sum_{j=n+2}^{N-N_1+n+2}\cdot\frac{n(n+1)}{C_N^{N_1}}\cdot C_{j-1}^{n+1}\cdot C_{N+2-j}^{N_1-n}$$

Similar ca mai devreme, vom avea o nouă v.a. unde avem $N+2$ indivizi, N_1+2 de tip T și dorim să extragem $m+2$.

$$\text{Deci}, \sum_{j=m+2}^{N-N_1+m+2} C_{j-1}^{m+1} \cdot C_{N+2-j}^{N_1-m} = C_{N+2}^{N_1+2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z(Z+1)] = \frac{m(m+1)}{C_N^{N_1}} \cdot C_{N+2}^{N_1+2} = \frac{m(m+1)}{\frac{\cancel{N!}}{\cancel{N_1!(N-N_1)!}}} \cdot \underset{(N_1+2)(N_1+1)}{\frac{\overset{(N+2)(N+1)}{\cancel{(N+2)!}}}{\cancel{(N_1+2)!(N-N_1)!}}}$$

$$= \frac{m(m+1)(N+2)(N+1)}{(N_1+2)(N_1+1)}$$

$$\Rightarrow Var(Z) = \overset{N_1+1 /}{\frac{m(m+1)(N+2)(N+1)}{(N_1+2)(N_1+1)}} - \overset{(N_1+2)(N_1+1) /}{\frac{m(N+1)}{N_1+1}} - \overset{N_1+2 /}{\frac{m^2(N+1)^2}{(N_1+1)^2}}$$

$$= \frac{m(m+1)(N_1+1)(N+2)(N+1) - m(N_1+2)(N_1+1)(N+1) - m^2(N+1)^2(N_1+2)}{(N_1+2)(N_1+1)^2}$$

$$= \frac{m(N+1)(\cancel{mN_1N} + 2mN_1 + NN_1 - N_1^2 + mN + \cancel{2m} + N - N_1 - \cancel{mNN_1} - 2mN - mN_1 - \cancel{2m}}{(N_1+2)(N_1+1)^2}$$

$$= \frac{m(N+1)(N-N_1 + N_1(N-N_1) - m(N-N_1))}{(N_1+2)(N_1+1)^2}$$

$$Var(Z) = \frac{m(N+1)(N-N_1)(N_1-m+1)}{(N_1+2)(N_1+1)^2}$$

Exercițiul 2

$X \sim Pois(\lambda)$, $Y \sim Pois(\mu)$. Pentru a determina repartiția condiționată a lui X la $X+Y=n$, trebuie să calculăm

$$P(X=k / X+Y=n) = p_{X/Z=n}(k)$$

Notăm cu $Z = X+Y$.

$$P(X=k / X+Y=n) = P(X=k / Z=n)$$

$$= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(Z=n)} = \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(Z=n)}$$

Cum X și Y sunt independente, $P(X=k, Y=n-k) =$
$= P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$.

$$p_{X/Z=n}(k) = \frac{P(X=k) \cdot P(Y=n-k)}{P(Z=n)}$$

$$\text{Cum } \left.\begin{array}{l} X \sim Pois(\lambda) \\ Y \sim Pois(\mu) \\ X, Y \text{ indep.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow X+Y \sim Pois(\lambda+\mu) \\ \Leftrightarrow Z \sim Pois(\lambda+\mu) \end{array}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\Rightarrow p_{X/Z=n}(k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Valorile lui $X / X+Y=n$ vor fi $0, 1 \ldots n$ (pentru că X și Y au valori naturale și $X+Y=n$).

Deci,

$$X / X+Y=n : \begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots & k & & n \\ \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n & & \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} & & \binom{n}{n} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X / X+Y=n : \begin{pmatrix} k \\ \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \end{pmatrix} \quad k = \overline{0,n}$$

Exercițiul 3

Notăm cu N variabila aleatoare ce descrie numărul de clienți care intră în magazin pe durata unei zile și cu S_i suma cheltuită de clientul i.

Din ipoteză știm că $E[N]=50$, $\mathbb{E}[S_i]=30$ și că S_i, S_j ind. $\forall i\neq j$ și S_i, N ind.

Cum cifra de afaceri e dată de totalul vânzărilor, vom nota cu X variabila aleatoare ce reprezintă cifra de afaceri și va fi egală cu: $X=\sum_{i=1}^{N} S_i$.

