ACH2011 – Cálculo I (2025.1)

Primeira Prova – Maio/2025

Nome: ____ Nº USP: ______________

Explicitar os passos importantes na resolução;
a mera apresentação das respostas não é digna de pontuação positiva

1) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **par** se $f(x) = f(-x)$ para todo x do domínio (de f). Se f for derivável, mostrar que existe um ponto ξ onde a derivada de f é nula.

2) Escolher **UMA** (e **SOMENTE UMA**) das seguintes funções (cuja fórmula é apresentada) e esboçar seu gráfico indicando, quando houver, pontos críticos, de inflexão e retas assíntotas.

(A) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ (B) $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}\right)$ Função escolhida: $\square$

---

1) **Resolução 1:** Pela regra da cadeia, $f'(x) = -f'(-x)$. Consequentemente, no ponto $x = 0$ tem-se $f'(0) = -f'(0)$, donde se tem $f'(0) = 0$. Logo, existe (ao menos) um ponto onde a derivada de f é nula.

Resolução 2: Tome $a \neq 0$; da paridade de f, sabe-se que $f(a) = f(-a)$. Logo, do teorema de Rolle, existe $\xi \in (-|a|, |a|)$ tal que $f'(\xi) = 0$, completando a prova.

2) A) O esboço do gráfico será feito a partir de algumas considerações iniciais.

(i) Domínio. Assumindo o domínio da função como sendo um subconjunto maximal dos reais, a exigência sobre a função

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$

limita-se a $x \neq -1$ (divergência de f devido ao denominador). Notar que as formas quadráticas x^2+x+1 e x^2-x+1 são sempre positivas (consequentemente, $x^2 \pm x + 1 = 0$ não admitem solução real). Em suma,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

(ii) Zero(s) da função. Da representação da função vista acima, a função admite uma única solução em $x = 1$.

(iii) Crescimento de f. O crescimento da função pode ser examinado mediante a análise de sua primeira derivada, f', com

$$f'(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)' = \left(1 - \frac{2}{x^3+1}\right)' = \frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{6x^2}{(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)^2} \geq 0.$$

A função f' é, pois, monotonicamente crescente em todos os pontos exceto em $x = -1$ (quando a função não é definida) e $x = 0$ (quando $f'(0) = 0$). De forma mais detalhada,

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\varnothing$	$+$	0	$+$
f'	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Notar que a função apresenta um ponto crítico em $x = -1$ (onde f' não está definida) e $x = 0$ (onde a derivada é nula, mas não se trata de um ponto de máximo ou mínimo local).

(iv) Convexidade de f. A convexidade da função é investigada através de sua segunda derivada, f'', sendo que

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[\frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}\right]' = \frac{\left(6x^2\right)'\left(x^3+1\right)^2 - \left(6x^2\right)\left[\left(x^3+1\right)^2\right]'}{\left[\left(x^3+1\right)^2\right]^2}$$

$$= -\frac{12x\left(2x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = -\frac{12x\left(x-2^{-1/3}\right)\left(2x^2+2^{2/3}x+2^{1/3}\right)}{(x+1)^3\left(x^2-x+1\right)^3}$$

Os candidatos a pontos de inflexão satisfazem $f''(x)=0$. Como $2x^2+2^{2/3}x+2^{1/3}>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, as raízes de $f''(x)=0$ formam o conjunto $\{0, 2^{-1/3}\}$. A partir dos pontos-chave, em f'',

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2^{-1/3})$	$2^{-1/3}$	$(2^{-1/3},\infty)$
$f''(x)$	$+$	$\varnothing$	$-$	0	$+$	0	$-$
f''	$\cup$	$\times$	$\cap$	$-$	$\cup$	$-$	$\cap$

Logo, a função admite dois pontos de inflexão, que ocorrem em $x\in\{0,2^{-1/3}\}$.

(v) Limites de f. Segundo o domínio, além das regiões $x\gg 1$ e $x\ll -1$, a vizinhança de $x=-1$ (ponto onde a função não está definida) deve ser caracterizada. É imediato que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = 1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = 1.$$

Obter-se-iam, aqui, os mesmos resultados recorrendo à regra de l'Hôpital.

Por outro lado, na vizinhança de $x=-1$, o numerador de $f(x)$ tende a um valor nagativo (-2), ao passo que o denominador tende a zero. Logo,

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\frac{x^3-1}{x^3+1} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-1}{x^3+1} = \infty.$$

(vi) Retas assíntotas. Denote por

$$r_\pm := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = a_\pm x + b_\pm\right\}$$

os gráficos associados às retas assíntotas $r_\pm$ para $x\to\pm\infty$. De

$$a_+ = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{x^3-1}{x^3+1} = 0,$$

