Los problemas de los viernes

1. Un péndulo simple posee una masa m en el extremo de una cuerda, elástica de longitud r, la cual cambia a una tasa constante $\dot{r} = a$.

   a) Encuentre el Lagrangiano del sistema.

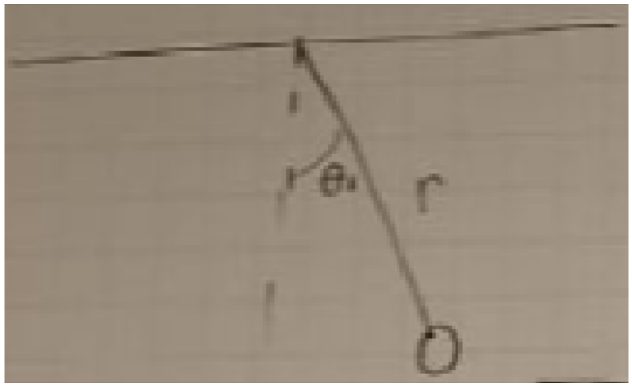


Figura 1: Diagrama del punto 1

Tal como se puede observar en 1 definimos nuestras coordenadas generalizadas para este punto como simplemente las coordenadas r y theta, con la condición de que $\dot{r} = a$.

Definimos el valor de r y theta a partir del uso de coordendas cartesianas, de la siguiente manera:

$$x = r\sin\theta \quad \dot{x} = r\cos\theta\dot{\theta} + \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y = -r\cos\theta \quad \dot{y} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta} - \dot{r}\cos\theta$$

Teniendo esto en cuenta y sabiendo que nuestro lagrangiano se define como $L = T - V$ en donde T y V son la energía cinética y potencial, respectivamente, llegamos a que nuestro Lagrangiano es:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \quad V = -mgr\cos\theta$$
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r} + r\dot{\theta}) + mgrcos(\theta)$$

   b) Encuentre la energía del sistema. Observando el lagrangiano podemos concluir que la energía total del sistema será $E = T + V$ debido a que el lagrangiano no depende explicitamente del parametro t, por tanto la energía de nuestro sistema será:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r} + r\dot{\theta}) - mgrcos(\theta)$$

2. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión y posee el Lagrangiano $L = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2 - kq^2\right)e^{\frac{\alpha}{m}t}$, donde las constantes α y k son cantidades reales y positivas.

   a) ¿Qué situación física describe la ecuación de movimiento de la partícula? A partir del análisis del lagrangiano y de aplicarle las ecuaciones de Euler-Lagrange, se lega al siguiente resultado:

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2 - kq\right)e^{\alpha/mt}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial l}{\partial q} = 0$$
$$\frac{d}{dz}\left(m\dot{q}e^{\alpha/mt}\right) + kqe^{\alpha/mt} = 0$$
$$\rightarrow m\ddot{q}e^{a/mt} + \alpha\dot{q}e^{a/mt} + kqe^{\alpha/mt} = 0$$

   La anterior ecuación comparte la forma con una ecuación que describe el comportamiento de una partícula que se encuentra en un sistema oscilatorio con una amortiguación.

   b) Considere la transformación de coordenada $Q = e^{\frac{\alpha}{2m}t}q$. Encuentre el Lagrangiano del sistema bajo esta transformación.
   Considerando la transformación:

$$Q = e^{\alpha/2mt}q$$
$$e^{\alpha/mt} = \left(\frac{Q}{q}\right)^2$$

   Llegamos al siguiente lagrangiano reemplazando el valor de $e^{\alpha/mt}$

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2\frac{Q^2}{q^2} - kQ^2\right)$$

