Reconstrucción de Superficies

* Reconstrucción tridimensional de superficies usando métodos de interpolación

Sebastián Gutiérrez Zambrano
Depto. Ingenieria de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
sebastian_gutierrez@javeriana.edu.co

Laura Mariana Jiménez Jiménez
Depto. Ingenieria de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
la.jimenez@javeriana.edu.co

Paula Valentina Sanchez Peña
Depto. Ingenieria de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
pa-sanchez@javeriana.edu.co

***Abstract*—Este documento presenta el proceso de recostrucción de un modelo 3D a tráves de dos métodos de interpolación numerica partiendo del conocimiento de un conjunto de puntos inicialmente definidos para formar la aproximación más cercana al modelo inicial.**

***Index Terms*—Bézier, Splines, interpolación, reconstrucción de curvas, coordenadas de control, aproximación.**

I. Introducción

La reconstrucción de superficies 3D es el proceso por el cual objetos reales de uso común son representados en la memoria de un computador a través de un conjunto de puntos de datos, teniendo en cuenta sus características físicas como las partes que lo componen, forma, textura, volumen, dimensiones e incluso su color de ser necesario. Si bien, con su definición no se percibe como un proceso muy útil, gracias a la evolución de la computación se han encontrado muchas aplicaciones especialmente en el campo de la medicina en la elaboración de modelos de fisioterapia y ortopedia como prótesis y férulas o en la arqueología en términos de restauración de objetos con valor histórico deteriorados como esculturas, vasijas, monumentos, entre otros [1].

Por su parte, la reconstrucción de modelos 3D es un ámbito de aplicación de la geometría computacional que es una rama de las ciencias computacionales que se encarga del diseño y análisis sistemático de algoritmos y estructuras de datos necesarios para la solución eficiente de problemas que implican como entrada y salida objetos geométricos [2]. Otros ámbitos abarcados por la geometría computacional son Visión Artificial, Sistemas de Información Geográfica (SIG), Robótica y Biología Molecular.

Existen diferentes técnicas para realizar una reconstrucción de modelos 3D, por ejemplo, usando superficies trianguladas, usando análisis de regresión o usando un subcampo matemático del análisis numérico denominado interpolación, esta última será utilizada en la problemática del presente documento, específicamente usando las técnicas de curvas de Bézier, una técnica utilizada en la realización de gráficos para modelar curvas de comportamiento suave [3] e interpolación por Splines cuadráticos con nodos que están constituidos por parábolas a trozos, unidas entre sí no sólo con continuidad sino también con tangente continua.

En el presente documento se presentará el proceso de reconstrucción de una jarra, objeto que debido a sus características de superficie comparte similitudes con un cilindro con las suficientes modificaciones en su simetria puede presentarse como un problema de interpolación con nivel mayor de complejidad. Él objetivo es conseguir la recontrucción de este objeto teniendo en cuenta la totalidad de sus partes y sus curvas de nivel usando superficies de Bezier y otro método como Splines para realizar una comparación. El proceso se encuentra dividido en cinco partes, obtención de puntos, métodos aplicados, reconstrucción, comparación entre métodos y finalmente errores calculados.

II. Teoría

A. *Curvas de Bézier*

Las curvas de Bézier son un instrumento de interpolación generalmente utilizado para generar modelos gráficos en un ordenador que cumplan la característica de ser curvas "suaves", esto quiere decir que no contenga picos o puntos angulosos. Para su construcción se toman un conjunto finito y ordenado de puntos conocidos como puntos de control donde el primero y el último se unen por un trazo que se modela influenciado por los demás puntos que forman el conjunto evitando la formación de puntas para producir una deformación suave de la misma [4].

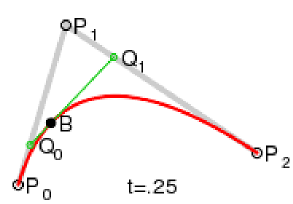

Fig. 1. Curva cuadrática de Bézier.