Deci, $\mathbb{E}$[cifrei de afaceri]:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right) \\ \mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/Y]]\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} S_i / N\right]\right]$$

aplicăm formula de calcul a mediei $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{n\geq 1}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} S_i / N=n\right]\cdot \mathbb{P}(N=n)\right)$$

Cum acum $N=n$, putem duce suma până la n

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X]=\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} S_i / N=n\right]\cdot \mathbb{P}(N=n)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X]=\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i / N=n]\right)\cdot \mathbb{P}(N=n)$$

Deoarece S_i și N sunt independente, atunci $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i / N=n]$ revine la $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i]$ $(\mathbb{E}[A/B]=\mathbb{E}[A],\ A \perp\!\!\!\perp B)$

$$=\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_1]=n\cdot \mathbb{E}[S_1]$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \mathbb{E}[X]=\sum_{n\geq 1} n\cdot \mathbb{E}[S_1]\cdot \mathbb{P}(N=n)=\mathbb{E}[S_1]\cdot \sum_{n\geq 1} n\cdot \mathbb{P}(N=n) \\ \mathbb{E}(N]=\sum_{n\geq 1} n\cdot \mathbb{P}(N=n)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[S_1]\cdot \mathbb{E}[N]=30\cdot 50=1500$$

Deci cifra de afaceri a magazinului în ziua respectivă este de 1500 RON.

Exercițiul 4

Știm că în lot avem 5 tranzistori, dintre care 2 sunt defecți. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect și N_2 numărul de teste suplimentare pentru a identifica al doilea tranzistor defect.

Se observă că:

$N_1 + N_2 \le 4$, deoarece dacă am efectuat teste pe primii 4 tranzistori, putem ști dacă al 5-lea este defect (dacă am găsit doar un tranzistor defect până acum) sau nu.

$N_1 + N_2 \ge 2$, deoarece trebuie să efectuăm cel puțin 2 teste pentru a vedea ce tranzistori sunt defecți. Egalitatea se obține când primii 2 sunt defecți.

Deci, $2 \le N_1 + N_2 \le 4$

$\Rightarrow N_1$ e o variabilă aleatoare ce va lua valorile 1, 2 și 3 (primii 3 tranzistori sunt buni, deci 4 și 5 sunt defecți $\Rightarrow N_2 = 0$) și N_2 va lua valorile 0, 1, 2, 3.

Notăm cu T_{ij} $_{\substack{i=\overline{1,4} \\ j=\overline{2,5} \text{ și } i<j}}$ evenimentul prin care sunt defecți tranzistorii i și j.

$$\mathbb{P}(T_{ij}) = \frac{\text{nr. cazuri fav}}{\text{nr. cazuri posib.}} \qquad \forall i,j \quad i=\overline{1,4} \quad i<j \quad j=\overline{2,5}$$

nr. cazuri fav = 1 - sunt stricați chiar tranzistorii i și j

nr. cazuri posibile = $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ - toate combinațiile de câte 2 indici i și j cu $i<j$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(T_{ij}) = \frac{1}{10}$ (tranzistorii au aceeaș șansă de a fi defecți)

$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}(T_{12}) = \frac{1}{10}$ - efectuăm doar 2 teste $\Rightarrow$ am găsit tranz. defecți $\Rightarrow$ sunt primii 2

$\mathbb{P}(N_1=1, N_2=2) = \mathbb{P}(T_{13}) = \frac{1}{10}$ (am efectuat un test și am găsit primul tranz. rău; am efectuat 2 teste din N_2 și la al doilea am găsit urm. tranz. rău).

$\mathbb{P}(N_1=1, N_2=3) = \mathbb{P}(T_{14} \cup T_{15})$ } ->
T_{14}, T_{15} incomp.

$\mathbb{P}(T_{14} \cup T_{15}) = \mathbb{P}(T_{14}) + \mathbb{P}(T_{15}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$ (am găsit tranz. 2,3 buni și 4 rău sau 2,3,4 buni => 5 e rău)

$\mathbb{P}(N_1=1, N_2=0) = 0$, nu putem găsi 2 tranz. răi efectuând un test

$\mathbb{P}(N_1=2, N_2=0) = 0$, 1 bun, 2 rău, dar nu știm nimic despre următorii 3.

