Tehnici de Optimizare

Tema 3 - 344

1. Fie următoarea problemă de optimizare constrânsă:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \; f(x) = x_1^3 x_2^2(-1 - x_1 - x_2)$$
$$\text{s.l.} \; x \in Q$$

Calculaţi explicit primele 2 iteraţii ale Metodei Gradient Proiectat cu pas constant 1, în următoarele situaţii:

2p a) $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 1\}$

2p b) $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x_1^2, x_2^2\} \leq 1\}$

2p c) Este problema convexă când $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq x_2\}$?

Indicatie: Reamintim că o problemă de optimizare este convexă dacă funcţia obiectiv este convexă şi mulţimea fezabilă este convexă. La punctul b), simplificaţi formularea lui Q pentru a obţine o mulţime convexă simplă.

2. Fie problema de optimizare neconstrânsă:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; \frac{1}{2}(a^T x)^2 + \frac{1}{2}x^T x,$$
$$\text{s.l.} \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

unde $a \in \mathbb{R}^n$ este un vector dat.

2p a) Pentru rezolvarea problemei, implementaţi Metoda Gradient Proiectat: (i) cu pas ales prin backtracking; (ii) cu pas constant $\alpha = \frac{1}{L}$.

2p b) Trasaţi 2 figuri pentru a compara performanţa metodelor de la punctul a). În fiecare dintre cele două figuri vor apărea 2 curbe de convergenţă 2D: prima pentru MGP cu pas constant, iar a doua MGP cu pas backtracking. Prima figură va indica pe axa Ox contorul iteraţiilor (notat k), iar pe Oy valorile distanţei $f(x^k) - f^*$. În a doua figură axa Oy va indica valorile $\|\nabla f(x^k)\|$ (vezi Tema 2).

Indicaţii :

1. Pentru $f(x) = \frac{1}{2}(a^T x)^2 + \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}x^T \left(aa^T + I_n\right) x$, avem $\nabla f(x) = \left(aa^T + I_n\right) x$.
2. Se va genera vectorul a de dimensiune n aleator sau deterministic.
3. Criterii oprire pentru algoritmi: $f(x^k) - f^* \leq \epsilon$ sau $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$.

Observaţii generale::

- Tema va cuprinde: un fişier cu rezolvarea problemei 1 (Word, Latex etc.) şi un fişier Python cu rezolvarea problemei 2 (utilizaţi comentariile pentru explicaţii).
- Nume fişier (arhiva): Grupa_Nume_Prenume_NrTema
- Termen: 02.04.2021