Los puntos de control utilizados para generar la curva de Bézier del gráfico anterior son P0, P1 y P2. Q0 se mueve de acuerdo a la ecuación $Q0 = P0 + t(P1P0)$, donde $0t1$ entre P0 Y P1, por su parte t es una medida de porcentaje del camino recorrido, por lo que si $t = 0$ entonces $Q0 = P0$, en ese sentido si $t = 1$ entonces $Q0 = P1$ y los valores intermedios son puntos intermedios en el segmento P0Q0. De esta misma manera Q1 recorre el segmento P1P2 siguiendo la ecuación $Q1 = P1 + t(P2P1)$ y finalmente B está situado sobre el segmento $Q0Q1$ para cada t siguiendo la ecuación $Q0 + t(Q1Q0)$. Partiendo de lo anterior se concluye que la ecuación de la curva cuadrática de Bézier está dada por:

$$\begin{aligned} B(t) &= Q_0 + t(Q_1 - Q_0) = (1-t)Q_0 + tQ_1 \\ &= (1-t)\Big((1-t)P_0 + tP_1\Big) + t\Big((1-t)P_1 + tP_2\Big) \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$

Existen tres tipos principales de curvas de Bézier, curva lineal la cual es una línea recta entre los dos puntos, curva cuadrática la cual fue explicada anteriormente y la curva cúbica la cual define su trayectoria a partir de 4 puntos definidos en el espacio. Para realizar la curva se sigue un proceso similar al de las curvas cuadráticas, en este caso se usan los puntos P0, P1, P2 Y P3, la curva comienza en el punto P0 y se dirige hacia P1 y llega a P3 viniendo de la dirección del punto P2 . [5]

Siguiendo el mismo procedimiento se pueden generar curvas de Bézier de grado mayor al cubíco, sin embargo esto implica un esfuerzo computacional mayor y por esta razón no suele ser de uso común.

B. Interpolación por Splines

La definición matemática de un Spline hace referencia a una curva diferenciable que está formada por pequeños segmentos de línea definidos por polinomios. La interpolación con Splines es comúnmente usada porque es muy precisa y se pueden obtener resultados satisfactorios con el uso de simples polinomios. Su simplicidad de representación y la facilidad de cómputo de los splines los hacen populares para la representación de curvas en informática, particularmente en gráficos generados por el computador, además son utilizados para trabajar tanto en una como en varias dimensiones [6].

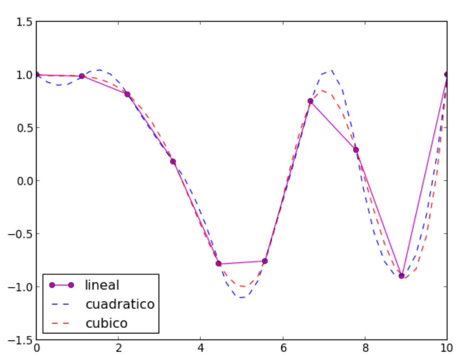

Fig. 2. Interpolaciones realizadas con los tres tipos de Splines.

Igual que en el caso de las curvas de Bezier, los Splines pueden ser lineales, cuadráticos y cúbicos. En la interpolación segmentaria cuadrática, los splines se construyen a través de polinomios de grado 2:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Para la interpolación segmentaria cuadrática se tienen un total de n-1 ecuaciones, siendo n los puntos sobre los cuales se define la función. Este tipo de interpolación asegura que la función que nosotros generemos a trozos con los distintos P(x) va a ser continúa.

III. Caso de Estudio

A. Problemática

Una jarra es un recipiente de cuello y boca anchos y típicamente con una asa u oreja, con o sin pico vertedor y una altura inferior a 35 cm, utilizada comúnmente como utensilio de servicio a la mesa, sin embargo, debido a sus características como superficie similar a un cilindro en cuanto a su forma, pero con las suficientes variaciones simétricas se puede presentar como un problema de interpolación interesante pues estas diferencias convierten el objeto en una reconstrucción con nivel mayor de complejidad. Ésta es la problemática que el presente documento pretende resolver, el objetivo es conseguir la reconstrucción de la jarra que se muestra en la siguiente figura con sus curvas de nivel a partir de un conjunto de puntos inicial haciendo uso de métodos numéricos de interpolación como curvas de Bézier e interpolación por Splines con el objetivo de obtener la aproximación más cercana al modelo de la jarra inicial.

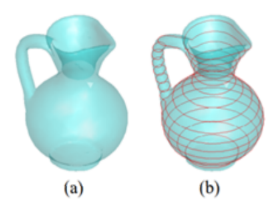

Fig. 3. Modelo inicial de la jarra.