$\mathbb{P}(N_1=2, N_2=1) = \mathbb{P}(T_{23}) = \frac{1}{10}$

$\mathbb{P}(N_1=2, N_2=2) = \mathbb{P}(T_{24} \cup T_{25}) \overset{\text{incom}}{=} \mathbb{P}(T_{24}) + \mathbb{P}(T_{25})$
$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$ (1 bun, 2 rău, 3 bun, 2 rău sau 1 bun, 2 rău, 3 bun, 4 bun => 5 rău)

$\mathbb{P}(N_1=2, N_2=3) = 0$ - sunt prea multe teste pentru al doilea tranzistor; niciodată nu se va efectua și al5-lea test.

$\mathbb{P}(N_1=3, N_2=0) = \mathbb{P}(T_{45}) = \frac{1}{10}$ (1,2,3 buni => 4,5 defecți)

$\mathbb{P}(N_1=3, N_2=1) = \mathbb{P}(T_{34} \cup T_{35}) = \mathbb{P}(T_{34}) + \mathbb{P}(T_{35}) = \frac{2}{10}$
(1,2 buni, 3 rău, 4 rău sau 1,2 buni, 3 rău, 4 bun => 5 rău)

$\mathbb{P}(N_1=3, N_2=2) = 0$ } deoarece $N_1 + N_2 > 4$
$\mathbb{P}(N_1=3, N_1=3) = 0$ }

$N_1 \backslash N_2$	0	1	2	3	
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

$$\mathbb{P}(N_1=1) = \mathbb{P}((N_1=1, N_2=0) \cup (N_1=1, N_2=1) \cup (N_1=1, N_2=2) \cup (N_1=1, N_2=3)) \overset{\text{inc.}}{=} 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\mathbb{P}(N_1=2) = \mathbb{P}((N_1=2, N_2=0) \cup (N_1=2, N_2=1) \cup (N_1=2, N_2=2) \cup (N_1=2, N_2=3)) \overset{\text{inc.}}{=} 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + 0 = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(N_1=3) = \mathbb{P}((N_1=3, N_2=0) \cup (N_1=3, N_2=1) \cup (N_1=3, N_2=2) \cup (N_1=3, N_2=3)) \overset{\text{inc}}{=} \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + 0 + 0 = \frac{3}{10}$$

Deci, $N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

Analog, legea lui N_2 e dată de suma pe coloane:

$$\mathbb{P}(N_2=0) = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(N_2=1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\mathbb{P}(N_2=2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + 0 = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(N_2=3) = \frac{2}{10}$$

Deci, $N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}[N_2] = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} = \frac{4+6+6}{10} = \frac{16}{10} = 1,6$$

$$\mathbb{E}[N_1] = 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} = \frac{4+6+9}{10} = \frac{19}{10} = 1,9$$

Așadar, $\mathbb{E}[N_1] = 1,9$ și $\mathbb{E}[N_2] = 1,6$.

Exercițiul 5

X \ Y	1	2	3	
1	0,22	0,11	0,02	0,35
2	0,2	0,15	0,1	0,45
3	0,06	0,07	0,07	0,2
	0,48	0,33	0,19	1

a) Legile marginale ale lui X și Y.

Legea lui X e dată de suma pe linii:

$$\mathbb{P}(X=1) = 0{,}22 + 0{,}11 + 0{,}02 = 0{,}35$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}45$$

$$\mathbb{P}(X=3) = 0{,}06 + 0{,}07 + 0{,}07 = 0{,}2$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Legea marginală a lui Y e dată de suma pe coloane:

$$\mathbb{P}(Y=1) = 0{,}22 + 0{,}2 + 0{,}06 = 0{,}48$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = 0{,}11 + 0{,}15 + 0{,}07 = 0{,}33$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = 0{,}02 + 0{,}1 + 0{,}07 = 0{,}19$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}48 & 0{,}33 & 0{,}19 \end{pmatrix}$$

b) Media și varianța lui X, resp. Y

X ia valorile 1,2 și 3, pe care le vom nota cu x_1, x_2, x_3.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X] = 1 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}35 + 0{,}9 + 0{,}6 = 1{,}85$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,35 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,2$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X^2] = 0,35 + 1,8 + 1,8 = 3,95$$

$$\Rightarrow Var(X) = 3,95 - (1,85)^2 = 3,95 - 3,4225 = 0,5275.$$

Y ia valorile 1, 2, 3, pe care le notăm cu y_1, y_2, y_3.

