ACH2011 – Cálculo I (2025.1)

Terceira Prova – Junho/2025

Nome: ____ Nº USP: ______________

Explicitar os passos importantes na resolução;
a mera apresentação das respostas não é digna de pontuação positiva

0) Frequência (em %): 97 93 90 87 83 80 77 73 70

1) [2.0 pontos] Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua no domínio dado e derivável em (a,b). Provar o teorema do valor médio **sem** usar o resto de Lagrange da expansão de Taylor. No teorema do valor médio, existe um $\xi \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a)$. **Hint:** Montar uma função adequada $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F(a) = F(b)$.

2) [8.0 pontos] Escolher **UMA** (e **SOMENTE UMA**) das seguintes quantidades para estimar com um desvio (do valor verdadeiro) de, no máximo, $\epsilon = 10^{-8}$. Utlizar o menor número n de termos possível na soma da estimativa, mostrando também que este n é ótimo. Nota: $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$ $(x \geq 0)$, $1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ $(x \in \mathbb{R})$, ${}^{23}/_{5} = 4.6$ e $-4.606 < \ln \frac{1}{100} < -4.605$.

Escolha:

(A) $\cos 44^\circ$ (B) $e^{-23/5}$

---

1) A função em questão pode ser

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a)\,, \quad \text{cuja derivada é} \quad F'(x) := f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Notar que $F(a) = F(b) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe um $\xi \in (a,b)$ tal que $F'(\xi) = 0$, *id est*,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

provando o teorema.

2A) Defina $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ tal que $f(x) = \cos x$. O objetivo é estimar $f(x = \frac{44\pi}{180})$. Tomando-se como ponto de referência $x_0 = \frac{45\pi}{180}$ (45°), a expansão de Taylor (ao redor de x_0) conduz a

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1},$$

onde

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\,(x-x_0)^m \qquad \text{e} \qquad R_{n+1} := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

para algum ξ entre x_0 e x. Notar que

$$\begin{array}{ccccccccc}
f^{(0)}(x_0) & = & f^{(4)}(x_0) & = & \cdots & = & \cos x_0 & = & {}^{1}/_{\sqrt{2}} \\
f^{(1)}(x_0) & = & f^{(5)}(x_0) & = & \cdots & = & -\sin x_0 & = & -{}^{1}/_{\sqrt{2}} \\
f^{(2)}(x_0) & = & f^{(6)}(x_0) & = & \cdots & = & -\cos x_0 & = & -{}^{1}/_{\sqrt{2}} \\
f^{(3)}(x_0) & = & f^{(7)}(x_0) & = & \cdots & = & \sin x_0 & = & {}^{1}/_{\sqrt{2}}
\end{array}$$

ou

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{\omega(n)}\,\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (-1)^{\omega(n)} = (-1)^{\frac{n(3-n)}{2}} = \begin{cases} 1 & , \quad n = 4m \text{ ou } n = 4m-1 \qquad (m \in \mathbb{Z}) \\ -1 & , \quad n = 4m+1 \text{ ou } n = 4m+2 \qquad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Logo,

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\,(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{\omega(m)}}{m!}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{45\pi}{180}\right)^m.$$

No ponto $x = \frac{44\pi}{180}$,

$$P_n\left(\frac{44\pi}{180}\right) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{\omega(m)}}{m!} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\pi}{180}\right)^m,$$

e o resto de Lagrange é dado por

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(-\frac{\pi}{180}\right)^{n+1}$$

para $\xi \in \left(\frac{44\pi}{180}, \frac{45\pi}{180}\right)$.

Rascunho: Nas condições acima,

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(-\frac{\pi}{180}\right)^{n+1}\right| \approx \frac{1/\sqrt{2}}{(n+1)!} \left(\frac{3}{180}\right)^{n+1} \\
&= \begin{cases} \frac{1/\sqrt{2}}{(2+1)!} \frac{1}{60^{2+1}} \approx \frac{1}{6} \frac{1}{6^3 10^3} = \frac{1}{1296 \cdot 10^3} \approx 10^{-6} & , \quad n = 2 \\ \frac{1/\sqrt{2}}{(3+1)!} \frac{1}{60^{3+1}} \approx \frac{1}{24} \frac{1}{6^4 10^4} \approx \frac{1}{24} \frac{1}{10^7} < 10^{-8} & , \quad n = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Estimar-se-á $|R_{3+1}|$ visando mostrar que $|R_{3+1}| < \epsilon = 10^{-8}$. De fato,

$$\begin{aligned}
|R_{3+1}| &= \left|\frac{f^{(3+1)}(\xi)}{(3+1)!} \left(-\frac{\pi}{180}\right)^{3+1}\right| = \frac{|\cos\xi|}{4!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 < \frac{1}{4!} \left(\frac{3.6}{180}\right)^4 = \frac{1}{24} \frac{1}{50^4} \\
&= \frac{1}{24 \cdot 625 \cdot 10^4} < \frac{1}{20 \cdot 500 \cdot 10^4} = 10^{-8},
\end{aligned}$$

onde as desigualdades $|\cos\xi| \leq 1$, $\pi < 3.6$, $24 > 20$ e $625 > 500$ foram usadas (nesta ordem).