B. Solución

La idea principal para la solución del problema consiste en aplicar funciones de Interpolación, tanto de Splines como con Curvas de Bezier, a un conjunto de puntos que representen la superficie que se va a reconstruir, en ese caso una jarra. Por lo tanto, el primer paso es encontrar dicho conjunto de puntos que representen vértices claves de la superficie, estos puntos deben estar organizados para facilitar la interpolación. Teniendo un conjunto de puntos ya definidos y organizados se procede a aplicar las funciones de Interpolación sobre los puntos haciendo uso de R como herramienta para realizar la interpolación. Vale la pena mencionar que se debe tener en cuenta la dimensión Z pues se va a graficar de manera tridimensional para finalmente lograr una reconstrucción acertada y cercana de la jarra. Los puntos se organizan justamente tomando como referente a Z para que la reconstrucción se realice de abajo hacia arriba.

C. Modelado y obtención de puntos

Para hallar los puntos a graficar se utilizó un software de modelado mecánico 2D y 3D llamado $solidworks$. Se generaron un conjunto de circunferencias que formaran la aproximación más cercana a la jarra y se exportó un archivo de extensión .stl el cual guarda los puntos de control que serán usados en la interpolación. El objeto fue modelado en tres partes diferentes cuerpo, manija y boquilla que después fueron ensamblados en otro software con manejo de gráficos tridimensionales llamado $Blender$ para finalmente generar un modelo de jarra completo y exportar un archivo .obj con el cual se va a trabajar. El resultado final de este proceso se puede ver a continuación:

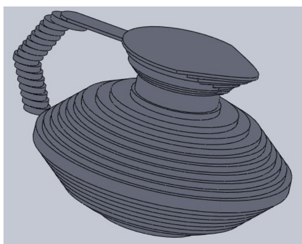

Fig. 4. Modelo obtenido con Solidworks y ensamblado con Blender.

Si bien, al exportar este el modelo se genera un archivo el cual puede ser visualizado con cualquier editor de texto con un conjunto de datos bastante amplio como coordenadas de punto, coordenadas de textura y coordenadas de sombra para realizar el modelo con curvas de Bézier y Splines en R solo es necesario tener el conjunto de puntos ya organizados, estos se encuentran en el archivo coordenadas.txt

D. Descripción de puntos

Para la reconstrucción con curvas de Bézier y con Splines se utilizaron el mismo conjunto de puntos, además es importante aclarar que se realizó la interpolación del objeto divida en tres partes diferentes (cuerpo, boquilla y oreja) debido a que cada una de las partes presentaba una forma diferente que debia ser representada de manera que su resultado fuera lo más aproximado al modelo original. Para el cuerpo del modelo se utilizaron un total de 126 puntos aproximadamente pues eran necesarios un total de 6 puntos por cada curva y se realizaron 21 de ellas para obtener la reconstrucción más cercana, por otro lado, para la oreja del modelo fueron necesarios 140 puntos, 10 por cada curva de nivel con un total de 14 niveles y finalmente para la reconstrucción de la boquilla – parte superior de la jarra - se usaron 9 puntos para interpolar 17 curvas de nivel, lo que supone un total de 153 puntos.

E. Reconstrucción

La reconstrucción de los modelos fue realizada en tres partes principales: Modelo del objeto inicial para la obtención de coordenadas, reconstrucción aplicando curvas de Bézier y reconstrucción aplicando interpolación por Splines. Estos procesos son los explicados en los diagramas de flujo que se encuentras a continuación.

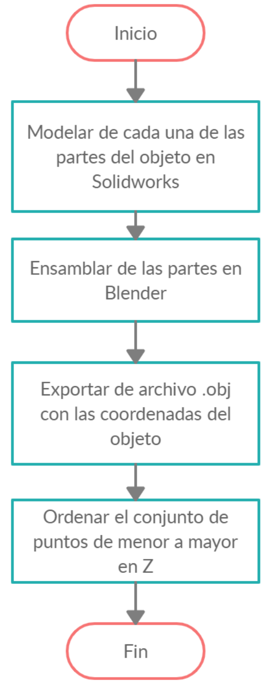

Fig. 5. Diagrama de flujo obtención del conjunto de puntos.

