

Primera Asignación

Considere el caso de dos péndulos de igual masa m y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud l . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica k .

1. Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema

Para el planteamiento de la solución al problema decidimos partir del uso de vectores que indiquen la posición de cada una de las masas que conforman el sistema, a continuación se puede ver una representación de cada uno de estos vectores:

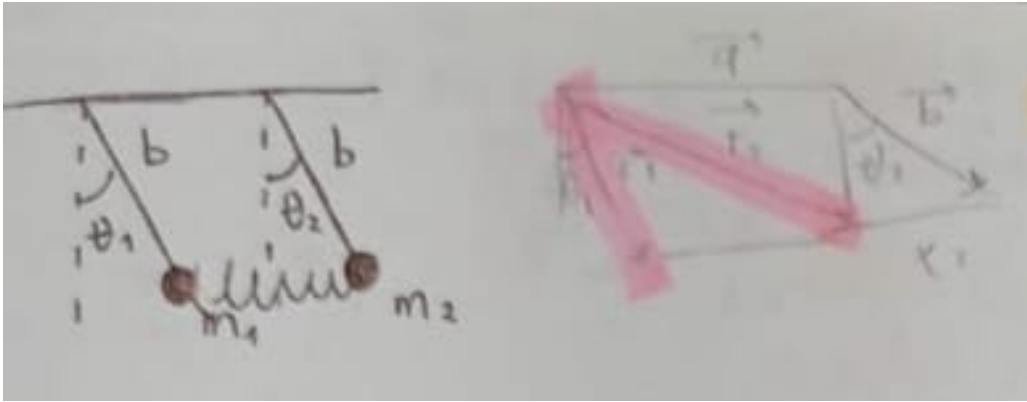


Figura 1: Los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 se definen a partir del origen del sistema coordenado

Como se puede apreciar en la imagen 1, se tomaron como coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2 , el cual es el ángulo que forman los péndulos de los cuerpos 1 y 2 con respecto al eje Y. Se tomó esta cantidad de coordenadas generalizadas ya que es la apropiada luego de tener en cuenta la ligadura que supone la longitud de la cuerda que forma al péndulo.

También se formularon los vectores \vec{a} el cual es un vector con magnitud igual a la longitud natural del resorte y el vector \vec{b} , que indica la dirección en la cual se encuentra la cuerda del segundo cuerpo.

Teniendo en cuenta los vectores formulados anteriormente los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= b\sin(\theta_1)\hat{i} - b\cos(\theta_1)\hat{j} \\ \vec{r}_2 &= \vec{a} + \vec{b} = (a + b\sin(\theta_2))\hat{i} - b\cos(\theta_2)\hat{j}\end{aligned}$$

Y los vectores velocidad estarán dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= b\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \hat{i} + b\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \hat{j} \\ \vec{r}_2 &= b\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \hat{i} + b\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \hat{j}\end{aligned}$$

Teniendo estas igualdades se procederá a construir la energía potencial y cinética de nuestro sistema

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mgb(1 - \cos \theta_1) + mgb(1 - \cos \theta_2)$$

En donde nuestro Δx estará dado por:

$$\Delta x = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a \longrightarrow \left((b \sin \theta_1 - a - b \sin \theta_2)^2 + (b \cos \theta_2 - b \cos \theta_1)^2 \right)^{1/2} - a$$

$$\Delta x = [b^2 \sin^2(\theta_1) - 2ba \sin(\theta_1) - 2b^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + a^2 + b^2 \sin^2(\theta_2) + 2ba \sin(\theta_2) - 2b^2 \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) + b^2 \cos^2(\theta_1)]^{1/2} - a$$

$$\Delta x = [-2b^2(\cos(\theta_2 - \theta_1) + 2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1))]^{1/2} - a$$

El lagrangiano para los péndulos acoplados mediante un resorte sería:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgb(1 - \cos \theta_1) - mgb(1 - \cos \theta_2) - \frac{k}{2}((-2b^2(\cos(\theta_2 - \theta_1) + 2b^2 + a^2 + \\ &2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)) - 2a(-2b^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1))^{1/2} + a^2\end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el Lagrangiano llegamos a las siguientes ecuaciones de segundo orden para θ_1 y θ_2 :

$$\begin{aligned}\theta_1 \longrightarrow & mb\ddot{\theta}_1 + mgb \sin \theta_1 - k(b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + ba \cos \theta_1) + \frac{ak}{2}(2b^2 + a^2 + 2ab(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ & - 2b^2 \cos(\theta_2 - \theta_1))^{-1/2}(2b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2ba \cos \theta_1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 \longrightarrow & mb\ddot{\theta}_2 + mgb \sin \theta_2 + k(b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + ba \cos \theta_2) - \frac{ka}{2}((2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ & - 2b^2 \cos(\theta_2 - \theta_1))^{-1/2}(b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2ba \cos \theta_2) = 0\end{aligned}$$

- Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.