é imediato que

$$b_+ = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-a_+x\right] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$$

onde um dos limites em (v) foi invocado. Finalmente, de

$$a_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{x^3-1}{x^3+1} = 0,$$

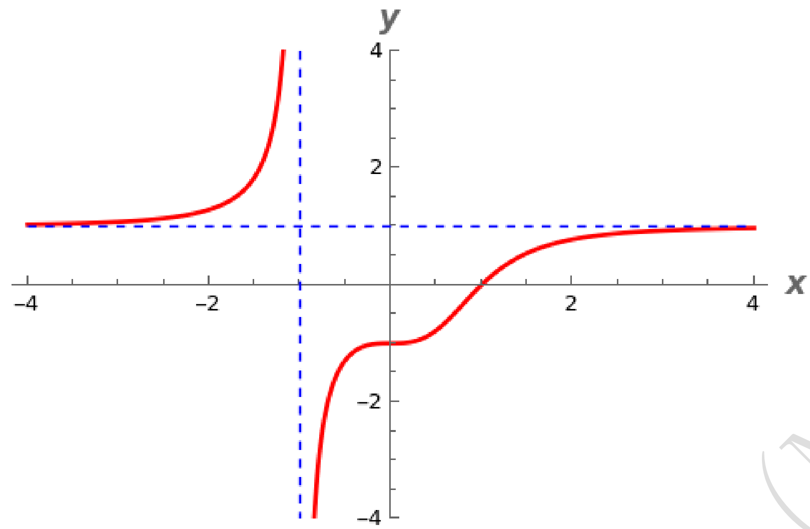

Figura 1: Gráfico de $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$ (vermelho) e indicação de retas assíntotas (azul).

é imediato que

$$b_- = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - a_- x] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

onde um dos limites em (v) foi novamente invocado.

Logo, a função admite uma assíntota (horizontal) $y = 1$ em $x \sim \pm\infty$ e uma assíntota (vertical) em $x = -1$.

Com as informações acima, pode-se esboçar o gráfico da função, apresentado na figura 1.

....

B) O esboço do gráfico será feito a partir de algumas considerações iniciais.

(i) Domínio. Além do domínio da função arco-cotangente abranger toda a reta real, não há singularidades ou outras restrições em seu argumento. Logo,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

(ii) Zero(s) da função. A imagem de uma função arco-cotangente é $(0, \pi)$. Logo, a função não apresenta raiz real.

(iii) Crescimento de f. O crescimento da função pode ser examinado mediante a análise de sua primeira derivada, f', com

$$f'(x) = \left[\operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)\right]' = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)' = -\frac{2\sqrt{3}x}{x^4+3}.$$

Notar que o denominador $x^4 + 3$ é estritamente positivo. Ademais, a função f' anula-se em $x = 0$. De forma mais detalhada,

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f'	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

Notar que a função apresenta um ponto crítico em $x = 0$ (em que a derivada é nula), onde se situa um máximo local.

(iv) Convexidade de f. A convexidade da função é investigada através de sua segunda derivada, f'', sendo que

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left(-\frac{2\sqrt{3}x}{x^4+3}\right)' = -2\sqrt{3}\,\frac{(x)'\left(x^4+3\right) - (x)\left(x^4+3\right)'}{\left(x^4+3\right)^2}$$
$$= \frac{6\sqrt{3}\left(x^4-1\right)}{\left(x^4+3\right)^2} = \frac{6\sqrt{3}\,(x-1)\,(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}.$$

Os candidatos a pontos de inflexão satisfazem $f''(x) = 0$, e são os pontos $x = -1$ ou $x = 1$ no presente caso. A partir dos pontos-chave, em f'',

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	$\cup$	$-$	$\cap$	$-$	$\cup$

Logo, a função admite dois pontos de inflexão, que ocorrem em $x \in \{-1, 1\}$.

(v) Limites de f. Segundo o domínio, é suficiente analisar as regiões $x \gg 1$ e $x \ll -1$. É imediato que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

o que não é surpreendente, visto que a função é par ($f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

(vi) Retas assíntotas. Denote por

$$r_\pm := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a_\pm x + b_\pm\right\}$$

os gráficos associados às retas assíntotas $r_\pm$ para $x \to \pm\infty$. De

$$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

é imediato que

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} [f(x) - a_+x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

onde um dos limites em (v) foi invocado. Finalmente, de

$$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

é imediato que

$$b_- = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - a_-x] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

onde um dos limites em (v) foi novamente invocado.

Logo, a função admite uma assíntota (horizontal) $y = 0$ em $x \sim \pm\infty$.

Com as informações acima, pode-se esboçar o gráfico da função, apresentado na figura 2.

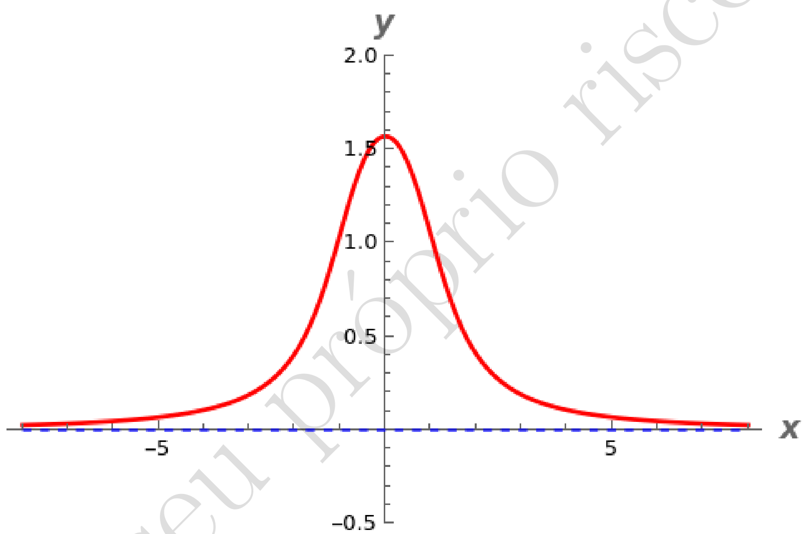

Figura 2: Gráfico de $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)$ (vermelho) e indicação de reta assíntota (azul).