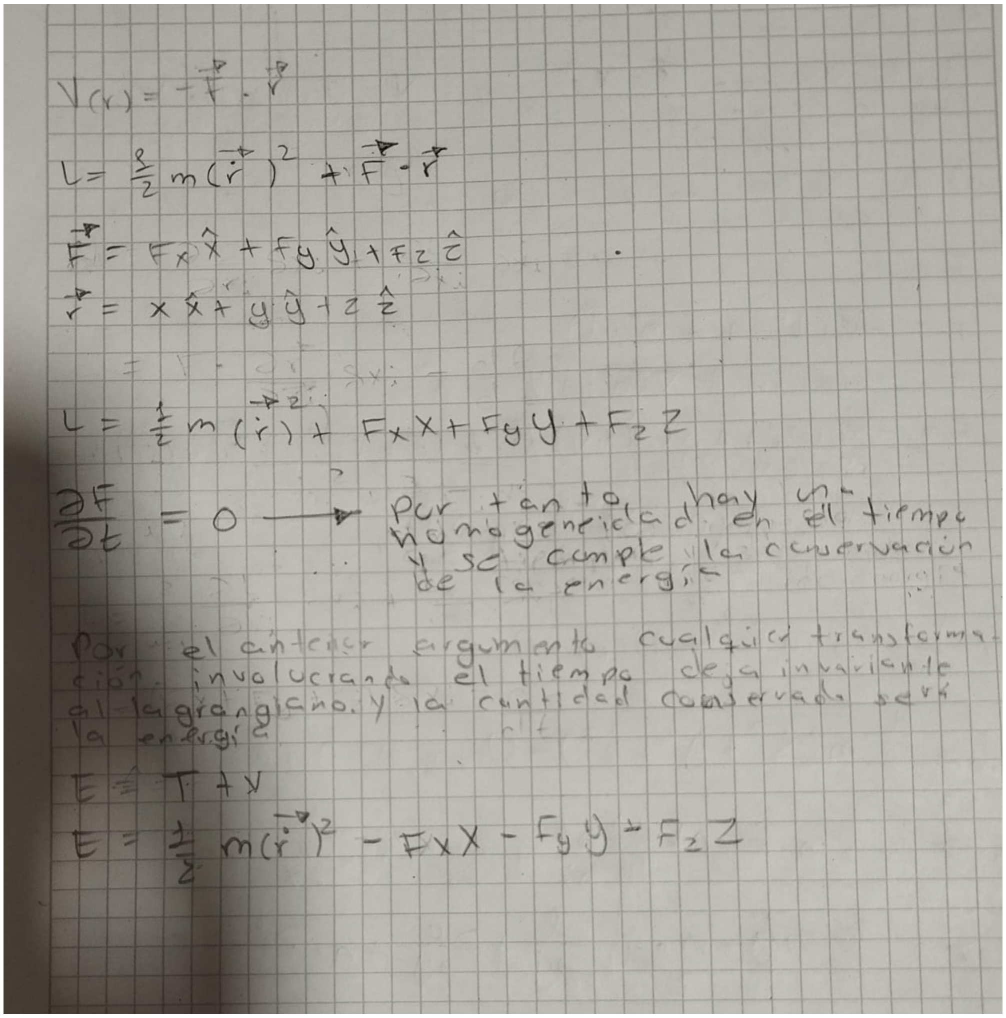
   c) Encuentre la ecuación de movimiento correspondiente al Lagrangiano transformado.

$$m\dot{q}\dot{Q}^2/q^2 - \frac{m\dot{q}^2e^{a/mt}}{q} + m^2q^2Q^2(q)^{-3} + ke^{\alpha/mt}q = 0$$
$$m\dot{q}Q^2/q^2 + ke^{\alpha/mt}q = 0$$

   d) ¿Existe una cantidad conservada para este sistema? Debido a que no se encuentra ninguna coordenada ciclíca no se conserva ningún momento lineal, pero al aplicar la transformación sgerida se observa que el lagrangiano deja de poseer dependencias explicitas con respecto al tiempo, por tanto una cantidad conservada será la energía, dada por:
   $E = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}}\dot{q} - l = cst$
   $E = m\dot{q}^2\frac{Q^2}{q^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{m\dot{q}^2Q^2}{q^2} - kQ^2\right) \longrightarrow \frac{1}{2}m\dot{q}^2\frac{Q^2}{q^2} - kQ^2 = cst$

3. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial de la forma: $V(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$, donde $\vec{F}$ es un vector constante. Encontrar las transformaciones que dejan el lagrangiano invariante y las cantidades conservadas correspondientes.

   Suponiendo un vector cualquiera F y tomando el vector r en coordenadas cartesianas llegamos al siguiente resultado:



$V(r) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$

$L = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 + \vec{F} \cdot \vec{r}$

$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$

$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$

$L = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 + F_x X + F_y y + F_z Z$

$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ por tanto hay una homogeneidad en el tiempo y se cumple la conservación de la energía

Por el anterior argumento cualquier transformación involucrando el tiempo deja invariante al lagrangiano y la cantidad conservada será la energía

$E = T + V$

$E = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 - F_x X - F_y y - F_z Z$

Figura 2: Solución del punto 3

4. En el mismo espíritu del problema anterior, considere una partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ sujeta al potencial $V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = U(r) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}$ donde $\mathbf{r}$ es el radio vector medido desde el origen del sistema de referencia, 1 es el momento angular con respecto a ese origen, $\mathbf{n}$ es un vector fijo en el espacio y $U(r)$ es una función escalar.

   a) Encuentre la fuerza ejercida sobre la partícula.

b) Obtenga las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas.

c) ¿Existe alguna cantidad constante?

