# RETELE BAYESIENE

Ideea: In lumea reală majoritatea evenimentelor sunt independente de celelalte, astfel încât interacțiunile dintre ele nu trebuie luate în considerație. În schimb, se poate folosi o reprezentare locală având rolul de a descrie grupuri de evenimente care interacționează.

Relațiile de independență condiționată dintre variabile pot reduce substanțial numărul probabilităților condiționate care trebuie specificate.

Structura de date folosită cel mai frecvent pentru a reprezenta dependența dintre variabile şi pentru a da o specificație concisă a repartiției de probabilitate multidimensionale este rețeaua Bayesiană.

**Definiția 1:** O rețea Bayesiană este un graf cu următoarele proprietăți:
1. Graful este direcționat şi aciclic.
2. O mulțime de variabile aleatoare constituie nodurile rețelei.
3. O mulțime de arce direcționate conectează perechi de noduri. În mod intuitiv, semnificația unui arc direcționat de la nodul $X$ la nodul $Y$ este aceea că $X$ are o influență directă asupra lui $Y$.
4. Fiecărui nod îi corespunde un tabel de probabilități condiționate care cuantifică efectele pe care părinții le au asupra nodului respectiv. (Părinții unui nod sunt toate acele noduri din care pleacă arce direcționate înspre acesta).

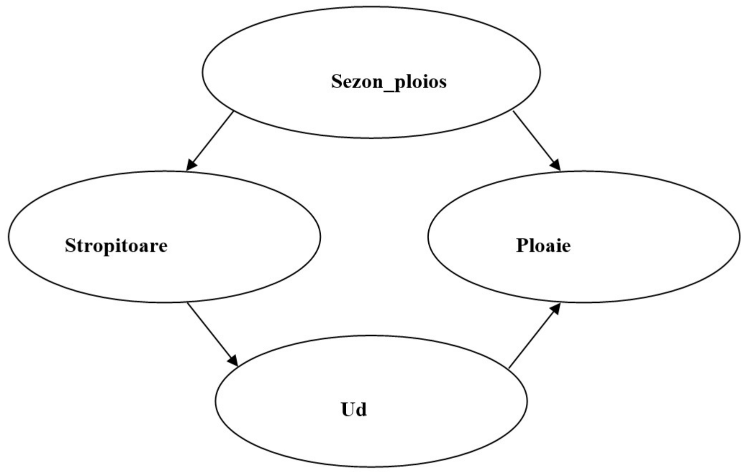
Un expert în domeniu decide relațiile directe de dependență condiționată care sunt valabile în domeniu.

După stabilirea topologiei rețelei Bayesiene, nu mai este necesară decât specificarea probabilităților condiționate ale acelor noduri care participă în dependențe directe. Acestea vor fi folosite în calculul oricăror alte probabilități.

Concret: se construieşte un graf direcționat aciclic care reprezintă relațiile de cauzalitate dintre variabile. Variabilele dintr-un astfel de graf pot fi propoziționale (caz în care pot lua valorile TRUE sau FALSE) sau pot fi variabile care primesc valori de un alt tip (spre exemplu o temperatură a corpului sau măsurători făcute de către un dispozitiv de diagnosticare).

Pentru a putea folosi graful cauzalității (rețea) ca bază a unui raționament de tip probabilist sunt necesare însă mai multe informații.

În particular, este necesar să cunoaştem, pentru o valoare a unui nod părinte, ce dovezi sunt furnizate referitor la valorile pe care le poate lua nodul fiu.




Probabilitățile condiționate corespunzătoare pot fi date sub forma unui tabel de tipul:

| Atribut | Probabilitate |
|---|---|
| p(Ud\|Stropitoare, Ploaie) | 0.95 |
| p(Ud\|Stropitoare, ¬ Ploaie) | 0.9 |
| p(Ud\|¬ Stropitoare, Ploaie) | 0.8 |
| p(Ud\|¬ Stropitoare, ¬ Ploaie) | 0.1 |
| | |
| p(Stropitoare\| Sezon ploios) | 0.0 |
| p(Stropitoare\| ¬ Sezon ploios) | 1.0 |
| | |
| p(Ploaie\|Sezon ploios) | 0.9 |
| p(Ploaie\| ¬ Sezon ploios) | 0.1 |
| | |
| p(Sezon ploios) | 0.5 |

Exemple:

- probabilitatea a priori de a avea un sezon ploios este 0.5
- dacă suntem în timpul unui sezon ploios, probabilitatea de a avea ploaie într-o noapte dată este 0.9

Pentru a putea folosi o asemenea reprezentare în rezolvarea problemelor este necesar un mecanism de calcul al influenței oricărui nod arbitrar asupra oricărui alt nod.
Pentru a obține acest mecanism de calcul este necesar ca:

- graful inițial să fie convertit la un graf nedirecționat, în care arcele să poată fi folosite pentru a se transmite probabilități în oricare dintre direcții, în funcție de locul din care provin dovezile;
- să existe un mecanism de folosire a grafului care să garanteze transmiterea corectă a probabilităților (exemplu: iarba udă să nu constituie o dovadă a ploii, care să fie considerată apoi o dovadă a existenței ierbii ude).

