Problemas viernes

Mandius Fonseca, Laura Corzo

August 2024

1 Primera semana

1. Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10 m de altura, tienen 5 m de profundidad

   (a) Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguirdad de los atletas

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{F_y} &= ma \\ mg - bv - \rho_f \text{ Volumen } g &= ma \end{aligned} \tag{1}$$

Tomando como area transversal (A_t), proporcionada por el perímetro de los hombros de una persona con una estatura promedio de 1.75 m, el area de un círculo de radio (0.19 m). Los datos de volumen fueron tomados por aproximaciones al cuerpo humano con un valor de (0.0664 m^3) La tabla de los valores usados para la solución del ejercicio:

$$\begin{array}{ll} m = 80 \text{ kg} & V_{\text{olumen}} = 0.0664 \text{ m}^3 \\ g \approx 10 \text{ m/s} & b = \frac{1}{2}\text{Cd} \cdot P_F \cdot A_t \\ r = 0.19 - 6 \text{ m} & Cd = 0.47 \\ A_t = 0.116 \text{ m}^2 & \end{array} \tag{2}$$

Para conocer la velocidad inicial, se decidió dividir el problema en dos sistemas, el primero con una altura (h) de 10 m justo antes de tocar el agua y el segundo cuando la persona entra al agua h= 5m, conociciendo la energía potencial mgh y la energía cinética $1/2mv^2$ del sistema en el punto x=0 y x=10 y sabiendo que la energía se conserva, hallamos v como $v = \sqrt{2gh} \approx 14m/s$

Reemplazando en la ecuación (1), la aceleración nos da un valor de (-77.7 m/s^2). Para plantear el sistema se usaron las fórmulas de dinámica de M.R.U.A para conocer el tiempo en que una persona demora en caer del agua, $a = \frac{V_f - V_i}{t}$, donde la velocidad inicial es 14 y la velocidad final es 0. El tiempo calculado fue de 0.1818 s, este tiempo nos ayuda a calcular la distancia que se recorrió usando la desaceleración del sistema. $d = 1/2at^2 + V_it \approx 4m$. Podemos concluir que 5 m es la profundidad segura para que un clavadista se tire desde una plataforma de 10 m.

(b) Suponga que un corcho esférico de 5 cm de diámetro está en el fondo de fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

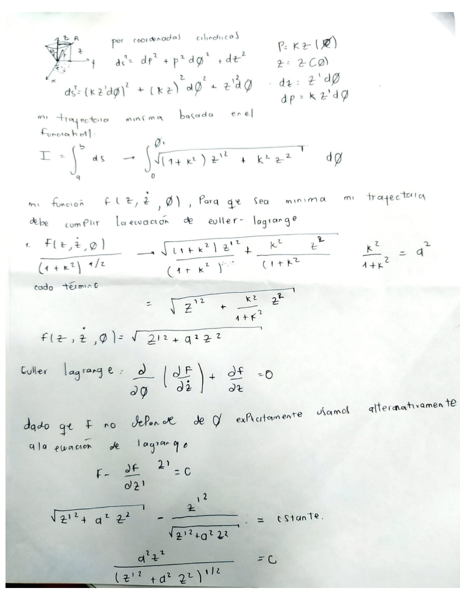
Para conocer la masa del corcho utulizamos el dato de densidad=256.77 m/v, donde el volumen del corcho esférico es $(6.54 \times 10^{-5}m^3)$ dado que su masa $m = 1.68 \times 10^{-2}kg$ es tan pequeña despreciaremos la fuerza de fricción dada en el fluído. La ecuación que describe el sistema de fuerzas queda:

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{F_y} &= ma \\ mg - \rho_f \text{ Volumen } g &= ma \end{aligned} \tag{3}$$

Resolviendo el sistema de fuerzas la aceleración nos da un valor de $30m/s^32$, usando que $V_F = \sqrt{2ad} = 17.3m/s$

(c) Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superfie

2. El siguiente enlace utiliza los resultados de un artículo que describen el movimiento de una partícula sobre una superficie sin fricción. Calcule la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie del cono invertido cuyo ángulo de vértice es .