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot \mathbb{P}(Y = y_i)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y] = 1 \cdot 0,48 + 2 \cdot 0,33 + 3 \cdot 0,19 = 0,48 + 0,66 + 0,57$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[Y] = 1,71$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$$

$$Y^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,48 & 0,33 & 0,19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = 1 \cdot 0,48 + 4 \cdot 0,33 + 9 \cdot 0,19 = 0,48 + 1,32 + 1,71$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = 3,51$$

$$Var(Y) = 3,51 - (1,71)^2 = 3,51 - 2,9241 = 0,5859$$

c) Coeficientul de corelație dintre X și Y.

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$\mathbb{E}[XY]$ se poate afla cu ajutorul tabelului repartiției comune a v.a. X și Y.

$$\mathbb{E}[XY] = 1\cdot 1\cdot 0{,}22 + 1\cdot 2\cdot 0{,}11 + 1\cdot 3\cdot 0{,}02 + 2\cdot 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 2\cdot 0{,}15 + 2\cdot 3\cdot 0{,}1 + 3\cdot 1\cdot 0{,}06 + 3\cdot 2\cdot 0{,}07 + 3\cdot 3\cdot 0{,}07$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[XY] = 0{,}22 + 0{,}22 + 0{,}06 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}18 + 0{,}42 + 0{,}63$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[XY] = 3{,}33$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 3{,}33 - 1{,}85\cdot 1{,}71 = 3{,}33 - 3{,}1635$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0{,}1665$$

$$\rho(X,Y) = \frac{0{,}1665}{\sqrt{0{,}5275\cdot 0{,}5859}} = 0{,}2994$$

d) Legea condiționată a lui X la $Y=2$

X ia valorile x_i, $i=\overline{1,3}$, iar Y ia valorile y_j, $j=\overline{1,3}$

$$f_{X/Y}(x_i, y_j) = \frac{f(x_i,y_j)}{f_Y(y_j)}$$

$$f(x_i,y_j) = \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$f_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y=y_j)$$

$$f_{X/Y}(x_i,y_j) = \mathbb{P}(X=x_i / Y=y_j)$$

$$\mathbb{P}(X=1 / Y=2) = \frac{0{,}11}{0{,}33} \simeq 0{,}33$$

$$\mathbb{P}(X=2 / Y=2) = \frac{0{,}15}{0{,}33} \simeq 0{,}45$$

$$\mathbb{P}(X=3 / Y=2) = \frac{0{,}07}{0{,}33} \simeq 0{,}22$$

$$X/Y=2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}33 & 0{,}45 & 0{,}22 \end{pmatrix}$$

Legea condiționată a lui Y la $X=2$

$$\mathbb{P}(Y=1 / X=2) = \frac{0{,}2}{0{,}45} \simeq 0{,}44$$

$$\mathbb{P}(Y=2 / X=2) = \frac{0{,}15}{0{,}45} \simeq 0{,}33$$

$$\mathbb{P}(Y=3 / X=2) = \frac{0{,}1}{0{,}45} \simeq 0{,}23$$

$$Y/X=2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{0,2}{0,45} & \frac{0,15}{0,45} & \frac{0,1}{0,45} \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y/X=2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,44 & 0,33 & 0,23 \end{pmatrix}$$

e) Media și varianța acestor variabile

$$\mathbb{E}[X/Y=2] = 1 \cdot \frac{0,11}{0,33} + 2 \cdot \frac{0,15}{0,33} + 3 \cdot \frac{0,07}{0,33} = \frac{0,62}{0,33} \simeq 1,87$$

$$X^2/Y=2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{0.11}{0.33} & \frac{0.15}{0.33} & \frac{0.07}{0.33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X^2/Y=2] = 1 \cdot \frac{0.11}{0.33} + 4 \cdot \frac{0.15}{0.33} + 9 \cdot \frac{0.07}{0.33} = \frac{1,34}{0.33} \simeq 4,06$$

$$Var(X/Y=2) = \mathbb{E}[X^2/Y=2] - (\mathbb{E}[X/Y=2])^2$$
$$= \frac{1,34}{0,33} - \left(\frac{0,62}{0,33}\right)^2$$
$$= 0,5307$$