Para la solución del sistema se utilizó el paquete *solve_ivp* de la librería *scipy.py*.

La solución del sistema se logró de manera numérica, *solve_ivp* permite muchos métodos numéricos para determinar

Las condiciones iniciales que modelamos para el sistema son:

- $m = 1$
- $b = 1$
- $g = 9.81$
- $k = 1$

■ $a = 1$

Donde $\theta_1 = \theta_2 = 0$ cuando $\vec{r}_2 = a$ que es la longitud del resorte en la posición de equilibrio. para conseguir movimiento en las gráficas obtenidas computacionalmente las condiciones iniciles para $\theta_1 = \pi/6$ y $\theta_2 = \pi/8$. Se escogió un intervalo de tiempo de (0,1000) s

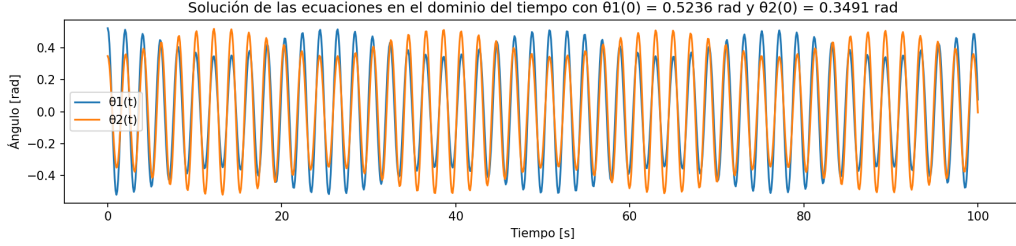


Figura 2: trayectoria con respecto a los ángulos

3. Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de ¿Las Varillas? ¿cómo influye la relación m_1/m_2 si consideramos que las masas son diferentes? ¿cómo influye la relación l_1/l_2 si consideramos que el largo de las varillas es diferente? Para este caso se tomarán dos longitudes diferentes para cada péndulo b y c que corresponden al péndulo 1 y 2 respectivamente y dos masas m_1 y m_2 .

El planteamiento es similar al caso anterior, por lo tanto:

$$\vec{r}_1 = b \sin \theta_1 \hat{i} - b \cos \theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{a} + \vec{c} = (a + c \sin \theta_2) \hat{i} - (c \cos \theta_2) \hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\theta}_1 b \cos \theta_1 \hat{i} + b \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = c \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \hat{i} + \dot{\theta}_2 c \sin \theta_2 \hat{j}$$

Y por lo tanto, nuestro Δx será:

$$\Delta x = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a \rightarrow \left((b \sin \theta_1 - a - c \sin \theta_2)^2 + (-b \cos \theta_1 + c \cos \theta_2)^2 \right)^{1/2} - a$$

$$\Delta x = (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(-b \sin \theta_1 + c \sin \theta_2))^{1/2} - a$$

El lagrangiano toma la siguiente forma si consideramos las nuevas condiciones del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 b^2 + \frac{1}{2} m_2 c^2 \dot{\theta}_2^2 - m_1 g b (1 - \cos \theta_1) - m_2 g c (1 - \cos \theta_2) - \frac{k}{2} [\\ & (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1)) - 2a \\ & (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1))^{1/2} + a^2] \end{aligned}$$

A partir del cual salen las siguientes ecuaciones de movimiento gracias a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\longrightarrow m_1 \ddot{\theta}_1 b^2 + m_1 g b \sin \theta_1 - k (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + ab \cos \theta_1) + ak/2 (c^2 + a^2 + b^2 - 2c \\ &b (\cos (\theta_2 - \theta_1)) + 2a (c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1)^{-1/2} (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + abc \cos \theta_1) = 0 \\ \theta_2 &\longrightarrow m_2 \ddot{\theta}_2 c^2 + m_2 g c \sin \theta_2 + k (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + ac \cos \theta_2) - k/2a ((c^2 + a^2 + b^2 - 2bc (\cos (\theta_2 - \theta_1) \\ &+ 2a c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1)^{-1/2} (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + ac (\cos \theta_2)) = 0 \end{aligned}$$

para un sistema donde las masas son diferentes y tienen diferente longitud con respecto a la varilla, nos encontramos con estas condiciones iniciales:

- $m_1 = 1$
- $m_2 = 10$
- $g = 9.81$
- $k = 1$
- $a = 1$
- $b = 1$
- $c = 10$

Donde c y b corresponden a la longitud de las varillas para la m_1 y para la m_2

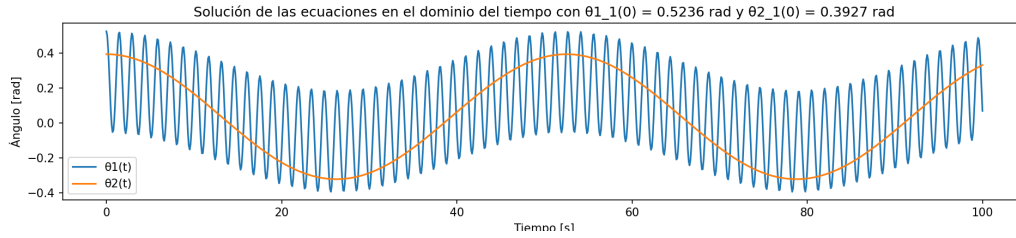


Figura 3: Ángulo respecto al tiempo con masas y longitudes diferentes

Para el sistema donde el resorte se encuentra en la mitad de las varillas de masas m_1 y m_2 tenemos las mismas condiciones iniciales del sistema con masas iguales y longitudes iguales, quiere decir:

- $m = 1$
- $b = 1$
- $g = 9.81$
- $k = 1$
- $a = 1$

Pero el cambio en las oscilaciones se encuentran en la energía potencial del resorte, dado a que la elongación estará dada por:

$$\Delta x = \frac{(-2a + b \sin(\theta_1) - b \sin(\theta_2))^2 + (b \cos(\theta_2) - b \cos(\theta_1))^2}{4} - a$$

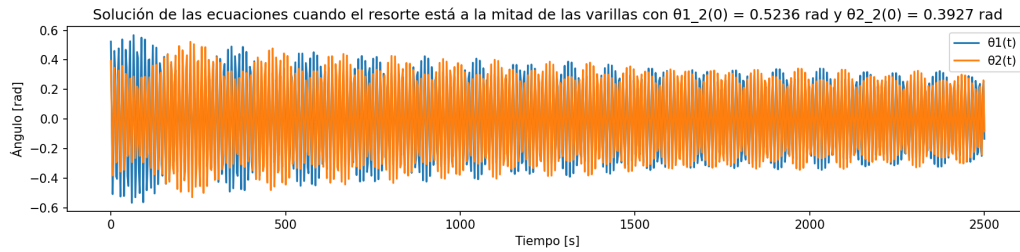


Figura 4: Ángulo respecto al tiempo cuando el resorte está en la mitad de las varillas

4. ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico

El comportamiento caótico es un comportamiento impredecible, que comparte las siguientes características según (Rosario Aldana-Franco, Ana G. Gutiérrez-García y Carlos M. Contreras, 2011)

- **Son deterministas** Dado que existen ecuaciones matemáticas que describen el sistema.
- **Son sensibles a las condiciones iniciales** Un cambio muy pequeño en las condiciones iniciales produce un cambio totalmente diferente al final.
- **Parecen desordenados:** Se modela el sistema, pero contiene atractores, que son en teoría del caos donde el sistema tiende a evolucionar en el tiempo.