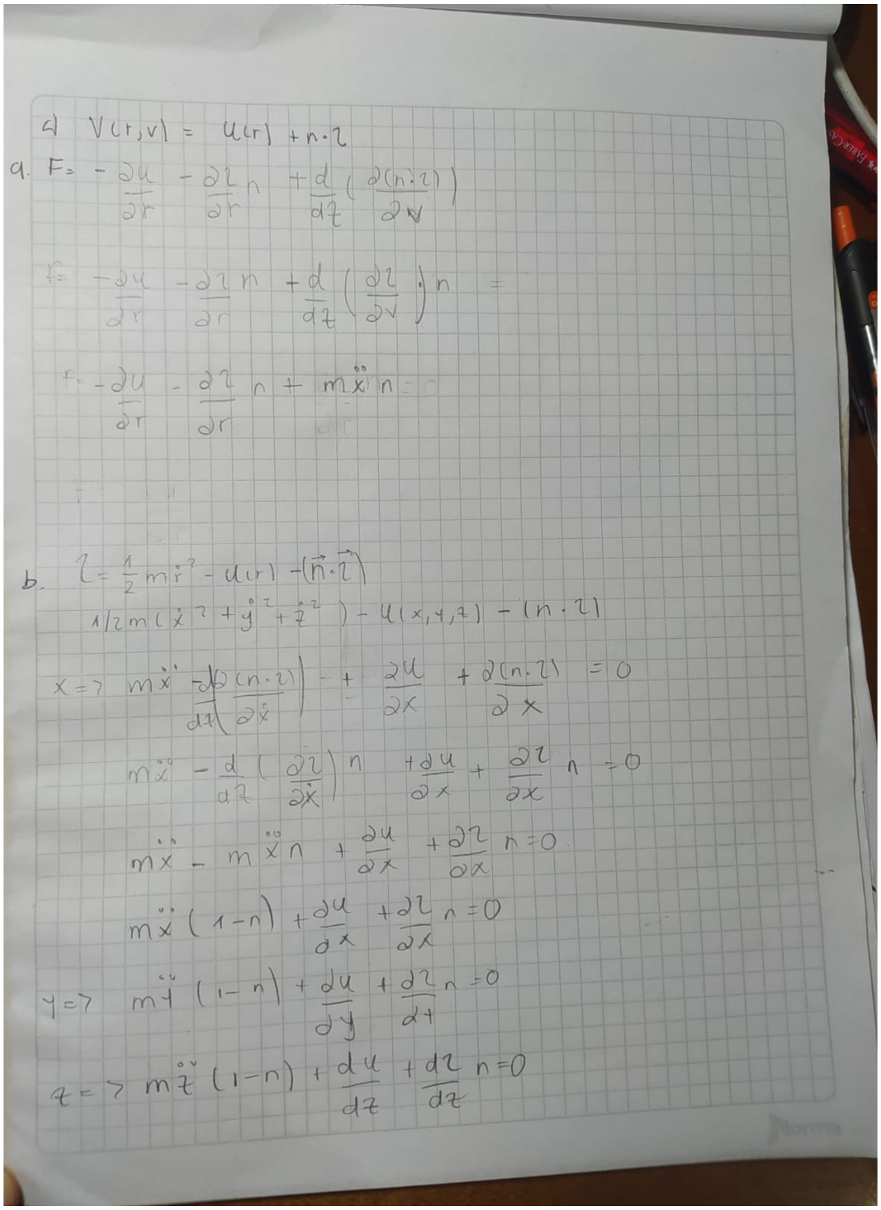


Figura 3: Solución del punto 4

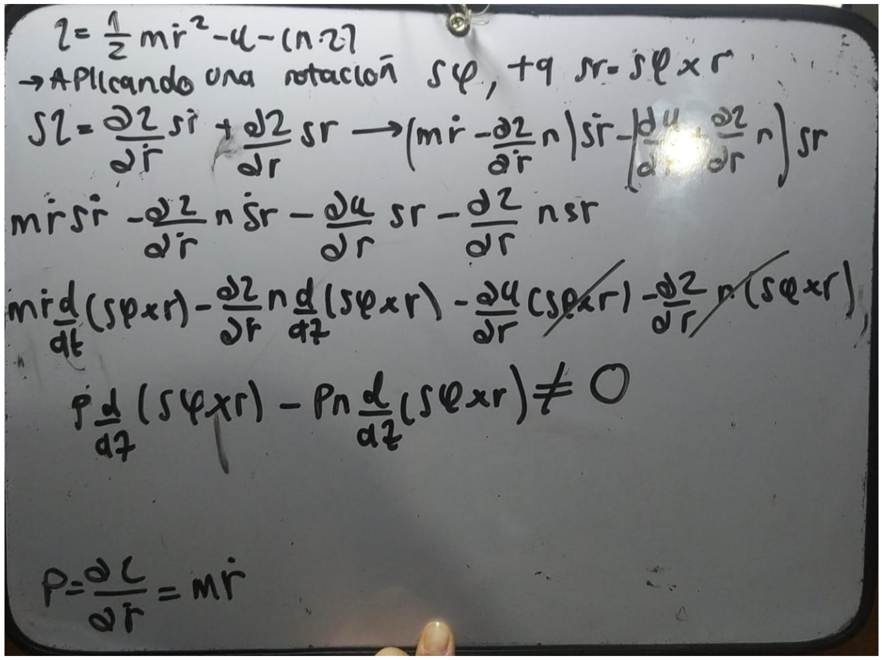


Figura 4: Solución del punto 4

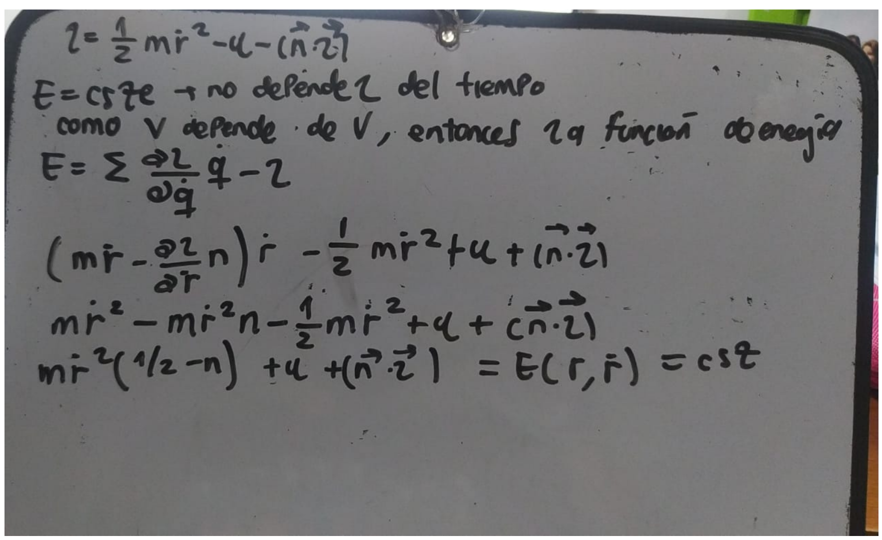


Figura 5: Solución del punto 4

5. Dos masas, m_1 y m_2, están conectadas por una cuerda a través de un agujero en una mesa sin fricción, de manera que m_1 se mueve sobre la superficie de la mesa y m_2 cuelga de la cuerda, moviéndose verticalmente.

a) Determine las ecuaciones de movimiento del sistema.

b) Identifique las cantidades conservadas.

c) Encuentre la posición de equilibrio del sistema.

d) Si m_1 se encuentra inicialmente en reposo a una distancia a del agujero, determine la velocidad de m_2 cuando m_1 alcanza el agujero.

