Informe - Proyecto Final

Laura Sofía Ortiz

31 de mayo de 2023

1. Ejercicios:

1. - Realice simulaciones para diferentes tiempos y observe los resultados.
   - Realice cambios a los valores de A y B (recuerde que son valores positivos y reales), y compare resultados. Considerar A y B como el último digito de cada uno de los integrantes del grupo
   - Con esta gráfica, ¿puedes calcular el valor de tiempo característico τ? Explicar el procedimiento para calcular este tiempo característico.
   - ¿Qué sucede si tenemos $x_2(t) = Ku(t)$? ¿Qué efecto tiene la constante K en la respuesta del sistema representado por la ecuación diferencial?

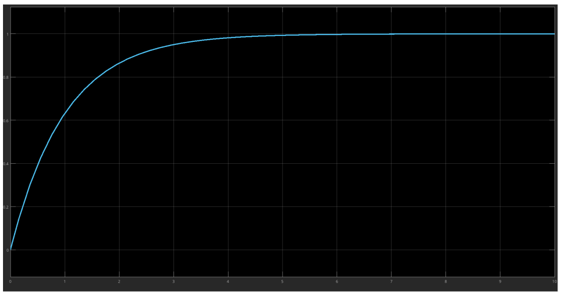
2. Encontrar las ecuaciones en diferencias considerando las aproximaciones diferencia adelante y diferencia central, y encontrar la solución recursiva. Comparar todas las soluciones encontradas en este taller, ¿Qué diferencias existen entre las soluciones? Es decir, compare las soluciones diferencia atrás, diferencia adelante, y diferencia central.

3. Para todas las soluciones planteadas recursivamente, defina diferentes tiempos de muestreo (desde un valor mínimo a un valor máximo – cada grupo define el intervalo).¿Qué conclusión puede obtener?

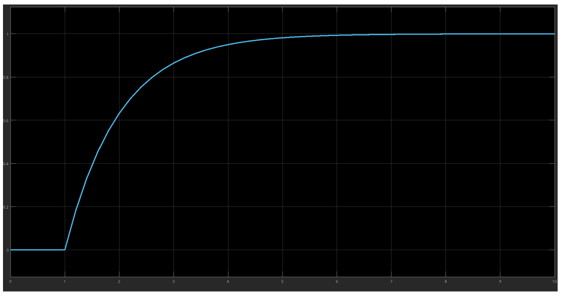
4. Solucionar la ecuación en diferencias obtenidas utilizando la transformada Z y comparar con la solución de la ecuación diferencial.

2. Soluciones:

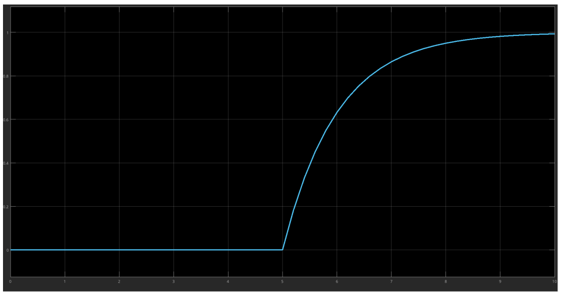
1. - Realizamos 4 diferentes tiempos, usando A = B = 1, los resultados fueron los siguientes:



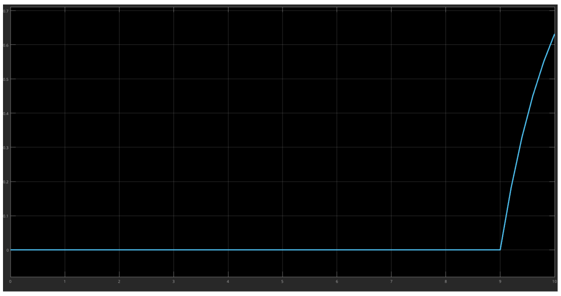
(a) Tiempo en 0



(b) Tiempo en 1



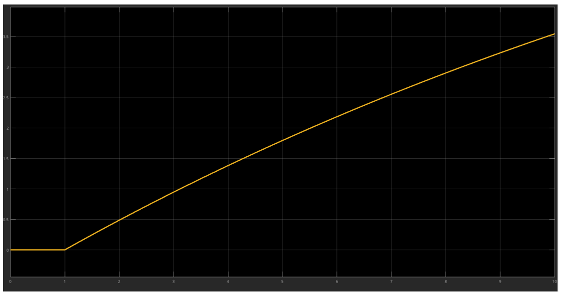
(c) Tiempo en 5



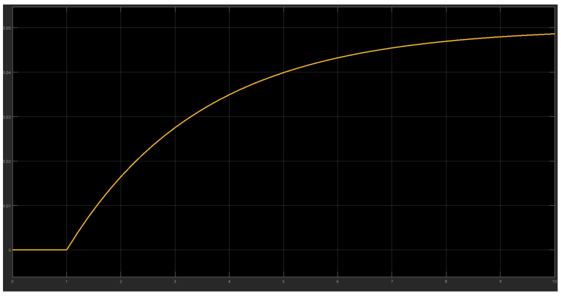
(d) Tiempo en 9

Figura 1: Gráficas para diferentes tiempos

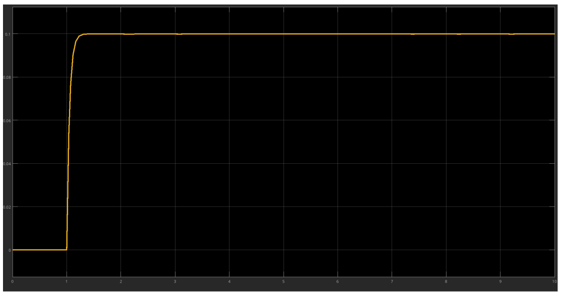
- Ahora vamos a realizar cambios a los valores de A y B, para esto también hizimo 4 gráficas:



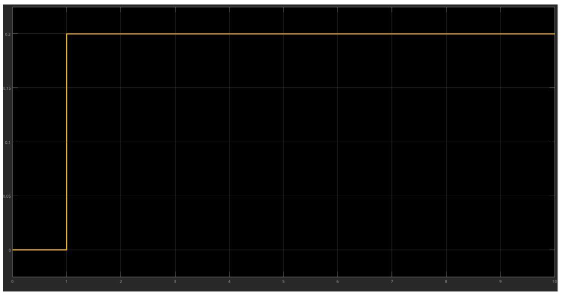
(a) A = 9 y B 0 2



(b) A = 0.05 y B = 50



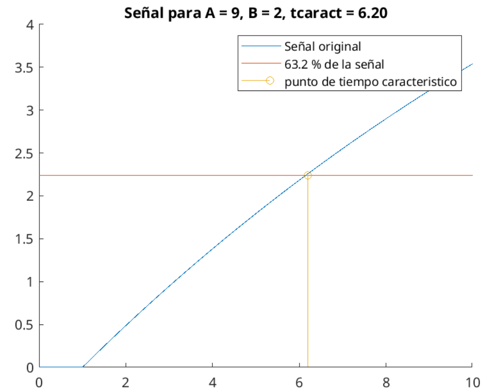
(c) A = 0.1 y B = 0.5



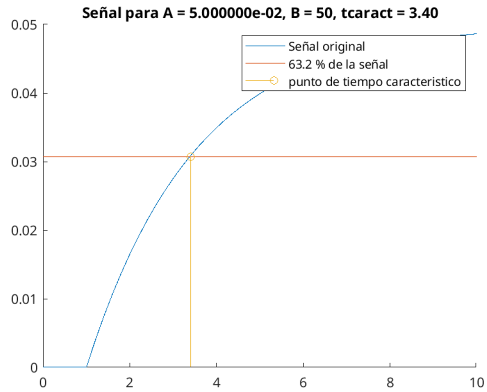
(d) A = 0.2 y B = 0.0001

Figura 2: Gráficas para diferentes valores de A y B

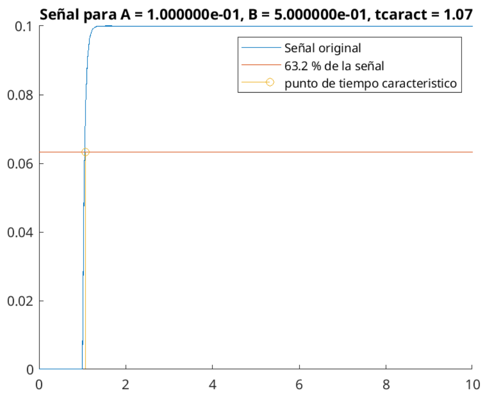
- Para ver el tiempo característico lo que se hizo fue que tomamos el máximo de la señal y obtuvimos el 63.2 % de ese valor, y después se buscó el instante de tiempo en el que se obtuvo este valor. Lo anterior se puede observar en las siguientes gráficas:



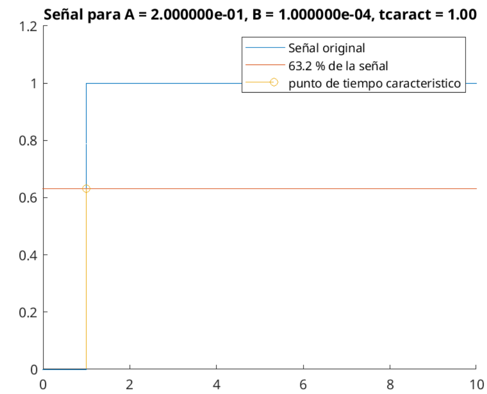
(a) Tiempo característico para A = 9 y B 0 2



(b) Tiempo característico para A = 0.05 y B = 50



(c) Tiempo característico para A = 0.1 y B = 0.5



(d) Tiempo característico para A = 0.2 y B = 0.0001

Figura 3: Gráficas del valor de tiempo característico

La gráfica (a) tiene un tiempo característico de 6.20, la gráfica (b) de 3.40, la (c) de 1.07, y la (d) de 1. Además, note que las señales son monotomamente crecientes, por lo tanto solo existe un punto donde se alcanza el tiempo característico.

- Por último si tenemos $x_2(t) = Ku(t)$, la constante K lo que va a hacer es aumentar la amplitud de la señal, podemos verlo en el siguiente ejemplo:

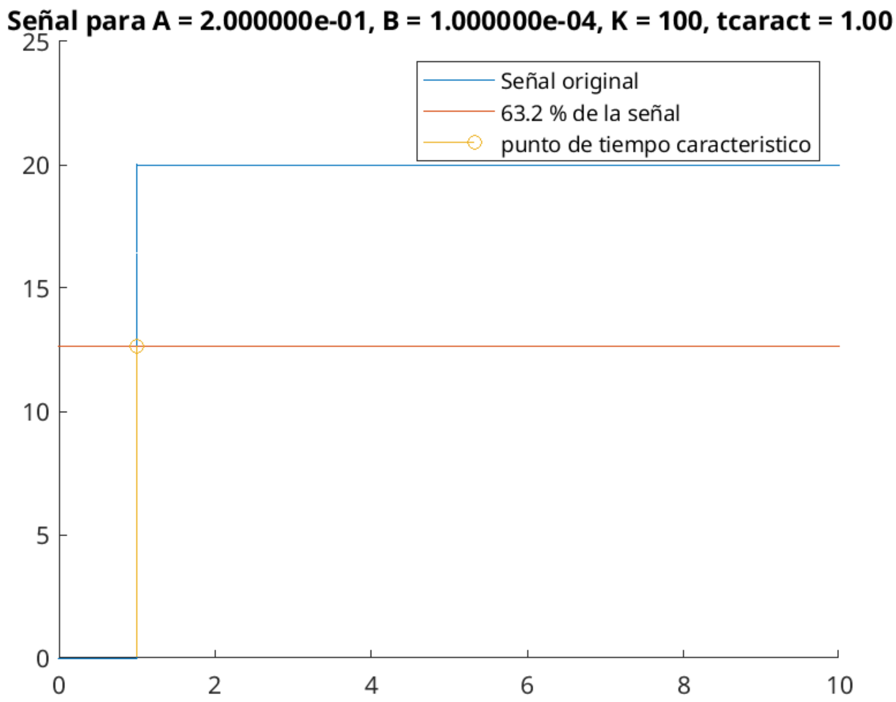


Figura 4: Gráfica con A = 0.2, B = 0.0001 y K = 100

Podemos observar que la amplitud de la gráfica aumenta. Ya que antes la gráfica se encontraba con una amplitud de 1, y ahora con una de 20.

