

## Parcial III Informe Ecuaciones Diferenciales

Laura Sofía Ortiz Arcos

*lauraso.ortiz@urosario.edu.co*

*Estudiante de matemáticas aplicadas y ciencia de la computación.*

(Universidad del Rosario)

(Dated: October 26, 2022)

### INTRODUCCIÓN

En el presente informe se presenta una solución del ejercicio planteado sobre circuitos RLC, así como su posible comportamiento para diferentes entradas de voltaje.

Donde denotamos con  $V_T$ ,  $V_C$  y  $V_L$  los voltajes a través de la fuente de voltaje, del capacitor e inductor respectivamente. La corriente que se mueve alrededor del circuito se denota como  $i$ , la resistencia con  $R$ , la capacitancia con  $C$ , y  $L$  es la inductancia de las componentes asociadas del circuito. Estas se muestran en la siguiente figura:

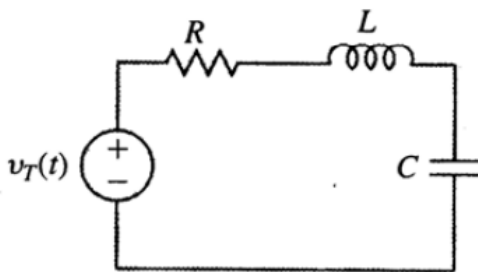


FIG. 1: *Circuito RLC.*

Para lo anterior vamos a tener en cuenta, la ley de Kirchhoff:

$$V_T - Ri = V_C + V_L \quad (1)$$

La relación entre corriente y voltaje en el capacitor:

$$C \frac{dV_C}{dt} = i \quad (2)$$

Y la relación entre corriente y voltaje en el inductor:

$$L \frac{di}{dt} = V_L \quad (3)$$

Consideraremos las siguientes preguntas:

1. Iguale el voltaje de entrada a cero, es decir, suponga que  $V_T = 0$ . Emplee las tres ecuaciones

anteriores para escribir un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales con variables dependientes  $i$  y  $V_C$ .

2. Encuentre los eigenvalores del sistema resultante en términos de los parámetros  $R$ ,  $C$  y  $L$ . ¿Cuáles son los planos fase posibles para su sistema, dado que  $R$ ,  $C$  y  $L$  siempre son no negativos? Esboce el plano fase y las gráficas  $V_C(t)$  e  $i(t)$  para cada caso.
3. Convierta el sistema de primer orden de ecuaciones de la parte 1 en una ecuación diferencial de segundo orden que contenga sólo  $V_C$  (y ninguna  $i$ ).
4. Repita la parte 1 suponiendo que  $V_T$  no es cero. El sistema resultante tendrá  $R$ ,  $C$ ,  $L$  y  $V_T$  como parámetros.
5. Un circuito común podría tener los valores  $R = 2000$  ohmios,  $C = 2 \times 10^{-7}$  faradios y  $L = 1.5$  henrios. Suponiendo una entrada  $V_T = 0$ , y valores iniciales de la corriente y voltaje  $i(0) = 0$ ,  $V_C(0) = 10$ , describa el comportamiento de la corriente y voltaje para este circuito.
6. Repita la parte 5 usando una fuente de voltaje  $V_T = 10$  voltios.

### SOLUCIÓN

#### 1) Sistema de primer orden

Empecemos por plantear el sistema de ecuaciones de primer orden, igualando  $V_T$  a cero, y despejando  $V_L$  de la ecuación (1) tenemos:

$$V_L = -V_C - Ri$$

Con la ecuación (3) quedaría:

$$L \frac{di}{dt} = -V_C - Ri \quad (4)$$

Así, teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (4), vamos a tener que nuestro sistema de ecuaciones de

primer orden queda:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{V_C}{L} \\ \frac{dV_C}{dt} &= \frac{i}{C}\end{aligned}$$

Con  $R$ ,  $C$  y  $L$  como parámetros.