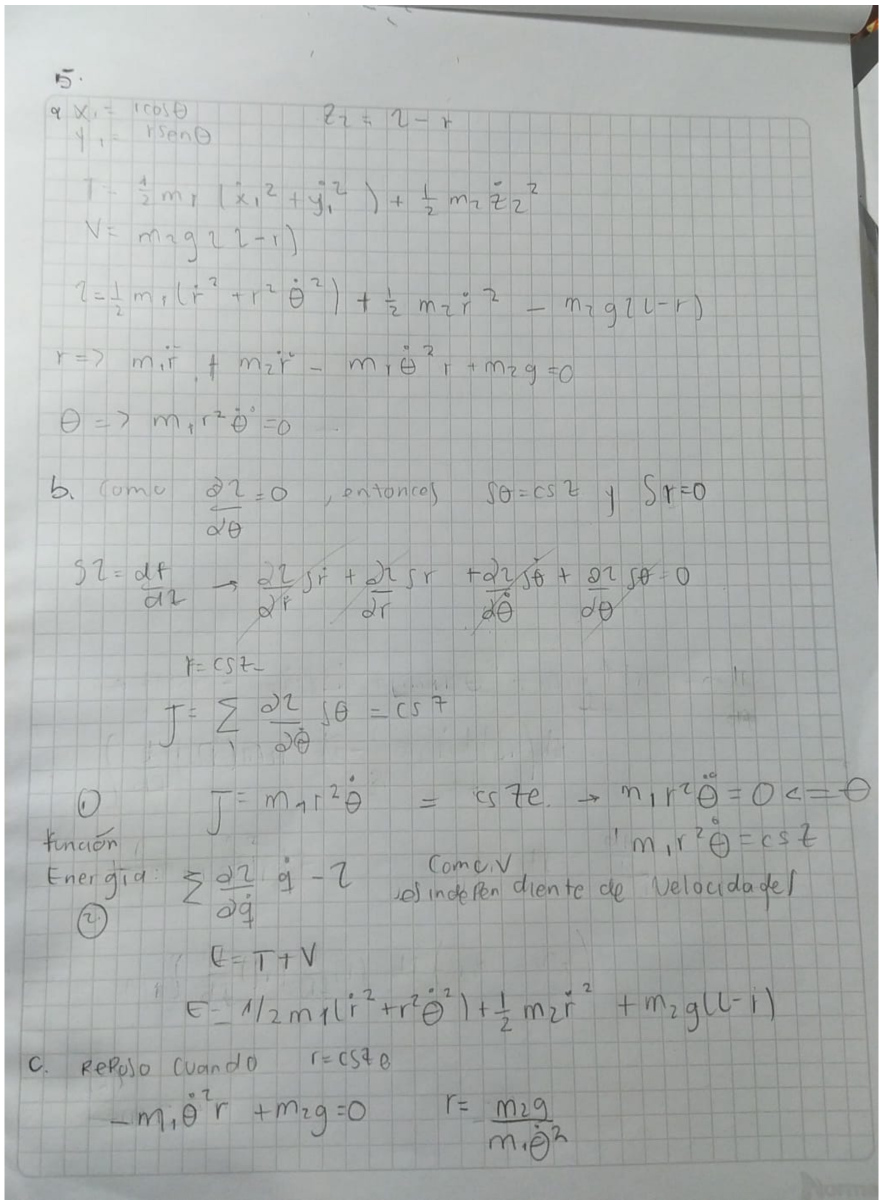


Figura 6: Solución del punto 5

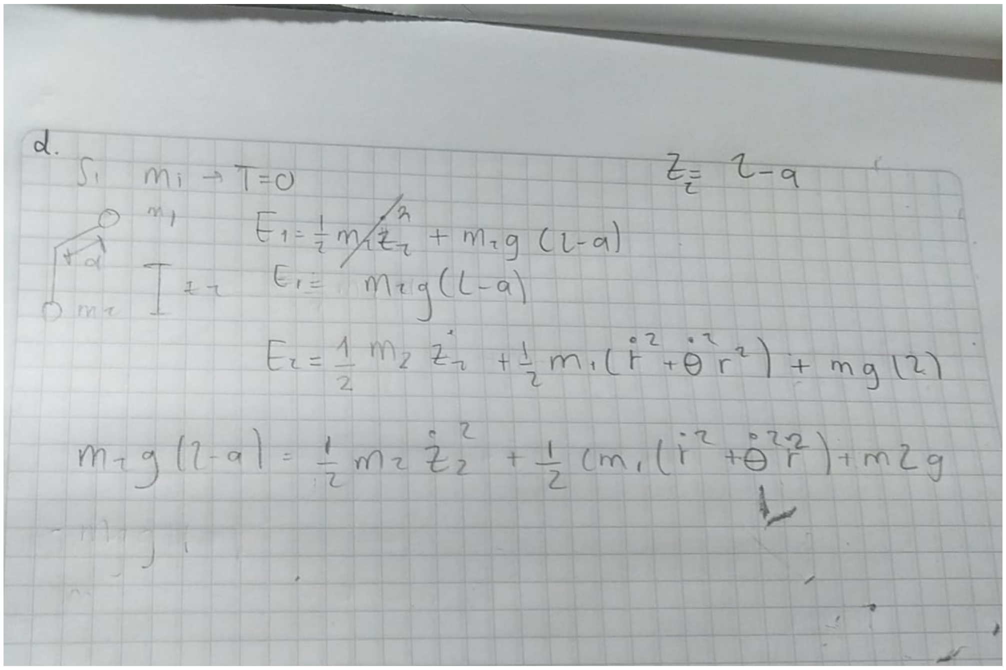


Figura 7: Solución del punto 5

6. El oscilador armónico bidimensional anisótropo es un sistema superintegrable. Consiste en una masa m que se mueve libremente en el plano xy. Está conectada a las paredes rígidas por dos resortes sin masa de constantes de resorte, k_1 en el eje x y k_2 en el eje y. La longitud natural de cada resorte es a.

