

Segunda Asignación

1. Introducción

El potencial de Yukawa surge en el contexto de la física de partículas elementales para describir interacciones apantalladas, como las fuerzas nucleares. Este potencial es usado para sistemas que se comportan bajo fuerzas centrales y donde las interacciones disminuyen rápidamente con la distancia. A diferencia del potencial de Coulomb, que tiene un alcance infinito, el potencial de Yukawa incorpora un término de apantallamiento que lo convierte en un potencial de corto alcance. El término exponencial $e^{-r\alpha}$ incorpora una dependencia sobre la distancia, haciendo que el potencial decaiga de manera exponencial lo que afecta de manera notable el rango de interacción en las colisiones entre partículas.

El parámetro de apantallamiento α juega un papel clave en la definición del rango efectivo de interacción. Es inversamente proporcional al rango, de modo que cuando α es grande, el potencial se atenúa rápidamente, lo que resulta en interacciones a distancias muy cortas. Esto tiene implicaciones directas sobre la sección transversal de dispersión en colisiones, especialmente a bajas energías, donde el potencial sigue siendo apreciable y las partículas pueden desviarse en trayectorias clásicas.

En contraste, las partículas de alta energía son menos afectadas por el apantallamiento debido a sus trayectorias más rápidas, lo que les permite atravesar la región de interacción sin experimentar una desviación significativa. En estos casos, la influencia del potencial de Yukawa es mínima a grandes distancias, y la dispersión a grandes ángulos se vuelve mucho menos probable que en el caso del potencial de Coulomb, que tiene un alcance infinito. Las partículas de alta energía pasan lejos de la región donde el potencial es significativo, lo que reduce la sección transversal de dispersión.

En el experimento de Rutherford, la dispersión de partículas alfa ilustra claramente las diferencias entre el potencial de Coulomb y el de Yukawa. Mientras que en el potencial de Coulomb las partículas pueden ser desviadas incluso a grandes distancias, el potencial de Yukawa, con su decaimiento exponencial, provoca que solo aquellas partículas que pasen muy cerca del núcleo experimenten una fuerte deflexión. La mayoría de las partículas alfa en este escenario se dispersarán en ángulos más pequeños, y solo unas pocas, que interactúan a distancias cortas, sufrirán deflexiones notables.

2. Metodología

2.1. Lagrangiano y ecuaciones de movimiento, potencial de Coulomb

Potencial de Coulomb o Gauss:

El potencial de Gauss está dado por $V_{Gauss} = \frac{k}{r}$ mientras que la energía cinética de una partícula bajo la acción de un potencial de Gauss es $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, con el momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$ obtendríamos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}) - \frac{k}{r} \quad (1)$$

Potencial de Yukawa:

Sabemos que el potencial de Yukawa está dado por $V_{yukawa} = \frac{ke^{-\lambda r}}{r}$ y que la energía cinética de una partícula descrita radialmente se expresa como $T = \frac{1}{2}m^2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, además, si consideramos que el momento angular es igual a $L = mr^2\dot{\theta}$ el lagrangiano para una partícula bajo el efecto de un potencial de Yukawa será:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}) - \frac{ke^{-\lambda r}}{r} \quad (2)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para encontrar la ecuación de movimiento del sistema se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}}) - \frac{d\mathcal{L}}{dq} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{\lambda k}{m}(\frac{1}{r\lambda} + 1)\frac{e^{-r\lambda}}{r} \quad (5)$$

De la primera ecuación obtenemos la conservación del momento angular, mientras que de la segunda se puede obtener la ecuación de la órbita si aplicamos la regla de la cadena para dejar la expresión con una única dependencia explícita a θ .

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (6)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{m^2r^4} \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) \quad (7)$$

Dejando la ecuación como:

$$\frac{L^2}{m^2r^4} \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{\lambda k}{m} \left(\frac{r}{\lambda} + 1 \right) \frac{e^{-r\lambda}}{r} \quad (8)$$

Para el potencial de Yukawa tenemos que $V = k/re^{(-\lambda r)}$ hay un factor de decrecimiento $e^{(-\lambda r)}$ donde cuando r crece la función decrecerá más rápido, eso se puede ver en el comportamiento del argumento que acompaña al factor, αr , ya que la condición dada la naturaleza exponencial cuando $\lambda r \gg 1$ hace que el potencial de Yukawa tienda a 0, de manera análoga se analiza el rango efectivo del potencial dada la relación $r < 1/\alpha r$.

