Comparar media multivar

Friday, February 25, 2022 1:42 PM

Comparar medias multivar.

$\mu_1 - \mu_2 = 0$

Lo visto previam. se puede usar para comparar varias medias multivar.

Caso 1 var: x_{j1}: respuesta j-item en tratamiento 1.
x_{j2}: " " 2.

$D_j = x_{j1} - x_{j2}$ $j = 1, .., n$

$D_j \sim N(\delta, \sigma_d^2)$

δ_0: es usualm 0, pues se busca ver si son ≠.

$t = \dfrac{\bar{D} - \delta_0}{s_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ $\bar{D}$: v.a

$H_0: \delta = 0$ $H_a: \delta \neq 0$.

rechazo si $|t| > t_{n-1}(\alpha/2)$

$IC: \bar{d} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\dfrac{s_d}{\sqrt{n}}$ $\bar{d}$: de muestra.

Ahora con p-vars

x_{1j1}: var 1 con tratam. 1 | x_{2j1}: var 1 tratam 2.

$\vdots$

x_{1jp}: " " p " | x_{2jp}: " p " ".

(en la observaº j-ésima)

$D_{j1}: x_{1j1} - x_{2j1}$

$\vdots$

$D_{jp}: x_{1jp} - x_{2jp}$

$D_j = \begin{bmatrix} D_{j1} \\ \vdots \\ D_{jp} \end{bmatrix}_{p\times 1} \to$ vec.

$D_{j1} \to$ var 1, j-ésima obs, dif de tratamientos. $j = 1, .., n$

- $E[D_j] = \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_p \end{bmatrix}$ • $Cov(D_j) = \Sigma_d$

La resta es una suma de v.a. Mientras n-p sea grande, no hace falta saber si c/ una es normal. Esto, por el teo. del lím central.

Sea $D_1 \dots D_n$ indep. asumimos q' son $N_p(\delta, \Sigma_d)$

$T^2 = n(\bar{D} - \delta)' S_d^{-1} (\bar{D} - \delta)$ tiene distribuº.

S_d^{-1} ↳ matriz inv. de varianzas y covarianzas de las desviaciones.

$\dfrac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}$ ↳ si n-p es pequeño, tenemos q' asumir $D_1, \dots, D_n$ normales.

Si $(n-p)$ grande, $T^2 \sim \chi^2_p$.

Dado los vals obs. $\mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} d_{j1} \\ \vdots \\ d_{jp} \end{bmatrix}$ $j = 1, .., n$

Podemos evaluar

$H_0: \boldsymbol{\delta} = 0$ $H_A: \boldsymbol{\delta} \neq 0$ nivel α.

Usando: $T^2 = n\bar{d}' S_d^{-1} \bar{d} \longrightarrow$ si H_0 es cierta. $\sim \dfrac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}$

Rechazo H_0 si $T^2 > \dfrac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}$

Región de Confianza

Una R.C con confianza $1-\alpha$ de $\boldsymbol{\delta}$ son todos los $\boldsymbol{\delta}$ t.q'

$n(\bar{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\delta})' S_d^{-1} (\bar{\mathbf{d}} - \boldsymbol{\delta}) < \dfrac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}$

Los I.C simultáneos con conf. $1-\alpha$ para los δ_i's están dados por:

$\bar{d}_i \pm \sqrt{\dfrac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\dfrac{S_{d_i}^2}{n}}$

$\bar{d}_i$ ↓ promedio de la desv. en la var. i.

$S_{d_i}^2 \longrightarrow$ i-ésimo elem de la diagonal de la matriz S_n (vars-cov)

Si n-p es grande: $\dfrac{(n-1)p}{n-p} \cdot F_{p,n-p}(\alpha) \approx \chi^2_p(\alpha)$

Los intervalos de Bonferroni simultáneos con coef. $1-\alpha$:

para $\delta_i \to \bar{d}_i \pm t_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\dfrac{S_{d_i}^2}{n}}$

Obs: $\bar{\mathbf{d}}$, S_d y T^2 los podemos calcular de $\bar{x}$ y de S.

si $\underset{n\times 2p}{X} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_{111} & x_{112} \cdots & x_{11p} & x_{121} & \cdots & x_{12p} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_{n11} & \cdots\cdots & x_{n1p} & x_{n21} & \cdots & x_{n2p} \end{array}\right]$

x_{ijk}
i = obs.
j = tratamiento
k = var.

$\bar{x} = (\bar{x}_{11} \quad \bar{x}_{1p} \mid \bar{x}_{21} \quad \bar{x}_{2p}) = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2)$

$S = \left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array}\right]$

Si se define la matriz de contraste C

$\underset{p\times 2p}{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ddots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & \ddots & -1 \end{array}\right]$

$\mathbf{d}_j = Cx_j$, $\bar{\mathbf{d}} = C\bar{x}$

$S_d = CSC'$

ventaja: M e ahorro cálculos

$T^2 = n\bar{x}C'(CSC')^{-1}C\bar{x}$

Comparaº varios tratamientos.

Se desean comparar q tratamientos con una var. respuesta. C/ item, recibe el tratamiento una vez

La j-ésima obs:

$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jq} \end{bmatrix}$ donde x_{ji} es la respuesta al i-ésimo tratamiento del j-ésimo item.

↳ Para comparar tratamientos, se pueden usar matrices de contraste sobre los componentes de $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}_j]$

$\begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_1 - \mu_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} = C\boldsymbol{\mu}$

Se puede evaluar la "igualdad" de tratamientos evaluando

$C\boldsymbol{\mu} = 0 \longrightarrow$ Sé q' en el vec. hay 1 q' no es 0, pero me toca buscar cuál!

- En este caso las medias muestrales son $C\bar{x}$

- Matriz de cov muestral CSC'.

Estadístico de prueba:

$$T^2 = n(C\bar{x})'(CSC')^{-1}(C\bar{x})$$

Ahora,
Suponga una poblaº $N_q(\mu, \Sigma)$
y sea C una matriz de contraste
Si se tiene $H_0: C\mu = 0$ $H_A: C\mu \neq 0$ con nivel α.

Se rechaza H_0 si

$$T^2 = n(C\bar{x})'(CSC')^{-1}(C\bar{x}) > \frac{(n-1)(q-1)}{(n-q+1)} F_{q-1, n-q+1}(\alpha)$$

↳ Hay $q-1$ comparaciones

Una R.C (con conf. $1-\alpha$) para $C\mu$, se construye con todos los vals de $C\mu$ t.q

$$n(C\bar{x} - C\mu)'(CSC')^{-1}(C\bar{x} - C\mu) \leq \frac{(n-1)(q-1)}{(n-q+1)} F_{q-1, n-q+1}(\alpha)$$

Los IC simultáneos para $C\mu$ se obtienen

$$C'\mu = C'\mu \pm \sqrt{\frac{(n-1)(q-1)}{n-q+1} F_{q-1, n-q+1}(\alpha)} \sqrt{\frac{CSC'}{n}}$$