ACH2011 – Cálculo I (2025.1)

Segunda Prova – Maio/2025

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Explicitar os passos importantes na resolução;
a mera apresentação das respostas não é digna de pontuação positiva

1) [2.0 pontos] Determinar o limite $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x\right]$. Caso haja indeterminação, justificar.

2) [8.0 pontos] Escolher **UMA** (e **SOMENTE UMA**) das seguintes funções (cuja fórmula é apresentada) e esboçar seu gráfico indicando as análises do crescimento, convexidade, os limites pertinentes e eventuais retas assíntotas. Apresentar, obrigatoriamente, o domínio e o(s) zero(s) da função, que **NÃO** serão dignos de pontuação positiva (se corretos).

(A) $f(x)=\pi x e^{\frac{2}{x^2}}$ (B) $f(x)=\dfrac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}}$ Função escolhida: $\boxed{}$

---

1) **Resolução 1:** De

$$\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x=x\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+x=x\left[\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+1\right]=\frac{\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+1}{\frac{1}{x}},$$

a regra de l'Hôpital pode ser invocada no cálculo do limite $x\to\infty$ (visto que tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero), fornecendo

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+1\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{6}{x}-1\right)^{-2/3}\left(-\frac{6}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=2.$$

Resolução 2: Para todo $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, sabe-se que $\xi^3+\eta^3=(\xi+\eta)\left(\xi^2-\xi\eta+\eta^2\right)$, ou

$$\xi+\eta=\frac{\eta^3+\eta^3}{\xi^2-\xi\eta+\eta^2}.$$

Identificando $\xi:=\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}$ e $\eta:=x$, tem-se, para $x\neq 0$,

$$\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x=\frac{\left[\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}\right]^3+x^3}{\left[\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}\right]^2-\left[\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}\right]x+x^2}=\frac{6x^2}{x^2\left(\frac{6}{x}-1\right)^{2/3}-x^2\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+x^2}$$
$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x}-1\right)^{2/3}-\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+1},$$

que conduz a

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\left(\frac{6}{x}-1\right)^{2/3}-\left(\frac{6}{x}-1\right)^{1/3}+1}=\frac{6}{1-(-1)+1}=2.$$

2) A) O esboço do gráfico será feito a partir de algumas considerações iniciais.

(i) Domínio. Assumindo o domínio da função como sendo um subconjunto maximal dos reais, a única exigência é a prevenção da divergência no argumento da função exponencial mediante $x\neq 0$, *id est*, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(ii) Zero(s) da função. Da positividade da função exponencial, e como $x \neq 0$ devido à restrição imposta pelo domínio, a função não admite raiz real.

(iii) Crescimento de f. O crescimento da função pode ser examinado mediante a análise de sua primeira derivada, f', com

$$f'(x) = \left(\pi x e^{\frac{2}{x^2}}\right)' = \pi\left[(x)' e^{\frac{2}{x^2}} + x\left(e^{\frac{2}{x^2}}\right)'\right] = \pi\left[1e^{\frac{2}{x^2}} + xe^{\frac{2}{x^2}}\left(-\frac{4}{x^3}\right)\right] = \pi\left(1-\frac{4}{x^2}\right)e^{\frac{2}{x^2}}.$$

A partir dos pontos chaves, em f', Nota-se que f' apresenta pontos críticos em $x = 0$ (onde f' não é definida),

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f'	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$x = -2$ (onde $f'(-2) = 0$, e trata-se de um ponto de máximo local) e $x = 2$ (onde $f'(2) = 0$, e trata-se de um ponto de mínimo local).

