

## Primera Asignación

Considere el caso de dos péndulos de igual masa  $m$  y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud  $l$ . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica  $k$ .

1. Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema

Para el planteamiento de la solución al problema decidimos partir del uso de vectores que indiquen la posición de cada una de las masas que conforman el sistema, a continuación se puede ver una representación de cada uno de estos vectores:

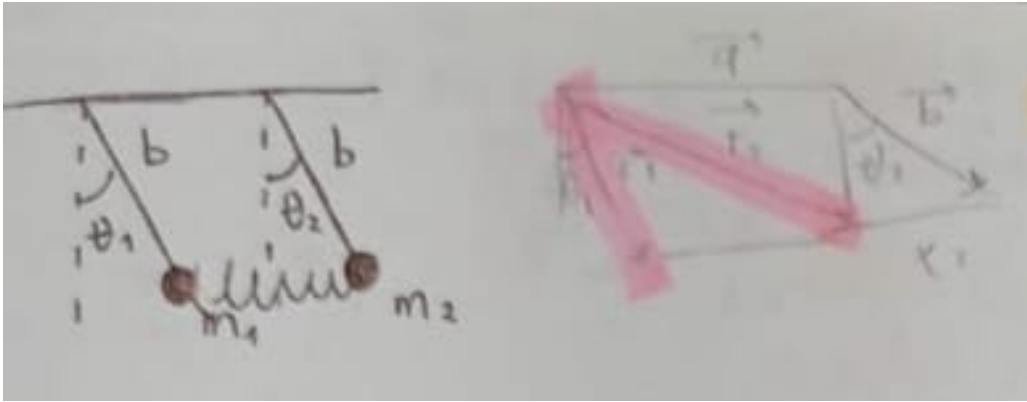


Figura 1: Los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  se definen a partir del origen del sistema coordenado

Como se puede apreciar en la imagen 1, se tomaron como coordenadas generalizadas  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , el cual es el ángulo que forman los péndulos de los cuerpos 1 y 2 con respecto al eje Y. Se tomó esta cantidad de coordenadas generalizadas ya que es la apropiada luego de tener en cuenta la ligadura que supone la longitud de la cuerda que forma al péndulo.

También se formularon los vectores  $\vec{a}$  el cual es un vector con magnitud igual a la longitud natural del resorte y el vector  $\vec{b}$ , que indica la dirección en la cual se encuentra la cuerda del segundo cuerpo.

Teniendo en cuenta los vectores formulados anteriormente los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= b\sin(\theta_1)\hat{i} - b\cos(\theta_1)\hat{j} \\ \vec{r}_2 &= \vec{a} + \vec{b} = (a + b\sin(\theta_2))\hat{i} - b\cos(\theta_2)\hat{j}\end{aligned}$$

Y los vectores velocidad estarán dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= b\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)\hat{i} + b\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)\hat{j} \\ \vec{r}_2 &= b\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)\hat{i} + b\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)\hat{j}\end{aligned}$$

Teniendo estas igualdades se procederá a construir la energía potencial y cinética de nuestro sistema

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mgb(1 - \cos \theta_1) + mgb(1 - \cos \theta_2)$$

En donde nuestro  $\Delta x$  estará dado por:

$$\Delta x = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a \longrightarrow \left( (b \sin \theta_1 - a - b \sin \theta_2)^2 + (b \cos \theta_2 - b \cos \theta_1)^2 \right)^{1/2} - a$$

$$\Delta x = [b^2 \sin^2(\theta_1) - 2ba \sin(\theta_1) - 2b^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + a^2 + b^2 \sin^2(\theta_2) + 2ba \sin(\theta_2) - 2b^2 \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) + b^2 \cos^2(\theta_1)]^{1/2} - a$$

$$\Delta x = [-2b^2(\cos(\theta_2 - \theta_1) + 2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1))]^{1/2} - a$$