   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento

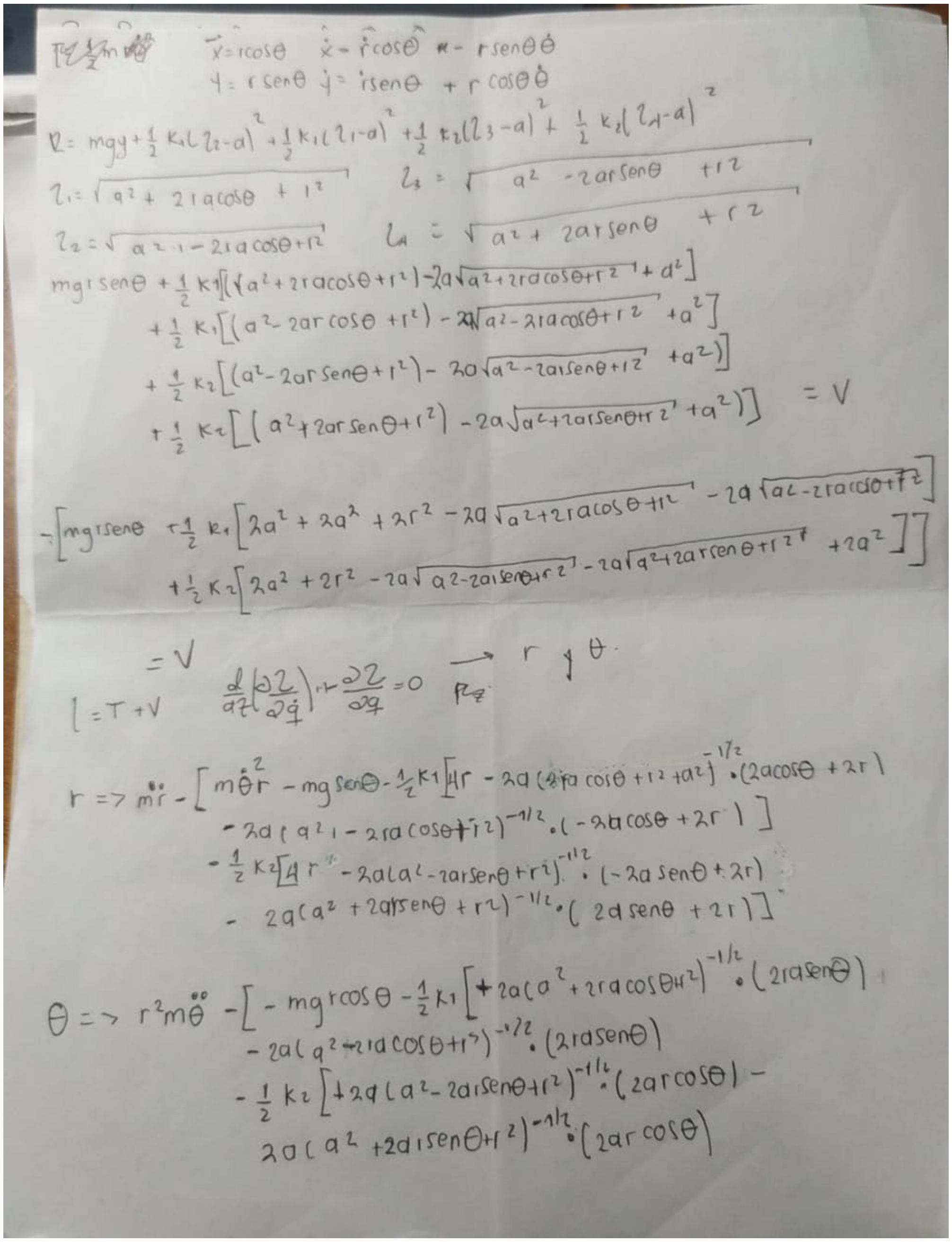
   b) Encuentre las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones

   c) ¿Qué diferencias puede apreciar entre el caso isótropo $k_1 = k_2$ y el anisótropo $k_1 \neq k_2$?

   d) Encuentre las cuatro constantes de movimiento: las energías en x y y (E_x y E_y, respectivamente), la cantidad de movimiento angular L_z y la correlacional K. Esto es $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$, $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 x^2}{2}$, $L_z = y p_x - x p_y$ y $K = \omega_1 x \, \omega_2 y + p_x p_y$, con $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$, e $i = 1, 2$

   e) Muestre que esas cantidades conservadas no son independientes ya que se cumple que $L^2 + K^2 = 4 E_x E_y$

   f) Otra vez, ¿Qué diferencias puede apreciar entre el caso isótropo $k_1 = k_2$ y el anisótropo $k_1 \neq k_2$,



$T = \frac{1}{2} m$ $\qquad x = r\cos\theta \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta}$