(iv) Convexidade de f. A convexidade da função é investigada através de sua segunda derivada, f'', sendo que

$$\begin{aligned}
f''(x) = [f'(x)]' &= \left[\pi\left(1-\frac{4}{x^2}\right)e^{\frac{2}{x^2}}\right]' \\
&= \pi\left[\left(1-\frac{4}{x^2}\right)' e^{\frac{2}{x^2}} + \left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(e^{\frac{2}{x^2}}\right)'\right] \\
&= \pi\left[\frac{8}{x^3}e^{\frac{2}{x^2}} + \left(1-\frac{4}{x^2}\right)e^{\frac{2}{x^2}}\left(-\frac{4}{x^3}\right)\right] \\
&= \frac{4\pi}{x^3}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)e^{\frac{2}{x^2}}
\end{aligned}$$

A partir dos pontos chaves, em f'', A função não apresenta ponto de inflexão.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$+$
f''	$\cap$	$-$	$\cup$

(v) Limites pertinentes de f. Na região em que $|x| \gg 1$, tem-se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \pi x e^{\frac{2}{x^2}} = \infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \pi x e^{\frac{2}{x^2}} = -\infty.$$

Por outro lado, na vizinhança de $x = 1$,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \pi x e^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\pi e^{\frac{2}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\left(\pi e^{\frac{2}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\left(-\frac{4\pi}{x^3}e^{\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{4\pi e^{\frac{2}{x^2}}}{x} = \infty$$

e

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \pi x e^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to0^-} \frac{\pi e^{\frac{2}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{\left(\pi e^{\frac{2}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0^-} \frac{\left(-\frac{4\pi}{x^3}e^{\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to0^-} \frac{4\pi e^{\frac{2}{x^2}}}{x} = -\infty,$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada nos dois últimos limites acima.

(vi) Retas assíntotas. Denote por

$$r_\pm := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a_\pm x + b_\pm\right\}$$

os gráficos associados às retas assíntotas $r_\pm$ para $x \to \pm\infty$. De

$$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\pi x e^{\frac{2}{x^2}} = \pi,$$

é imediato que

$$\begin{aligned} b_+ &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - a_+ x] = \lim_{x\to\infty} \left[\pi x e^{\frac{2}{x^2}} - \pi x\right] = \lim_{x\to\infty} \pi x \left(e^{\frac{2}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \pi \frac{\left(e^{\frac{2}{x^2}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \pi \frac{\left(e^{\frac{2}{x^2}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \pi \frac{e^{\frac{2}{x^2}}\left(-\frac{4}{x^3}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} 4\pi \frac{e^{\frac{2}{x^2}}}{x} = 0, \end{aligned}$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada. Finalmente, de

$$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\pi x e^{\frac{2}{x^2}} = \pi,$$

é imediato que

$$\begin{aligned} b_- &= \lim_{x\to-\infty} [f(x) - a_- x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\pi x e^{\frac{2}{x^2}} - \pi x\right] = \lim_{x\to-\infty} \pi x \left(e^{\frac{2}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \pi \frac{\left(e^{\frac{2}{x^2}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \pi \frac{\left(e^{\frac{2}{x^2}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \pi \frac{e^{\frac{2}{x^2}}\left(-\frac{4}{x^3}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} 4\pi \frac{e^{\frac{2}{x^2}}}{x} = 0, \end{aligned}$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada.

Logo, a função admite uma assíntota $y = \pi x$ para $x \sim \pm\infty$ e uma assíntota (vertical) em $x = 0$.

Com as informações acima, pode-se esboçar o gráfico da função, apresentado na figura 1.