## 2) Valores propios del sistema y planos fase

Ya teniendo el sistema de ecuaciones, se procede a sacar su matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

Tal que se cumple:

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dV_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ V_C \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

Para entender mejor el sistema determinado por  $A$  debemos revisar sus valores propios, y antes de eso calcular el polinomio característico de  $A$ , para ello usaremos la siguiente expresión:

$$\lambda^2 - Tr\lambda + Det(A)$$

Reemplazando queda:

$$\lambda^2 - \left(-\frac{R}{L}\right)\lambda + \left(\frac{1}{CL}\right) = 0$$

Ahora podemos despejar los valores de  $\lambda$  por medio de la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, los valores propios serían:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right)}}{2}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones de  $\lambda$ , y el hecho de que  $R$ ,  $C$  y  $L$  siempre son no negativos tendremos los siguientes casos:

### 1. $\lambda$ es Real

Antes de iniciar recordemos los criterios para clasificar los sistemas lineales.

*Silla* :  $\lambda_{1,2} < 0 < \lambda_{1,2}$

*Un lambda negativo y el otro positivo.*

*Sumidero* :  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

*Ambos lambdas negativos.*

*Fuente* :  $0 < \lambda_1, \lambda_2$

*Ambos lambdas positivos.*

Como  $\lambda$  es real tenemos que  $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right) \geq 0$ .

**Empecemos por considerar el caso:**

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right) = 0$$

Entonces tenemos que hay raíces repetidas, ya que la parte de la raíz se cancela:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right)}}{2}$$

De lo que salen los casos:

$$\begin{cases} -\frac{R}{L} < 0 \implies \text{Raíces repetidas} \\ \text{Ya que, } \lambda_1 = \lambda_2 < 0 \\ \\ -\frac{R}{L} = 0 \implies \text{No hay solución} \\ \text{Ya que, } \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

En donde el plano fase sería:

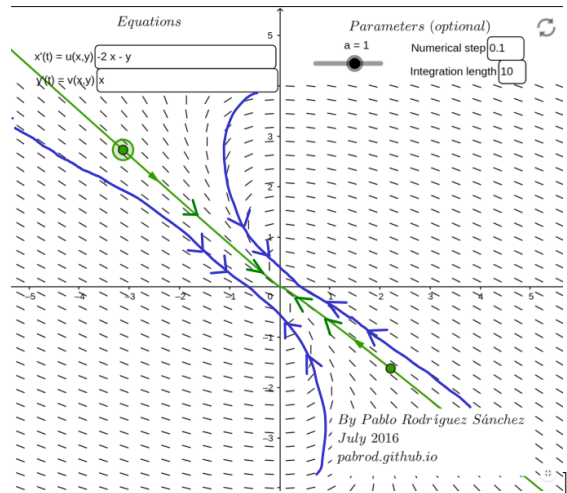


FIG. 2: Ejemplo de como sería el plano fase teniendo raíces reales repetidas.

Y la gráfica de  $V_C(t)$  e  $i(t)$  sería:

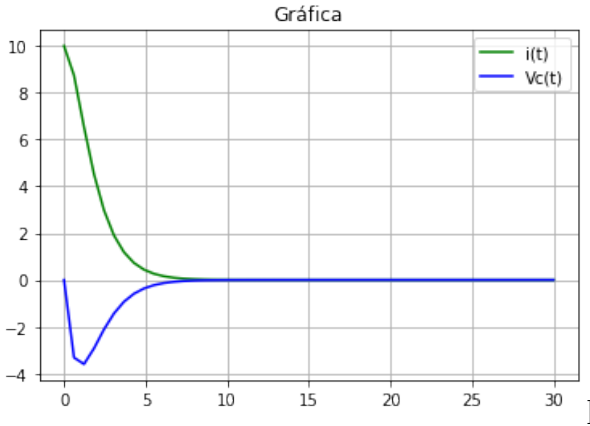


FIG. 3: Comportamiento del Voltaje y la corriente, en un caso de raíces reales repetidas

