Probabilități și statistică
Tema 4

Exercițiul 1

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în $\mathbb{N}$, atunci $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$

Dem:

Se observă că:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(\{X = n\} \cup \{X = n+1\} \cup \dots) \\ \text{Cum } \{X = n\}, \{X = n+1\} \dots \text{ sunt incompatibile.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = n+1) + \dots$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

Știm că $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} n \cdot \mathbb{P}(X = n)$. Vrem să scriem $\mathbb{E}[X]$ în funcție de $\mathbb{P}(X \geq n)$.

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= (\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \dots) + (\mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \dots) + \dots$$

$$= 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X=3) + \dots$$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{E}[X]$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx$

Scanned by CamScanner

Dem:

Avem:

$$X = \int_0^X dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}\{X \ge x\}\, dx$$

Deci:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}\{X \ge x\}\, dx\right] \quad (*)$$

Pe de altă parte, avem că:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \ge x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{X \ge x\}]\, dx \overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}\{X \ge x\}\, dx\right] \overset{\text{din } (*)}{=} \mathbb{E}[X]$$

Exercitiul 2

X o v.a. cu densitatea de probabilitate:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^2 \cdot e^{-Kx}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad K > 0$$

a) $\alpha = ?$

φ densitate de probabilitate

- $\varphi(x) \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \underbrace{x^2}_{\ge 0} \cdot \underbrace{e^{-Kx}}_{>0} \ge 0, \ \forall x \ge 0 \Rightarrow \alpha > 0$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\, dx}_{=0} + \int_0^{+\infty} \alpha \cdot x^2 \cdot e^{-Kx}\, dx = 1$$

Calculăm:

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-Kx}\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^{-Kx}}{-K}\right)' dx$$

$$= \underbrace{x^2 \cdot \frac{e^{-Kx}}{-K}\Big|_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{K} 2x \cdot \left(\frac{e^{-Kx}}{-K}\right)' dx$$

$$= -\frac{2}{K^2} \underbrace{x \cdot e^{-Kx}\Big|_0^{+\infty}}_{0} + \frac{2}{K^2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-Kx}}{-K}\right)' dx$$

$$= -\frac{2}{K^3} \cdot e^{-Kx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{K^3}$$

Scanned by CamScanner

Deci, $\alpha \cdot \mathcal{I} = 1 \iff \alpha = \frac{k^3}{2}$

Aşadar,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{k^3}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-kx} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad , \quad k > 0$$

b) Funcţia de repartiţie: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$

Dacă $x < 0$:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Dacă $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{0} + \int_0^x \frac{k^3}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-kt}\,dt$$

Notăm cu $\mathcal{I} = \int_0^x t^2 \cdot e^{-kt}\,dt$

$$\mathcal{I} = \int_0^x t^2 \cdot \left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right)'dt$$

$$= t^2 \cdot e^{-kt}\Big|_0^x \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\int_0^x 2t \cdot \left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right)'dt$$

$$= x^2 \cdot e^{-kx} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) + \frac{2}{k}\left[t \cdot \frac{e^{-kt}}{-k}\Big|_0^x + \frac{1}{k}\int_0^x \left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right)'dt\right]$$

$$= \frac{-x^2 \cdot e^{-kx}}{k} - \frac{2x \cdot e^{-kx}}{k^2} - \frac{2}{k^3} \cdot e^{-kx} + \frac{2}{k^3}$$

Deci, pentru $x \geq 0$:

$$F(x) = \frac{k^3}{2} \cdot \left(\frac{2}{k^3} - \frac{2}{k^3} \cdot e^{-kx} - \frac{2}{k^2} \cdot x \cdot e^{-kx} - \frac{1}{k} x^2 \cdot e^{-kx}\right)$$

$$F(x) = 1 - e^{-kx} - k \cdot x \cdot e^{-kx} - \frac{k^2}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-kx}$$

$$F(x) = 1 - \frac{2 + 2kx + k^2x^2}{2} e^{-kx}$$

$$\text{Aşadar, } F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} \cdot e^{-kx} & , x > 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

c) $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0)$

$k > 0$, deci $\frac{1}{k} > 0$

$\Bigg\} \Rightarrow$ $F(0) = 0$

$F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1+2+2}{2} \cdot e^{-1}$

$= 1 - \frac{5}{2e}$

$P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e}$

Exercițiul 3

$X \sim Exp(\alpha)$.

a) Arătați că $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$

$X \sim Exp(\alpha) \Rightarrow$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

și $P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + e^{-\alpha t}$

$\Leftrightarrow P(X > t) = e^{-\alpha t}$

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha \cdot s}} = e^{-\alpha t} = P(X > t)$$

b) $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$. Arătați că $X \sim Exp(\alpha)$.