Există trei mari clase de algoritmi care efectuează aceste calcule.
Ideea care stă la baza tuturor acestor metode este aceea că nodurile au domenii limitate de influență.

Metoda cea mai folosită este probabil cea a transmiterii mesajelor [Pearl, 1988], abordare care se bazează pe observația că, pentru a calcula probabilitatea unui nod $A$ condiționat de ceea ce se ştie despre celelalte noduri din rețea, este necesară cunoaşterea a trei tipuri de informații:

- suportul total care soseşte în $A$ de la nodurile sale părinte (reprezentând cauzele sale);
- suportul total care soseşte în $A$ de la fiii acestuia (reprezentând simptomele sale);
- intrarea în matricea fixată de probabilități condiționate care face legătura dintre nodul $A$ şi cauzele sale.

## Relații de independență condiționată în rețele Bayesiene

O rețea Bayesiană exprimă independența condiționată a unui nod şi a predecesorilor săi, fiind dați părinții acestuia şi foloseşte această independență pentru a proiecta o metodă de construcție a rețelelor.

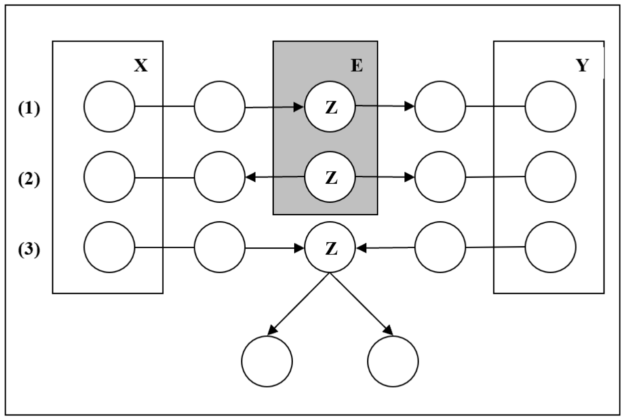
Pentru a stabili algoritmi de inferență trebuie însă să ştim dacă se verifică independențe condiționate mai generale, adica: Fiind dată o rețea, dorim să putem ”citi” dacă o mulțime de noduri $X$ este independentă de o altă mulțime $Y$, fiind dată o mulțime de ”noduri dovezi” $E$.

Metoda de stabilire a acestui fapt se bazează pe noțiunea de separare dependentă de direcție sau d-separare

**Definiția 2:** O mulțime de noduri $E$ d-separă două mulțimi de noduri $X$ şi $Y$ dacă orice drum nedirecționat de la un nod din $X$ la un nod din $Y$ este blocat condiționat de $E$.

**Definiția 3:** Fiind dată o mulțime de noduri $E$, spunem că un drum este blocat condiționat de $E$ dacă există un nod $Z$ aparținând drumului, pentru care una dintre următoarele trei condiții se verifică:
1. $Z$ aparține lui $E$ şi $Z$ are o săgeată a drumului intrând în $E$ şi o săgeată a drumului ieşind din $E$.
2. $Z$ aparține lui $E$ şi $Z$ are ambele săgeți ale drumului ieşind din $E$.
3. Nici $Z$ şi nici vreunul dintre descendenții săi nu aparțin lui $E$, iar ambele săgeți ale drumului țintesc înspre $Z$.

Figura următoare ilustrează cele trei cazuri posibile:




S-a demonstrat că (teorema fundamentală a rețelelor Bayesiene, demonstrată de Verma şi Pearl): dacă orice drum nedirecționat de la un nod din $X$ la un nod din $Y$ este d-separat de $E$, atunci $X$ şi $Y$ sunt independente condiționat de $E$.

Procesul construirii şi folosirii rețelelor Bayesiene nu utilizează d-separarea.
Noțiunea de d-separare este fundamentală în construcția algoritmilor de inferență.

## Inferența în rețele Bayesiene

Sarcina principală a oricărui sistem probabilist de inferență este aceea de a calcula probabilități a posteriori de tipul P(Interogare|Dovezi) corespunzător unei mulțimi de variabile de interogare condiționat de valori exacte ale unor variabile dovezi.

**Exemplu:** În exemplul considerat, Ud este o variabilă de interogare, iar Stropitoare şi Sezon_ploios ar putea fi variabile dovezi.