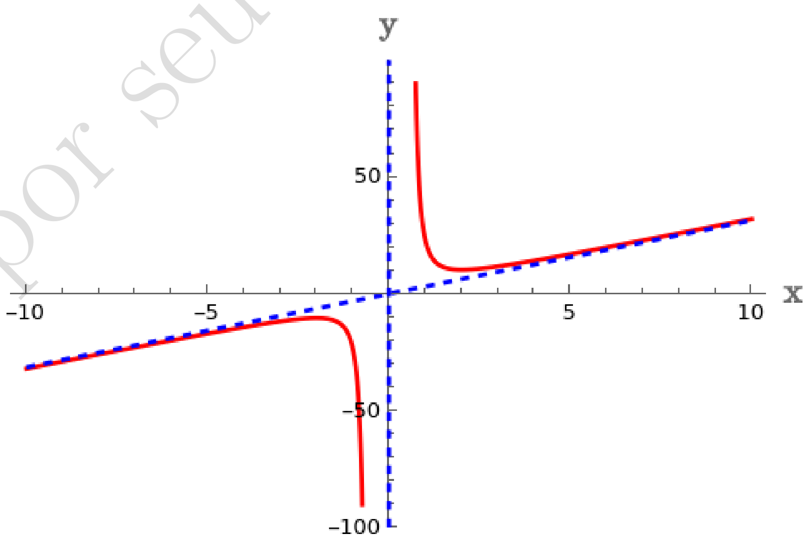

Figure 1: Gráfico de $f(x) = \pi x e^{\frac{2}{x^2}}$ (vermelho) e indicação de retas assíntotas (azul).

....

B) O esboço do gráfico será feito a partir de algumas considerações iniciais.

(i) Domínio. De

$$f(x)=\frac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}}=\frac{2^{-2/3}x^2}{\left(2x^3-1\right)^{1/3}},$$

e assumindo o domínio da função como sendo um subconjunto maximal dos reais, a única exigência é evitar o anulamento do denominador. Como

$$2x^3-1=\left(2^{1/3}x-1\right)\left(2^{2/3}x^2+2^{1/3}x+1\right)$$

e a forma quadrática $2^{2/3}x^2+2^{1/3}x+1$ é estritamente positiva, o único zero real de $2x^3-1=0$ realiza-se em $x=2^{-1/3}$. Consequentemente, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{2^{-1/3}\}$.

(ii) Zero(s) da função. Da representação da função acima, o conjunto das soluções de $f(x)=0$, composto por um único elemento, é $\{0\}$.

(iii) Crescimento de f. O crescimento da função pode ser examinado mediante a análise de sua primeira derivada, f', com

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left[\frac{2^{-2/3}x^2}{\left(2x^3-1\right)^{1/3}}\right]'=2^{-2/3}\frac{\left(x^2\right)'\left(2x^3-1\right)^{1/3}-x^2\left[\left(2x^3-1\right)^{1/3}\right]'}{\left[\left(2x^3-1\right)^{1/3}\right]^2}\\
&=2^{-2/3}\frac{2x\left(2x^3-1\right)^{1/3}-x^2\frac{1}{3}\left(2x^3-1\right)^{-2/3}6x^2}{\left[\left(2x^3-1\right)^{1/3}\right]^2}=\frac{2^{1/3}x\left(x^3-1\right)}{\left(2x^3-1\right)^{4/3}}\\
&=\frac{2^{1/3}x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(2x^3-1\right)^{4/3}}
\end{aligned}$$

Notar que a forma quadrática x^2+x+1 é estritamente positiva, não contribuindo para a solução de $f'(x)=0$. A partir dos pontos chaves, em f', A função admite pontos críticos em $x=2^{-1/3}$ (onde f' não está definida),

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2^{-1/3})$	$2^{-1/3}$	$(2^{-1/3},1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f'	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

em $x=0$ (um máximo local) e em $x=1$ (um mínimo local).

(iv) Convexidade de f. A convexidade da função é investigada através de sua segunda derivada, f'', com

$$\begin{aligned}
f''(x)=\left[f'(x)\right]'&=\left[\frac{2^{1/3}\left(x^4-x\right)}{\left(2x^3-1\right)^{4/3}}\right]'=2^{1/3}\frac{\left(x^4-x\right)'\left(2x^3-1\right)^{4/3}-\left(x^4-x\right)\left[\left(2x^3-1\right)^{4/3}\right]'}{\left[\left(2x^3-1\right)^{4/3}\right]^2}\\
&=2^{1/3}\frac{\left(4x^3-1\right)\left(2x^3-1\right)^{4/3}-\left(x^4-x\right)\frac{4}{3}\left(2x^3-1\right)^{1/3}6x^2}{\left(2x^3-1\right)^{8/3}}=\frac{2^{1/3}\left(2x^3+1\right)}{\left(2x^3-1\right)^{7/3}}\\
&=\frac{2^{1/3}\left(2^{1/3}x+1\right)\left(2^{2/3}x^2-2^{1/3}x+1\right)}{\left(2x^3-1\right)^{7/3}}.
\end{aligned}$$

Notar que a forma quadrática $2^{2/3}x^2-2^{1/3}x+1$ é estritamente positiva e não contribui para a solução de $f''(x)=0$, que é satisfeita somente para $x=-2^{-1/3}$. Dos pontos-chave de f'', chega-se a A função apresenta um ponto de inflexão em $x=-2^{-1/3}$.

