# ACH2053 – Introdução à Estatística

## Aula 06: Variável Aleatória Contínua

Valdinei Freire

valdinei.freire@usp.br

http://www.each.usp.br/valdinei

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

# Livros Textos

1. DEGROOT, M.H., SCHERVISH, M.J. Probability and Statistics, Addison Wesley, 4th edition (2011). **Seções 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 5.6, 5.7**
2. DEVORE, J.L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências, Pioneira Thompson Learning, 8ª edição, 2016. **Capítulo 4**

# Variável Aleatória

Seja $\Omega$ o espaço amostral de um experimento. Uma função $X$ com valores reais definida sobre $\Omega$, isto é, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada de variável aleatória.

Seja $X$ uma variável aleatória. A distribuição de $X$ é a coleção de todas probabilidades da forma $\Pr(X \in C)$ para todos conjuntos $C$ de números reais tal que $\{s : X(s) \in C\}$ é um evento, e

$$\Pr(X \in C) = \Pr(\{s : X(s) \in C\}).$$

# Variável Aleatória Contínua

Uma variável aleatória $X$ tem uma distribuição contínua ou $X$ é uma variável aleatória contínua se existe uma função não-negativa $f$, definida na reta real, tal que para todo intervalo de números reais, a probabilidade que $X$ toma um valor no intervalo é a integral de $f$ sobre o intervalo, i.e.,

$$\Pr(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

A função $f$ é chamada Função Densidade de Probabilidade de $X$, em inglês, *probability density function* (p.d.f.).

# Variável Aleatória Contínua

A função densidade de probabilidade apresenta algumas características interessantes:

- a probabilidade de um único valor é 0, isto é, $\Pr(X = x) = 0$.
- existem infinitas p.d.f. que resultam nas mesmas probabilidades sobre uma variável aleatória $X$.
- densidade não apresenta axiomas similares aos axiomas de probabilidade, pode ser inclusive ilimitada.
- é comum identificar uma p.d.f. a menos de uma constante de normalização.

# Função Distribuição Acumulada

A função distribuição ou função distribuição acumulada (c.d.f. - cumulative distribution function) $F$ de uma variável aleatória $X$ é a função:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \text{ para } -\infty < x < \infty.$$

Seja $X$ uma variável aleatória contínua, e denote por $f(x)$ e $F(x)$ respectivamente sua p.d.f. e sua c.d.f.. Então $F$ é contínua em todo $x$ e apresenta as seguintes propriedades para qualquer $x$ para os quais $f(x)$ é contínua:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \text{ e } \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

# Exemplos

Calcule a função distribuição acumulada das seguintes distribuições:

- Uniforme Contínua - $f(x) = \frac{1}{b-a}$ para $x \in [a, b]$ e 0 caso contrário
- Exponencial – $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$ e 0 caso contrário
- Distribuição de Bernoulli com $p = 0.7$
- Distribuição Geométrica com $p = 0.7$

# Função Distribuição Acumulada

As seguintes propriedades podem ser provadas para variáveis aleatórias contínuas ou discretas:

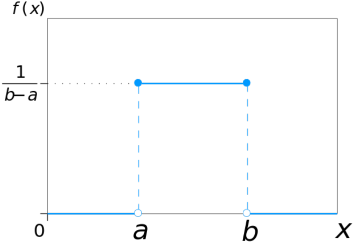
- A função $F(x)$ é não-decrescente quando $x$ cresce; isto é, se $x_1 < x_2$, então $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
- Uma c.d.f é sempre contínua pela direita, isto é, $F(x) = \lim_{a \to x^+} F(a)$ para todo ponto $x$.
- Para todo valor $x$, $\Pr(X > x) = 1 - F(x)$.
- Para todo valor $x_1$ e $x_2$, $\Pr(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
- Para todo valor $x$, $\Pr(X < x) = \lim_{a \to x^-} F(a)$.
- Para todo valor $x$, $\Pr(X = x) = F(x) - \lim_{a \to x^-} F(a)$.

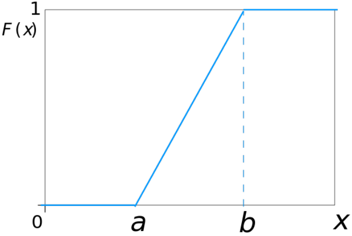
# Distribuições Típicas

**Distribuição Uniforme em um intervalo**

Seja $a$ e $b$ dois números reais tal que $a < b$. Seja $X$ uma variável aleatória tal que $a \leq X \leq b$ e, para todo subintervalo de $[a, b]$, a probabilidade que $X$ pertence ao subintervalo é proporcional ao comprimento do subintervalo. Então, a variável aleatória tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ e p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



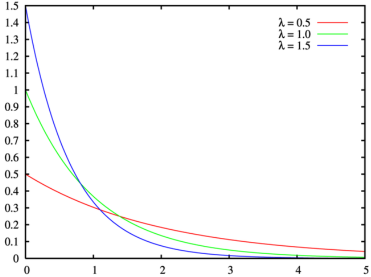



## Distribuição Exponencial

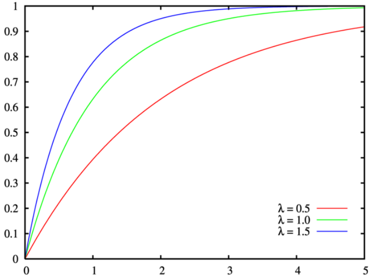
A função de probabilidade

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamada de distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda$.




