

3.36pt

ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 05b: Integral Dupla

Valdinei Freire

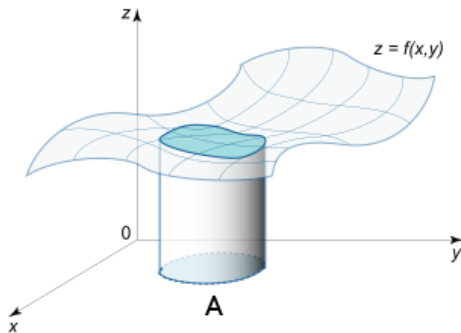
valdinei.freire@usp.br

<http://www.each.usp.br/valdinei>

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

Integral Dupla



Considere uma função de duas variáveis $f(x, y)$ e uma região $A \in \mathbb{R}^2$. O volume¹ limitado pelas superfícies $z = f(x, y)$ e $z = 0$, e contidos na região A é denotado por:

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

¹Volumes abaixo de $z = 0$ são computados como negativo.

Função Característica

Considere uma região A indicada pela função característica:

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in A \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin A \end{cases}$$

e uma região retangular $R = [a, b] \times [c, d]$ tal que $A \subseteq R$, então:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) \chi_A(x, y) dx dy$$

Teorema de Fubini

Considere a região $R = [a, b] \times [c, d]$, então:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Exercício

Calcule:

► $\int_2^3 \int_0^4 xy dx dy$

► $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$

► $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 (x \sin y - ye^x) dx dy$

► $\int_0^{\pi} \int_1^2 y \sin(xy) dx dy$

Teorema de Fubini

Considere a região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c(x) \leq y \leq d(x)\}$, então:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Exercício

- ▶ Calcule o volume sob a função $f(x, y) = x^2y$, onde $0 \leq y \leq x \leq 1$.
- ▶ Calcule o volume sob a função $f(x, y) = xy$, onde $y \in [0, 1]$, x é positivo e $x \leq y^2$.