Nuestro sistema cumple las características mostradas anteriormente, dado que, su ecuación de movimiento está descrita por funciones no lineales. Para mostrar el caos en el sistema se perturban las condiciones iniciales con un pequeño cambio de 0.0001, la gráfica muestra que hay un cambio totalmente diferente respecto a la **Figura 2**. Y para detallar más θ_1 la

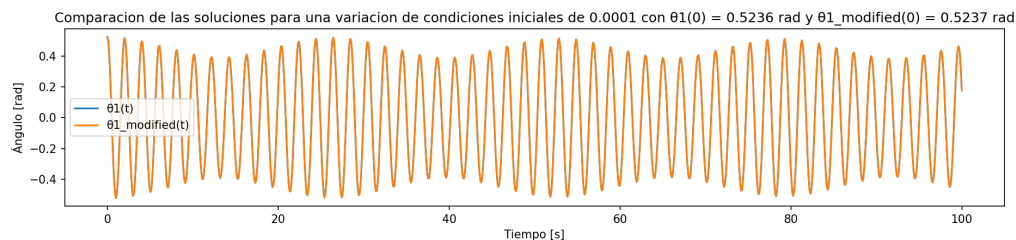


Figura 5: θ_1 bajo una pequeña perturbación de 0.001

variación totalmente diferente respecto al sistema con condiciones bajo un pequeño cambio se realizó una diferencia entre ambas funciones.

Es notable dada la diferencia, todas las diferencias gráficas entre ambas funciones:

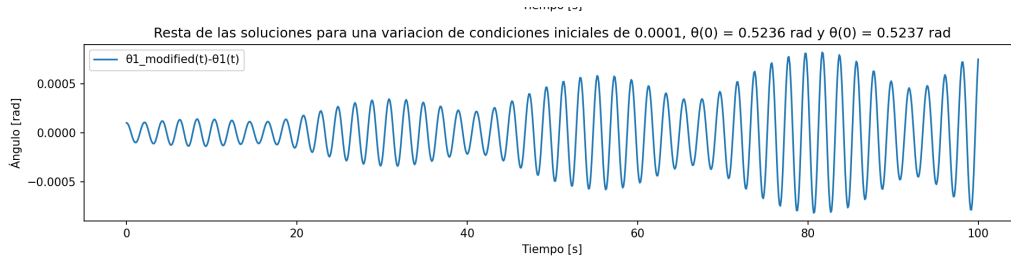


Figura 6: Diferencia entre ambas funciones

5. Analice el comportamiento de su señal en términos de un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

Para el análisis del espectrograma se realizó teniendo en cuenta que el color amarillo en la gráfica representa mayor intensidad en las frecuencias.

Para θ_1 y θ_2 vemos que la frecuencia con mayor intensidad se encuentra en la franja entre, 0-1 Hz y 0.4-0.6, respectivamente, con una estabilidad continua en el tiempo, podemos concluir que solo hay una frecuencia dominante en estos intervalos.

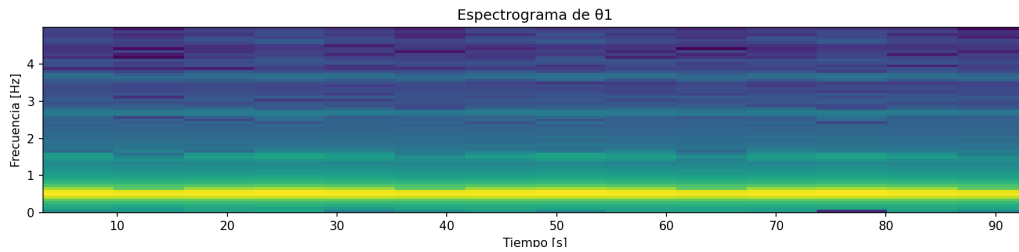


Figura 7: Espectrograma para θ_1

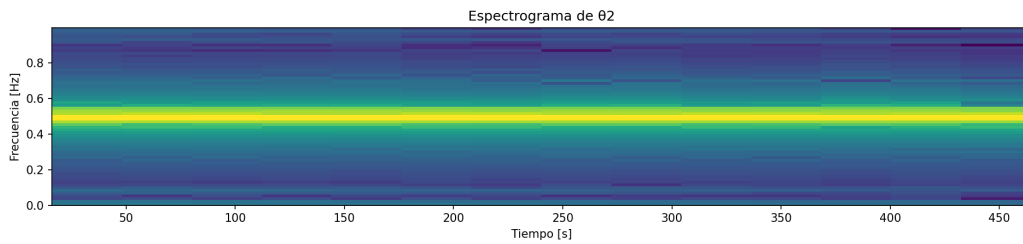


Figura 8: Espectrograma para θ_2

Para las señales de la transformada de fourier notamos que concuerda con los resultados dados en el espectrograma porque estas señales muestran picos de frecuencia en el intervalo

mostrado anteriormente donde hay dominancia de frecuencia.