El lagrangiano para los péndulos acoplados mediante un resorte sería:

$$L = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgb(1 - \cos \theta_1) - mgb(1 - \cos \theta_2) - \frac{k}{2}((-2b^2(\cos(\theta_2 - \theta_1) + 2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1))) - 2a(-2b^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1))^{1/2} + a^2$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el Lagrangiano llegamos a las siguientes ecuaciones de segundo orden para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$\theta_1 \longrightarrow m b \ddot{\theta}_1 + m g b \sin \theta_1 - k (b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + b a \cos \theta_1) + \frac{a k}{2} (2b^2 + a^2 + 2ab(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2b^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)^{-1/2} (2b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2ba \cos \theta_1)) = 0$$

$$\begin{aligned}\theta_2 \longrightarrow m b \ddot{\theta}_2 + m g b \sin \theta_2 + k (b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + b a \cos \theta_2) - \frac{k a}{2} ((2b^2 + a^2 + 2ba(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2b^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)^{-1/2} (b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2ba \cos \theta_2)) = 0\end{aligned}$$

Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.

Para la solución del sistema se utilizó el paquete *solve\_ivp* de la librería *scipy.py*.

Las condiciones iniciales que modelamos para el sistema son:

- $m = 1$
- $b = 1$
- $g = 9.81$
- $k = 1$
- $a = 1$

Donde  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  cuando  $r_2 = a$  que es la longitud del resorte en la posición de equilibrio.

para conseguir movimiento en las gráficas obtenidas computacionalmente las condiciones iniciales para  $\theta_1 = \pi/6$  y  $\theta_2 = \pi/8$ . Se escogió un intervalo de tiempo de (0,1000) s

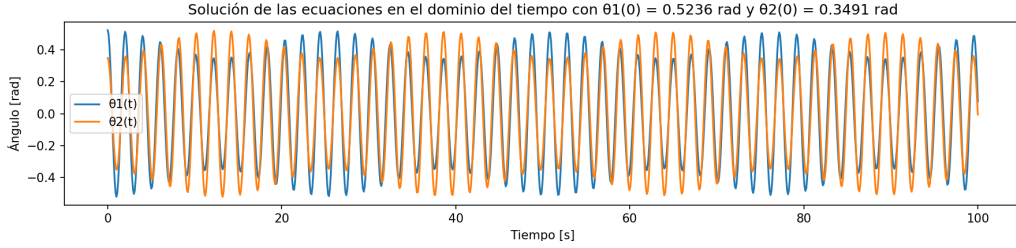


Figura 2: trayectoria con respecto a los ángulos

Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de ¿Las Varillas? ¿cómo influye la relación  $m_1/m_2$  si consideramos que las masas son diferentes? ¿cómo influye la relación  $l_1/l_2$  si consideramos que el largo de las varillas es diferente?

Para este caso se tomarán dos longitudes diferentes para cada péndulo b y c que corresponden al péndulo 1 y 2 respectivamente y dos masas  $m_1$  y  $m_2$ .

El planteamiento es similar al caso anterior, por lo tanto:

$$\vec{r}_1 = b \sin \theta_1 \hat{i} - b \cos \theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{a} + \vec{c} = (a + c \sin \theta_2) \hat{i} - (c \cos \theta_2) \hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\theta}_1 b \cos \theta_1 \hat{i} + b \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = c \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \hat{i} + \dot{\theta}_2 c \sin \theta_2 \hat{j}$$

Y por lo tanto, nuestro  $\Delta x$  será:

$$\Delta x = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a \rightarrow \left( (b \sin \theta_1 - a - c \sin \theta_2)^2 + (-b \cos \theta_1 + c \cos \theta_2)^2 \right)^{1/2} - a$$

$$\Delta x = (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(-b \sin \theta_1 + c \sin \theta_2))^{1/2} - a$$

El lagrangiano toma la siguiente forma si consideramos las nuevas condiciones del sistema:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 b^2 + \frac{1}{2} m_2 c^2 \dot{\theta}_2^2 - m_1 g b (1 - \cos \theta_1) - m_2 g c (1 - \cos \theta_2) - \frac{k}{2} [ (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1)) - 2a (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1))^{1/2} + a^2 ]$$