2. Para comparar las diferentes aproximaciones: Diferencia adelante, Diferencia atrás, y Diferencia central se realizó una función *soled_comparacion*, para realizar la comparación entre las tres. Para cada una se realizó el ajuste por recursividad, de la siguiente manera:

```
% ajustar a cero las variables de entrada x[n] y salida y[n]
y_atras = zeros(1, N+1);
y_adelante = zeros(1, N+1);
y_central = zeros(1, N+1);
x = ones(1, N+1);


% Ajuste por recursividad - Aproximación hacia adelante
for cont = 1:1:N
    y_adelante(1, cont+1) = (1-((1/(A*B))*T))*y_adelante(1, cont+1)+(T/B)*x(1, cont+1);
end

% Ajuste por recursividad - Aproximación hacia atrás
for cont = 2:N+1
    y_atras(1, cont) = (1/(1+((1/(A*B))*T)))*y_atras(1, cont-1)+((T/B)/(1+((1/(A*B))*T)))*x(1, cont);
end

% Ajuste por recursividad - Aproximación central
for cont = 2:N
    y_central(1, cont) = (1-((1/(2*A*B))*T))*y_central(1, cont-1)+((T/B)/(2*A))*x(1, cont+1)
    +((T/B)/(2*A))*x(1, cont-1);
end
```

Figura 5: Ajuste de recursividad de cada aproximación

Luego se graficó cada una de las aporximaciones para compararlas, dando como resultado:

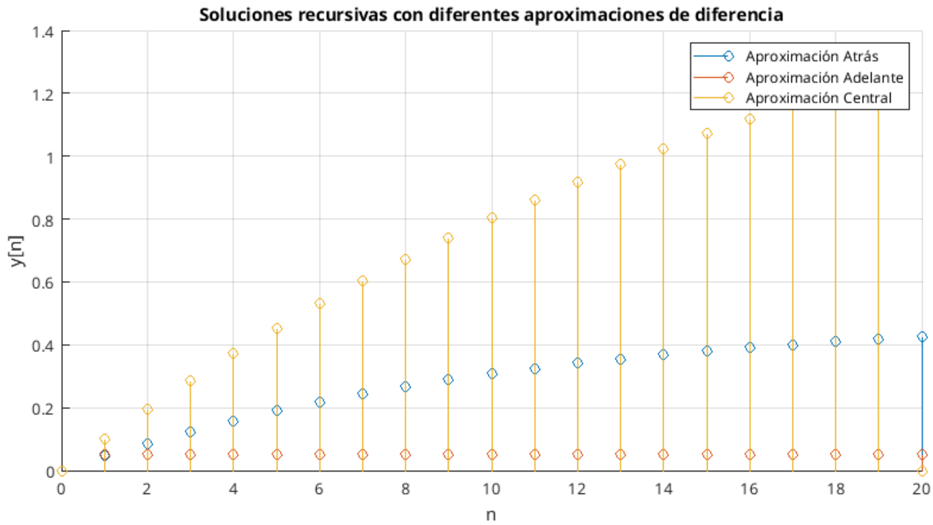


Figura 6: Gráfica comparación de las aproximaciones

Teniendo en cuenta lo anterior, *¿Qué diferencias existen entre las soluciones?*. Las diferencias entre las soluciones obtenidas utilizando las aproximaciones hacia atrás, hacia adelante y central en las ecuaciones en diferencias son las siguientes:

Diferencia hacia atrás:

- En la aproximación hacia atrás, se utiliza la muestra anterior (n-1) para calcular el valor actual (n) de la respuesta.
- Esto implica que la respuesta en el tiempo n depende únicamente de la muestra anterior y no de las muestras futuras.
- Esta aproximación tiende a introducir un retraso en la respuesta, ya que utiliza información del pasado para calcular los valores actuales.
- La respuesta puede ser más suave y menos sensible a las fluctuaciones rápidas en comparación con las otras aproximaciones.

Diferencia hacia adelante:

- En la aproximación hacia adelante, se utiliza la muestra siguiente (n+1) para calcular el valor actual (n) de la respuesta.
- Esto significa que la respuesta en el tiempo n depende de la muestra siguiente y no de las muestras anteriores o futuras.
- Esta aproximación tiende a generar una respuesta más sensible a las fluctuaciones rápidas y puede capturar cambios rápidos en la señal.
- Puede haber un adelanto en la respuesta en comparación con las otras aproximaciones.