$\qquad y = r\,\mathrm{sen}\theta \quad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$

$V = mgy + \frac{1}{2}k_1(l_2-a)^2 + \frac{1}{2}k_1(l_1-a)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_3-a)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_4-a)^2$

$l_1 = \sqrt{a^2 + 2ra\cos\theta + r^2} \qquad l_3 = \sqrt{a^2 - 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2}$

$l_2 = \sqrt{a^2 - 2ra\cos\theta + r^2} \qquad l_4 = \sqrt{a^2 + 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2}$

$mgr\,\mathrm{sen}\theta + \frac{1}{2}k_1\left[(a^2 + 2ra\cos\theta + r^2) - 2a\sqrt{a^2+2ra\cos\theta+r^2} + a^2\right]$

$+ \frac{1}{2}k_1\left[(a^2 - 2ar\cos\theta + r^2) - 2a\sqrt{a^2-2ra\cos\theta+r^2} + a^2\right]$

$+ \frac{1}{2}k_2\left[(a^2 - 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2) - 2a\sqrt{a^2-2ar\,\mathrm{sen}\theta+r^2} + a^2)\right]$

$+ \frac{1}{2}k_2\left[(a^2 + 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2) - 2a\sqrt{a^2+2ar\,\mathrm{sen}\theta+r^2} + a^2)\right] = V$

$\left[mgr\,\mathrm{sen}\theta + \frac{1}{2}k_1\left[2a^2 + 2a^2 + 2r^2 - 2a\sqrt{a^2+2ra\cos\theta+r^2} - 2a\sqrt{a^2-2ra\cos\theta+r^2}\right]\right.$

$\left.+ \frac{1}{2}k_2\left[2a^2 + 2r^2 - 2a\sqrt{a^2-2ar\,\mathrm{sen}\theta+r^2} - 2a\sqrt{a^2+2ar\,\mathrm{sen}\theta+r^2} + 2a^2\right]\right]$

$= V$

$L = T + V \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \xrightarrow[\text{Rq}]{} r \text{ y } \theta.$

$r \Rightarrow m\ddot{r} - \Big[m\dot{\theta}^2 r - mg\,\mathrm{sen}\theta - \frac{1}{2}k_1\big[4r - 2a(2ra\cos\theta + r^2 + a^2)^{-1/2}\cdot(2a\cos\theta + 2r)$

$- 2a(a^2 - 2ra\cos\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(-2a\cos\theta + 2r)\big]$

$- \frac{1}{2}k_2\big[4r - 2a(a^2 - 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(-2a\,\mathrm{sen}\theta + 2r)$

$- 2a(a^2 + 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(2a\,\mathrm{sen}\theta + 2r)\big]$

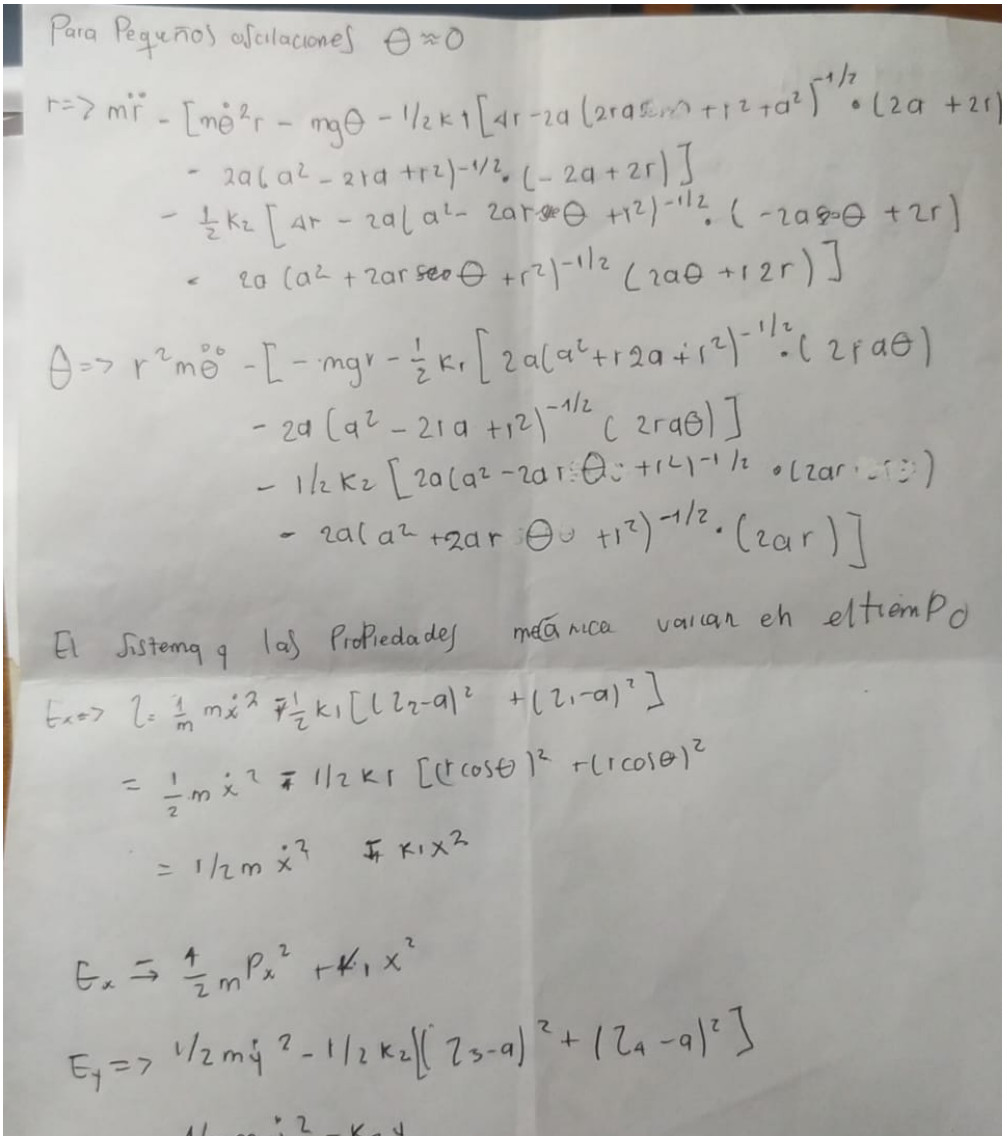
$\theta \Rightarrow r^2 m\ddot{\theta} - \Big[-mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k_1\big[+2a(a^2 + 2ra\cos\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(2ra\,\mathrm{sen}\theta)$

