Taller de Recuperación

Laura Sofía Ortiz Arcos

Octubre 2022

1. **Encuentre la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales.**

a)

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0, \qquad y(\frac{\pi}{3}) = 0, \qquad y\prime(\frac{\pi}{3}) = 2$$

Polinomio característico:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda = \pm i$$

$y = c_1 cos(t) + c_2 sen(t)$

$$c_1 cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$
$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 0$$
$$c_1 = -c_2\sqrt{3}$$

$y\prime = -c_1 sen(t) + c_2 cos(t)$

$$c_2\sqrt{3}sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$
$$c_2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}c_2 = 2$$
$$c_2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$$
$$c_2 = 1$$
$$c_1 = -\sqrt{3}$$

La solución particular de la ecuación es:

$$y(t) = -\sqrt{3}cos(t) + sen(t)$$

b)

$$y\prime\prime - 2y\prime + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y\prime(\pi) = 1$$

Polinomio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda = 1 \pm i$$

$y = c_1e^tcos(t) + c_2e^tsen(t)$

$$\begin{aligned} c_1e^0cos(0) + c_2e^0sen(0) &= 1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

$y\prime = -c_1e^tsen(t) + c_1e^tcos(t) + c_2e^tcos(t) + c_2e^tsen(t)$

$$\begin{aligned} -c_1e^\pi sen(\pi) + c_1e^\pi cos(\pi) + c_2e^\pi cos(\pi) + c_2e^\pi sen(\pi) &= 1 \\ -c_1e^\pi - c_2e^\pi &= 1 \\ -e^\pi(1 + c_2) &= 1 \\ 1 + c_2 &= -e^{-\pi} \\ c_2 &= -e^{-\pi} - 1 \end{aligned}$$

La solución particular de la ecuación es:

$$y(t) = e^tcos(t) + (-e^{-\pi} - 1)e^tsen(t)$$

2. **Considere la ecuación:**

$$y\prime\prime - y\prime - 2y = 0 \tag{1}$$

a) Demuestre que $y_1(t) = e^t$ y $y_2(t) = e^{2t}$ forman un conjunto de soluciones fundamentales.

Polinomio característico:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 2) &= 0 \\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_1 &= 2 \end{aligned}$$

$y_1(t) = e^{-t}$
$y_2(t) = e^{2t}$

$$\text{W} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^t + e^t = 3e^t \neq 0$$

Por lo tanto $\{e^{-t}, e^{2t}\}$ es un conjunto de soluciones fundamentales.

b) Tome $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ y $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. ¿Las ecuaciones $y_3(t)$, $y_4(t)$, $y_5(t)$ también son soluciones de la ecuación diferencial?

Veamos si $y_3(t) = -2e^{2t}$ es solución de la ecuación (1). Si la derivamos:

$$\begin{aligned} y_3(t)\prime &= -4e^{2t} \\ y_3(t)\prime\prime &= -8e^{2t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) tenemos:

$$y_3\prime\prime - y_3\prime - 2y_3 = -8e^{2t} + 4e^{2t} + 4e^{2t} = 0$$

Por lo tanto y_3 es solución de la ecuación (1). Además, note que $y_3(t) = -2e^{2t}$ es combinación lineal de $y_2 = e^{2t}$.

Ahora veamos que $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ también es solución de la ecuación (1), ya que tanto y_1 como y_2 son conjuntos de soluciones fundamentales.

Finalmente, $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$ también es solución de la ecuación (1), ya que al calcular el Wronskiano de y_1 y y_3 da diferente de 0, es decir que son un conjunto de soluciones fundamentales *(lo del Wronskiano se puede observar en el siguiente punto)*. Además, $2y_1(t)$ es combinación lineal de y_1 y $2y_3(t)$ de y_3.

c) Determine si cada uno de los siguientes pares forman un conjunto fundamental de soluciones: $\{y_1(t), y_3(t)\}$; $\{y_2(t), y_3(t)\}$; $\{y_1(t), y_4(t)\}$; $\{y_4(t), y_5(t)\}$.

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^{-t} & -4e^{2t} \end{vmatrix} = -4e^{t} - 2e^{t} = -6e^{t} \neq 0$$

Por lo tanto $\{y_1(t), y_3(t)\}$ es un conjunto de soluciones fundamentales.

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ 2e^{2t} & -4e^{2t} \end{vmatrix} = -4e^{4t} + 4e^{4t} = 0$$

Por lo tanto $\{y_2(t), y_3(t)\}$ no es un conjunto de soluciones fundamentales.

