

ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 07: Variável Aleatória Bivariada

Valdinei Freire

valdinei.freire@usp.br

<http://www.each.usp.br/valdinei>

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

1. DEGROOT, M.H., SCHERVISH, M.J. Probability and Statistics, Addison Wesley, 4th edition (2011). **Seções 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 4.6, 4.7**
2. DEVORE, J.L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências, Pioneira Thompson Learning, 8ª edição, 2016. **Seções 5.1 e 5.2**
3. WALPOLE, R., MYERS, R., MEYERS, S., YE, K. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências, Pearson Prentice Hall, 8ª edição, 2009. (*disponível na Biblioteca Pearson, acessar via VPN*) **Seções 3.4, 4.2**

Distribuição Bivariada

Seja X e Y variáveis aleatórias. A distribuição conjunta ou bivariada de X e Y é a coleção de todas probabilidades da forma $\Pr[(X, Y) \in C]$ para todo conjunto C de pares de números reais tal que $\{s : (X(s), Y(s)) \in C\}$ é um evento.

A função Distribuição Conjunta Acumulada (c.d.f. conjunta) de duas variáveis X e Y é definida como a função F tal que para todos valores de x e y ,

$$F(x, y) = \Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y).$$

Se as variáveis aleatórias X e Y são contínuas, então existe uma função densidade de probabilidade conjunta (p.d.f. conjunta) tal que:

$$\Pr((X, Y) \in C) = \iint_C f(x, y) dx dy.$$

Exemplo

Considere um experimento no qual 2 dados são lançados. Seja X o menor valor entre os dados e Y o maior valor entre os dados. Descreva a função probabilidade conjunta $f(x, y) = \Pr(X = x, Y = y)$ e a função Distribuição Conjunta Acumulada $F(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$.

$$f(x, y)$$

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$$F(x, y)$$

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Exemplo

Considere variáveis aleatórias X e Y descritas pela seguinte p.d.f. conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} x & , \text{ se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de X e Y serem menores que 1.

Descreva a c.d.f. conjunta de X e Y .

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y, & x \in [0, 1] \text{ e } y \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{xy}{3}, & x \in [0, 1] \text{ e } y \in [0, 2] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja F a c.d.f. conjunta de X e Y . A c.d.f. F_1 da variável aleatória única X pode ser derivada da c.d.f. conjunta F como:

$$F_1(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y).$$

A c.d.f. F_1 é chamada de c.d.f. marginal de X . Ainda, a p.f. ou p.d.f. $f_1(x)$ associada a F_1 é chamada de p.f. marginal ou p.d.f. marginal.

Variáveis Aleatórias Independentes

Duas variáveis aleatórias são independentes se, para quaisquer dois conjuntos A e B de números reais tais que $\{x : x \in A\}$ e $\{y : y \in B\}$ são eventos,

$$\Pr(X \in A \text{ e } Y \in B) = \Pr(X \in A) \Pr(Y \in B).$$

Seja F a c.d.f. conjunta de X e Y , F_1 a c.d.f. marginal de X e F_2 a c.d.f. marginal de Y . Então X e Y são independentes se e somente se:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

Seja f p.d.f. conjunta das variáveis aleatórias X e Y . X e Y são independentes se e somente se a seguinte fatoração é satisfeita para todo número real x e y :

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

Distribuições Condicionais

Seja X e Y variáveis aleatórias discretas (contínuas) com p.f. (p.d.f.) conjunta f . Seja f_2 a p.f. marginal de Y . Para cada y tal que $f_2(y) > 0$, defina:

$$g_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Então, g_1 é chamada de p.f. (p.d.f.) condicional de X dado Y . Para cada y , $g_1(\cdot|y)$ é uma distribuição discreta (contínua) e é chamada de distribuição condicional de X dado que $Y = y$.

Teorema de Bayes Se $f_1(x)$ é a p.f. ou p.d.f. marginal de uma variável aleatória X , então a p.f. ou p.d.f. condicional de Y dado $X = x$ é:

$$g_2(y|x) = \frac{g_1(x|y)f_2(y)}{f_1(x)}.$$

Covariância

Seja X e Y variáveis aleatórias, $\mu_X = E(X)$ e $\mu_Y = E(Y)$. A **covariância** de X e Y , denotada por $\text{Cov}(X, Y)$, é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Seja X e Y variáveis aleatórias com variâncias finitas e não nulas σ_X e σ_Y respectivamente. A **correlação** de X e Y , denotada por $\rho(X, Y)$, é definida por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Teorema (Inequação de Cauchy-Schwarz)

Seja X e Y variáveis aleatórias. Então:

$$[\text{Cov}(X, Y)]^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2,$$

e

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

As igualdades apenas são alcançadas se existem constantes a e b diferentes de 0 tal que $aX + bY = 0$ com probabilidade 1.

Teorema

Se X é uma variável aleatória com $0 < \sigma_X^2 < \infty$ e $Y = aX + b$ para constantes $a \neq 0$ e b . Se $a > 0$, então $\rho(X, Y) = 1$. Se $a < 0$, então $\rho(X, Y) = -1$.

Teorema

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com $0 < \sigma_X^2 < \infty$ e $0 < \sigma_Y^2 < \infty$, então

$$\text{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0.$$

Teorema

Se X e Y são variáveis aleatórias com $0 < \sigma_X^2 < \infty$ e $0 < \sigma_Y^2 < \infty$, então

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$