$- 2a(a^2 - 2ra\cos\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(2ra\,\mathrm{sen}\theta)$

$- \frac{1}{2}k_2\big[+2a(a^2 - 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(2ar\cos\theta) -$

$2a(a^2 + 2ar\,\mathrm{sen}\theta + r^2)^{-1/2}\cdot(2ar\cos\theta)$

Figura 8: Solución del punto 6



Para Pequeños oscilaciones $\theta \approx 0$

$$r \Rightarrow m\ddot{r} - \Big[m\dot{\theta}^2 r - mg\theta - 1/2\, k_1 \Big[4r - 2a\,(2ra\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2 + a^2)^{-1/2} \cdot (2a + 2r)$$
$$- 2a(a^2 - 2ra + r^2)^{-1/2} \cdot (-2a + 2r)\Big]$$
$$- \tfrac{1}{2} k_2 \Big[4r - 2a(a^2 - 2ar\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2)^{-1/2} \cdot (-2a\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r)$$
$$- 2a\,(a^2 + 2ar\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2)^{-1/2}\,(2a\theta + 2r)\Big]$$

$$\theta \Rightarrow r^2 m\ddot{\theta} - \Big[-mgr - \tfrac{1}{2} k_1 \Big[2a(a^2 + r2a + r^2)^{-1/2} \cdot (2ra\theta)$$
$$- 2a\,(a^2 - 2ra + r^2)^{-1/2}\,(2ra\theta)\Big]$$
$$- 1/2\, k_2 \Big[2a(a^2 - 2ar\,\theta + r^2)^{-1/2} \cdot (2ar)$$
$$- 2a(a^2 + 2ar\,\theta + r^2)^{-1/2} \cdot (2ar)\Big]$$

El Sistema q las Propiedades mecánica varían en el tiempo

$$E_x \Rightarrow L = \tfrac{1}{m} m\dot{x}^2 \mp \tfrac{1}{2} k_1 \big[(l_2 - a)^2 + (l_1 - a)^2\big]$$
$$= \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 \mp 1/2\, k_1\, \big[(r\cos\theta)^2 + (r\cos\theta)^2$$
$$= 1/2\, m\dot{x}^2 \mp k_1 x^2$$

$$E_x \Rightarrow \tfrac{1}{2m} P_x^2 + k_1 x^2$$

$$E_y \Rightarrow 1/2\, m\dot{y}^2 - 1/2\, k_2 \big[(l_3 - a)^2 + (l_4 - a)^2\big]$$
$$1/2\, m\dot{y}^2 - k_2 y$$
$$E_y = 1/2m\, P_y^2 + k_1 x^2$$

$$I = r_\alpha \times P_\alpha = y P_x - x P_y$$

Figura 9: Solución del punto 6