P3 – Data da Prova

ACH2053 – Introdução à Estatística (Valdinei Freire da Silva)

Nome: ______________________________________ **NUSP:** ______________

Questão 1 [5.0] Suponha que $X_1, ..., X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição com *p.d.f.*

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Também, suponha que $\theta > 1$.

a) [1.0] Descreva a função de verosimilhança para θ.

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \quad x_1 ... x_n$$

Resposta

$$fn(x|\theta) = \prod f(x|\theta) = \prod^{n} \theta x^{\theta-1};$$

$$fn(x|\theta) = \boxed{\theta^n (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\theta-1}}$$

b) [2.0] Encontre o M.L.E. de θ.

Resposta

$$L'(\theta) = (fn)' = [n \log\theta + (\theta - 1)(\sum \log Xi)]' = (n \log\theta + \theta \sum \log Xi - \sum \log Xi)'$$

$$L'(\theta) = n * \frac{1}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log X_i = 0 \rightarrow \frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i \rightarrow \boxed{\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}}, \hat{\theta} > 0$$

$$L''(\theta) = n * \frac{1}{\theta} \rightarrow \text{negativo}; \quad \hat{\theta} = \text{ponto de max.}$$

c) [2.0] Calcule θ para a amostra: 0,2; 0,5; e 0,7.

Resposta

$$0.2; \quad 0.5; \quad 0.7$$

$$\hat{\theta} = -3(\frac{1}{log\ 0.2} + \frac{1}{log\ 0.5} + \frac{1}{log\ 0.7})$$

$$\boxed{\hat{\theta} = 14.6}$$

Questão 2 [3.0] Suponha que $X_1, ..., X_n$ sigam a distribuição:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta-1}{x^\theta} & x \geq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre o M.L.E. de θ.

Resposta

$$f(x;\theta) = \frac{\theta-1}{x^\theta} \text{ para } x \geq 1 \text{ e } \theta > 1$$

$$\hookrightarrow fn(x|\theta) = \prod f(x|\theta) = \prod \left(\frac{\theta-1}{x^\theta}\right)$$

$$L(\theta) = \log fn(x|\theta) = \log \left[\prod \left(\frac{\theta-1}{x^\theta}\right)\right] = \sum \log \frac{\theta-1}{x^\theta}$$

$$L(\theta) = \sum \left(\log(\theta-1) - \log x^\theta\right) = n\log(\theta-1) - \sum_{i=1}^{n} \log {X_i}^\theta$$

$$L(\theta) = n\log(\theta-1) - \sum \theta \log X_i = n\log(\theta-1) - \theta \sum \log X_i$$

$$L'(\theta) = \frac{n}{\theta-1} - \sum \log X_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta-1} = \sum \log X_i \to \theta - 1 = \frac{n}{\sum \log X_i} \to \boxed{\hat{\theta} = \frac{n}{\sum \log X_i} + 1}$$

Questão 3 [2.0] Considere a distribuição mista:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta x^{\theta-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\frac{\theta-1}{x^\theta} & x \geq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o M.L.E. de θ.

Resposta

$$fn_1(x|\theta) = \frac{1}{2^n}\theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\theta-1} \to \log fn = \log 2^{-n} + \log\theta^n + (\theta-1)(\sum \log X_i)$$

$$= -n\log 2 + n\log\theta + \theta\sum\log X_i - \sum\log X_i$$

$$fn_2(X|\theta) = \frac{1}{2^n} * \frac{\theta-1}{x^\theta} \to \log fn = \log 2^{-n} + n\log(\theta-1) - \theta\sum\log X_i \to$$

Combinar MLE das duas anteriores!

Somando $\log fn_1 + \log fn_2$:

$$-n\log 2 + n\log\theta + \theta\sum\log X_i - \sum\log X_i - n\log 2 + n\log(\theta-1) - \theta\sum\log X_i$$

$$(\log fn)' = n\frac{1}{\theta} + \sum_{i>0}^{i<1}\log X_i + \frac{m}{\theta-1} - \sum_{i>1}^{n}\log X_i = 0$$

Apelidemos $\sum_{i>0}^{i<1}\log X_i$ de A e $\sum_{i>1}^{n}\log X_i$ de B. Assim:

$$\frac{n}{\theta} + \frac{m}{\theta-1} + A - B = 0 \to \frac{n\ \theta - n}{\theta(\theta-1)} + \frac{m\ \theta}{\theta(\theta-1)} = B - A$$