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$\Rightarrow P(X > s+t) = P(X > s) \cdot P(X > t)$

Notăm cu $\varphi : (0; +\infty) \to [0; 1]$

$\varphi(t) = P(X > t)$, pentru $s > 0, t > 0$.

$\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t) \quad (*)$

Scanned by CamScanner

Pentru $s=t \Rightarrow f(2s)=f^2(s)$.

Demonstrăm prin inducție că $f(ns)=f^n(s)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$P(1): f(s)=f(s)$ (adevărat)

$P(2): f(2s)=f^2(s)$

Pp. adev. $P(n): f(ns)=f^n(s)$.

Vrem să dem. $n\to n+1$: $P(n+1): f((n+1)s)=f^{n+1}(s)$

$$f((n+1)s)=f(ns+s)\overset{(*)}{=}f(ns)\cdot f(s)\overset{P(n)}{=}f^n(s)\cdot f(s)=f^{n+1}(s)$$

Deci, $f^n(s)=f(ns)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $(**)$

Pentru $s=\frac{1}{2}=t$:

$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\overset{(*)}{=}f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=f^{\frac{1}{2}}(1)$$

Analog, pentru $s=\frac{1}{k}=t$:

$$f(1)=f(\underbrace{\tfrac{1}{k}+\dots+\tfrac{1}{k}}_{k\text{ ori}})=f^k\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{k}\right)=f^{\frac{1}{k}}(1),\quad \forall k\in\mathbb{N}^* \quad (***)$$

Așadar, pentru $s=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)\overset{(**)}{=}f^m\left(\frac{1}{n}\right)\overset{(***)}{=}f^{\frac{m}{n}}(1)$$

Deci, $\forall q\in\mathbb{Q}_+$, $f(q)=f^q(1)$.

Dacă $r\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{Q}_+$, știm că $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, deci există un șir $(q_n)_n\subseteq\mathbb{Q}_+$ astfel încât $q_n\searrow r$.

Folosind continuitatea la dreapta obținem:

$f(q_n)\searrow f(r)\Rightarrow f(r)=f^r(1)$

Așadar, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=f^t(1)\Leftrightarrow$

$f(t)=e^{\ln f^t(1)}\Leftrightarrow$

Scanned by CamScanner

$$\varphi(t) = e^{t \ln \varphi(1)} \Leftrightarrow$$
$$\varphi(t) = e^{-t \ln \frac{1}{\varphi(1)}} \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-t \ln \frac{1}{\mathbb{P}(X>1)}} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \le t) = 1 - e^{-t \ln \frac{1}{\mathbb{P}(X>1)}}$$

Deci $X \sim \mathcal{E}xp\left(\ln \frac{1}{\mathbb{P}(X>1)}\right)$.

Exercițiul 4

a) Notăm cu X v.a. a nivelului de zgomot al unei mașini de spălat și cu $\overline{X_{10}}$ media unui eșantion de 10 mașini.

$E[X] = 44$

$Var(X) = 5^2 = 25$

Conform Teoremei Limitei Centrale, $\overline{X_{10}}$ e repartizată normal cu:

$$\overline{X_{10}} \sim N\left(44, \frac{25}{10}\right)$$

Se cere:

$$\mathbb{P}(\overline{X_{10}} > 48) \simeq \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X_{10}} - 44}{\frac{5}{\sqrt{10}}} > \frac{48-44}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right)$$

Notăm $Z = \dfrac{\overline{X_{10}} - 44}{\frac{5}{\sqrt{10}}}$ variabila standardizată

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{X_{10}} > 48) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{X_{10}} > 48) = \mathbb{P}(Z > 2,53)$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{X_{10}} > 48) = 1 - \mathbb{P}(Z \le 2,53) = 1 - 0,9943$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\overline{X_{10}} > 48) = 0,0057$$

b) Notăm cu X greutatea unui individ și cu $\overline{X_{100}}$ media unui eșantion de 100 de persoane.

