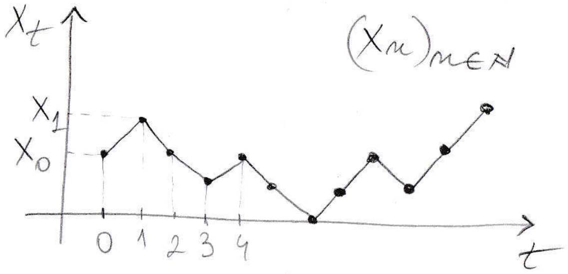
PROCESE POISSON

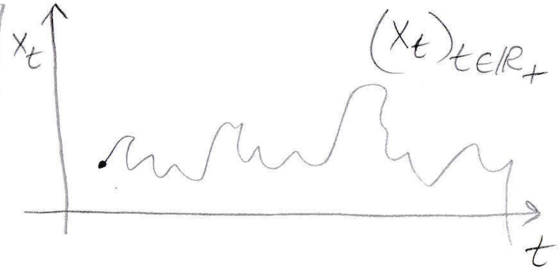
- PROCES STOCASTIC (RANDOM PROCESS) $\xrightarrow[\text{informală}]{\text{def.}}$ „șir de v.a. indexate după timp" → poate fi discret sau continuu

$(X_t)_{t \in I}$ → I: mulțimea momentelor de timp

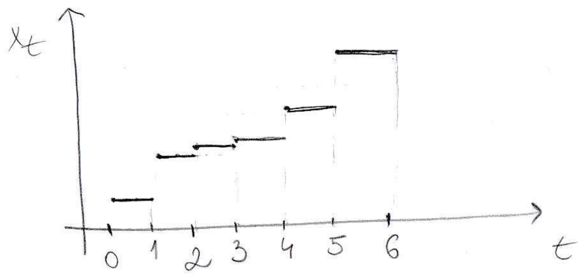
ex. 1) RANDOM WALK



2) MIȘCAREA BROWNIANĂ



3) PROCESE POISSON



• PROCES POISSON → OMOGEN (DE RATĂ λ)
→ NEOMOGEN (CU FUCȚIA DE INTENSITATE $\lambda(t)$)

1) PROCES POISSON OMOGEN

Presupunem că evenimente de același fel au loc la momente de timp aleatoare în intervalul $[0,t]$. Notăm cu $N(t)$ (sau N_t) numărul de evenimente produse în acest interval.

$(N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numește **PROCES POISSON OMOGEN DE RATĂ λ, $\lambda>0$** dacă:

a) $N(0)=0$ (procesul începe la momentul 0)

b) $N(t+s)-N(s)$ și $N(s)$ sunt <u>independente</u> (numărul de evenimente produse în două intervale disjuncte constituie v.a. independente)

c) $N(t+s)-N(s)$ și $N(t)$ au <u>aceeași repartiție</u> (repartiția nr. de evenimente produse într-un anumit interval depinde <u>numai</u> de lungimea intervalului) (<u>incremente staționare</u>)

d) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P(N(h)=1)}{h}=\lambda$

e) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P(N(h)\geq 2)}{h}=0$

→ (într-un interval infinitezimal de lungime h probabilitatea de a se produce exact 1 eveniment este aproximativ egală cu λh, pe când probabilitatea de a se produce 2 sau mai multe evenimente este aproximativ egală cu 0).

$\boxed{\text{OBS}}$: Numărul de evenimente produse în intervalul $[0,t]$ este o v.a. Poisson de medie λt.

CONVENȚIE: Notăm cu X_1 momentul apariției primului eveniment și pentru $n>1$ natural X_n reprezintă timpul scurs între evenimentele $n-1$ și respectiv n.

Teoremă: $X_1, X_2 \dots X_n$ sunt v.a. i.i.d. repartizate $Exp(\lambda)$.

OBS: Notăm cu $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ momentul de timp la care are loc evenimentul n.

Atunci $S_n \sim Gamma(n, \lambda)$.

2) PROCES POISSON NEOMOGEN

Spunem că $(N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numește PROCES POISSON NEOMOGEN CU FUNCȚIA DE INTENSITATE $\lambda(t)$

dacă:

a) $N(0)=0$

b) $N(t+s)-N(s)$ și $N(s)$ sunt v.a. independente

c) $\lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(\text{„exact 1 eveniment s-a produs în intervalul } [t,t+h]\text{"})}{h} = \lambda(t)$

arată cât e de probabil să se producă un eveniment într-o vecinătate a momentului t.

d) $\lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}(\text{„două sau mai multe evenimente se produc în intervalul } [t,t+h]\text{"})}{h} = 0$

OBS : Funcția $\boxed{m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds}$ se numește funcția de valoare medie.

Teoremă : V.a. $N(t+s) - N(t)$ este o v.a. Poisson de medie $m(t+s) - m(t)$.

OBS : Presupunem că un număr de evenimente au loc conform unui proces Poisson de rată λ și că, independent de ce s-a produs până atunci, are loc un eveniment la momentul t cu probabilitatea $p(t)$. Atunci numărul total de evenimente urmează un proces Poisson cu funcția de intensitate $\boxed{\lambda(t) = \lambda \cdot p(t)}$.

Temă : (1) Fie un proces Poisson omogen cu rata $\lambda = 0.6$ / oră. Determinați probabilitatea ca niciun eveniment să nu aibă loc în intervalul 16:00 – 20:00.

(2) Pentru un proces Poisson omogen de rata λ determinați:
$(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$

$$\mathbb{P}(N(s) = k \mid N(t) = n) \text{ pentru } s < t.$$

Ce se întâmplă dacă $s > t$?