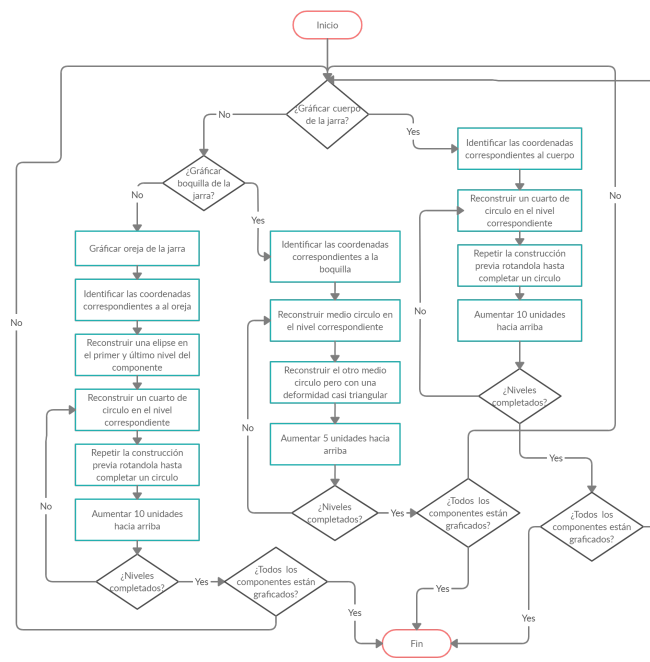

Fig. 6. Diagrama de flujo interpolación por curvas de Bézier.

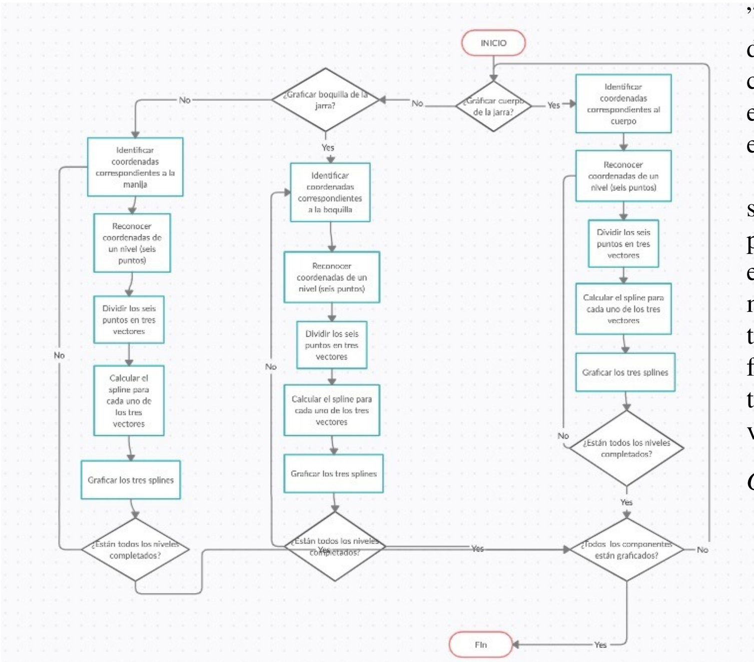

Fig. 7. Diagrama de flujo interpolación por Splines.

F. Errores

Para el volumen teórico se usó la opción 3d Printing en la herramienta Blender pues esta permite obtener el volumen del objeto previamente modelado. El valor fue calculado en cm^3 y luego manualmente transformado a metros m^3 siguiente las medidas del sistema internacional de unidades SI.

Para el volumen del modelo interpolado con curvas de Bézier fue necesario hacer tres cálculos: El volumen del cuerpo del objeto que fue calculado usando la fórmula de volumen del cilindro $\pi r^2 h$, pues por cada nivel se calculaba su volumen aproximado como si fuera un cilindro y luego se realizó la sumatoria de todos estas porciones de volúmenes para conseguir el total. Por su parte la boquilla fue aproximada a un prisma, por lo que la fórmula utilizada fue $A_b h$ y de la misma manera que con el cuerpo se calcularon los volúmenes entre niveles y se realizó la sumatoria final. En cuanto a la oreja la mayor parte de sus niveles se tomaron de forma cilíndrica a excepción del primer y último nivel que al ser de forma elíptica el r^2 fue remplazado por Rr siento R el radio mayor y r el radio menor de la figura y como en los casos anteriores se calculó la sumatoria total para obtener el volumen completo. Teniendo estos tres cálculos realizados no hace falta nada más aparte de sumarlos para obtener el volumen experimental por interpolación de curvas de Bézier del modelo.