**Ahora si tenemos que:**

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right) > 0$$

De lo anterior tendríamos el caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{L} > \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right)} \Rightarrow \text{Sumidero} \\ \text{Note entonces que,} \\ \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \end{array} \right.$$

La razón de que el caso anterior de sumidero es que, a pesar de que a  $\frac{R}{L}$  lo acompañe un negativo, la raíz siempre es más pequeña que  $\frac{R}{L}$ , por lo tanto aunque se le sume o reste la raíz el resultado siempre es negativo.

Teniendo en cuenta lo anterior, su plano fase va a lucir de la siguiente forma:

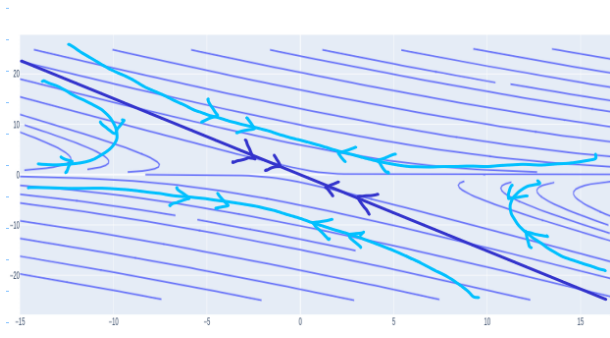


FIG. 4: Ejemplo de como sería el plano fase teniendo ambas raíces negativas.

Y la gráfica de  $V_C(t)$  e  $i(t)$ :

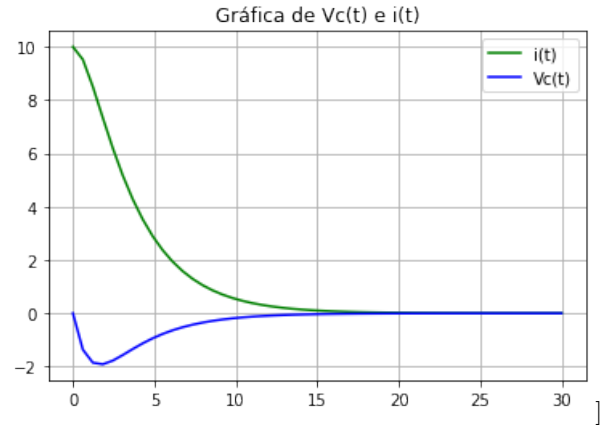


FIG. 5: Comportamiento del Voltaje y la corriente, en un caso de raíces reales diferentes.

## 2. $\lambda$ es Complejo

Dado que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos, sabemos que:

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{CL}\right) < 0$$

Entonces teniendo en cuenta la parte real y que  $R$  y  $L$  son no negativos, surge el siguiente caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{R}{L} < 0 \Rightarrow \text{Sumidero en espiral} \\ -\frac{R}{L} = 0 \Rightarrow \text{Centro} \end{array} \right.$$

Así sus planos fase son:

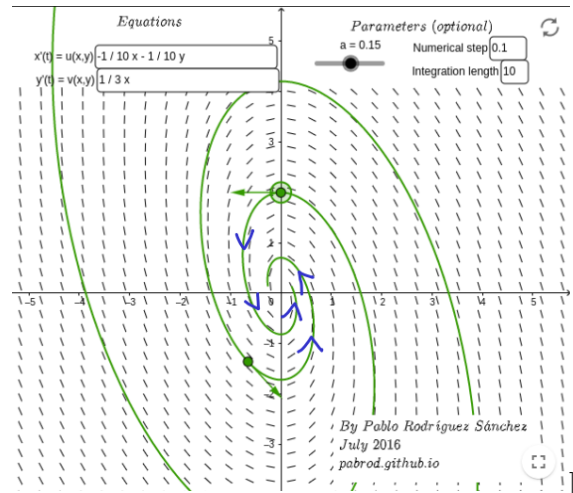


FIG. 6: Ejemplo de como sería el plano fase teniendo raíces complejas negativas.