Diferencia central:

- En la aproximación central, se utiliza tanto la muestra anterior (n-1) como la siguiente (n+1) para calcular el valor actual (n) de la respuesta.
- Esta aproximación toma en cuenta tanto la información pasada como futura para calcular el valor actual y tiene un efecto de suavizado en la respuesta.

- La respuesta puede ser menos sensible a las fluctuaciones rápidas en comparación con la aproximación hacia adelante.
- No introduce un retraso significativo ni un adelanto en la respuesta en comparación con las otras aproximaciones.

En resumen, la diferencia principal entre las tres aproximaciones radica en la forma en que utilizan las muestras anteriores, siguientes o ambas para calcular los valores actuales de la respuesta. Cada aproximación tiene sus propias características en términos de suavizado, sensibilidad a las fluctuaciones rápidas, y posible retraso o adelanto en la respuesta. La elección de la aproximación depende de la naturaleza de la señal y los requisitos específicos del problema.

3. Ahora, para realizar lo de los diferentes tiempos de muestreo tomando un valor mínimo y uno máximo, generamos un vector espaciado linealmente en el rango especificado, es decir:

```
% Generar diferentes tiempos de muestreo en el rango especificado
T = linspace(Tmin, Tmax, N);
```

Figura 7: Código para tomar un valor mínimo y uno máximo

Para observar el resultado, decidimos tomar tres tiempos de muestreo diferentes:

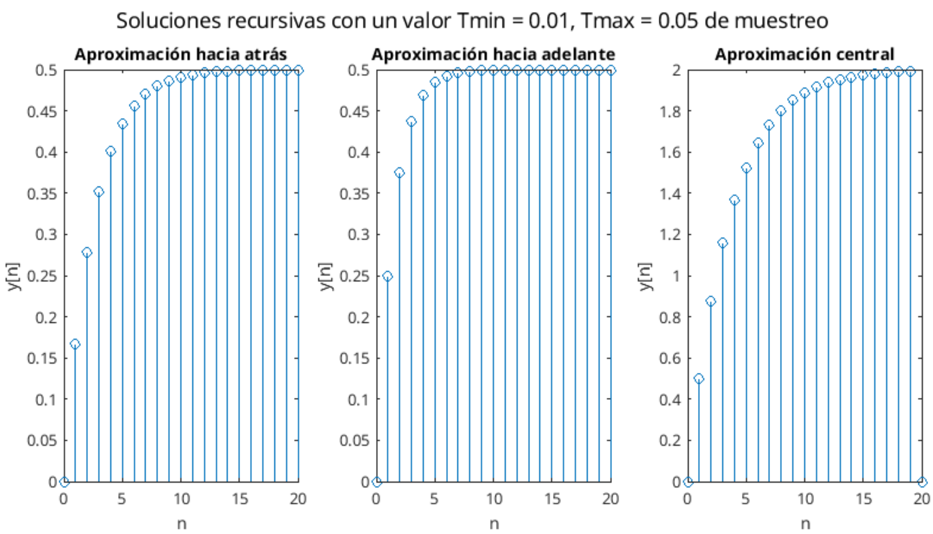


Figura 8: Valor mínimo de 0.01 y valor máximo de 0.05

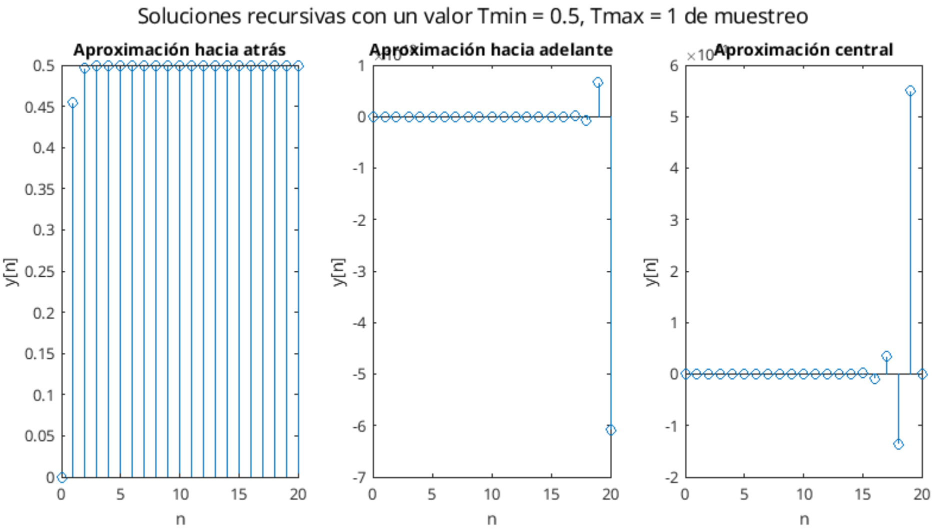


Figura 9: Valor mínimo de 0.5 y valor máximo de 1

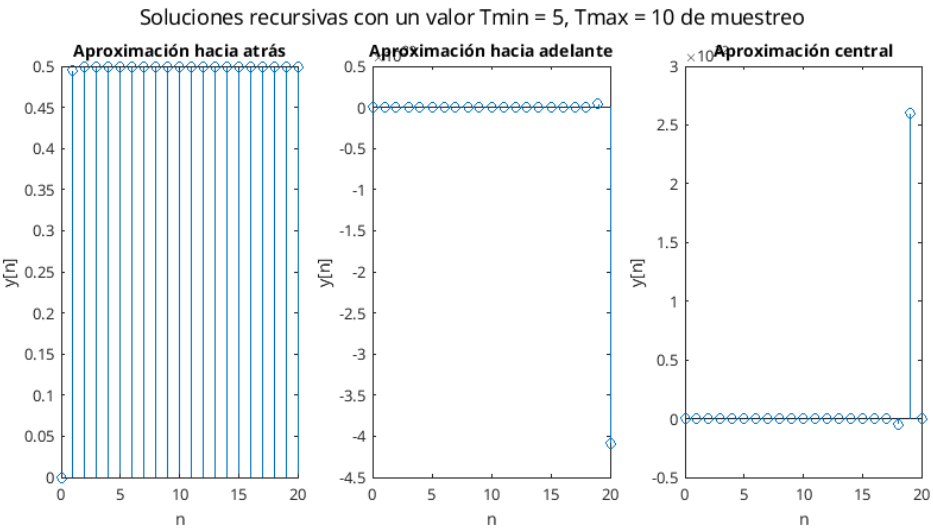


Figura 10: Valor mínimo de 5 y valor máximo de 10

Teniendo en cuenta los resultado, *¿Qué conclusión puede obtener?*. Al realizar el análisis con diferentes tiempos de muestreo, podemos obtener las siguientes conclusiones:

- **Efecto del tiempo de muestreo:** Al variar el tiempo de muestreo (T), se observa que las respuestas obtenidas con las diferentes aproximaciones pueden diferir significativamente. Esto se debe a que la elección del tiempo de muestreo afecta la precisión y la estabilidad de la aproximación de la solución de la ecuación en diferencias. En general, un tiempo de muestreo más pequeño tiende a proporcionar resultados más precisos, pero a expensas de un mayor costo computacional.

- **Comparación de aproximaciones:** Al comparar las tres aproximaciones, podemos notar que cada una tiene sus propias características. La aproximación hacia atrás tiende a subestimar las variaciones rápidas y puede introducir retrasos en la respuesta. La aproximación hacia adelante tiende a sobrestimar las variaciones rápidas y puede introducir una respuesta más rápida. La aproximación central intenta combinar las ventajas de las dos anteriores, proporcionando una respuesta más suave y balanceada. Como observamos en el numeral 2.

- **Selección adecuada del tiempo de muestreo:** La elección del tiempo de muestreo adecuado depende de varios factores, como la naturaleza de la señal, la precisión requerida y las limitaciones computacionales. En general, es importante seleccionar un tiempo de muestreo que permita capturar las características relevantes de la señal sin introducir distorsiones significativas.

  Si el tiempo de muestreo es demasiado grande, pueden perderse detalles importantes de la respuesta. Por otro lado, si el tiempo de muestreo es demasiado pequeño, el cálculo computacional requerido puede ser excesivo.

4. Finalmente, para solucionar las ecuaciones en diferencias obtenidas de cada aproximación utilizando la transformada Z, necesitamos tomar la transformada Z de ambas partes de la ecuación en diferencias y luego resolver para obtener la solución en términos de la transformada inversa de Z. A continuación, mostraremos la solución para cada aproximación y también compararemos con la solución de la ecuación diferencial.

