ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 04: Variável Aleatória Discreta

Valdinei Freire

valdinei.freire@usp.br

http://www.each.usp.br/valdinei

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

Livros Textos

1. DEGROOT, M.H., SCHERVISH, M.J. Probability and Statistics, Addison Wesley, 4th edition (2011). **Seções 3.1, 4.1, 4.2, 4.3, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5**
2. DEVORE, J.L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências, Pioneira Thompson Learning, 8ª edição, 2016. **Capítulo 3**

Exercícios

1. Considere o experimento no qual n moedas são lançadas. Ainda, todas as moedas são viciadas e apresentam coroa com chance p. Considere os seguintes eventos: $A_k =$ "ocorreram exatamente k coroas", e calcule a probabilidade $\Pr(A_k)$.

2. Um conjunto de n moedas é lançado sucessivas vezes. Em cada lançamento, todas as moedas que resultam em coroa, e apenas estas, são retiradas. As demais moedas permanecem para o próximo lançamento. O jogo termina quando todas as moedas tiverem sido retiradas.
   Considere os seguintes eventos: $A_k =$ "ocorreram exatamente k lançamentos", e calcule a probabilidade $\Pr(A_k)$.

Variável Aleatória

Seja Ω o espaço amostral de um experimento. Uma função X com valores reais definida sobre Ω, isto é, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada de variável aleatória.

Seja X uma variável aleatória. A distribuição de X é a coleção de todas probabilidades da forma $\Pr(X \in C)$ para todos conjuntos C de números reais tal que $\{s : X(s) \in C\}$ é um evento, e

$$\Pr(X \in C) = \Pr(\{s : X(s) \in C\}).$$

Variável Aleatória

Uma variável aleatória X tem uma distribuição discreta ou X é uma variável aleatória discreta se X pode tomar apenas uma quantidade finita k de valores $x_1, \ldots, x_k$ ou, no máximo, uma sequência infinita de valores diferentes $x_1, x_2, \ldots$.

Se uma variável aleatória X tem uma distribuição discreta, a função de probabilidade de X é definida como a função f tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \Pr(X = x)$.

Se X tem uma distribuição discreta, a probabilidade de cada subconjunto C da reta real pode ser determinada por

$$\Pr(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Exercícios

Considere um baralho de 52 cartas e os experimentos descritos a seguir. Defina para cada caso a distribuição de probabilidade da variável aleatória definida.

1. **Experimento:** Retire uma carta do baralho.
   Variável aletória: 1 se a carta é de copas e 0 caso contrário.
2. **Experimento:** Retire uma carta do baralho.
   Variável aletória: 1 se a carta é um A, 2 se a carta é um 2, e assim por diante até 13 se a carta é um K.
3. **Experimento:** Retire cartas n vezes COM reposição.
   Variável aletória: Quantidade de cartas de copas.
4. **Experimento:** Retire cartas n vezes SEM reposição.
   Variável aletória: Quantidade de cartas de copas.
5. **Experimento:** Retire cartas, uma por vez COM reposição, até obter uma carta de copas.
   Variável aletória: Quantidade de cartas retiradas.
6. **Experimento:** Retire cartas, uma por vez COM reposição, até obter k cartas de copas.
   Variável aletória: Quantidade de cartas retiradas.

Distribuição de Bernoulli
Uma variável aleatória X que toma apenas dois valores (0 e 1) com $\Pr(X = 1) = p$ tem a distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

$$f(x; p) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1 - p & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Exemplos: cara ou coroa, filtro de spam, reconhecimento de objetos, diagnóstico de doença, etc.

Distribuição Uniforme sobre Inteiros
Seja $a \leq b$ inteiros. Suponha que o valor de uma variável aleatória X é igualmente provável ser cada um dos inteiros $a, a+1, \ldots, b-1, b$. Então X é uma distribuição uniforme sobre inteiros $a, a+1, \ldots, b-1, b$ e a função de probabilidade é dada por

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1} & \text{se } x \in \{a, \ldots, b\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições Típicas

Distribuição Binomial: A função de probabilidade $f(x; n, p)$ é chamada de distribuição binomial com parâmetros n e p. x é a quantidade de acertos em n tentativas com chance de sucesso p.

Hipergeométrica: A função de probabilidade $f(x; A, B, n)$ para $A + B \geq n$ é chamada de distribuição hipergeométrica com parâmetros A, B e n. Considere A elementos de um tipo e B elementos de um segundo tipo, então x é a quantidade de elementos dentre A elementos, quando realizados n sorteios sem reposição nos $A + B$ elementos.

Geométrica: A função de probabilidade $f(x; p)$ é chamada de distribuição geométrica com parâmetro p. x é quantidade de tentativas até obter um sucesso, sendo que a chance de obter sucesso em uma tentativa é p.

Binomial Negativa: A função de probabilidade $f(x; k, p)$ é chamada de distribuição binomial negativa com parâmetros p e k. x é quantidade de tentativas até obter k sucessos, sendo que a chance de obter sucesso em uma tentativa é p.

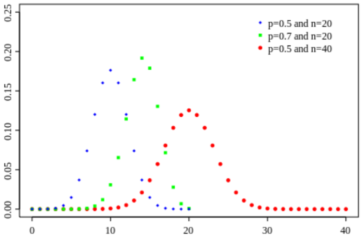
Distribuição Binomial

A função de probabilidade

$$f(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{se } x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamada de distribuição binomial com parâmetros n e p.

x é quantidade de acertos em n tentativas com chance de sucesso p.