Știm din enunț că:

$E[X] = 66,3$

$Var(X) = 15,6^2$

Scanned by CamScanner

Folosind Teorema Limitei Centrale, avem:

$$\overline{X_{100}} \sim N\left(66{,}3,\ \frac{15{,}6^2}{100}\right)$$

Se cere probabilitatea ca greutatea totală să depășească 7000 kg. Condiția e echivalentă cu depășirea unei greutăți medii de 7000/100.

$$\mathbb{P}(\overline{X_{100}} > 7000/100) = \mathbb{P}(\overline{X_{100}} > 70)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X_{100}} - 66{,}3}{\frac{15{,}6}{10}} > \frac{70-66{,}3}{\frac{15{,}6}{10}}\right)$$

Notăm cu $Z = \dfrac{\overline{X_{100}} - 66{,}3}{\frac{15{,}6}{10}}$, $Z \sim N(0,1)$.

$$\mathbb{P}\left(Z > \frac{37}{15{,}6}\right) = \mathbb{P}(Z > 2{,}37) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2{,}37)$$

$$= 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$$

Deci, $\mathbb{P}(\overline{X_{100}} > 70) = 0{,}0089$

Exercițiul 5

(X,Y) cuplu de v.a. cu $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y+1), & x \in [0;1],\ y \in [0;2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Să se det. k.

$f_{(X,Y)}$ densitate de repartiție

$f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0 \iff k \cdot \underbrace{(x+y+1)}_{>0} \geq 0$, $\forall x \in [0;1], y \in [0;2]$

$\Rightarrow k > 0$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\iff \int_0^1 \int_0^2 k(x+y+1)\,dy\,dx = 1$$

Scanned by CamScanner

$$\Leftrightarrow K \cdot \int_0^1 x \cdot y \Big|_{y=0}^{y=2} + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} + y \Big|_{y=0}^{y=2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow K \cdot \int_0^1 2x + 2 + 2 \, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow K \cdot \left(\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_0^1 + 4 \cdot x \Big|_0^1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow K \cdot 5 = 1 \quad \Leftrightarrow K = \frac{1}{5}$$

b) Să se determine densitățile marginale

Repartiția marginală a lui X

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(X,Y)}(x,y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dy + \int_0^2 \frac{1}{5}(x+y+1)\, dy + \int_2^{+\infty} 0\, dy$$

$$= \frac{1}{5}(x+1) \cdot y \Big|_{y=0}^{y=2} + \frac{y^2}{10} \Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)$$

$g : R \to R$

Așadar, $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2) & , x \in [0;1] \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$

Repartiția marginală a lui Y

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(X,Y)}(x,y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^1 \frac{1}{5}(x+y+1)\, dx + \int_1^{+\infty} 0\, dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[(y+1)\, x \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(y + \frac{3}{2}\right) = \frac{2y+3}{10}$$

$h : R \to R$

Așadar, $h(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{10} & , x \in [0;2] \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.

X, Y indep. $\Rightarrow \varphi_{(X,Y)}(x,y) = g(x) \cdot h(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

$g(x) \cdot h(y) = \frac{1}{50}(2x+4)(2y+3)$

$\Leftrightarrow g(x) \cdot h(y) = \frac{1}{50}(4xy + 6x + 8y + 12) = \frac{1}{25}(2xy + 3x + 4y + 6)$

$\Rightarrow g(x) \cdot h(y) \neq \varphi_{(X,Y)}(x,y)$ pentru $x \in [0;1]$, $y \in [0;2]$

Deci, X și Y nu sunt independente.

d) Funcția de repartiție a vectorului (X,Y).