$$\mathbb{E}[Y/X=2] = 1 \cdot \frac{0,2}{0,45} + 2 \cdot \frac{0,15}{0,45} + 3 \cdot \frac{0,1}{0,45} = \frac{0,8}{0,45} \simeq 1,77$$

$$Y^2/X=2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{0,2}{0,45} & \frac{0,15}{0,45} & \frac{0,1}{0,45} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[Y^2/X=2] = 1 \cdot \frac{0,2}{0,45} + 4 \cdot \frac{0,15}{0,45} + 9 \cdot \frac{0,1}{0,45} = \frac{1,7}{0,45} \simeq 3,77$$

$$Var(Y/X=2) = \mathbb{E}[Y^2/X=2] - (\mathbb{E}[Y/X=2])^2$$
$$= \frac{1,7}{0,45} - \left(\frac{0,8}{0,45}\right)^2$$
$$\simeq 0,6172$$

Exercițiul 6

X\Y	2	4	6	
0	0,1	0,2	0,1	0,4
1	0,1	0,1	0,1	0,3
2	0,1	0,1	0	0,2
3	0,05	0	0,05	0,1
	0,35	0,4	0,25	1

Legea lui X se obține însumând pe linii:

$\mathbb{P}(X=0) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$

$\mathbb{P}(X=1) = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$

$\mathbb{P}(X=2) = 0,1 + 0,1 + 0 = 0,2$

$\mathbb{P}(X=3) = 0,05 + 0,05 + 0 = 0,1$

$$\Rightarrow X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Legea lui Y se obține însumând pe coloane:

$\mathbb{P}(Y=2) = 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,35$

$\mathbb{P}(Y=4) = 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0 = 0,4$

$\mathbb{P}(Y=6) = 0,1 + 0,1 + 0 + 0,05 = 0,25$

$$Y : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0,35 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Prin urmare,

$\mathbb{E}[Y] = 2 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,25 = 3,8$

$Var[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$

$$Y^2 : \begin{pmatrix} 4 & 16 & 36 \\ 0,35 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}[Y^2] = 4 \cdot 0,35 + 16 \cdot 0,4 + 36 \cdot 0,25 = 16,8$

$Var[Y] = 16,8 - (3,8)^2 = 2,36$

a) Determinați repartiția v.a. $E[Y/X]$ și $Var(Y/X)$.

Pentru legea v.a condiționate $E[Y/X]$ avem:

$$E[Y/X=0] = 2\cdot P(Y=2/X=0) + 4\cdot P(Y=4/X=0) + 6\cdot P(Y=6/X=0)$$

$$= 2\cdot\frac{P(Y=2,X=0)}{P_X(X=0)} + 4\cdot\frac{P(Y=4,X=0)}{P_X(X=0)} + 6\cdot\frac{P(Y=6,X=0)}{P_X(X=0)}$$

$$= 2\cdot\frac{0,1}{0,4} + 4\cdot\frac{0,2}{0,4} + 6\cdot\frac{0,1}{0,4} = 2\cdot 0,25 + 4\cdot 0,5 + 6\cdot 0,25$$

$$= 4$$

$$E[Y/X=1] = 2\cdot P(Y=2/X=1) + 4\cdot P(Y=4/X=1) + 6\cdot P(Y=6/X=1)$$

$$= 2\cdot\frac{0,1}{0,3} + 4\cdot\frac{0,1}{0,3} + 6\cdot\frac{0,1}{0,3} = 12\cdot\frac{0,1}{0,3} = 4$$

$$E[Y/X=2] = 2\cdot P(Y=2/X=2) + 4\cdot P(Y=4/X=2) + 6\cdot P(Y=6/X=2)$$

$$= 2\cdot\frac{0,1}{0,2} + 4\cdot\frac{0,1}{0,2} + 6\cdot\frac{0}{0,2} = 6\cdot\frac{0,1}{0,2} = 3$$

$$E[Y/X=3] = 2\cdot P(Y=2/X=3) + 4\cdot P(Y=4/X=3) + 6\cdot P(Y=6/X=3)$$

$$= 2\cdot\frac{0,05}{0,1} + 4\cdot\frac{0}{0,1} + 6\cdot\frac{0,05}{0,1} = 8\cdot\frac{0,05}{0,1} = 4$$