A partir del cual salen las siguientes ecuaciones de movimiento gracias a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \theta_1 \longrightarrow m_1 \ddot{\theta}_1 b^2 + m_1 g b \sin \theta_1 - k (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + ab \cos \theta_1) + ak/2 (c^2 + a^2 + b^2 - 2c \\ b (\cos (\theta_2 - \theta_1)) + 2a (c \sin \theta_2 - b \sin \theta_1)^{-1/2} (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + abc \cos \theta_1) = 0 \\ \theta_2 \longrightarrow m_2 \ddot{\theta}_2 c^2 + m_2 g c \sin \theta_2 + k (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + ac \cos \theta_2) - k/2a ((c^2 + a^2 + b^2 - 2bc (\cos (\theta_2 - \theta_1) \\ + 2a \cos \theta_2 - b \sin \theta_1)^{-1/2} (cb \sin (\theta_2 - \theta_1) + ac (\cos \theta_2))) = 0 \end{aligned}$$

para un sistema donde las masas son diferentes y tienen diferente longitud con respecto a la varilla, nos encontramos con estas condiciones iniciales:

- $m_1 = 1$
- $m_2 = 10$
- $g = 9.81$
- $k = 1$
- $a = 1$
- $b = 1$
- $c = 10$

Donde c y b corresponden a la longitud de las varillas para la  $m_1$  y para la  $m_2$

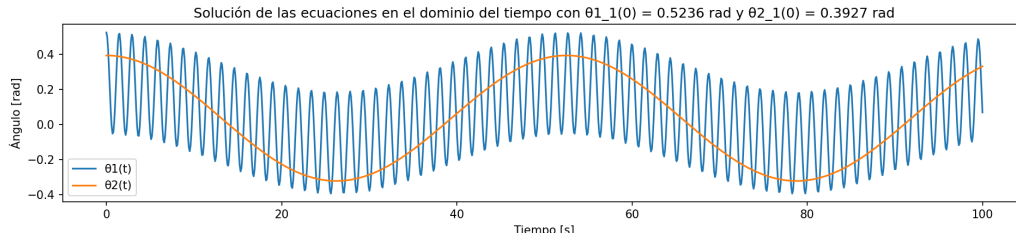


Figura 3: Ángulo respecto al tiempo con masas y longitudes diferentes

Para el sistema donde el resorte se encuentra en la mitad de las varillas de masas  $m_1$  y  $m_2$  tenemos las mismas condiciones iniciales del sistema con masas iguales y longitudes iguales, quiere decir:

- $m = 1$
- $b = 1$
- $g = 9.81$
- $k = 1$
- $a = 1$

Pero el cambio en las oscilaciones se encuentran en la energía potencial del resorte, dado a que la elongación estará dada por:

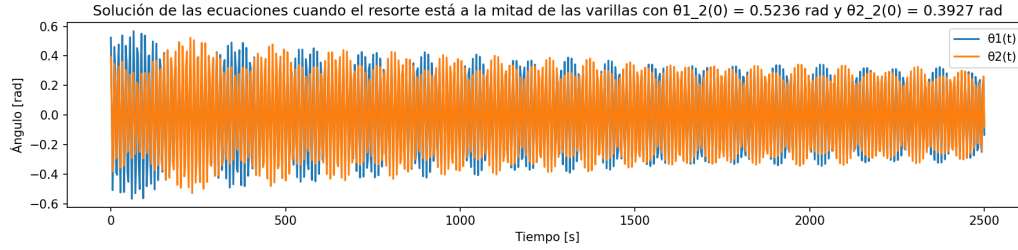


Figura 4: Ángulo respecto al tiempo cuando el resorte está en la mitad de las varillas

$$\Delta x = (c^2 + a^2 + b^2 - 2cb(\cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2a(-b \sin \theta_1 + c \sin \theta_2))^{1/2} - a$$

¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico

Analice el comportamiento de su señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