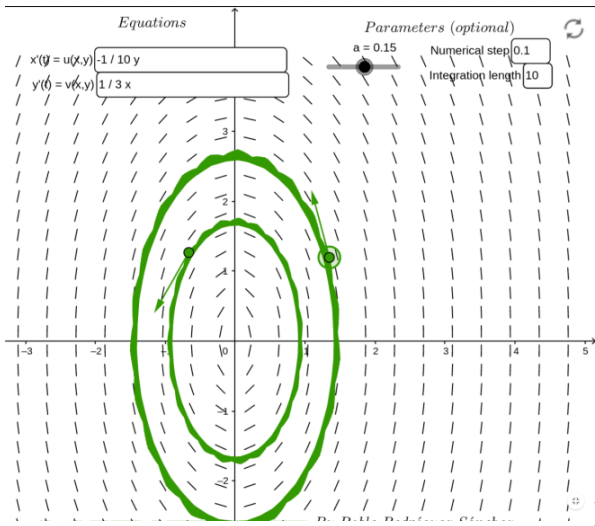


FIG. 7: Ejemplo de como sería el plano fase con las resistencias igual a cero, es decir sin parte real.

Y las gráficas de  $V_C(t)$  e  $i(t)$ :

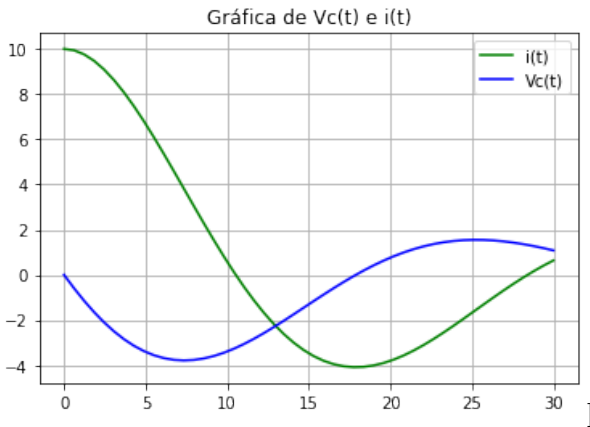


FIG. 8: Comportamiento del Voltaje y la corriente, en un caso de raíces complejas.

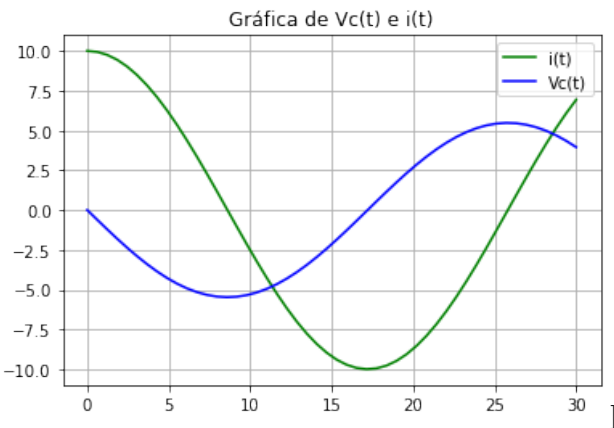


FIG. 9: Comportamiento del Voltaje y la corriente, en un caso de raíces complejas.