Rețelele Bayesiene sunt suficient de flexibile pentru ca orice nod să poată servi fie ca o variabilă de interogare, fie ca o variabilă dovadă.

Un agent primeşte valori ale variabilelor dovezi de la senzorii săi (sau în urma altor raționamente) şi întreabă despre posibilele valori ale altor variabile astfel încât să poată decide ce acțiune trebuie întreprinsă.

Sarcina cea mai frecventă şi mai utilă a rețelelor Bayesiene: determinarea probabilităților condiționate a posteriori ale variabilelor de interogare.

Literatura de specialitate discută patru tipuri distincte de inferență, care poate fi realizată de rețelele Bayesiene:

- inferență de tip diagnostic (de la efecte la cauze);
- inferență cauzală (de la cauze la efecte);
- inferență intercauzală (între cauze ale unui efect comun);

- inferențe mixte (reprezentând combinații a două sau mai multe dintre inferențele anterioare).

**Exemplu:** Setând efectul Stropitoare la valoarea ”adevărat” şi cauza Sezon_ploios la valoarea ”fals”, ne propunem să calculăm P(Ud|Stropitoare, ¬ Sezon_ploios).
Aceasta este o inferență mixtă, care reprezintă o utilizare simultană a inferenței de tip diagnostic şi a celei cauzale.

## Un algoritm pentru răspunsul la interogări (algoritm de calcul al probabilităților condiționate a posteriori ale variabilelor de interogare)

Algoritmul va fi de tip înlănțuire înapoi prin faptul că pleacă de la variabila de interogare şi urmează drumurile de la acel nod până la nodurile dovezi.

Algoritmul se referă numai la rețele unic conectate, numite şi poli-arbori. (In poli-arbori există cel mult un drum nedirecționat între oricare două noduri ale rețelei).

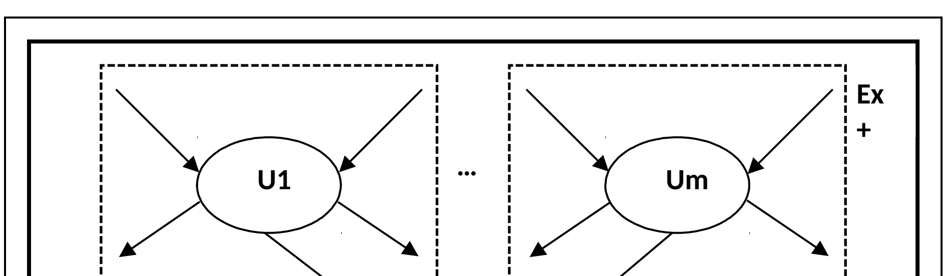
Algoritmii pentru rețele generale vor folosi algoritmii referitori la poli-arbori ca principală subrutină.

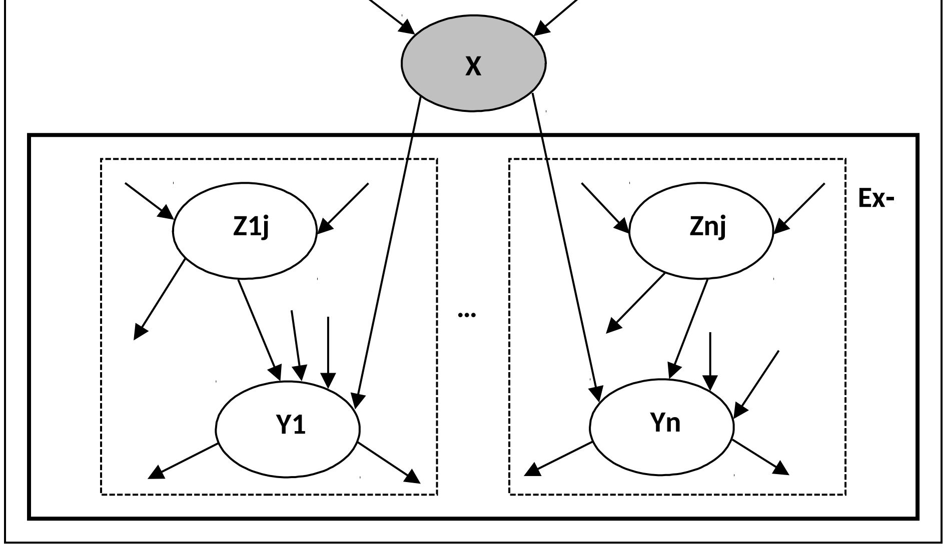
Figura următoare prezintă o rețea generică unic conectată.