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi_{(X,Y)}(u,v)\, du\, dv$$

- Dacă $x \in (0;1]$ și $y \in (0;2]$

$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^y \frac{1}{5}(u+v+1)\, dv\, du$$

$$= \int_0^x \frac{1}{5}(u+1) \cdot v \Big|_{v=0}^{v=y} du + \int_0^x \frac{v^2}{10}\Big|_{v=0}^{v=y} du$$

$$= \int_0^x \frac{y}{5}\left(u + 1 + \frac{y}{2}\right) du$$

$$= \frac{y}{5}\left(1 + \frac{y}{2}\right) \cdot x + \frac{y}{5} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{xy}{10}(x + y + 2)$$

- Dacă $x \in (0;1]$ și $y \in (2;+\infty)$

$$F(x,y) = \int_0^x\int_{-\infty}^0 0\, du\, dv + \int_0^x\int_0^2 \frac{1}{5}(u+v+1)\, dv\, du + \int_0^x\int_2^{+\infty} 0\, du\, dv$$

$$= \int_0^x\int_0^2 \frac{1}{5}(u+v+1)\, dv\, du$$

$$= \int_0^x \frac{1}{5}(u+1) \cdot v\Big|_0^2 du + \int_0^x \frac{1}{5} \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_0^2 du$$

$$= \int_0^x \frac{2}{5}(u + 2)\, du$$

$$= \frac{4}{5}x + \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} = \frac{x}{5}(x+4)$$

Scanned by CamScanner

- Dacă $x \in (1;+\infty)$ și $y \in (0;2]$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{y} 0\, dv\, du + \int_0^1\int_0^y \frac{1}{5}(u+v+1)\, dv\, du + \int_1^{+\infty}\int_0^y 0\, dv\, du$$

$$= \int_0^1\int_0^y \frac{1}{5}(u+v+1)\, dv\, du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{5}(u+1)y + \frac{1}{5}\cdot\frac{y^2}{2}\, du$$

$$= \frac{y^2}{10} + \frac{y}{5} + \frac{y}{10} =$$

$$= \frac{y}{10}(y+3)$$

- Dacă $x \in (1;+\infty)$ și $y \in (2;+\infty)$

$$F(x,y) = \int_0^1\int_0^2 \frac{1}{5}(u+v+1)\, dv\, du$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(u+1) + \frac{1}{5}\cdot\frac{2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\, du$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(u+2)\, du$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 2 + \frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{1^2}{\cancel{2}}$$

$$= 1$$

- Dacă $x \in (-\infty;0]$ sau $y \in (-\infty;0]$, funcția va fi 0, deci $F(x,y)=0$ (nu va ajunge pe intervalul $(0;1]$, respectiv $(0;2]$ pentru a nu se anula)

Așadar,

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in (1;+\infty),\ y \in (2;+\infty) \\ \frac{y}{10}(y+3), & x \in (1;+\infty),\ y \in (0;2] \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0;1],\ y \in (2;+\infty) \\ \frac{xy}{10}(x+y+2), & x \in (0;1],\ y \in (0;2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Funcția de repartiție marginală a lui X

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$$

- Dacă $x \in (1;+\infty)$

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} 1 = 1$$

Scanned by CamScanner

- Dacă $x \in (-\infty; 0]$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} 0 = 0$$

- Dacă $x \in (0; 1]$

$$F_X(x) = \frac{x}{5}(x+4)$$

Deci,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{x}{5}(x+4) & , x \in (0; 1] \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

Analog pentru $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \le 0 \\ \frac{y}{10}(y+3) & , y \in (0; 2] \\ 1 & , y > 2 \end{cases}$$

c) Densitatea v.a. $X/Y = y$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{h(y)}$$

- Dacă $y \in (0; 2]$, $x \in (0; 1]$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{\frac{1}{5}(x+y+1)}{\frac{2y+3}{10}} = \frac{2(x+y+1)}{2y+3}$$

- Altfel,

$$f_{X/Y}(x/y) = 0$$

$$f_{X/Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x+y+1)}{2y+3} & , x \in (0; 1], y \in (0; 2] \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$$

Densitatea v.a. $Y/X = x$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{g(x)}$$

Scanned by CamScanner

- Dacă $x \in (0;1]$, $y \in (0,2]$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{\frac{1}{5}(x+y+1)}{\frac{2}{5}(x+2)} = \frac{x+y+1}{2(x+2)}$$

- Altfel,

$$f_{Y/X}(y/x) = 0$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \frac{x+y+1}{2(x+2)}, & x \in (0;1], y \in (0;2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Exercițiul 6

Notăm cu X, respectiv Y, prima și a doua măsurătoare. Știm că $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$.

