ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 10: Distribuição Normal

Valdinei Freire

valdinei.freire@usp.br

http://www.each.usp.br/valdinei

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

Distribuição Normal

A função de probabilidade

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

é chamada de distribuição normal ou gaussiana.

$$\mathsf{E}(X) = \mu$$
$$\mathsf{Var}(X) = \sigma^2$$

Distribuição Normal Padrão

A distribuição normal com média 0 e variância 1 é chamada de distribuição normal padrão. A p.d.f. da distribuição normal padrão é denotada por ϕ e definida por:

$$\phi(x) = f(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e a c.d.f da distribuição normal padrão é denotada por $\Phi(x)$.

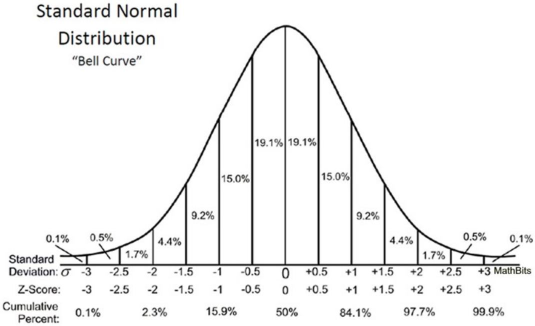
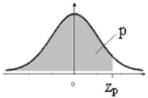


Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Para todo x e todo $0 < p < 1$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ e $\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p)$.

Seja X uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ. Seja F a c.d.f. de X. Então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tem a distribuição normal padrão e para todo x e todo $0 < p < 1$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F^{-1}(p) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$$

Soma de Váriáveis Aleatórias

Se X tem a distribuição normal com média μ e desvio padrão σ e $Y = aX + b$ com a e b constantes, então Y tem distribuição normal com média $a\mu + b$ e desvio padrão $a\sigma$.

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes e tem distribuição normal com médias μ_X e μ_Y e desvios padrões σ_X e σ_Y. Então $Z = X + Y$ tem distribuição normal com média $\mu_X + \mu_Y$ e variância $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Teorema do Limite Central

Se as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ formam uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ $(0 < \sigma < \infty)$, então para cada x

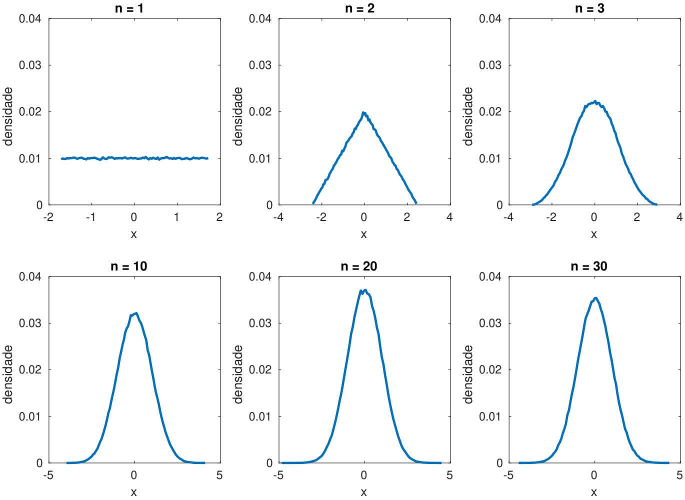
$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

e

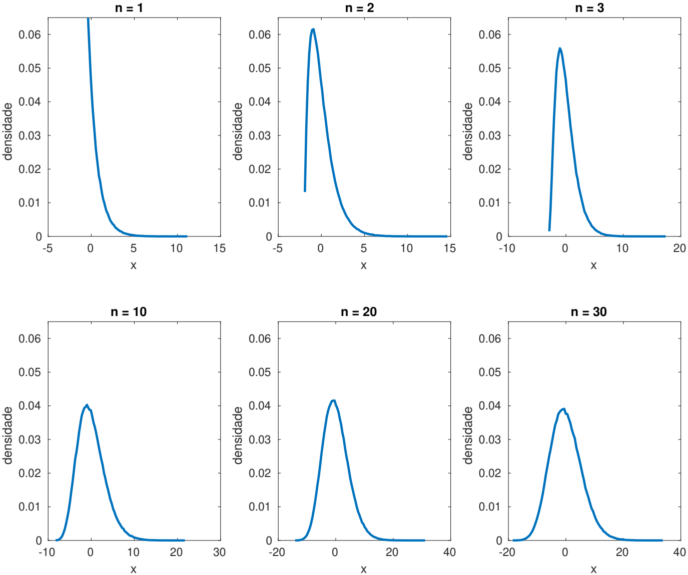
$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) = \Phi(x),$$

onde $\Phi(x)$ denota a c.d.f. da distribuição normal padrão.

Distribuição Uniforme



Distribuição Exponencial



Exemplo 1: Suponha que a quantidade de minutos necessária para servir um cliente no caixa de um supermercado tenha uma distribuição exponencial com média 3. Usando o teorema do limite central, aproxime a probabilidade que a quantidade total de tempo necessário para servir uma amostra aleatória de 16 clientes exceda uma hora.

Exemplo 2: Suponha que um par de dados é lançado 120 vezes, e seja X a quantidade de vezes que a soma dos dois dados é 7. Use o teorema do limite central para determinar um valor de k tal que $\Pr(|X - 20| \leq k)$ é aproximadamente 0,95.

Correção de Aproximação

Definition

Seja X uma variável aleatória que recebe apenas valores inteiros. Suponha que X possui aproximadamente a distribuição normal com média μ e variância σ^2. Seja a e b inteiros e suponha que se deseja aproximar $\Pr(a \leq X \leq b)$. A correção da aproximação por distribuição normal para continuidade é:

$$\Pr(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 1/2 - \mu}{\sigma}\right).$$

Exemplo 3: Suponha que X tenha a distribuição de Poisson com média 10. Use o teorema do limite central com e sem correção para continuidade e determine um valor aproximado para $\Pr(8 \leq X \leq 12)$.