Distribuições Típicas

Hipergeométrica

A função de probabilidade

$$f(x; A, B, n) = \begin{cases} \dfrac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}} & \text{se } \max\{0, n-B\} \leq x \leq \min\{n, A\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $A + B \geq n$ é chamada de distribuição hipergeométrica com parâmetros A, B e n.

Considere A elementos de um tipo e B elementos de um segundo tipo, então x é quantidade de elementos dentre A elementos, quando realizados n sorteios sem reposição nos $A + B$ elementos.

A distribuição binomial é o limite da distriuição hipergeométrica quando $A \to \infty$, $B \to \infty$ e $\frac{A}{A+B} \to p$.

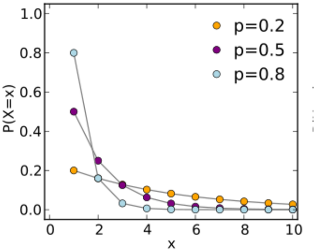
Geométrica

A função de probabilidade

$$f(x;p) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{se } x \in \{1,2,\ldots\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamada de distribuição geométrica com parâmetro p.

x é quantidade de tentativas até obter um sucesso, sendo que a chance de obter sucesso em uma tentativa é p.



Deixe X ter a distribuição geométrica com parâmetro p e seja $k \geq 0$. Então para todo inteiro $t \geq 0$,

$$\Pr(X = N + t | X > N) = \Pr(X = t).$$

Binomial Negativa
A função de probabilidade

$$f(x;k,p) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k & \text{se } x \in \{k, k+1, \ldots\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamada de distribuição binomial negativa com parâmetros p e k.

x é quantidade de tentativas até obter k sucessos, sendo que a chance de obter sucesso em uma tentativa é p.

Esperança

Seja X uma variável aleatória discreta com p.f. f. Então a média, esperança, ou valor esperado de X, denotado por $\mathsf{E}(X)$, é um número dado por:

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{\text{todo } x} x f(x).$$

Teorema

Se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes finitas, então

$$\mathsf{E}(Y) = a\mathsf{E}(X) + b.$$

Esperança

Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são n variáveis aleatórias tal que a esperança de cada uma é finita, então:

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i).$$

Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são n variáveis aleatórias **independentes** tal que a esperança de cada uma é finita, então:

$$\mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i).$$

Exemplos

Calcule a esperança das seguintes distribuições:

1. Bernoulli – $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$
2. Binomial – $f(x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
3. Uniforme sobre Inteiros entre a and b – $f(x) = \frac{1}{b-a+1}$
4. Geométrica – $f(x) = (1-p)^{x-1}p$
5. Binomial Negativa – $f(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$

Variância e Desvio Padrão

Seja X uma variável aleatória com média finita $\mu = \mathsf{E}(X)$. A variância de X, denotada por $\mathsf{Var}(X)$, é um número dado por:

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}[(X-\mu)^2] = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2,$$

e $\mathsf{Var}(X) \geq 0$.

O desvio padrão de X, denotado por σ_X (ou simplesmente σ quando X estiver implícito) é a raiz não-negativa de $\mathsf{Var}(X)$.

Variância e Desvio Padrão

Teorema

Se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes finitas, então

$$\mathsf{Var}(Y) = a^2 \mathsf{Var}(X).$$

Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são n variáveis aleatórias **independentes** tal que a esperança de cada uma é finita, então:

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i).$$

Exemplos

Calcule a variância das seguintes distribuições:

1. Bernoulli – $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$
2. Binomial – $f(x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
3. Uniforme sobre Inteiros entre a and b – $f(x) = \frac{1}{b-a+1}$
4. Geométrica – $f(x) = (1-p)^{x-1}p$
5. Binomial Negativa – $f(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$

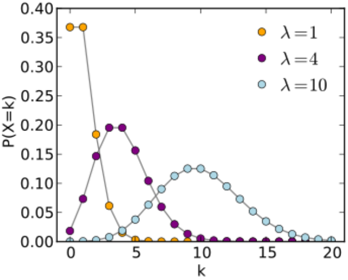
Poisson

A função de probabilidade

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{se } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamada de distribuição de Poisson com parâmetro λ.

x é quantidade de ocorrências em um intervalo de tempo. λ é a esperança (média) de eventos nesse intervalo.



Distribuições Típicas

Poisson

Em um processo de Poisson o número de chegadas em toda coleção de intervalos de tempo disjuntos são independentes.

Considere N variáveis aleatórias X_i ($i \in \{1, 2, \cdots, N\}$) que seguem a distribuição de Poisson com respectivos parâmetro λ_i, então a variável aleatória $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, também é uma distribuição de Poisson com $\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$.

A distribuição de Poisson é o limite da distribuição binomial quando $n \to \infty$ e $pn \to \lambda$.

Resumo das Distribuições

Distribuição	Função distribuição	Esperança	Variância
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a+1}$	$\mathsf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$	$\mathsf{Var}[X] = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
Bernoulli	$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$	$\mathsf{E}[X] = p$	$\mathsf{Var}[X] = p(1-p)$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\mathsf{E}[X] = np$	$\mathsf{Var}[X] = np(1-p)$
Hipergeométrica	$f(x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}}$	$\mathsf{E}[X] = n\frac{A}{A+B}$	$\mathsf{Var}[X] = n\frac{AB}{(A+B)^2}\frac{A+B-n}{A+B-1}$
Geométrica	$f(x) = (1-p)^{x-1}p$	$\mathsf{E}[X] = \frac{1}{p}$	$\mathsf{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$
Binomial Negativa	$f(x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathsf{E}[X] = k\frac{1}{p}$	$\mathsf{Var}[X] = k\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\mathsf{E}[X] = \lambda$	$\mathsf{Var}[X] = \lambda$