2.2. Planteamiento del problema, dispersión

Inicialmente, se planteo el siguiente sistema

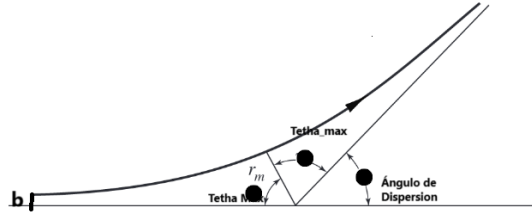


Figura 1: Gráfico ilustrativo del sistema de estudio

El cual, consiste en una "partícula" dirigiéndose a una velocidad ' v ' en dirección paralela a una asíntota (con una distancia ' b ' de esta) que conduce al origen de un potencial, en este recorrido, la partícula experimenta una modificación en su dirección por el efecto de la interacción con dicho potencial, este cambio de dirección medido como un ángulo, es lo que en el gráfico se ilustra como 'Ángulo de dispersión', que se calcula mediante las siguientes expresiones.

$$\chi \text{Ángulo de dispersión} = \pi - 2\theta_{\max} \quad (9)$$

$$\theta_{\max} = b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (10)$$

Para calcular θ_{\max} se utilizo el método 'solve ivp' de la libreria scipy. Para encontrar el límite de integración r_{\min} se utilizo el hecho de que la energía cinética en la distancia mínima con respecto a la fuente de potencial es igual a 0, por lo cual se puede llegar a la siguiente función trascendente, la cual fue manipulada mediante el método numérico de Newton para encontrar sus raíces, una de éstas corresponde a r_{\min} .

$$r^2 - b^2 - \frac{k \cdot r \cdot e^{-\lambda \cdot r}}{E} = 0 \quad (11)$$

3. Resultados

Para el análisis del potencial de Yukawa primero se quiso analizar la naturaleza de corto alcance del mismo. Al compararse con los resultados que otorga el potencial de Coulumb podemos apreciar que si bien en unas distancias r 'pequeñas' (menores a 0.05) ambos potenciales coinciden en la magnitud, a distancias mayores ambos potenciales difieren, tal como muestra la siguiente gráfica.

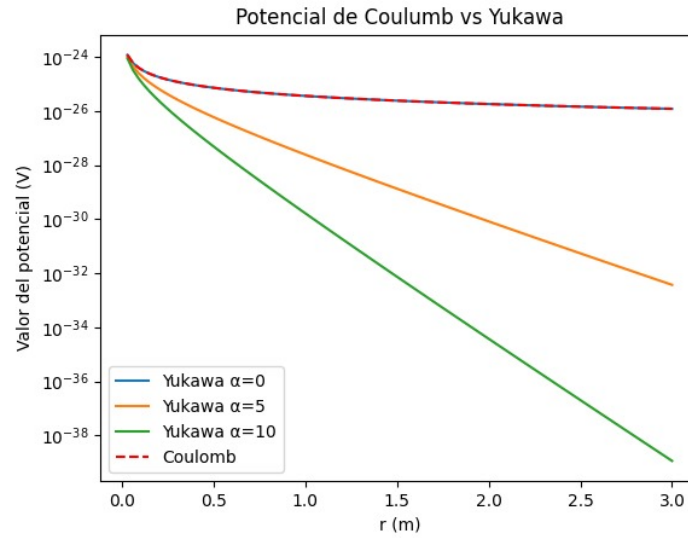


Figura 2: Gráfica en donde se comparan tres potenciales: Coulumb (Rojo punteado), Yukawa con $\alpha = 0$ (Azul), Yukawa con $\alpha = 5$ (Amarilo) y Yukawa con $\alpha = 10$ (Verde)

Esto se puede ver con mayor claridad en la siguiente gráfica

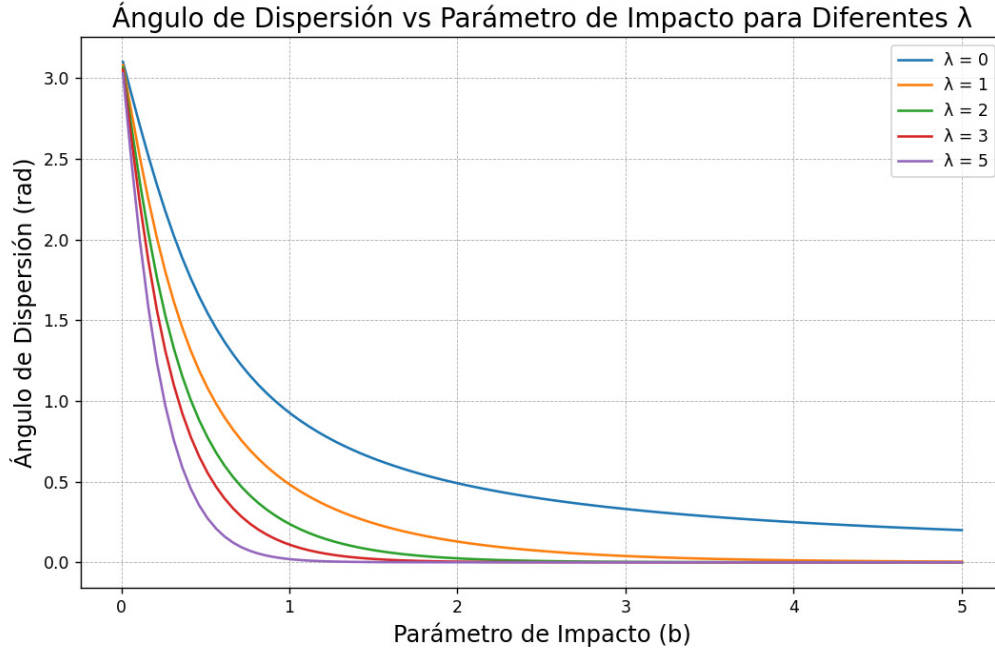


Figura 3: Ángulo de dispersión vs Parámetro de impacto, para valores de apantallamiento distintos.