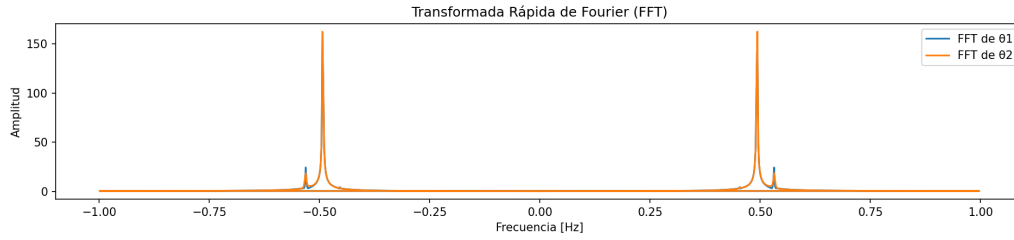


Figura 9: Señal de la trasformada de Fourier

6. Simplifique las ecuaciones suponiendo pequeñas oscilaciones.

Tomando el lagrangiano para el caso de ángulos generales, hallado en el primer punto y aplicándole las aproximaciones adecuadas para ángulos pequeños llegamos a la siguiente ecuación para θ_1 y θ_2 .

$$\theta_1 \Rightarrow 2mb\ddot{\theta}_1 + mgb\theta_1 - kb^2(\theta_2 - \theta_1) + ba + \frac{ak}{2}((2b^2 + a^2 +$$

$$2ab((\theta_2 - \theta_1) - 2b^2\theta_2\theta_1)^{-1/2}(2b^2(\theta_2 - \theta_1) + 2ba) = 0$$

$$\theta_2 \Rightarrow mb\ddot{\theta}_2 + mgb\theta_2 + kb^2(\theta_2 - \theta_1) + ba - ka/2(2b^2 + a^2 +$$

$$2ba(\theta_2 - \theta_1) - 2b^2\theta_2\theta_1)^{-1/2}(b^2(\theta_2 - \theta_1) + 2ba) = 0$$

- a) Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.

Para integrar numéricamente el sistema modificado se utilizó el mismo código del la librería de scipy.py con condiciones iniciales:

- $m = 1$
- $b = 1$
- $g = 9.81$
- $k = 1$
- $a = 1$

Con una diferencia respecto a los angulos, suponiendo que $\theta_1 = 0.3$ radianes y $\theta_2 = 0.2$ radianes. Para la gráfica de trayectoria de ambas fuciones nos encontramos con:

- b) Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de Las Varillas? ¿cómo influye la relación m_1/m_2 si consideramos que las masas son diferentes? ¿cómo influye la relación l_1/l_2 si consideramos que el largo de las varillas es diferente?

Nuevamente tomando las ecuaciones obtenidas para el caso general en el punto 3 y aplicando las aproximaciones adecuadas para el caso en el que las oscilaciones se den en ángulos pequeños, llegamos a las siguientes ecuaciones:

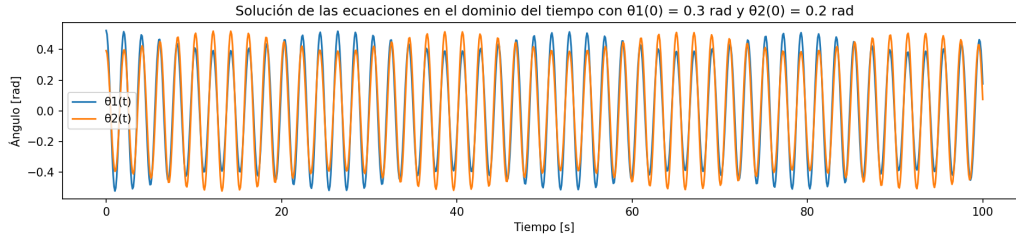


Figura 10: Solución de las ecuaciones con ángulos pequeños

$$\begin{aligned}\theta_1 &\Rightarrow m_1 \ddot{\theta}_1 b^2 + m_1 g b \theta_1 - k (cb (\theta_2 - \theta_1) + ab) \\ &\quad + ak/2 (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb\theta_2\theta_1) + 2a (c\theta_2 - b\theta_1)^{-1/2} \\ &\quad (cb (\theta_2 - \theta_1) + ab) = 0 \\ \theta_2 &\Rightarrow m_2 \ddot{\theta}_2 c^2 + m_2 g c \theta_2 + k (cb (\theta_2 - \theta_1) + ac) \\ &\quad - k/2a (c^2 + a^2 + b^2 - 2bc (\theta_2\theta_1) + 2a (c\theta_2 - b\theta_1)^{-1/2} \\ &\quad (cb (\theta_2 - \theta_1) + ac) = 0\end{aligned}$$