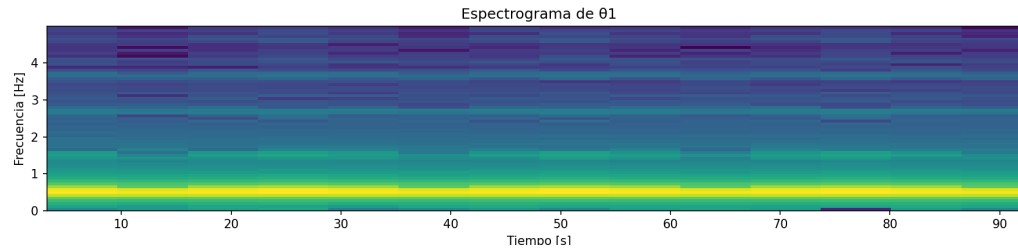


Figura 5: Espectrograma para  $\theta_1$

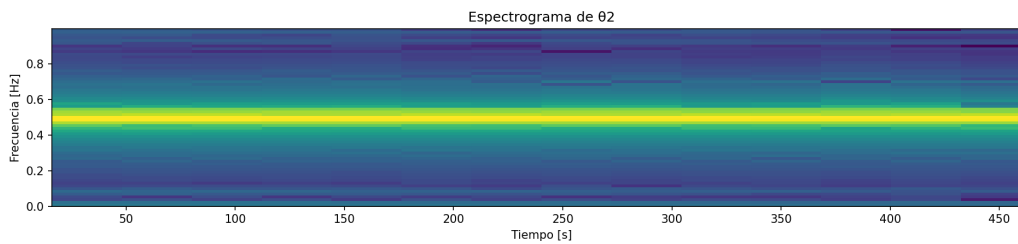


Figura 6: Espectrograma para  $\theta_2$

Simplifique las ecuaciones suponiendo pequeñas oscilaciones. Esto es: considere  $\theta_1 \approx 0$ ,  $\theta_2 \approx 0$  y  $\dot{\theta}_1 \approx 0$ ,  $\dot{\theta}_2 \approx 0$ . Sen  $\theta_1 \approx \theta_1$ , Sen  $\theta_2 \approx \theta_2$ , cos  $\theta_1 \approx 1$  y cos  $\theta_2 \approx 1$ . Repita el análisis anterior, en los puntos

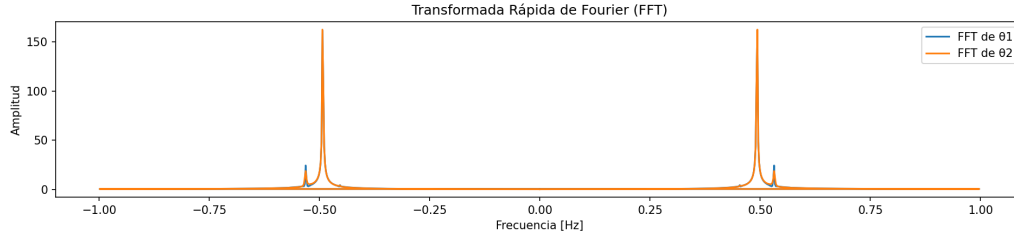


Figura 7: Señal de la trasformada de Fourier

2, 3, 4 y 5.

Tomando el lagrangiano para el caso de ángulos generales, hallado en el primer punto y aplicándole las aproximaciones adecuadas para ángulos pequeños llegamos a la siguiente ecuación para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

$$\begin{aligned}\theta_1 &\Rightarrow 2mb\ddot{\theta}_1 + mgb\theta_1 - kb^2(\theta_2 - \theta_1) + ba + \frac{ak}{2}((2b^2 + a^2 + \\ &2ab((\theta_2 - \theta_1) - 2b^2\theta_2\theta_1)^{-1/2}(2b^2(\theta_2 - \theta_1) + 2ba) = 0 \\ \theta_2 &\Rightarrow mb\ddot{\theta}_2 + mgb\theta_2 + kb^2(\theta_2 - \theta_1) + ba - ka/2(2b^2 + a^2 + \\ &2ba(\theta_2 - \theta_1) - 2b^2\theta_2\theta_1)^{-1/2}(b^2(\theta_2 - \theta_1) + 2ba) = 0\end{aligned}$$

1. Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.
2. Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de Las Varillas? ¿cómo influye la relación  $m_1/m_2$  si consideramos que las masas son diferentes? ¿cómo influye la relación  $l_1/l_2$  si consideramos que el largo de las varillas es diferente?