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} + 2e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^{-t} + 4e^{2t} \end{vmatrix} = (-e^{-2t} + 4e^{t}) - (-e^{-2t} - 2e^{t}) = 6e^{t} \neq 0$$

Por lo tanto $\{y_1(t), y_4(t)\}$ es un conjunto de soluciones fundamentales.

$$\begin{aligned}\mathrm{W} = \begin{vmatrix} e^{-t} + 2e^{2t} & 2e^{-t} + 4e^{2t} \\ -e^{-t} + 4e^{2t} & -2e^{-t} + 8e^{2t} \end{vmatrix} &= (-2e^{-2t} + 8e^{t} - 4e^{t} + 16e^{4t}) \\ &\quad - (-2e^{-2t} - 4e^{t} + 8e^{t} + 16e^{4t}) = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{y_4(t), y_5(t)\}$ no es un conjunto de soluciones fundamentales.

3. **Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial:**

$$y\prime\prime - 8y\prime + 20y = 100x^2 - 26xe^{x} \tag{2}$$

a) Primero empezamos por solucionar para el problema homogeneo, entonces extraemos el polinomio característico del caso homogeneo y solucionamos:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 8\lambda + 20 &= 0 \\ \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{2} &= \lambda \\ 4 \pm 2i &= \lambda\end{aligned}$$

Consecuentemente nuestra solución para el caso homogeneo será:

$$y = c_1 e^{4t} cos(2t) + c_2 e^{4t} sen(2t)$$

b) Ahora procedemos a buscar nuestras soluciones particulares para la ecuación polinomial, empecemos por suponer que:

$$
\begin{aligned}
y &= At^2 + Bt + C \\
y\prime &= 2At + B \\
y\prime\prime &= 2A
\end{aligned}
$$

Así, reemplazando en la ecuación (2):

$$
\begin{aligned}
2A - 8(2At + B) + 20(At^2 + Bt + C) &= 100t^2 \\
2A - 16At - 8B + 20At^2 + 20Bt + 20C &= 100t^2
\end{aligned}
$$

Ahora despejamos los coeficientes:

$$
\begin{aligned}
20At^2 &= 100t^2 \\
A &= 5
\end{aligned}
$$

Con el valor de A que ahora conocemos podemos ir a encontrar B:

$$
\begin{aligned}
-16A + 20B &= 0 \\
80 + 20B &= 0 \\
B &= 4
\end{aligned}
$$

Finalmente despejamos C:

$$
\begin{aligned}
2A - 8B + 20C &= 0 \\
10 - 32 + 20C &= 0 \\
-22 + 20C &= 0 \\
C &= \frac{11}{10}
\end{aligned}
$$

Ahora aplicamos el mismo método para hallar nuestra solución a la ecuación exponencial, entonces asumimos:

$$
\begin{aligned}
y &= Ate^t \\
y\prime &= Ae^t + Ate^t \\
y\prime\prime &= 2Ae^t + Ate^t
\end{aligned}
$$

Con esto procedemos a reemplazar en nuestra ecuación (2):

$$
2Ae^t + Ate^t - 8Ae^t - 8Ate^t + 20Ate^t = -26te^t
$$

Buscamos A:

$$
\begin{aligned}
2Ae^t + Ate^t - 8Ae^t - 8Ate^t + 20Ate^t &= -26te^t \\
-6Ae^t + 13Ate^t &= -26te^t \\
13A &= -26 \\
A &= -2
\end{aligned}
$$

Con esto podemos construir nuestra solución general:

$$Y = c_1e^{4t}cos(2t) + c_2e^{4t}sen(2t) + 5t^2 + 4t + \frac{11}{10} - 2te^t$$

4. **Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial.**

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$$

Polinomio característico:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-1) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_1 &= 1 \end{aligned}$$

Solución Homogénea:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t \\ y_2 &= te^t \\ y(t) &= c_1e^t + c_2te^t \end{aligned}$$

$$g(t)y_1 = \frac{e^t}{1+t^2}\,e^t = \frac{e^{2t}}{1+t^2}$$

$$g(t)y_2 = \frac{e^t}{1+t^2}\,te^t = \frac{te^{2t}}{1+t^2}$$

$$\text{W} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t} = e^{2t} \neq 0$$

$$u_1 = -\int \frac{g(t)y_2}{W}dt = -\int \frac{\frac{te^{2t}}{1+t^2}}{e^{2t}}dt = -\int \frac{te^{2t}}{e^{2t}(1+t^2)}dt = -\int \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned} u &= 1+t^2 \\ \frac{du}{dt} &= 2t \\ \frac{du}{2t} &= dt \end{aligned}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{t}{ut}du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}ln(1+t^2) + c$$

$$u_2 = \int \frac{g(t)y_1}{W}dt = \int \frac{\frac{e^{2t}}{1+t^2}}{e^{2t}}dt = \int \frac{e^{2t}}{e^{2t}(1+t^2)}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt$$

Por tabla de integrales se sabe que:

$$u_2 = \int \frac{1}{1+t^2}dt = arctan(t) + c$$

Finalmente la solución general de la ecuación es:

$$\begin{aligned}
y(t) &= u_1y_1 + u_2y_2 \\
y(t) &= \left(-\frac{1}{2}ln(1+t^2) + c_1\right)e^t + (arctan(t) + c_2)te^t
\end{aligned}$$