- În această rețea nodul $X$ are părinții $\mathbf{U} = U_1 \dots U_m$ şi fiii $\mathbf{Y} = Y_1 \dots Y_n$. Corespunzător fiecărui fiu şi fiecărui părinte a fost desenat un dreptunghi care include toți descendenții nodului şi toți strămoşii lui (cu excepția lui $X$ ).
- Proprietatea de unică conectare înseamnă că toate dreptunghiurile sunt disjuncte şi că nu există legături care să le conecteze între ele.
- Se presupune că $X$ este variabila de interogare şi că există o mulțime $E$ de variabile dovezi.
- Se urmăreşte calcularea probabilității condiționate $P(X|E)$
- Dacă însuşi $X$ este o variabilă dovadă din $E$, atunci calcularea lui $P(X|E)$ este banală. Presupunem că $X$ nu aparține lui $E$ .

Rețeaua din figură este partiționată în conformitate cu părinții şi cu fiii variabilei de interogare $X$.
Pentru a concepe un algoritm, va fi util să ne putem referi la diferite porțiuni ale dovezilor:

$E_X^+$ reprezintă suportul cauzal pentru $X$ - variabilele dovezi aflate ”deasupra” lui $X$ , care sunt conectate la $X$ prin intermediul părinților săi.
$E_X^-$ reprezintă suportul probatoriu pentru $X$ - variabilele dovezi aflate ”dedesubtul” lui $X$ şi care sunt conectate la $X$ prin intermediul fiilor săi.






## Notații şi formule matematice

**1. Repartiții de probabilitate multidimensionale**

Fie $E = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleator format din $n$ variabile discrete. Repartiția sa, $P_0(X_1, \ldots, X_n)^{-1}$, este complet specificată de valorile

$$p(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, \ldots, x_n)} p(x_1, \ldots, x_n) = 1 ,$$

unde $(x_1, \ldots, x_n)$ este o ”realizare” a lui $E$.

În general, pentru a desemna $P_0(X_1, \ldots, X_n)^{-1}$, se foloseşte notația simplificată $P(E)$.

În acest context, are loc următoarea formulă de înmulțire a probabilităților:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \cdot \ldots$$
$$\cdot P(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

**2. Repartiții condiționate**

Fie $Y$ o variabilă aleatoare discretă şi $E=(X_1,\dots,X_n)$ un vector aleator cu componente discrete. Corpul de evenimente generate de $E$ este finit, având ca generatori pe $\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}$.
Pentru fiecare realizare $(x_1,\dots,x_n)$ a lui $E$, notăm probabilitatea condiţionată a unui eveniment $A$ cu

$$P(A\,|\,(x_1,\dots,x_n))=\frac{P(A\cap\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\})}{P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)}$$

Corespunzător variabilei $Y$ putem lua în consideraţie:

- repartiţia lui $Y, P(Y)$, dată de valorile $p(y)=P(Y=y)$;
- repartiţia lui $Y$ condiţionată de $E,\ P(Y\,|\,E)$, care este dată, pentru fiecare realizare $(x_1,\dots,x_n)$, de valorile $p(y\,|\,(x_1,\dots,x_n))=P(\{Y=y\}\,|\,(x_1,\dots,x_n))$.

În acest context se verifică versiunea condiţionată a formulei de înmulţire a probabilităţilor:

$$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\,|\,C)=P(X_1=x_1\,|\,C)\cdot P(X_2=x_2\,|\,C,X_1=x_1)\cdots$$
$$\cdot P(X_n=x_n\,|\,C,X_1=x_1,\dots,X_{n-1}=x_{n-1}).$$

**3. Formula lui Bayes**

Fie $E$ şi $Y$ cu aceeaşi semnificaţie din §1 şi §2.

- Formula lui Bayes în *versiune necondiţionată* este utilizată pentru a exprima o repartiţie a posteriori

$$P(E\,|\,Y=y)=\frac{P(E)\cdot P(\{Y=y\}\,|\,E)}{P(\{Y=y\})}$$

unde:

$P(E)$ este repartiţia a priori a lui $E$;
$\{Y=y\}$ este evenimentul observat;
$P(E\,|\,Y=y)$ este repartiţia a posteriori a lui $E$;
$P(\{Y=y\}\,|\,E)$ este complet determinată de valorile

$$P(\{Y=y\}\,|\,\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}).$$

- Formula lui Bayes în *versiune condiţionată* este utilizată pentru a exprima o repartiţie a posteriori condiţionată

$$P(Y\,|\,E,e)=\frac{P(Y\,|\,E)\cdot P(e\,|\,E,Y)}{P(e\,|\,E)}$$

unde:

$P(Y\,|\,E)$ este o probabilitate condiţionată, a priori;
$e$ reprezintă o nouă dovadă;
$P(Y\,|\,E,e)$ este o probabilitate condiţionată, a posteriori.