(v) Limites pertinentes de f. De

$$f(x)=\frac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}}=\frac{x^2}{x\left(8-\frac{4}{x^3}\right)^{1/3}}=\frac{x}{\left(8-\frac{4}{x^3}\right)^{1/3}},$$

x	$(-\infty, -2^{-1/3})$	$-2^{-1/3}$	$(-2^{-1/3}, 2^{-1/3})$	$2^{-1/3}$	$(2^{-1/3}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
f''	$\cup$	$-$	$\cap$	$\times$	$\cup$

é imediato que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Por outro lado, na vizinhança de $x = 2^{-1/3}$, o numerador é positivo e o denominador aproxima-se de zero de sorte que

$$\lim_{x\to(2^{-1/3})^+} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to(2^{-1/3})^+} f(x) = -\infty.$$

(vi) <u>Retas assíntotas</u>. Denote por

$$r_\pm := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a_\pm x + b_\pm\right\}$$

os gráficos associados às retas assíntotas $r_\pm$ para $x \to \pm\infty$. De

$$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\frac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{1/3}} = \frac{1}{2},$$

é imediato que

$$\begin{aligned} b_+ &= \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - a_+x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}} - \frac{1}{2}x\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{1/3}} - 1\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{-1/3}-1\right]}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{-1/3}-1\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{4x^4}\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{-4/3}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \end{aligned}$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada. Finalmente, de

$$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\frac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{1/3}} = \frac{1}{2},$$

é imediato que

$$\begin{aligned} b_- &= \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - a_+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{\left(8x^3-4\right)^{1/3}} - \frac{1}{2}x\right] \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{1/3}} - 1\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{-1/3}-1\right]}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{-1/3}-1\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{4x^4}\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^{-4/3}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \end{aligned}$$

onde a regra de l'Hôpital foi invocada.

Logo, a função admite uma assíntota $y = \frac{1}{2}x$ para $x \sim \pm\infty$ e uma assíntota (vertical) em $x = 2^{-1/3}$.

Com as informações acima, pode-se esboçar o gráfico da função, apresentado na figura 2.

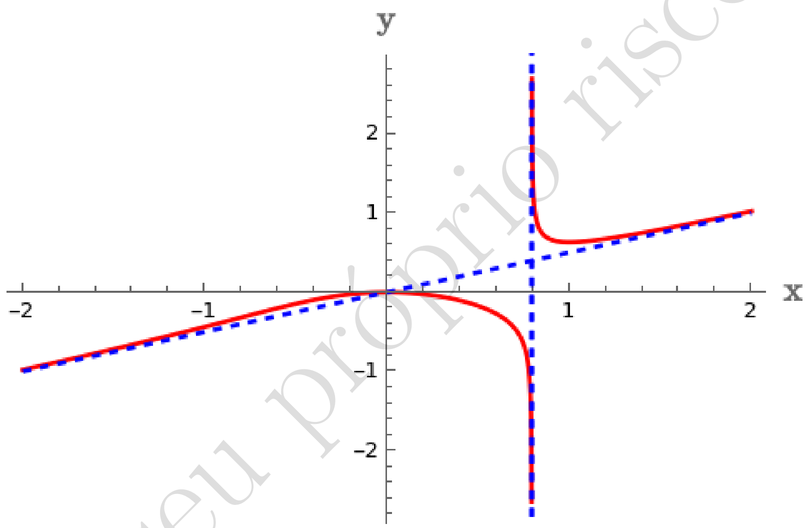

Figure 2: Gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{(8x^3-4)^{1/3}}$ (vermelho) e indicação de retas assíntotas (azul).