Função densidade de probabilidade




Função distribuição acumulada

## Distribuição Exponencial

As distribuições Exponencial e de Poisson são variáveis aleatórias de um mesmo experimento, no qual ocorrências no tempo são anotadas.

- A distribuição de Poisson representa variáveis aleatórias que contam quantidades de ocorrência em uma unidade de tempo.
- A distribuição exponencial representa a variável aleatória que representa o intervalo de tempo entre quaisquer duas ocorrências.

Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro $\lambda$ e seja $t > 0$. Então para todo número $h > 0$,

$$\Pr(X \geq t + h | X \geq t) = \Pr(X \geq h).$$

Suponha que as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra de uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda$. Então a distribuição de $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ será a distribuição exponencial com parâmetro $n\lambda$.

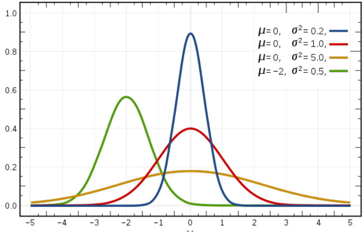
**Distribuição Normal**

A função de probabilidade

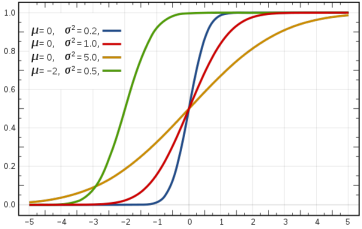
$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

é chamada de distribuição normal.

Somatória de infinitas variáveis aleatórias resulta em uma distribuição normal.




Função densidade de probabilidade




Função distribuição acumulada

Seja $X$ uma variável aleatória contínua com p.d.f. $f$. Então a média, esperança, ou valor esperado de $X$, denotado por $\mathsf{E}(X)$, é um número dado por:

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Seja $X$ uma variável aleatória com média finita $\mu = \mathsf{E}(X)$. A variância de $X$, denotada por $\mathsf{Var}(X)$, é um número dado por:

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}[(X-\mu)^2] = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2,$$

e $\mathsf{Var}(X) \geq 0$.

O desvio padrão de X, denotado por $\sigma_X$ (ou simplesmente $\sigma$ quando $X$ estiver implícito) é a raiz não-negativa de $\mathsf{Var}(X)$.

# Sumarizações - Propriedades

### Teorema

Se $Y = aX + b$, onde $a$ e $b$ são constantes finitas, então

$$\mathsf{E}(Y) = a\mathsf{E}(X) + b.$$

### Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são $n$ variáveis aleatórias tal que a esperança de cada uma é finita, então:

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i).$$

### Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são $n$ variáveis aleatórias **independentes** tal que a esperança de cada uma é finita, então:

$$\mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i).$$

# Variância e Desvio Padrão

### Teorema

Se $Y = aX + b$, onde $a$ e $b$ são constantes finitas, então

$$\mathsf{Var}(Y) = a^2\mathsf{Var}(X).$$

### Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são $n$ variáveis aleatórias **independentes** tal que a esperança de cada uma é finita, então:

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i).$$

# Exemplos

Calcule a esperança e a variância das seguintes distribuições:

- Uniforme Contínua – $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- Exponencial – $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

# Mediana e Amplitude Interquartil

Seja $X$ uma variável aleatória com c.d.f. $F$. Para cada $p$ estritamente entre 0 e 1, defina a função $F^{-1}(p)$ como o menor valor $x$ tal que $F(x) \geq p$.

A mediana $m$ de uma distribuição com c.d.f. $F$ é definida por:

$$m = F^{-1}(0.5)$$

Seja $X$ uma variável aleatória com c.d.f. $F$. A amplitude interquartil (IQR - Interquartile Range) é definida por:

$$IQR = F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25).$$

# Exemplos

Calcule a mediana e a amplitude interquartil das seguintes distribuições:

- Uniforme Contínua – $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- Exponencial – $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

# Esperança vs Mediana

**Teorema**

Defina o número $\mathsf{E}[(X-d)^2]$ como erro quadrático médio (M.S.E. - mean square error) da predição $d$. Seja $\mu = \mathsf{E}(X)$, então para qualquer $d \neq \mu$:

$$\mathsf{E}[(X-\mu)^2] < \mathsf{E}[(X-d)^2],$$

isto é, $\mu$ é a predição com M.S.E. mínimo.

**Teorema**

Defina o número $\mathsf{E}(|X-d|)$ como erro absoluto médio (M.A.E. - mean absolute error) da predição $d$. Seja $m$ a mediana da distribuição $X$, então para qualquer $d \neq m$:

$$\mathsf{E}(|X-m|) < \mathsf{E}(|X-d|),$$

isto é, $m$ é a predição com M.A.E. mínimo.

# Resumo das Distribuições

| Distribuição | Função Densidade de Probabilidade | Função Cumulada de Probabilidade | Esperança | Variância |
|---|---|---|---|---|
| Uniforme Contínua | $f(x) = \frac{1}{b-a}$ | $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ | $\mathsf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ | $\mathsf{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Exponencial | $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ | $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ | $\mathsf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ | $\mathsf{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ |
| Normal | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ | não existe função elementar | $\mathsf{E}[X] = \mu$ | $\mathsf{Var}[X] = \sigma^2$ |