Para el volumen del modelo realizado con Splines fue necesario conocer la manera de calcular el área de un polígono. Debido a la manera en que se calcularon los Splines, cada nivel de la jarra termina siendo un polígono con tantos vértices como puntos se hayan utilizado en la interpolación, en la mayoría de niveles se utilizaron seis puntos. Entonces se creó la función ”área”, que dados dos vectores uno con las coordenadas en x de los vértices del polígono y otro con las coordenadas en y calcula el área del polígono. Teniendo el área es fácil sacar el volumen pues este resultado se multiplica por la distancia entre un nivel y otro.

Para el caso del modelo interpolado con Splines también se calculó el error relativo, fue necesario hacer el cálculo por cada spline. Luego se realizó el promedio de todos estos errores. Se puede notar que los errores son significativamente más pequeños ya que se tomaron muchos puntos. Cómo valor teórico se tuvo en cuenta la función splinefun que devuelve la función interpolada del splien y para el valor experimental se tomaron los puntos originales en y. Estos valores pueden ser vistos en la parte de resultados del presente documento.

G. Fuentes de información

- **Solidworks** Software para modelado mecánico en 2D y 3D, desarrollado en la actualidad por SolidWorks Corp que permite modelar piezas y conjuntos y extraer de ellos diferentes tipos de información necesaria para la producción [7]. En esta herramienta se modelaron y exportaron cada una de las partes de la jarra por separado.
- **Blender** Programa informático multiplataforma, dedicado al modelado, iluminación, renderizado, animación y creación de gráficos tridimensionales utilizando la técnica procesal de nodos, edición de vídeo, escultura y pintura digital [8]. En este software se importaron los archivos .stl generados por Solidworks y se ensamblaron las partes para obtener un modelo completo y finalmente exportar un archivo .obj con el conjunto de puntos inicial a usar.
- **Función para interpolación de curvas de Bézier en R** Esta función genera puntos a lo largo de una curva o spline de Bézier (curvas de Bézier concatenadas) en valores paramétricos especificados. Para su funcionamiento recibe una matriz P que contiene todos los puntos a graficar en x, y y z además de un valor t que contiene la secuencia de particiones [9].Es necesario el uso de la liberia ”rgl” proveida por R, la cual permite la renderización 3D en tiempo real es decir, con rotación ilimitada.
- **Función para interpolación con Splines en R** La interpolación con splines se realizó usando la función Splines que presenta una interpolación de splines cúbicos dada una serie de puntos. También se utilizó la función Splinefun la cual retorna la función que corresponde a la interpolación de los puntos dados. [10] Es necesario el uso de la liberia ”rgl” proveida por R, la cual permite la renderización 3D en tiempo real es decir, con rotación ilimitada.

IV. Modelo

A. Solución

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente explicado y siguiendo cada uno de los pasos para la obtener el conjunto de coordenadas y los diferentes métodos de interpolación para obtener las reconstrucciones 3D se obtuvieron los siguientes modelos como resultados:

- Reconstrucción tridimenional realizada con curvas de Bézier.

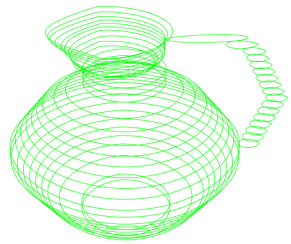

Fig. 8. Interpolación por curvas de Bézier.

- Reconstrucción tridimenional realizada con Splines.

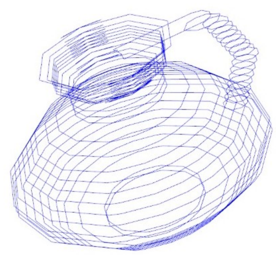

Fig. 9. Interpolación por Splines.

B. Errores

- **Volumen del objeto original modelado en un software (dato teórico):** 18369744.3400319539945 m^3
- **Volumenes por componente del modelo con Bézier:** Estos fueron calculados usando como herramienta R bajo una precisión de 128 bits.
  - Volumen del cuerpo: 16226326.055791282095015048980712890625 m^3
  - Volumen de la boquilla: 1833904.711533041685470379889011383056641 m^3
  - Volumen de la oreja: 230645.5224504384495958220213651657104492 m^3
- **Volumen total del modelo con curvas de Bézier:** 18290876.28977476223008125089108943939209 m^3
- **Volumen total del modelo con interpolación por Splines:** Este fue calculado usando como herramienta R bajo una precisión de 128 bits. 18507834.49164750031195580959320068359375 m^3