En la que por ejemplo, se puede evidenciar que para el parámetro de impacto 1, el ángulo de dispersión para los potenciales de Yukawa apantallados es significativamente menor que para el potencial de Coulomb (Linea Azul). Esta gráfica además de dejar ver la naturaleza de 'corto alcance' para los potenciales apantallados (que justamente reducen su rango efectivo de interacción) deja ver la relación inversa entre el factor de apantallamiento λ y este 'rango efectivo de interacción'.

También se procedió a determinar como otras variables como la energía de la partícula o el valor del factor de apantallamiento afectan o no a la interacción, en el caso de la energía partícula se decidió por variar la velocidad angular inicial y esto arrojó los siguientes resultados:

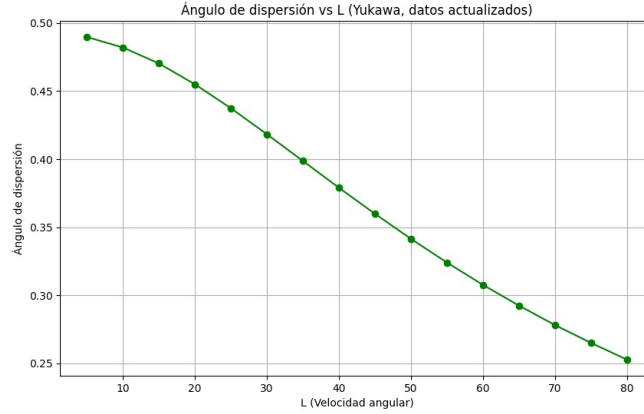


Figura 4: Gráfica del ángulo de dispersión vs valores de L (Velocidad angular)

Como se puede apreciar en la gráfica, a medida que la partícula aumenta de energía el potencial presenta un menor efecto sobre la misma, por esto mismo la partícula presenta un menor ángulo de dispersión a medida que su velocidad angular aumenta.

Por último se halló también la sección eficaz para distintos valores de ángulos de dispersión (Partículas alfa bombardeando Oro) , lo cual arrojó los siguientes resultados:

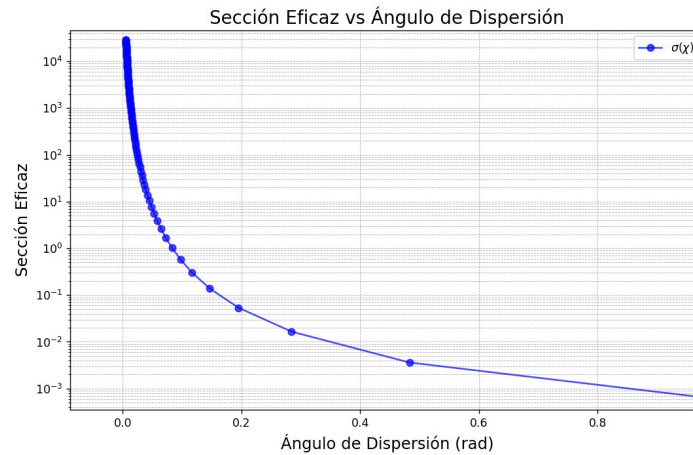


Figura 5: Caption

En esta imagen se puede observar que la sección eficaz para el potencial de Yukawa se encuentra centrado en los ángulos de dispersión mas bajos y que va disminuyendo a medida que el ángulo de dispersión aumenta de cantidad.

4. Conclusiones

A partir del análisis de los resultados obtenidos gracias a la ecuación diferencial y al uso de herramientas computacionales que permiten obtener datos como el ángulo de dispersión y la magnitud del potencial se concluye que el potencial de Yukawa es un potencial de corto alcance, lo cual se puede observar con claridad a la hora de compararlo con el potencial de Coulumb.

De la figura 3 se puede verificar la naturaleza de corto alcance del potencial de Yukawa, se puede observar también que a medida que el valor de α aumenta el valor de la magnitud decrece en una manera considerable, provocando que el rango efectivo de interacción disminuya. Por otro lado, la figura 4 demuestra que otro de los parametros que afectan a la interacción del potencial de Yukawa es la energía inicial de la partícula. La relación se da de una manera inversa, es decir, a menor energía de la partícula mayor será la interacción entre el potencial y la misma, por esto observamos que a medida que aumenta la velocidad angular el valor del ángulo de dispersión es menor.

Se concluye finalmente que debido a la naturaleza de corto alcance del potencial de Yukawa, la sección eficaz del mismo se encontrará centrado en los valores mas pequeños de ángulos de dispersión.