por coordenadas cilindricas

$ds^2 = dp^2 + p^2 d\phi^2 + dz^2$

$ds^2 = (kz'd\phi)^2 + (kz)^2 d\phi^2 + z'^2 d\phi$

$p = kz(\phi)$
$z = z(\phi)$
$dz = z' d\phi$
$dp = kz'd\phi$

mi trayectoria minima basada en el funcional:

$I = \int_a^b ds \rightarrow \int_0^{\phi_1} \sqrt{(1+k^2)z'^2 + k^2 z^2}\, d\phi$

mi función $f(z, \dot{z}, \phi)$, Para qe sea minima mi trayectoria debe cumplir la ecuación de euller-lagrange

1. $\frac{f(z,\dot{z},\phi)}{(1+k^2)^{1/2}} \rightarrow \sqrt{\frac{(1+k^2)z'^2}{(1+k^2)} + \frac{k^2}{(1+k^2)} z^2}$ $\quad \frac{k^2}{1+k^2} = a^2$

cada término

$= \sqrt{z'^2 + \frac{k^2}{1+k^2} z^2}$

$f(z, \dot{z}, \phi) = \sqrt{z'^2 + a^2 z^2}$

Euller lagrange: $\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

dado qe f no depende de ϕ explicitamente usamos alternativamente a la ecuación de lagrange

$f - \frac{\partial f}{\partial z'} z' = c$

$\sqrt{z'^2 + a^2 z^2} - \frac{z'^2}{\sqrt{z'^2 + a^2 z^2}} = $ cstante.

$\frac{a^2 z^2}{(z'^2 + a^2 z^2)^{1/2}} = c$

despejando z' para resolve.

$$z' = \pm az\sqrt{\frac{a^2}{c^2}z^2 - 1} \longrightarrow z \text{ incremento en la dirección contraria a las manecillas}$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2z^2/c^2-1}} = a\phi + \alpha_1 \qquad \longrightarrow \int \frac{dz}{z(z^2-1)^{1/2}} = \sec^{-1} z$$

$$a\phi + \alpha_1 = \sec^{-1}[(a/c)z]$$

$$z(\phi) = \frac{c}{a\cos(a\phi + \alpha_1)}$$

3. Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial.

   Para comenzar debemos considerar la longitud entera del cable, la cual se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$L = \int_{-a}^{a} dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} 1dx \tag{4}$$

   El problema requiere que directamente analicemos la energía potencial del cable, el cual lo podemos tomar como:

$$U = \int_{-a}^{a} gy\lambda ds = \int_{-a}^{a} g\lambda y\sqrt{1+\dot{y}^2}dx \tag{5}$$

   Siendo λ la densidad lineal del cable. La ecuación que dimos anteriormente para la longitud del cable funciona a su vez como una ligadura para determinar el tamaño del mismo, por esto mismo definiremos una función F que considere la expresión dentro de la integral para el potencial y un término adicional que corresponde a la ligadura multiplicada por una constante k (Tal como indican los multiplicadores de Lagrange).

$$F((y, y, x) = xgy\sqrt{1+\dot{y}^2} + k\sqrt{1+\dot{y}^2} \tag{6}$$

   Para al resolución de este problema usaremos una expresión análoga a la usada convencionalmente para las ecuación de Euler-Lagrange, la cual es la siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y}\right) = 0 \tag{7}$$

Al aplicarla sobre nuestra función F se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - F = c_1 \\
&(\lambda g y + k)\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} - \sqrt{1+\dot{y}^2}\right) = c_1 \\
&(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{(\lambda g y + k)^2}{{C_1}^2} - 1
\end{aligned} \tag{8}
$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se llega a la siguiente ecuación para y:

$$
y = -\frac{k}{\lambda g} + \frac{a}{\gamma}\cosh\left(\gamma\frac{x}{a} + C_2\right) \tag{9}
$$

En donde $\gamma = \frac{\lambda g a}{c_1}$. Esta expresión coincide con la que se espera de una catenaria, por lo tanto esta es la fomra que minimiza la energía potencial.