Notăm cu $U = \max(X,Y)$ valoarea maximă obținută; $L = \min(X,Y)$ valoarea minimă obținută; Trebuie să aflăm $\rho(U,L)$.

Știm că pentru $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$$

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x+y$$

În cazul nostru:

$$E[U] - E[L] = E[U-L] = E[|X-Y|]$$

$$E[U] + E[L] = E[U+L] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0$$

(deoarece $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$)

Vrem să calculăm $E[|X-Y|]$:

X, Y independente $\Rightarrow X - Y \sim N(0,2)$ ($Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$, $E(X-Y) = E[X] \cdot E[Y]$)

Luăm $Z \sim N(0,1)$. Deci, putem scrie $X-Y$ în funcție de Z ca: $X - Y = Z\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E[|X-Y|] = E[|Z|\sqrt{2}] = \sqrt{2}\, E[|Z|] \\ \text{Cum } Z \sim N(0,1) \\ \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1} \cdot e^{-\frac{(z-0)^2}{2 \cdot 1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$\mathbb{E}[|X-Y|] = \sqrt{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} |z|\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$
$$= 2\sqrt{2}\cdot \int_0^{\infty} z\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz \text{ (din simetrie)}$$
$$= 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^{\infty}\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)'dz$$
$$= 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(e^0 - \underbrace{e^{-\infty}}_{0}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[U]+\mathbb{E}[L]=0 \\ \mathbb{E}[U]-\mathbb{E}[L]=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{E}[U]=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ și } \mathbb{E}[L]=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Calculăm $Cov(U,L)$:

$$Cov(U,L) = \mathbb{E}[U\cdot L] - \mathbb{E}[U]\cdot\mathbb{E}[L]$$
$$= \mathbb{E}[U\cdot L] + \frac{1}{\pi}$$
$$= \mathbb{E}[X\cdot Y] + \frac{1}{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}$$

Deoarece $\mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = 0$

$$\rho(U,L) = \frac{Cov(U,L)}{\sqrt{Var(U)}\cdot\sqrt{Var(L)}}$$

Trebuie să calculăm $Var(U)$ și $Var(L)$.

Știm că $X+Y = U+L$

$Var(U+L) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 2$

(deoarece $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$)

$\Rightarrow Var(U) + Var(L) + 2\,Cov(U,L) = 2$

$\Leftrightarrow Var(U) + Var(L) = 2 - \frac{2}{\pi}$

Știu că $(-X,-Y)$ e la fel repartizat ca (X,Y)

și că $\max(X,L) = -\min(-X,-Y)$

Scanned by CamScanner

$$\begin{aligned} Var(U) &= Var(\max(X,Y)) \\ &= Var(-\min(-X,-Y)) \\ &= (-1)^2 \cdot Var(\min(-X,-Y)) \\ &= Var(\min(X,Y)) \\ &= Var(L) \end{aligned}$$

$Var(U) + Var(L) = 2\,Var(U) = 2\left(1-\frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow$

$Var(U) = Var(L) = 1-\frac{1}{\pi}$

Deci,

$$\rho(U,L) = \frac{Cov(U,L)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(L)}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi-1}$$

Exercițiul 7

a) T = v.a. ce desemnează momentul când naște femeia

Din enunț știm că $T \sim N(0,16)$

Se cere $\mathbb{P}(0 \leq T < 1)$.

$$\mathbb{P}(T \geq 0, T<1) = \mathbb{P}\left(\frac{T-0}{4} \geq 0, \frac{T-0}{4} < \frac{1}{4}\right)$$

Notăm cu $Z = \frac{T-0}{4}$, $Z \sim N(0,1)$.

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(T \geq 0, T<1) = \mathbb{P}\left(0 \leq Z < \frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(T \geq 0, T<1) = \Phi(0{,}25) - \Phi(0)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(T \geq 0, T<1) = 0{,}5987 - 0{,}5$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(T \geq 0, T<1) = 0{,}0987$

Scanned by CamScanner

b) Notăm cu:

T_1 = momentul nașterii primei femei

T_2 = momentul nașterii celei de-a doua femei

Așadar, $T_0 = \min(T_1, T_2)$. Vrem să aflăm $Var(T_0)$.