$P(E[Y/X]=3) = P(X=2) = 0,2$ (media $E[Y/X]$ ia valoarea 3 atunci când $x=2$, deci o va lua cu probabilitatea $P(X=2)$)

$$P(E[Y/X]=4) = P(x\neq 2)$$
$$= 1 - P(X=2) = 1 - 0,2$$
$$= 0,8$$

$$E[Y/X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Pentru repartiția v.a. Var (Y/X):

$$Var(Y/X=0) = \mathbb{E}[Y^2/X=0] - \mathbb{E}[Y/X=0]^2$$

$$= \left(2^2 \cdot \frac{0,1}{0,4} + 4^2 \cdot \frac{0,2}{0,4} + 6^2 \cdot \frac{0,1}{0,4}\right) - 4^2$$ calculat anterior

(din repartiția comună a lui X și Y)

$$= \frac{7,2}{0,4} - 16 = 18 - 16 = 2$$

$$Var(Y/X=1) = \mathbb{E}[Y^2/X=1] - \mathbb{E}[Y/X=1]^2$$

$$= \left(2^2 \cdot \frac{0,1}{0,3} + 4^2 \cdot \frac{0,1}{0,3} + 6^2 \cdot \frac{0,1}{0,3}\right) - 16$$

(ne uităm pe linia a doua din repartiția comună când X ia valoarea 1)

$$= \frac{5,6}{0,3} - 16 \approx 18,66 - 16 \simeq 2,66$$

$$Var(Y/X=2) = \mathbb{E}[Y^2/X=2] - \mathbb{E}[Y/X=2]^2$$

$$= \left(2^2 \cdot \frac{0,1}{0,2} + 4^2 \cdot \frac{0,1}{0,2} + 6^2 \cdot \frac{0}{0,2}\right) - 3^2$$

$$= \frac{2}{0,2} - 9 = 10 - 9 = 1$$

$$Var(Y/X=3) = \mathbb{E}[Y^2/X=3] - \mathbb{E}[Y/X=3]^2$$

$$= \left(2^2 \cdot \frac{0,05}{0,1} + 4^2 \cdot \frac{0}{0,1} + 6^2 \cdot \frac{0,05}{0,1}\right) - 4^2$$

(ne uităm pe ultima linie a repartiției comune când X ia valoarea 3)

$$= \frac{2}{0,1} - 16 = 20 - 16 = 4$$

Deci, Var (Y/X) ia valorile 1, 2, 2.66 și 4.

$\mathbb{P}(Var(Y/X)=1) = \mathbb{P}(X=2)$ (deoarece $Var(Y/X)=1$ atunci când X a luat valoarea 2. Luăm valoarea lui $\mathbb{P}(X=2)$ din legea lui X)

$= 0,2$

$\mathbb{P}(Var(Y/X)=2) = \mathbb{P}(X=0)$ (deoarece $Var(Y/X)=2$ atunci când $X=0$)

$= 0,4$

$\mathbb{P}(Var(Y/X)=2,66) = \mathbb{P}(X=1)$ (deoarece $Var(Y/X)=2,66$ atunci când $X=1$)

$= 0,3$

$\mathbb{P}(Var(Y/X)=4) = \mathbb{P}(X=3)$ / deoarece $Var(Y/X)=4$ atunci când $X=3$)

$= 0,1$

$$\Rightarrow Var(Y/X) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2,66 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

c) $Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y/X)] + Var(\mathbb{E}[Y/X])$

Trebuie să verificăm formula. Cum cunoaștem legile var. aleatoare $E[Y/X]$ și $Var(Y/X)$, obținem că:

$$\mathbb{E}[Var(Y/X)] = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 2,66 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1$$
$$\simeq 2,199 \simeq 2,2$$

$$Var(\mathbb{E}[Y/X]) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y/X]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y/X]]^2$$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y/X]^2]$ calculăm cu ajutorul legii lui $\mathbb{E}[Y/X]$.

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y/X]^2] = 3^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,8 = 1,8 + 12,8 = 14,6$$

Pentru $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y/X]]$ avem formula:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y/X]] = \mathbb{E}[Y]$$

$\mathbb{E}[Y] = 3,8$ (calculat la punctul a)

$Var(Y) = 2,36$

$Var(\mathbb{E}[Y/X]) = 14,6 - 3,8^2 = 0,16$

Deci:

$2,36 = 2,2 + 0,16$ adevărat

$\Rightarrow Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y/X)] + Var(\mathbb{E}[Y/X])$