### 3) Ecuación de segundo orden

Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones de primer orden del punto 1:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{V_C}{L} \\ C \frac{dV_C}{dt} &= i \end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación (2) en el sistema tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d(C \frac{dV_C}{dt})}{dt} &= -\frac{R}{L} \left( C \frac{dV_C}{dt} \right) - \frac{V_C}{L} \\ C \frac{d^2 V_C}{dt^2} &= -\frac{R}{L} \left( C \frac{dV_C}{dt} \right) - \frac{V_C}{L} \\ \frac{d^2 V_C}{dt^2} &= -\frac{R}{CL} \left( C \frac{dV_C}{dt} \right) - \frac{V_C}{CL} \\ \frac{d^2 V_C}{dt^2} &= -\frac{R}{L} \left( \frac{dV_C}{dt} \right) - \frac{V_C}{CL} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de segundo orden queda:

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} = -\frac{R}{L} \left( \frac{dV_C}{dt} \right) - \frac{1}{CL} V_C$$

### 4) Repetición parte 1 suponiendo que $V_T$ no es cero

Es decir:

$$V_T - Ri = V_C + V_L$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3) tendremos:

$$\begin{aligned} V_T - Ri &= V_C + L \frac{di}{dt} \\ L \frac{di}{dt} &= V_T - Ri - V_C \end{aligned}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}V_C + \frac{1}{L}V_T \quad (5)$$

Así con la ecuación 2 y (5), nuestro sistema resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}V_C + \frac{1}{L}V_T \\ \frac{dV_C}{dt} &= \frac{1}{C}i \end{aligned}$$

Con  $R$ ,  $C$ ,  $L$  y  $V_T$  como parámetros.

### 5) Ejemplo con $V_T$ igual a cero

Ahora veremos un ejemplo de la ecuación, con los valores:

$$R = 2000 \text{ ohmios}$$

$$C = 0.2 \text{ microfaradios}$$

$$L = 1.5 \text{ henrios}$$

$$V_T = 0 \text{ voltios}$$

Es decir una ecuación homogénea, y con valores iniciales de la corriente y voltaje  $i(0) = 0, V_C = 0$ .

Por medio de Matlab se calculó la solución de la ecuación al problema anterior.

Para empezar vamos a partir de:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2000}{1.5} & -\frac{1}{1.5} \\ \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dando como valores propios los siguientes:

$$\lambda_1 = -0.6667 + 1.6997i$$

$$\lambda_2 = -0.6667 - 1.6997i$$

Y vectores propios:

$$\xi_1 \begin{bmatrix} -0.0001 + 0.0003i \\ -0.0001 - 0.0003i \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 \begin{bmatrix} 1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

Ahora, sacando el conjunto fundamental de soluciones.

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -0.0001 + 0.0003i \\ -0.0001 - 0.0003i \end{bmatrix} e^{(-0.6667 + 1.6997i)t}$$

$$X^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix} e^{(-0.6667 - 1.6997i)t}$$

Para obtener un conjunto de soluciones reales, vamos a tener en cuenta  $X^{(1)}$ , y su parte real e imaginaria, así:

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -0.0001 + 0.0003i \\ -0.0001 - 0.0003i \end{bmatrix} \cdot e^{(-0.6667)t} \cdot (\cos(1.6997)t + i \sin(1.6997)t)$$

Luego separando la parte real como  $u_1$  y la compleja como  $u_2$  tendremos:

```
>> pretty(u1)
/ 2000 t \ / 4919131425047131 6270686781560699 \ \
| real| exp| - 3 | #1 | - 36893488147419103232 + 18446744073709551616 -1 | |
|-----| |-----| |-----|
/ 2000 t \ / 4919131425047131 6270686781560699 \ \
| real| exp| - 3 | #1 | - 36893488147419103232 + 18446744073709551616 -1 | |
|-----| |-----| |-----|
where
#1 == cos( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) + sin( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) 11
```

```
>> pretty(u2)
/ 2000 t \ / 4919131425047131 6270686781560699 \ \
| imag| exp| - 3 | #1 | - 36893488147419103232 + 18446744073709551616 -1 | |
|-----| |-----| |-----|
/ 2000 t \ / 4919131425047131 6270686781560699 \ \
| imag| exp| - 3 | #1 | - 36893488147419103232 + 18446744073709551616 -1 | |
|-----| |-----| |-----|
where
#1 == cos( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) + sin( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) 11
```