Nuevamente tomando las ecuaciones obtenidas para el caso general en el punto 3 y aplicando las aproximaciones adecuadas para el caso en el que las oscilaciones se den en ángulos pequeños, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\Rightarrow m_1\ddot{\theta}_1 b^2 + m_1gb\theta_1 - k(cb(\theta_2 - \theta_1) + ab) \\ &+ ak/2(c^2 + a^2 + b^2 - 2cb\theta_2\theta_1) + 2a(c\theta_2 - b\theta_1)^{-1/2} \\ &(cb(\theta_2 - \theta_1) + ab) = 0 \\ \theta_2 &\Rightarrow m_2\ddot{\theta}_2 c^2 + m_2gc\theta_2 + k(cb(\theta_2 - \theta_1) + ac) \\ &- k/2a(c^2 + a^2 + b^2 - 2bc(\theta_2\theta_1) + 2a(c\theta_2 - b\theta_1)^{-1/2} \\ &(cb(\theta_2 - \theta_1) + ac) = 0\end{aligned}$$

Ahora, en el caso en el que la varilla se halle en medio de las barras, contrario a la situación inicial planteada, atado a las masas, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\theta_1 \Rightarrow mb_0^2 \theta_1 - \left[ -mgb\theta_1 - \frac{k}{2} \left[ (-ab - b^2/2(\theta_2 - \theta_1)) \right. \right. \\ \left. \left. - a \left[ (1/2b^2 + a^2 + ab(\theta_2 - \theta_1) - b^2/2\theta_1\theta_1)^{-1/2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (ab \cos \theta_1 - b^2/2(\theta_2 - \theta_1)) \right] \right] = 0 \\ \theta_2 \Rightarrow mb_2^{200} - \left[ -mgb\theta_2 - \frac{k}{2} \left[ (ab + b^2/2(\theta_2 - \theta_1)) \right. \right. \\ \left. \left. - a \left( 1/2b^2 + a^2 + ab(\theta_2 - \theta_1) - b^2/2\theta_2\theta_1 \right)^{-1/2} \right. \right. \\ \left. \left. \left. (ab + b^2/2(\theta_2 - \theta_1)) \right] \right] = 0\end{aligned}$$

En las cuales se puede ver que efectivamente hay una variación con respecto a las ecuaciones obtenidas cuando el resorte está atado a las masas.

3. ¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico
4. Analice el comportamiento de su señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

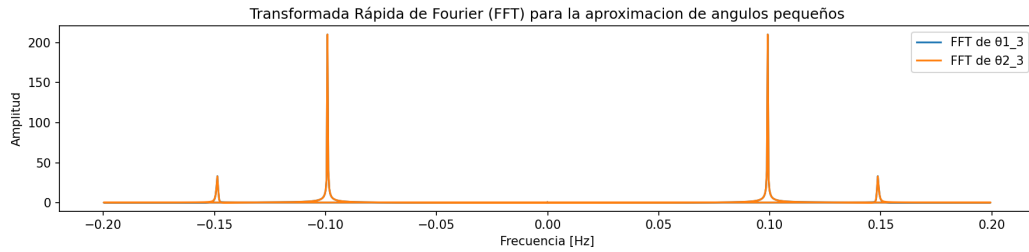


Figura 8: Señal en términos de la transformada de Fourier para ángulos pequeño

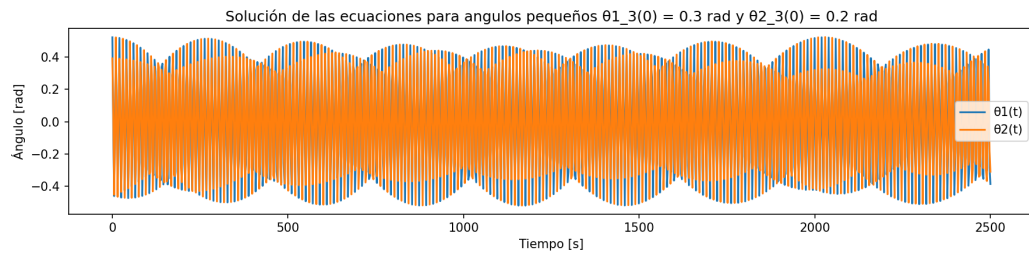


Figura 9: Solución de las ecuaciones para ángulos pequeños, con diferente masas y diferentes longitudes de varilla