ACH2011 – Cálculo I (2025.1)

Quarta Prova – Julho/2025

Nome: ______________________________ Nº USP: ______________

Explicitar os passos importantes na resolução;
a mera apresentação das respostas não é digna de pontuação positiva

0) Frequência (em %): 97 93 90 87 83 80 77 73 70

1) [2.0 pontos] Determinar a(s) reta(s) assíntota(s) do gráfico de $f(x) = \left(3ax^2 - x^3\right)^{1/3}$, com $a \in \mathbb{R}$. Não é necessário desenhar o gráfico.

2) O objetivo deste exercício é estimar $\sqrt{26}$ através de uma expansão de Taylor na forma $P_2(x_0) + R_3$, onde P_n é um polinômio de grau 2 (o maior expoente presente é 2), x_0 é um ponto conveniente para a estimativa e R_3 é uma medida do desvio de $\sqrt{26}$ em relação a $P_2(x_0)$.

a) [2.0 pontos] Escolhendo "adequadamente"x_0, mostrar que é possível obter um R_3 tal que $|R_3| < 10^{-4}$.

b) [2.0 pontos] Escrever $P_2(x_0)$ como uma <u>única</u> fração.

c) [2.0 pontos] Mostrar que com as escolha de x_0 acima, tem-se $|R_2| > 5 \times 10^{-4}$.

d) [2.0 pontos] No item (a) desta questão, é possível tomar $x_0 = 26 + \epsilon$ com ϵ sendo um número positivo "pequeno". Discutir brevemente qual(is) seria(m) o(s) impacto(s) desta escolha.

---

1) Assumindo o domínio como sendo um subconjunto maximal dos reais, não há restrição nele – o que exclui a possibilidade de haver assíntotas verticais. Já para analisar a região $|x| \gg 1$, denote por

$$r_\pm := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a_\pm x + b_\pm\right\}$$

os gráficos associados às retas assíntotas $r_\pm$ para $x \to \pm\infty$. De

$$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(3ax^2 - x^3\right)^{1/3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} = -1,$$

segue

$$b_+ = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - a_+ x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(3ax^2 - x^3\right)^{1/3} - (-1)\,x\right] = \lim_{x\to\infty} x\left[\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} + 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} + 1\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{-2/3}\left(-\frac{3a}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = a,$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada. Finalmente, de

$$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\left(3ax^2 - x^3\right)^{1/3} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} = -1,$$

segue

$$b_- = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - a_- x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(3ax^2 - x^3\right)^{1/3} - (-1)\,x\right] = \lim_{x\to-\infty} x\left[\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} + 1\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} + 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{1/3} + 1\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3a}{x} - 1\right)^{-2/3}\left(-\frac{3a}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = a,$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada.

Logo, a função admite uma assíntota $y = -x + a$ para $x \sim \pm\infty$.

2a) Defina $f(x) = \sqrt{x}$ e tome $x_0 = 25$; há um interesse no caso $x = 26$. Naturalmente,

$$f^{(0)}(x) = x^{1/2}, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \quad \text{e} \quad f^{(3)}(x) = -\frac{3}{8}x^{-5/2},$$

com $x \geq 0$ para $f^{(0)}(x)$ e $x > 0$ para $f^{(n)}(x)$ com $n > 0$. Ademais,

$$R_3 = \frac{f^{(3)}(\xi)\,(x - x_0)^3}{3!},$$

com ξ entre $x_0 = 25$ e $x = 26$. Logo,

$$|R_3| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)\,(26 - 25)^3}{3!}\right| = \frac{3}{8}\frac{1}{\xi^{5/2}}\frac{1^3}{3!} = \frac{1}{16}\frac{1}{\xi^{5/2}} < \frac{1}{16}\frac{1}{25^{5/2}} = \frac{1}{50000} = 2 \times 10^{-5} < 10^{-4}.$$

2b) De $f^{(0)}(25) = 25^{1/2} = 5$, $f^{(1)}(25) = \frac{1}{2} \cdot 25^{-1/2} = \frac{1}{10}$ e $f^{(2)}(25) = -\frac{1}{4} \cdot 25^{-3/2} = -\frac{1}{500}$, tem-se

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 \\
&= f^{(0)}(25) + f^{(1)}(25)\,(26 - 25) + \frac{f^{(2)}(25)}{2!}\,(26 - 25)^2 \\
&= 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} \\
&= \frac{5099}{1000}.
\end{aligned}$$

2c) Desta vez,

$$R_2 = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\,(x - x_0)^2,$$

com ξ entre $x_0 = 25$ e $x = 26$; notar que $\xi < 27$. Logo,

$$\begin{aligned}
|R_2| &= \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\,(x - x_0)^2\right| = \frac{1}{4}\frac{1}{\xi^{3/2}}\frac{(26 - 25)^2}{2!} > \frac{1}{8}\frac{1}{27^{3/2}} = \frac{1}{8}\frac{1}{27\sqrt{27}} = \frac{1}{648\sqrt{3}} > \frac{1}{648 \times 2} = \frac{1}{1296} \\
&> \frac{1}{2000} = 5 \times 10^{-4},
\end{aligned}$$

onde se usou $\xi < 27$, $\sqrt{3} < 2$ e $1296 < 2000$, nesta ordem.

2d) Caso fosse escolhido um x_0 bem próximo a $x = 26$, obter-se-ia uma convergência da expansão de Taylor mais rápida, o que conduziria a $|R_2|$ e $|R_3|$ pequenos (e, portanto, não seria possível $|R_2| > 5 \times 10^{-4}$, embora $|R_3| < 10^{-4}$ fosse satisfeita). Contudo, o eventual x_0 pode não ser favorável em cálculos analíticos para se obter $P_2(x_0)$, que envolve raízes quadradas deste novo x_0 – tornando o problema tão custoso (do ponto de vista analítico) quanto a questão original de estimar $\sqrt{26}$.