Finalmente se procedió a encontrar los valores de  $c_1$  y  $c_2$  mediante el sistema de ecuaciones y con los valores iniciales mencionados anteriormente, dando como resultado:

$$c_1 = -37500.002500$$

$$c_2 = -14708.711116$$

Por último la gráfica resultó:

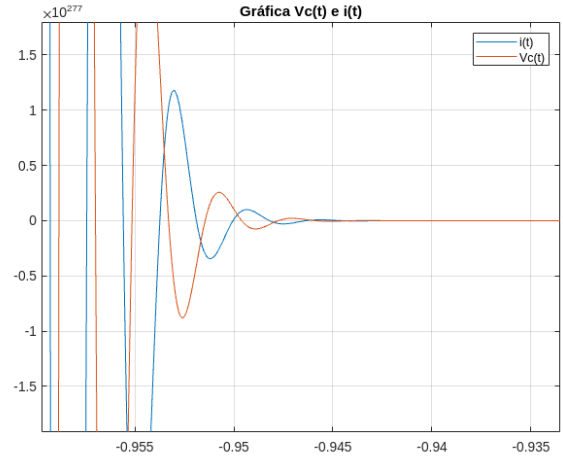


FIG. 10: Comportamiento del Voltaje y la corriente, en un caso de raíces complejas de un sistema Homogéneo.

## 6) Ejemplo con $V_T$ igual a 10 Voltios

Ahora veremos otro ejemplo de la ecuación, con los valores:

$$R = 2000 \text{ ohmios}$$

$$C = 0.2 \text{ microfaradios}$$

$$L = 1.5 \text{ henrios}$$

$$V_T = 10 \text{ voltios}$$

Es decir una ecuación homogénea, y con valores iniciales de la corriente y voltaje  $i(0) = 0, V_C = 0$ .

Por medio de Matlab se calculó la solución de la ecuación al problema anterior.

Para empezar vamos a partir de:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2000}{1.5} & -\frac{1}{1.5} \\ \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{1.5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dando como valores propios los siguientes:

$$\lambda_1 = -0.6667 + 1.6997i$$

$$\lambda_2 = -0.6667 - 1.6997i$$

Y vectores propios:

$$\xi_1 \begin{bmatrix} -0.0001 + 0.0003i \\ -0.0001 - 0.0003i \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 \begin{bmatrix} 1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

Ahora, sacando el conjunto fundamental de soluciones.

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -0.0001 + 0.0003i \\ -0.0001 - 0.0003i \end{bmatrix} e^{(-0.6667 + 1.6997i)t}$$

$$X^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 + 0.0000i \end{bmatrix} e^{(-0.6667 - 1.6997i)t}$$

Para obtener un conjunto de soluciones reales, vamos a tener en cuenta  $X^{(1)}$ , y su parte real e imaginaria, así:

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -0.0001 + 0.0003i \\ -0.0001 - 0.0003i \end{bmatrix} \cdot e^{(-0.6667)t} \cdot (\cos(1.6997)t + i \sin(1.6997)t)$$

Luego separando la parte real como  $u_1$  y la compleja como  $u_2$  tendremos:

```
>> pretty(u1)
/      2000 t \      /      4919131425047131      6270686781560699      \ \
| real| exp| - ---- | #1 | - ---- + ---- -1 | |
|      3      \      /      36893488147419103232      18446744073709551616      / /
\      2000 t \      /      4919131425047131      6270686781560699      \ \
| real| exp| - ---- | #1 | - ---- - ---- -1 | |
|      3      \      /      36893488147419103232      18446744073709551616      / /
where
#1 == cos( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) + sin( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) 11
```

```
>> pretty(u2)
/      2000 t \      /      4919131425047131      6270686781560699      \ \
| imag| exp| - ---- | #1 | - ---- + ---- -1 | |
|      3      \      /      36893488147419103232      18446744073709551616      / /
\      2000 t \      /      4919131425047131      6270686781560699      \ \
| imag| exp| - ---- | #1 | - ---- - ---- -1 | |
|      3      \      /      36893488147419103232      18446744073709551616      / /
where
#1 == cos( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) + sin( 3737620830301327 t / 2199023255552 ) 11
```

Luego, como este es el caso no homogéneo se resolvió por medio de coeficiente indeterminados. Por lo anterior se creó una matriz de coeficientes indeterminados (teniendo en cuenta que en nuestro caso el polinomio es de grado 1).