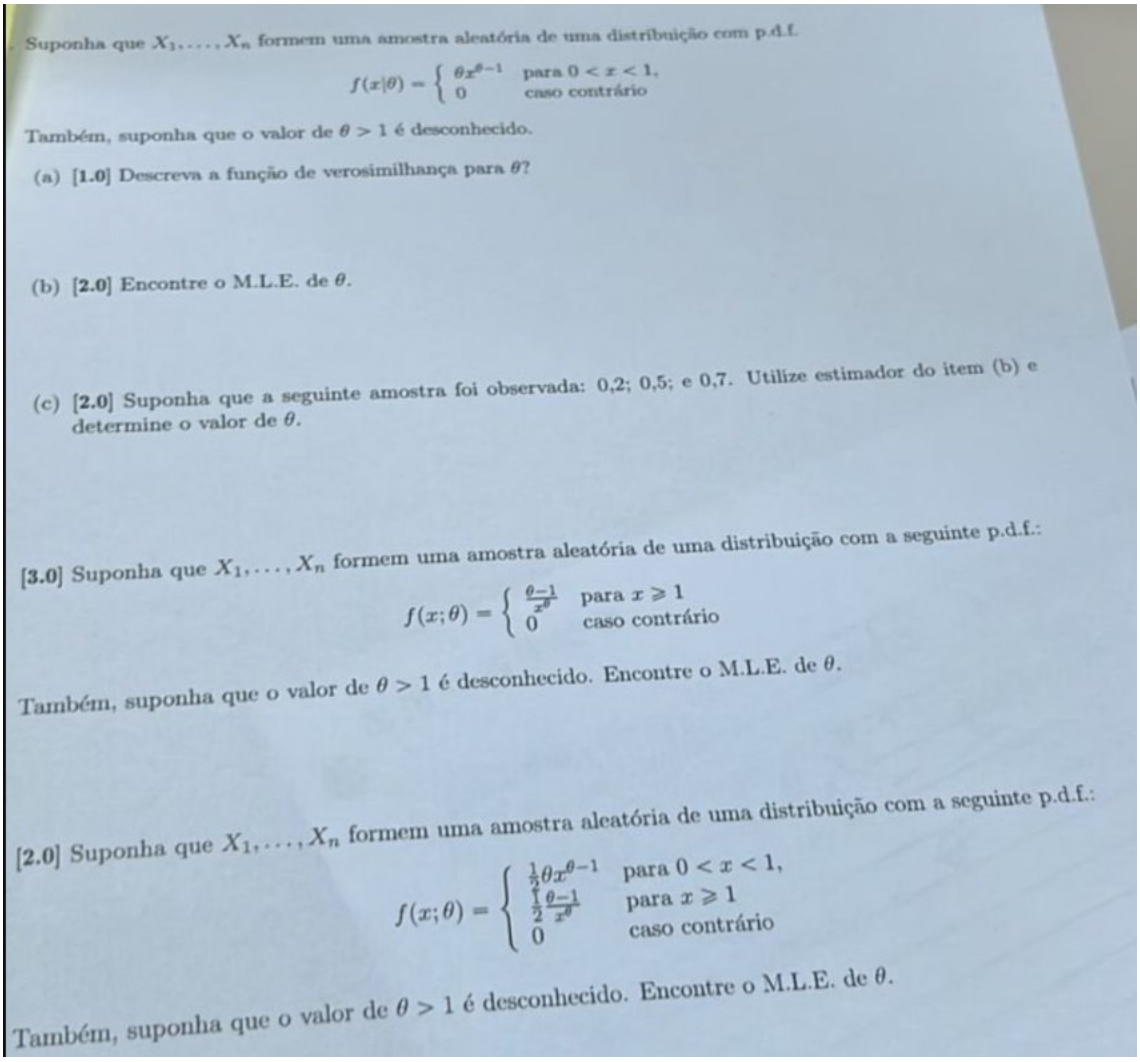
$$n\ \theta - n + m\ \theta = (\theta^2-\theta)(B-A) = B\ \theta^2 - B\ \theta - A\ \theta^2 + A\ \theta$$

$$(B-A)\,\theta^2 + (A-B-n-m)\theta + n = 0$$

$$\hookrightarrow \theta = +?$$

$$\theta = -?$$

Estou tentando ajudar e sei usar LaTeX (relativamente), mas não entendi absolutamente nada desse gabarito. Dito isto, segue em anexo os manuscritos originais.



Suponha que $X_1, \dots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição com p.d.f.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Também, suponha que o valor de $\theta > 1$ é desconhecido.