Ahora, en el caso en el que la varilla se halle en medio de las barras, contrario a la situación inicial planteada, atado a las masas, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\Rightarrow mb_0^2 \theta_1 - [-mgb\theta_1 - k/2 [(-ab - b^2/2 (\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad - a [(1/2b^2 + a^2 + ab (\theta_2 - \theta_1) - b^2/2\theta_1\theta_1)^{-1/2} \\ &\quad (ab \cos \theta_1 - b^2/2 (\theta_2 - \theta_1))] = 0 \\ \theta_2 &\Rightarrow mb_2^{200} - \left[-mgb\theta_2 - \frac{k}{2} [(ab + b^2/2 (\theta_2 - \theta_1) \right. \\ &\quad \left. - a (1/2b^2 + a^2 + ab (\theta_2 - \theta_1) - b^2/2\theta_2\theta_1)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. (ab + b^2/2 (\theta_2 - \theta_1))] \right] = 0\end{aligned}$$

En las cuales se puede ver que efectivamente hay una variación con respecto a las ecuaciones obtenidas cuando el resorte está atado a las masas. Para facilitar la distinción gráfica se muestran las variaciones con respecto al tiempo para ángulos pequeños.

- c) Analice el comportamiento de su señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

Respecto al espectro de Fourier es notable, igualmente que en el sistema anterior que hay una frecuencia dominante que se encuentra en aproximadamente en entre 0.10 Hz

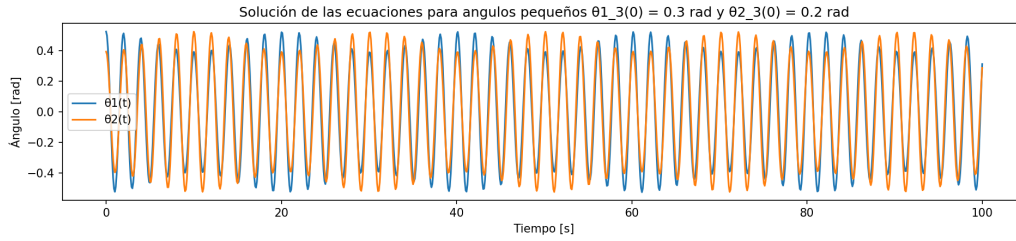


Figura 11: Solución de las ecuaciones con ángulos pequeños para diferente masas y longitudes

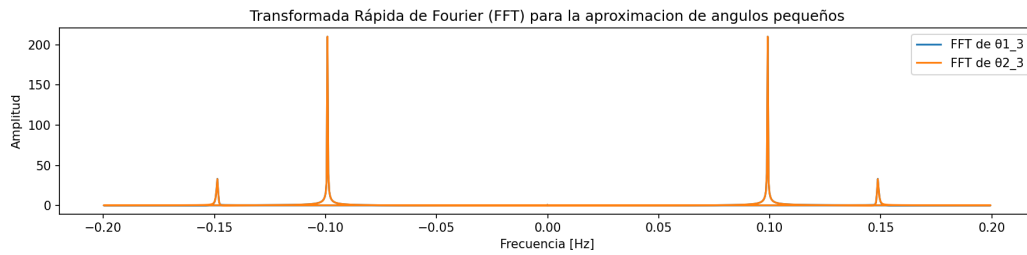


Figura 12: Señal en términos de la transformada de Fourier para ángulos pequeño

7. CONCLUSIONES

Gracias al ejercicio anterior, se pudo concluir que las perturbaciones en un sistema caótico son significativamente sensibles a cualquier variación. Este comportamiento se observó al realizar experimentos con diferentes masas, longitudes variables, cambios en la posición del resorte y ángulos pequeños.

A su vez utilizando el análisis de Fourier, se pudo descomponer las señales para θ_1 y θ_2 obtenidas en sus componentes de frecuencia. Esto permitió identificar cómo cada variación en los parámetros del sistema afectaba las frecuencias dominantes y la amplitud de las oscilaciones.

7. REFERENCIAS

- Rosario Aldana-Franco, Ana G. Gutiérrez-García y Carlos M. Contreras, (2011). ¿Es tan caótico el caos?