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Dando como resultado  $A = 10$  y  $B = 0$ .

Finalmente se procedió a encontrar los valores de  $c_1$  y  $c_2$  mediante el sistema de ecuaciones y con los valores iniciales mencionados anteriormente, dando como resultado:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -29417.422232$$

Por último la gráfica resultó:

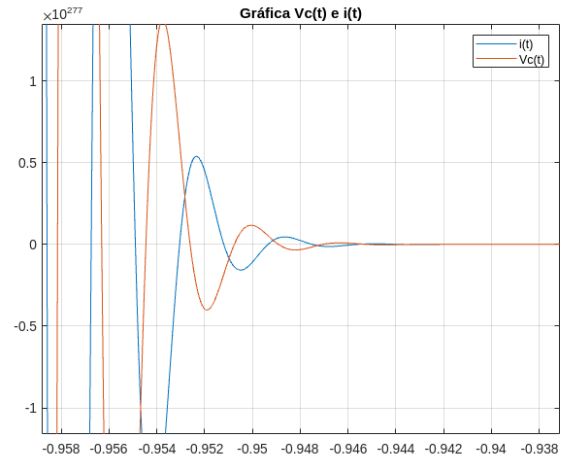


FIG. 11: Comportamiento del Voltaje y la corriente, en un caso de raíces complejas de un sistema No Homogéneo.

## CONCLUSIONES

- Hacer estos análisis de comportamiento de manera gráfica ayudan a tener una vista general más completa de como funciona un sistema, son una gran herramienta para intuir mejor qué pasa en un sistema de ecuaciones diferenciales.
- Se puede concluir que en el caso real donde nos dan raíces repetidas, como son negativas las flechas apuntan hacia adentro como se puede observar en la gráfica 2.
- Por otro lado se puede observar que la gráfica 4 tiene un comportamiento de sumidero, ya que cuando nos resultan raíces reales, siempre van a ser negativas.

Lo anterior es por el motivo de que como  $R$ ,  $C$  y  $L$  son siempre no negativos, al sumar o restar la parte que no está en la raíz, con la raíz siempre da un valor negativo (teniendo en cuenta que  $\lambda_2$  siempre va a ser más pequeño que  $\lambda_1$ ).

- En cuanto a el primer caso complejo, como la parte real es negativa (*es decir diferente de cero*) tendremos un comportamiento de espiral en sumidero, como se puede ver en la gráfica 6.
- Y si nos dan una resistencia igual a cero (*es decir que la parte real sea cero*), el comportamiento sera de círculos centrados como en equilibrio, como se ve en la última gráfica 7.
- Realizando los puntos 5 y 6, se puede concluir que si nos dan una resistencia grande y una inductancia no tan pequeña (*que vaya aumentando según la resistencia*), pero una capacitancia menor o igual a  $C \cdot 10^{-7}$  (*como los ejemplos*), las raíces van a ser complejas.

### BIBLIOGRAFÍA

- P. Blanchard, R.L.Devaney, G. Hall, "Diferential Euaions", 4 ed.,Broks/Cole Gengage Learning, 2012.
- Circuito RLC. (2022, 6 de septiembre). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: octubre 17, 2022 desde [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Circuito\\_RLC&oldid=145805025](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Circuito_RLC&oldid=145805025).
- Kemmerly J.E. Hayt "Análisis de Circuitos en Ingeniería" Séptima Edición, Mc Graw-Hill Interamericana.
- <https://stage.geogebra.org/m/utcMvuUy>.