(a) **[1.0]** Descreva a função de verosimilhança para θ?

(b) **[2.0]** Encontre o M.L.E. de θ.

(c) **[2.0]** Suponha que a seguinte amostra foi observada: 0,2; 0,5; e 0,7. Utilize estimador do item (b) e determine o valor de θ.

[3.0] Suponha que $X_1, \dots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição com a seguinte p.d.f.:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta-1}{x^\theta} & \text{para } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Também, suponha que o valor de $\theta > 1$ é desconhecido. Encontre o M.L.E. de θ.

[2.0] Suponha que $X_1, \dots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição com a seguinte p.d.f.:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}\frac{\theta-1}{x^\theta} & \text{para } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Também, suponha que o valor de $\theta > 1$ é desconhecido. Encontre o M.L.E. de θ.

Figure 1: Prova P3 - desconheço o ano. Em sequência, o gabarito das questões:

1) $f(x|\theta) = \theta . x^{\theta - 1}$ para $0 < x < 1$ $x_1 \dots x_n$

a)

$f_n(x|\theta) = \prod f(x_i|\theta) = \prod^n \theta . x_i^{\theta-1}$

$f_n(x|\theta) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta - 1}$

b)

$L'(\theta) = (f_n)' = (n \log \theta + (\theta - 1)(\sum \log x_i))' = (n \log + \theta \sum \log x_i - \sum \log x_i)'$

$L'(\theta) = n . \frac{1}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \to \frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i \to \boxed{\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log x}}$, $\hat{\theta} > 0$

$L''(\theta) = -n \frac{1}{\theta^2} \to$ negativo, ponto de máx

c) 0,2 ; 0,5 e 0,7

$\hat{\theta} = -3 \left(\frac{1}{\log 0{,}2} + \frac{1}{\log 0{,}5} + \frac{1}{\log 0{,}7} \right)$

$\boxed{\hat{\theta} = 14{,}6}$

2) $f(x;\theta) = \frac{\theta - 1}{x^\theta}$ para $x \geq 1$

$\to \theta > 1$

$\to f_n(x|\theta) = \prod f(x|\theta) = \prod . \left(\frac{\theta-1}{x^\theta}\right)$

$L(\theta) = \log f_n(x|\theta) = \log\left[\prod\left(\frac{\theta-1}{x^\theta}\right)\right] = \sum \log \frac{\theta-1}{x^\theta} = \sum\left(\log(\theta-1) - \log x^\theta\right)$

$L(\theta) = n \log(\theta - 1) - \sum_{i=1}^{n} \log x_i^\theta \to n \log(\theta-1) - \sum \theta \log x_i$

$\to n . \log(\theta - 1) - \theta \sum \log x_i$

$L'(\theta) = \frac{n}{\theta - 1} - \sum \log x_i = 0$

$\frac{n}{\theta - 1} = \sum \log x_i \to \theta - 1 = \frac{n}{\sum \log x_i} \to \boxed{\hat{\theta} = \frac{n}{\sum \log x_i} + 1}$

3) $f_n(x|\theta) = \frac{1}{2^n} \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} \to \log f_n = \log 2^{-n} + \log \theta^n + (\theta - 1)(\sum \log x_i)$

Combinar MLE dos duas anteriores

$= -n \log 2 + n \log \theta + \theta \sum \log x_i - \sum \log x_i$

$f_{n_2}(x|\theta) = \frac{1}{2^n} . \frac{\theta - 1}{x^\theta} \to \log f_n = \log 2^{-n} + n \log \theta - 1 - \theta \sum \log x_i =$

somando $\log f_{n_1} + \log f_{n_2} = -n \log 2 + n \log \theta + \theta \sum \log x_i - \sum \log x_i - m \log 2 + m \log \theta - 1 - \theta \sum \log x_i$

$(\log f_n)' = n . \frac{1}{\theta} + \underbrace{\sum_{i=1}^{i=1} \log x}_{A} + \frac{m}{\theta - 1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \log x}_{B} = 0 \to \frac{n}{\theta} + \frac{m}{\theta - 1} + A - B = 0 \to \frac{n\theta - n}{\theta(\theta-1)} + \frac{m\theta}{\theta(\theta-1)} = B - A$

$n\theta - n + m\theta = (\theta^2 - \theta)(B - A) = B\theta^2 - B\theta - A\theta^2 + A\theta$

$(B - A)\theta^2 + (A - B - n - m)\theta + n = 0$

$\to \theta = +?$

$\theta = -?$