   Aproximación adelante: La ecuación en diferencias correspondiente a la aproximación hacia adelante es:

$$y[n] = \Big(1 - \frac{1}{AB}T\Big)y[n] + \frac{T}{B}x[n+1] \tag{1}$$

   Tomando la transformada Z de ambos lados de la ecuación (1) y resolviendo para Y(Z) obtenemos:

$$Y(z) = \Big(1 - \frac{1}{AB}T\Big)Y(z) + \frac{T}{B}zX(z)$$

   Despejando:

$$Y(z) - \Big(1 - \frac{1}{AB}T\Big)Y(z) = \frac{T}{B}zX(z)$$

$$Y(z)\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{AB}T\Big)\Big) = \frac{T}{B}zX(z)$$

$$Y(z)\Big(1 - \frac{AB - T}{AB}\Big) = \frac{T}{B}zX(z)$$

$$Y(z)\Big(-\frac{T}{AB}\Big) = \frac{T}{B}zX(z)$$

$$Y(z) = \frac{\frac{TzX(z)}{B}}{\frac{-T}{AB}}$$

$$Y(z) = -ABzX(z)$$

Utilizando la transformada inversa de Z, podemos obtener la solución en el dominio del tiempo:

$$y[n] = Z^{-1}\Big\{ - ABz \cdot X(z) \Big\}$$

Aproximación atrás: La ecuación en diferencias correspondiente a la aproximación hacia atrás es:

$$y[n] = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} y[n-1] + \frac{\frac{T}{B}}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} x[n] \tag{2}$$

Tomando la transformada Z de ambos lados de la ecuación (2) y resolviendo para Y(Z) obtenemos:

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} z^{-1} Y(z) + \frac{\frac{T}{B}}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} X(z)$$

Despejando:

$$Y(z) - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} z^{-1} Y(z) = \frac{\frac{T}{B}}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} z^{-1}\right) = \frac{\frac{T}{B}}{\left(1 + \frac{1}{AB}T\right)} X(z)$$

$$Y(z)\left(\frac{(AB+T) - TAz^{-1}}{(AB+T)}\right) = \frac{TA}{(AB+T)} X(z)$$

$$Y(z) = \frac{TA}{AB + T - TAz^{-1}} X(z)$$

Utilizando la transformada inversa de Z, podemos obtener la solución en el dominio del tiempo:

$$y[n] = Z^{-1}\Big\{ \frac{TA}{AB + T - TAz^{-1}} \cdot X(z) \Big\}$$

Aproximación Central: La ecuación en diferencias correspondiente a la aproximación central es:

$$y[n] = \left(1 - \frac{1}{2AB}T\right) y[n-1] + \frac{T}{B}\frac{1}{2A} x[n+1] + \frac{T}{B}\frac{1}{2A} x[n-1] \tag{3}$$

Tomando la transformada Z de ambos lados de la ecuación (1) y resolviendo para Y(Z) obtenemos:

$$Y(z) = \left(1 - \frac{1}{2AB}T\right) z^{-1} Y(z) + \frac{T}{2AB} z X(z) + \frac{T}{2AB} z^{-1} X(z)$$

Despejando:

$$Y(z) - \Big(1 - \frac{1}{2AB}T\Big)z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2AB}zX(z) + \frac{T}{2AB}z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{2AB}T\Big)z^{-1}\Big) = X(z)\Big(\frac{T}{2AB}z + \frac{T}{2AB}z^{-1}\Big)$$

$$Y(z)\Big(1 - \frac{2ABz^{-1} - Tz^{-1}}{2AB}\Big) = X(z)\Big(\frac{Tz + Tz^{-1}}{2AB}\Big)$$

$$Y(z)\Big(\frac{2AB - 2ABz^{-1} - Tz^{-1}}{2AB}\Big) = X(z)\Big(\frac{Tz + Tz^{-1}}{2AB}\Big)$$

$$Y(z) = X(z)\Big(\frac{Tz + Tz^{-1}}{2AB - 2ABz^{-1} - Tz^{-1}}\Big)$$

Utilizando la transformada inversa de Z, podemos obtener la solución en el dominio del tiempo:

$$y[n] = Z^{-1}\Big\{\Big(\frac{Tz + Tz^{-1}}{2AB - 2ABz^{-1} - Tz^{-1}}\Big) \cdot X(z)\Big\}$$