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|R_{2+1}| &= \left|\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!} \left(-\frac{\pi}{180}\right)^{2+1}\right| = \frac{|\sin\xi|}{3!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 > \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{3!} \left(\frac{3}{180}\right)^3 = \frac{1/2}{6} \frac{1}{60^3} = \frac{1}{12 \cdot 6^3 \cdot 10^3} \\
&= \frac{1}{12 \cdot 216 \cdot 10^3} > \frac{1}{40 \cdot 250 \cdot 10^3} = 10^{-7},
\end{aligned}$$

onde as desigualdades $|\sin\xi| > \sin\frac{30\pi}{180} = \sin\frac{\pi}{6}$, $\pi > 3$, $12 < 40$ e $216 < 250$ foram invocadas (nesta ordem).

Logo, para $x = \frac{44\pi}{180}$ e $x_0 = \frac{45\pi}{180}$,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{44\pi}{180} &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + R_4 \\
&= \cos\left(\frac{45\pi}{180}\right) + \left[-\sin\left(\frac{45\pi}{180}\right)\right]\left(\frac{44\pi}{180} - \frac{45\pi}{180}\right) + \frac{\left[-\cos\left(\frac{45\pi}{180}\right)\right]}{2!}\left(\frac{44\pi}{180} - \frac{45\pi}{180}\right)^2 + \\
&+ \frac{\left[\sin\left(\frac{45\pi}{180}\right)\right]}{3!}\left(\frac{44\pi}{180} - \frac{45\pi}{180}\right)^3 + R_4 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{180} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + R_4,
\end{aligned}$$

com $|R_4| < \epsilon = 10^{-8}$.

....

2B) Defina $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ tal que $f(x) = e^x$. O objetivo é estimar $f(x = -23/5 = -4.6)$. Tomando-se como ponto de referência $x_0 = \ln\frac{1}{100}$, a expansão de Taylor (ao redor de x_0) conduz a

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1},$$

onde

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m \qquad \text{e} \qquad R_{n+1} := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

para algum ξ entre x_0 e x. Notar que

$$f^{(0)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \cdots = e^{x_0} = \frac{1}{100}.$$

Logo,

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{100\cdot m!}\left(x - \ln\frac{1}{100}\right)^m.$$

No ponto $x = -\frac{23}{5}$,

$$P_n\left(-\frac{23}{5}\right) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{100\cdot m!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^m,$$

e o resto de Lagrange é dado por

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^{n+1}$$

para $\xi \in \left(\ln\frac{1}{100}, -\frac{23}{5}\right)$, com $\ln\frac{1}{100} \in (-4.606, -4.605)$.

Rascunho: Nas condições acima,

$$|R_{n+1}| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^{n+1}\right| \approx \frac{1/100}{(n+1)!}(0.005)^{n+1}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1/100}{(1+1)!}\dfrac{1}{200^{1+1}} = \dfrac{1/100}{2}\dfrac{1}{2^2 100^2} = \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{10^6} > 10^{-7} & , \quad n=1 \\[2ex] \dfrac{1/100}{(2+1)!}\dfrac{1}{200^{2+1}} = \dfrac{1/100}{6}\dfrac{1}{2^3 100^3} = \dfrac{1}{48\cdot 10^8} < 10^{-8} & , \quad n=2 \end{cases}$$

Estimar-se-á $|R_{2+1}|$ visando mostrar que $|R_{2+1}| < \epsilon = 10^{-8}$. De fato,

$$|R_{2+1}| = \left|\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^{2+1}\right| = \frac{e^\xi}{3!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^3 < \frac{2^{-4}}{6}[-4.6-(-4.606)]^3$$
$$= \frac{1/16}{6}\frac{6^3}{1000^3} = \frac{36}{16}\cdot 10^{-9} < 10^{-8},$$

onde as desigualdades $e^\xi < e^{-4} < 2^{-4}$ (já que $\xi < -4.6$) e $\ln\frac{1}{100} > -4.606$ foram usadas (nesta ordem).

Por outro lado,

$$|R_{1+1}| = \left|\frac{f^{(1+1)}(\xi)}{(1+1)!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^{1+1}\right| = \frac{e^\xi}{2!}\left(-\frac{23}{5} - \ln\frac{1}{100}\right)^2 > \frac{e^{\ln\frac{1}{100}}}{2}[-4.6-(-4.605)]^2$$
$$= \frac{1/100}{2}\frac{5^2}{1000^2} = \frac{1}{8}\cdot 10^{-6} = \frac{10}{8}\cdot 10^{-7} > 10^{-8},$$

onde as desigualdades $e^\xi > e^{\ln\frac{1}{100}}$ (por $\xi \in (\ln\frac{1}{100}, -23/5)$), $\ln\frac{1}{100} < -4.605$ e $10/8 > 1$ foram invocadas (nesta ordem).

Logo, para $x = -23/5$ e $x_0 = \ln \frac{1}{100}$,

$$
\begin{aligned}
e^{-23/5} &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + R_3 \\
&= e^{\ln \frac{1}{100}} + e^{\ln \frac{1}{100}} \left(-\frac{23}{5} - \ln \frac{1}{100}\right) + \frac{e^{\ln \frac{1}{100}}}{2!} \left(-\frac{23}{5} - \ln \frac{1}{100}\right)^2 + R_3 \\
&= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \left(-\frac{23}{5} - \ln \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{200} \left(-\frac{23}{5} - \ln \frac{1}{100}\right)^2 + R_3,
\end{aligned}
$$

com $|R_3| < \epsilon = 10^{-8}$.