ACH2011 – Cálculo I

Lista de Exercícios 02

Exercícios

Calcular os seguintes limites; tomar $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

001) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x}$ 002) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x}$ 003) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{|x|}$ 004) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{|x|}$ 005) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$

006) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$ 007) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ 008) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ 009) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2n}}$ 010) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2n}}$

011) $\lim\limits_{x\to \pi/2^+} \tan x$ 012) $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} \tan x$ 013) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x$ 014) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x$ 015) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+|x|}{x}$

016) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+|x|}{x}$ 017) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{1/x}$ 018) $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{1/x}$ 019) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_2 x$ 020) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_x 2$

Calcular os seguintes limites; assuma $a > 0$.

021) $\lim\limits_{y\to 1^+} \dfrac{y-1}{\sqrt{y-1}}$ 022) $\lim\limits_{y\to 1^+} \dfrac{\sqrt{y-1}}{y-1}$ 023) $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^2-6y+8}{y-2}$ 024) $\lim\limits_{y\to -1} \dfrac{y^3+1}{y+1}$

025) $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\sin y}{\sqrt{1-\cos y}}$ 026) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos y}{\tan y}$ 027) $\lim\limits_{y\to a} \dfrac{y-a}{\sqrt{y}-\sqrt{a}}$ 028) $\lim\limits_{y\to a} \dfrac{y^2-ay-y+a}{y^2-a^2}$

029) $\lim\limits_{y\to \infty} \dfrac{y^2-y^3+1}{y^3+2y^2-1}$ 030) $\lim\limits_{y\to \infty} \dfrac{y^2-y^3+1}{y^4+2y^2-1}$ 031) $\lim\limits_{y\to \infty} \dfrac{y^2-y^4+1}{y^3+2y^2-1}$ 032) $\lim\limits_{y\to \infty} \dfrac{y^2-y^3+1}{y^2+2y-1}$

033) $\lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{y^2-y^3+1}{y^3+2y^2-1}$ 034) $\lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{y^2-y^3+1}{y^4+2y^2-1}$ 035) $\lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{y^2-y^4+1}{y^3+2y^2-1}$ 036) $\lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{y^2-y^3+1}{y^2+2y-1}$

Problemas

Por $\lim x_n = a$ (ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), entende-se que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Quando existe tal limite, diz-se que a sequência é **convergente**. Ademais, uma sequência (x_n) é **limitada** se existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta definição pode também ser formulada como existindo um $c \in \mathbb{R}$ positivo tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{R}$.

Um resultado útil para alguns dos problemas abaixo é a **desigualdade triangular**

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Este resultado pode ser mostrado lembrando que $z \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{R}$, e considerando duas situações disjuntas e exaustivas:

- Se $x + y \geq 0$: $|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$.
- Se $x + y < 0$: $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$

p1) Mostrar a unicidade do limite. Em outras palavras, se $\lim x_n = a$, mostrar que não se pode ter $\lim x_n = b$ para $b \neq a$.

p2) Mostrar que toda sequência convergente é limitada.

p3) Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) for limitada, mostrar que $\lim x_n y_n = 0$.

p4) Se $\lim x_n = a$ e $c < a$, mostrar que $x_n > c$ para n suficientemente grande.

p5) Se $\lim x_n = a$ e $c > a$, mostrar que $x_n < c$ para n suficientemente gramde.

p6) Existindo $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, mostrar que $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

p7) Existindo $\lim x_n = a$ e dado $\lambda \in \mathbb{R}$, mostrar que $\lim(\lambda x_n) = \lambda a$.

p8) Existindo $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, mostrar que $\lim x_n y_n = ab$.

p9) Existindo $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b \neq 0$, mostrar que $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Naturalmente, uma sequência não necessariamente é convergente. Quando (x_n) divergir não sendo limitada superiormente, escreve-se

$$\lim x_n = \infty, \quad \text{que significa } \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

De forma análoga,

$$\lim x_n = -\infty \quad \text{significa } \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow x_n < -M.$$

p10) Mostrar que se $\lim x_n = \infty$ e (y_n) for limitada inferiormente, então $\lim(x_n + y_n) = \infty$.

p11) Mostrar que se $\lim x_n = \infty$ e existir $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n y_n = \infty$.

p12) Mostrar que se $x_n > c > 0$ e $y_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ e $\lim y_n = 0$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

p13) No exercício anterior, por que não é suficiente assumir apenas $x_n > 0$ (no lugar de $x_n > c > 0$)?

p14) Mostrar que se (x_n) for limitada e $\lim y_n = \infty$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Um ponto a é um **ponto de acumulação** do conjunto X se toda vizinhança V de a possuir algum ponto de X diferente de a; em outros termos, $V \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Indica-se por X' o conjundot dos pontos de acumulação de X.

Dado $f : X \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para $a \in X'$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se} \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Notar que x poder assumir a (ou não) é irrelevante na definição acima.

p15) Mostrar que o limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é único.

p16) Para $f : X \to \infty\mathbb{R}$ e $a \in X'$, mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tem-se $\lim f(x_n) = L$.

Este último resultado estabelece a correspondência entre limite de funções e certas sequências.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **contínua** em $a \in X$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Se $a \in X'$, então f é contínua em $a \in X$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ademais, uma função é dita comtínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

p17) Mostrar que a composição de funções contínuas é contínua.

Número de Euler (e)

Prova por indução (matemática)

Uma proposição $P(n)$, associada a números naturais $n \in \mathbb{N}$, pode ser provada por **indução** mediante os seguintes passos:

1. Base de indução: Prova do primeiro caso $P(1)$.
2. Passo de indução: <u>Assumindo</u> a proposição ser verdadeira para $n = k$ (hipótese de indução), provar para o caso $n = k + 1$.

Duas observações são pertinentes.

- O primeiro caso na base de indução não necessariamente ocorre atribuindo $n = 1$ na proposição.
- Existe uma formulação equivalente onde na hipótese de indução assume-se $P(n)$ sendo válida para todo $n \in [1, k] \in \mathbb{N}$ para, então, provar $P(k + 1)$.

e1) Mostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^{n-1}$.

e2) Mostrar que para $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Defina

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e3) Mostrar que (a_n) é uma sequência crescente.

e4) Mostrar que $a_n \in [2, 3]$ para $n \in \mathbb{N}$ (a sequência (a_n) é, portanto, limitada).

Dado um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, X é limitado superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$; neste caso, diz-se que b é um **majorante** (ou **cota superior**) de X. O menor dos majorantes é o **supremo** de X, denotado por $\sup X$. Analogamente, X é limitado inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$; neste caso, diz-se que a é um **minorante** (ou **cota inferior**) de X. O maior dos minorantes é o **ínfimo** de X, denotado por $\inf X$. Em outros termos,

1. $b = \sup X$ se
   - $\forall x \in X$, $x \leq b$
   - Se $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \geq x$ para todo $x \in X$, então $b \leq x_0$ (ou, se $x_0 < b$, então $\exists x \in X : x > x_0$)
2. $a = \inf X$ se
   - $\forall x \in X$, $x \geq a$
   - Se $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \leq x$ para todo $x \in X$, então $a \geq x_0$ (ou, se $x_0 > a$, então $\exists x \in X : x < x_0$)

e5) Mostrar que toda sequência monotonicamente crescente e limitada é convergente.

Denota-se $e := \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.