ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 05: Derivada e Integral

Valdinei Freire

valdinei.freire@usp.br

http://www.each.usp.br/valdinei

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

Inclinação da Reta

Seja m a inclinação da reta, então:

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Então, para uma reta $y(x) = ax + b$, temos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} = a$$

Derivada

A derivada $f'(x)$ calcula a inclinação $m(x)$ de uma curva $f(x)$ em qualquer ponto x, isto é,:

$$f'(x) = m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x \end{aligned}$$

Notação de Leibniz para derivada:

$$f' = \frac{df}{dx} \text{ e } f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Derivadas Frequentes

Função $f(x)$	Derivada Função $f'(x)$
c (constante)	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$e^x = \exp(x)$	$e^x = \exp(x)$
$\ln x$	$1/x$

Regras de derivação

Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g'$$

Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

Regra do Cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

Exercícios

Calcule as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = x^3 + 2x$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^3 e^{2x}$
4. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
5. $f(x) = \ln(2x^2 + 3)$

Pode-se também definir derivadas de ordem superior, como a derivada segunda de $f(x)$ no ponto x, representada por $f''(x) = (f'(x))'$, ou, na notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Da mesma forma que a primeira deriva de $f(x)$ indica a taxa de crescimento em x, a segunda derivada indica a taxa de crescimento em $f'(x)$.

Exercícios

1. Calcule a terceira derivada para: $f(x) = x^3 + 2x$
2. Calcule a segunda derivada para: $f(x) = \sqrt{x}$
3. Calcule a segunda derivada para: $f(x) = x^3 e^{2x}$

Pontos Críticos

Valores de x nos quais $f'(x) = 0$ são pontos críticos.

Seja x_c um ponto crítico, então:

- se $f''(x_c) > 0$, $f(x_c)$ é um mínimo local;
- se $f''(x_c) < 0$, $f(x_c)$ é um máximo local; e
- se $f''(x_c) = 0$, $f(x_c)$ nada se pode concluir.

Para encontrar o máximo ou mínimo global, deve-se analisar $f(x)$ em todos os pontos críticos, mas também nos pontos de descontinuidade de $f(x)$ e $f'(x)$.

Exercícios

Encontre os máximos e mínimos locais das funções abaixo:

1. $f(x) = x^3 + 3x^2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^3 e^{2x}$
4. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

Integral Indefinida

Considere a tarefa de, dada uma função (derivada) $f(x)$, encontrar uma função (primitiva) $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. $F(x)$ é a primitiva (ou anti-derivada) de $f(x)$. A operação de inverter a derivação é a integração (indefinida) e é denotada da seguinte forma:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Exemplos:

- $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
- $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

Integral Definida

Uma motivação para o uso de integral é o cálculo da área limitada entre uma curva $y = f(x)$, o eixo-x e as retas verticais que passam pelos pontos $x = a$ e $x = b$.

Essa área é denotada pela integral definida da função $f(x)$ em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

onde $f(x)$ é o integrando e $[a, b]$ é o limite de integração.

Teorema Fundamental do Cálculo integral:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Propriedades de Integração

Seja $f(x)$ e $g(x)$ duas funções integráveis em $[a, b]$, então:

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b [cf(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

Métodos de Integração

Integração por Substituição:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)] + C$$

Calcule:

- $\int x\cos(x^2)dx$
- $\int xe^{x^2}dx$
- $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$
- $\int \sin(\frac{x}{2})dx$

Integração por Partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Calcule:

- $\int x\cos(x)dx$
- $\int x\ln(x)dx$
- $\int (2x-1)e^x dx$

Integral Imprópria

Uma integral definida é chamada de Imprópria em dois casos:

- quando o intervalo $[a, b]$ é infinito

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ ou } \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \text{ ou } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

- quando a função $f(x)$ tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$.

Integral Imprópria

As integrais imprópria são definidas como limites de integrais em intervalos finitos

- considere o intervalo $[a, \infty)$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

- considere o intervalo $[a, b]$ e $f(x)$ descontínua em b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

Se os limites existem, as integrais imprópria são chamadas de convergentes; caso contrário, são divergentes.

Exercícios

Calcule:

- $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ e $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ e $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ e $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$