Método de interpolación	Error Relativo	Error Absoluto
Curvas de Bézier	0.0042933%	78868.050257 m^3
Splines	0.00746112%	138090.576443 m^3

Tabla 1. Tabla de errores volumétricos entre el modelo y las reconstrucciones

```
Errores
  [1] 0.000000e+00 7.679943e+00 0.000000e+00 9.073644e+00 0.000000e+00 7.679943e+00
  [7] 0.000000e+00 9.073644e+00 0.000000e+00 7.679943e+00 0.000000e+00 9.073644e+00
 [13] 0.000000e+00 7.679943e+00 0.000000e+00 9.073644e+00 0.000000e+00 7.476922e+00
 [19] 0.000000e+00 8.791605e+00 0.000000e+00 7.476922e+00 0.000000e+00 8.791605e+00
 [25] 0.000000e+00 7.476922e+00 0.000000e+00 8.791605e+00 0.000000e+00 7.476922e+00
 [31] 0.000000e+00 8.791605e+00 0.000000e+00 7.284359e+00 0.000000e+00 8.526571e+00
 [37] 0.000000e+00 7.284359e+00 0.000000e+00 8.526571e+00 0.000000e+00 7.284359e+00
 [43] 0.000000e+00 8.526571e+00 0.000000e+00 7.284359e+00 0.000000e+00 8.526571e+00
 [49] 0.000000e+00 7.101465e+00 0.000000e+00 8.277049e+00 0.000000e+00 7.101465e+00
 [55] 0.000000e+00 8.277049e+00 0.000000e+00 7.101465e+00 0.000000e+00 8.277049e+00
 [61] 0.000000e+00 7.101465e+00 0.000000e+00 8.277049e+00 0.000000e+00 6.927531e+00
 [67] 0.000000e+00 8.041715e+00 0.000000e+00 6.927531e+00 0.000000e+00 8.041715e+00
 [73] 0.000000e+00 6.927531e+00 0.000000e+00 8.041715e+00 0.000000e+00 6.927531e+00
 [79] 0.000000e+00 8.041715e+00 0.000000e+00 6.761913e+00 0.000000e+00 7.819394e+00
 [85] 0.000000e+00 6.761913e+00 0.000000e+00 7.819394e+00 0.000000e+00 6.761913e+00
 [91] 0.000000e+00 7.819394e+00 0.000000e+00 6.761913e+00 0.000000e+00 7.819394e+00
 [97] 0.000000e+00 6.604029e+00 0.000000e+00 7.609035e+00 0.000000e+00 6.604029e+00
[103] 0.000000e+00 7.609035e+00 0.000000e+00 6.604029e+00 0.000000e+00 7.609035e+00
[109] 0.000000e+00 6.604029e+00 0.000000e+00 7.609035e+00 0.000000e+00 6.453350e+00
[115] 0.000000e+00 7.409697e+00 0.000000e+00 6.453350e+00 0.000000e+00 7.409697e+00
[121] 0.000000e+00 6.453350e+00 0.000000e+00 7.409697e+00 0.000000e+00 6.453350e+00
[127] 0.000000e+00 7.409697e+00 0.000000e+00 9.986138e+00 0.000000e+00 1.247835e+01
[133] 0.000000e+00 9.986138e+00 0.000000e+00 1.247835e+01 0.000000e+00 9.986138e+00
[139] 0.000000e+00 1.247835e+01 0.000000e+00 9.986138e+00 0.000000e+00 1.247835e+01
[145] 0.000000e+00 1.964527e-13 0.000000e+00 2.115844e-14 0.000000e+00 1.964527e-13
[151] 0.000000e+00 2.115844e-14 0.000000e+00 1.964527e-13 0.000000e+00 2.115844e-14
[157] 0.000000e+00 1.964527e-13 0.000000e+00 2.115844e-14
```

Tabla 2. Errores relativos por cada SPline

C. Comparación

Teniendo ya los dos modelos reconstruidos en 3D y sus respectivos errores encontramos las siguientes diferencias:

- La interpolación realizada con curvas de Bézier es de mucha mejor calidad en el sentido en que son curvas sin puntos angulosos o picos en el resultado de su reconstrucción a diferencia del método por Splines que en su forma polinómica une segmentos para generar el modelo y como resultado no se obtiene un circulo si no un polígono donde se puede identificar con facilidad los lados que lo componen.
- Basándonos en el cálculo de los errores se puede ver que ambas implementaciones en realidad son bastante acertadas pues los errores relativos son considerablemente pequeños, ambos están por debajo del 0.1% lo que habla muy bien de estos métodos de reconstrucción pues con una correcta implementación se asemejan mucho al modelo original, sin embargo, se ve un acercamiento un poco más preciso en la reconstrucción realizada con curvas de Bézier pues su error corresponde al 0.0042933% lo cual implica que el volumen calculado dio un valor muy cercano al valor teórico del volumen.
- Tomando en cuenta el cálculo del error de los splines para la interpolación de la jarra para reconocer la diferencia entre los resultados dados por la función Splines y los graficados al final se encontró que la diferencia entre el resultado dado por la interpolación con Splines y el resultado dado por la función splinesfun que retorna no son muy diferentes ya que los errores calculados son muy cercanos a cero.

V. Conclusiones

- Los métodos numéricos de interpolación utilizados con el fin de desarrollar modelos en tercera dimensión en la memoria de un computador son cada vez más comunes y más utilizados en diferentes áreas debido a la necesidad de replicar objetos del común de forma digital para su estudio. Todo esto ha tomado fuerza debido a la evolución de la informática por lo que podemos decir que estas áreas son grandes aliadas en lo que conocemos hoy como geometría computacional.
- En cuento a la imagen dada, se puede apreciar que el método de Bezier nos brinda una imágen más pulida. Entre los dos métodos el más cercano a la imágen inicial de la jarra es el de Bezier, pues el manejo de las curvas permite el modelado más suave.
- Gracias al desarrollo de estas implementaciones y teniendo en cuenta los errores calculados se pudo comprender mejor los dos métodos puestos en cuestión, como funcionan sus respectivos métodos de interpolación, los tipos de curvas que existen en ambos casos y las diferentes aplicaciones. Haciendo un análisis en cuanto a las formas obtenidas y a los errores calculados en ambas implementaciones podemos asegurar que realizar la interpolación por el método de curvas de Bézier es un poco más precisa que realizar el método por Splines, una de las razones se debe a la definición de los splines, ya que se trabaja con segmentos definidos por polinomios, por lo que esto implica que la curva pierde suavidad y la reconstrucción circular requeriría un trabajo computacional mayor, por el contrario, la interpolación realizada con curvas de Bézier garantiza un mayor control en la formación de la curva pues cuenta con puntos de control que direccionan el comportamiento y permiten producir una deformación suave para generar una reconstrucción visualmente más similar y una aproximación volumétrica más cercana.

References

[1] N. Grandón Pastén, D. Aracena Pizarro and C. Tozzi, ”RECONSTRUCCIÓN DE OBJETO 3D A PARTIR DE IMÁGENES CALIBRADAS”, Revista chilena de ingeniería, no. 15, pp. pp. 158-168, 2007.

[2] Martínez Rodriguez, U., 2015. Aplicación De La Geometría Computacional En La Reconstrucción 3D Basada En Diagramas De Voronoi. Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[3] ”Computación Grafica”, Cimec.org.ar, 2020. [Online]. Available: https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/Cimec/ComputacionGrafica/curvas.pdf. [Accessed: 11- Nov- 2020].

[4] A. Mira Carrillo, ”Sobre algunas técnicas de aproximación usadas en diseño asistido por computador”, Maestria, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA, 2013.

[5] Dr Thomas Sederberg, BYU Bézier curves, http://www.tsplines.com/resources/classnotes/Beziercurves.pdf [Accessed: 10- Nov- 2020].

[6] Ahlberg, Nielson, and Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, 1967.

[7] Sobre nosotros. Web Oficial de Solidworks (en castellano) [Accessed: 08- Nov- 2020].

[8] About Us. Web Oficial de Blender https://www.blender.org/about/ [Accessed: 08- Nov- 2020].

[9] ”bezier function — R Documentation”, Rdocumentation.org, 2020. [Online]. Available: https://www.rdocumentation.org/packages/bezier/versions/1.1.2/topics/bezier. [Accessed: 10- Nov- 2020].

[10] ”splines function — R Documentation”, Rdocumentation.org, 2020. [Online]. Available: https://www.rdocumentation.org/packages/splines/versions/3.6.2. [Accessed: 10- Nov- splines