Știm că: $T_1 \sim N(0,16)$

$T_2 \sim N(0,16)$

$T_1 \perp\!\!\!\perp T_2$

Notăm cu $T_u = \max(T_1, T_2)$ - momentul celei de-a doua nașteri.

Se știe că $\max(T_1,T_2) = -\min(-T_1, -T_2)$ (*) și din simetria repartiției normale rezultă că (T_1,T_2) este la fel repartizat că $(-T_1,-T_2)$. (**)

$$Var(T_0) = Var(\min(T_1,T_2)) = Var(-\min(T_1,T_2))$$
$$\overset{(**)}{=} Var(-\min(-T_1,-T_2)) \overset{(*)}{=} Var(\max(T_1,T_2))$$
$$= Var(T_u)$$

De asemenea, cum $T_0 = \min(T_1, T_2)$ și $T_u = \max(T_1,T_2)$ rezultă că $T_0 + T_u = T_1 + T_2$.

$$Var(T_0 + T_u) = Var(T_1 + T_2) = Var(T_1) + Var(T_2)$$
$$= 16 + 16 = 32. \quad (1)$$

$$Var(T_0 + T_u) = Var(T_0) + Var(T_u) + 2\, Cov(T_0, T_u)$$
(formulă)
$$\overset{(1)}{=} 32$$

$$\Rightarrow 2\, Var(T_0) + 2\, Cov(T_0, T_u) = 32$$
$$\Leftrightarrow Var(T_0) = 16 - Cov(T_0, T_u)$$

Din definiție, $Cov(T_0, T_u) = \mathbb{E}[T_0 \cdot T_u] - \mathbb{E}[T_0] \cdot \mathbb{E}[T_u]$

$$\Leftrightarrow Cov(T_0,T_u) = \mathbb{E}[T_1 \cdot T_2] - \mathbb{E}[T_0] \cdot \mathbb{E}[T_u]$$

$$\mathbb{E}[T_1 \cdot T_2] \overset{T_1 \perp\!\!\!\perp T_2}{=\!=\!=} \mathbb{E}[T_1] \cdot \mathbb{E}[T_2] = 0$$ (din $T_1 \sim N(0,16)$, $T_2 \sim N(0,16)$)

$$\Rightarrow Cov(T_0,T_u) = -\mathbb{E}[T_0] \cdot \mathbb{E}[T_u]$$

Scanned by CamScanner

Trebuie să aflăm $\mathbb{E}[T_o]$, $\mathbb{E}[T_u]$.

Știm că pentru $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$\max(x,y) + \min(x,y) = x+y$

$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$

$\mathbb{E}[T_o] + \mathbb{E}[T_u] = \mathbb{E}[T_o + T_u] = \mathbb{E}[T_1 + T_2] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_2] = 0$

$\mathbb{E}[T_u] - \mathbb{E}[T_o] = \mathbb{E}[T_u - T_o] = \mathbb{E}[|T_1 - T_2|]$

Rămâne de calculat $\mathbb{E}[|T_1 - T_2|]$.

Deoarece $T_1 \perp\!\!\!\perp T_2$, se observă că $T_1 - T_2 \sim N(0, 32)$.

$(T_1 \perp\!\!\!\perp T_2$, $Var(T_1 - T_2) = Var(T_1) + Var(T_2))$; $\mathbb{E}(T_1 - T_2) = \mathbb{E}[T_1] \cdot \mathbb{E}[T_2])$

Așadar, introducem notația $T_1 - T_2 = Z\sqrt{32}$ cu $Z \sim N(0,1)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|T_1 - T_2|] = \sqrt{32} \cdot \mathbb{E}[|Z|]$$

$$= \sqrt{32} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \int_0^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ (simetrie)}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)' dz$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\underbrace{-e^{-\frac{\infty^2}{2}}}_{0} + e^0\right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[T_o] + \mathbb{E}[T_u] = 0 \\ \mathbb{E}[T_u] - \mathbb{E}[T_o] = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \mathbb{E}[T_u] = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[T_u] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \\ \mathbb{E}[T_o] = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Cov(T_o, T_u) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{16}{\sqrt{\pi}}$$

Așadar, $Var(T_o) = 16 - \frac{16}{\sqrt{\pi}}$

Scanned by CamScanner