interferencia sobre el vec de medias

Tuesday, February 15, 2022 5:57 PM

Interferencia sobre el vec. de medias

$\bar{x}$ = vec

Estimador de máx verosimilitud:

$\mu = \bar{x}$ $\Sigma = S_n$.

Distribuc° muestral de $\bar{x}$, S

Si $x_1, \dots, x_n$ (vec) es una m.a de pobla° normal con media μ, y cov Σ. La ~ de $\bar{x}$ y de S se puede determinar completam.

1. $p = 1$ (1 var) $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

General: Normal multivar.

$\bar{x} \sim N_p(\mu, \frac{1}{n}\Sigma)$

Si $p=1$,

$(n-1)S^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 \sim \chi^2_{\underline{n-1}\, gl.}$ → vars. normales estándar.

$(n-1)s^2$ se distribuye como $\sigma^2(z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2)$ con $z_i \sim N(0,1)$

2. General

La ~ de $(n-1)S$ (matriz) es la ~ de Wishart con n-1 gl.

$W_m(\cdot|\Sigma)$ es la ~ de $\sum_{i=1}^{m} z_i z_i'$ → $N(0,1)$.

3. $\bar{x}$ y S (matriz) son indep.

Prop asintótica

a. $\bar{x}$ converge en proba a μ

b. S y S_n convergen en proba a Σ

$1/n-1$ $1/n$: cuando n es grande, da casi lo mismo.

Si el estimador converge en proba al parámetro, es un estimador CONSISTENTE

Teo. del Lim central.

Sean $x_1, \dots, x_n$ obs indeps. de una pobla° con media μ y cov Σ.

$\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)$ es aprox $N(0,\Sigma)$. Si $n >> p$, (n - p grande)

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\Sigma)$ sin importar la ~ de los x.

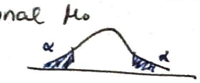
Obs: Usar S en lugar de Σ no afecta tanto los resultados mientras n-p sea grande.

Inferencias sobre μ → I.C / P.H

α: Error tipo I. Ho ✓ y yo la rechazo.

P.H respecto a una media poblacional μ_0

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_A: \mu \neq \mu_0$.



Si $x_1, \dots, x_n$ es una m.a de una pobla° normal, el estadístico de prueba es:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{S/\sqrt{n}}$$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum(x_i)$

Si Ho cierta, t tiene una ~ t-student con n-1 gl

Rechazo Ho si t está en la R.R (región de rechazo).

$|t| > t_{\alpha/2}$ ← (caso 2 colas).

$t > t_\alpha$ (cola sup) o $t < -t_\alpha$ (cola inf).

Rechazo para |t| grande y eso es equiv. a rechazar si t^2 es grande

$t^2 = n(\bar{x}-\mu_0)(S^2)^{-1}(\bar{x}-\mu_0)$ → (dist estadístico)?.

Si la dist $(\bar{x}, \mu)$ es grande, rechazo Ho.

Dada una muestra, rechazo Ho si:

$n(\bar{x}-\mu_0)(S^2)^{-1}(\bar{x}-\mu_0) > t^2_{n-1\, gl}(\alpha/2)$

No rechazar Ho, significa q' μ_0 es un val. posible de μ.
I.C.

Recuerde q' no rechazar Ho a un nivel α es equiv. a q' el val de μ_0 esté en un I.C con confianza $1-\alpha$.

Vals. μ_0 en el I.C. son aquellos para los cuales no se rechaza Ho. $\mu = \mu_0$.

Los lims. de los I.C son v.a, pues dependen de la muestra.

Proba de que I.C contenga a μ es $1-\alpha$. Luego con muchas muestras, $(1-\alpha)(100\%)$

Generalizando a p vars.

$$T^2 = (\bar{x} - \mu_0)' \left(\frac{1}{n} S\right)^{-1} (\bar{x} - \mu_0)$$
$$= n (\bar{x} - \mu_0)' (S^{-1}) (\bar{x} - \mu_0)$$

donde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$

$S = \frac{1}{n-1} \sum (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})'$

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \vdots \\ \mu_{n0} \end{bmatrix}$$

1. T^2 es T^2 de Hotelling
2. $\frac{1}{n} S$ es la estimaº de la cov de $\bar{x}$.
3. Si T^2 muy grande, $\bar{x}$ estará lejos de μ_0, luego, se rechaza Ho.

En este caso, si Ho es cierta.

$T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p} \sim$ ~ f con $p, n-p$ gl. (suele usarse para comparar varianzas)

Así, $\alpha = P\left(T^2 > \underbrace{\frac{(n-1)p}{(n-p)} \cdot F_{p,n-p}(\alpha)}_{\blacktriangle} \mid Ho \text{ cierta}\right)$.

$$= P(n(\bar{x} - \mu_0)'(S^{-1})(\bar{x} - \mu_0) > \blacktriangle \mid Ho \text{ cierta})$$

Si tenemos una P.H de la forma:

Ho. $\mu = \mu_0$, $H_A: \mu \neq \mu_0$ nivel α. rechazo si:

$$T^2 = n \underbrace{(\bar{x} - \mu_0)'}_{\substack{\text{Normal} \\ N_p(0,\Sigma)}} \underbrace{(S^{-1})}_{\substack{\text{Wishart} \\ p,\, n-1}} (\bar{x} - \mu_0) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} \cdot F_{p,n-p}(\alpha)$$

Ej: $n = 3$ y $p = 2$

$x = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ Ho: $\mu = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

Asumo q' los datos vienen de una Normal multivar y obs. indep.

(vista aérea)

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

$S^{-1} = \frac{1}{36 - 9} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$T^2 = 3[(8-9), (6-5)] \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8-9 \\ 6-5 \end{bmatrix}$$
$$= 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7/9$$

$F_{2,1}(0.05) = 199.51$ val-p $= 0.85$

$\frac{(n-1)p}{n-p} F_{2,1} = 798.04$.

Obs: T^2 es invariante bajo cambios de unidades de las medidas de x.

$y = C x + d$ con c y d ctes.

Dado q' $\bar{y} = C\bar{x} + d$, $S_y = CSC'$

$\mu_y = C\mu_x + d$ $\Sigma_y = C\Sigma C'$

$$T^2 = n(\bar{y} - \mu_{y_0})'(S_y^{-1})(\bar{y} - \mu_{y_0})$$
TAREA
$$= n(\bar{x} - \mu_0)(S^{-1})(\bar{x} - \mu_0).$$

Método de razón de verosimilitud (más potente)

$$\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\hat{\Sigma}|^{n/2}} e^{-np/2}$$ → todo es cte menos $|\hat{\Sigma}|^{n/2}$.

$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})'$ $\hat{\mu} = \bar{x}$

Asumiendo Ho: $\mu = \mu_0$ (μ_0 es fijo)

$$L(\mu_0, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu_0)' \Sigma^{-1} (x_j - \mu_0)\right)$$

Como μ_0 fijo, puedo variar Σ para hallar vals. más posibles con las obs. se tiene:

$$\max_{\Sigma} L(\mu_0, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\hat{\Sigma}_0|^{n/2}} e^{-np/2}$$

$$\hat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu_0)(x_j - \mu_0)'$$

Para determinar si μ_0 es un val posible de μ, se comparan los máximos de $L(\mu_0, \Sigma)$ y $L(\mu, \Sigma)$

$$\boxed{\Lambda = \frac{\overbrace{\max_{\Sigma} L(\mu_0, \Sigma)}^{\text{max sobre los } \Sigma.}}{\underbrace{\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}_{\text{máx sobre todos los posibles } \mu \text{ y } \Sigma.}}} \longrightarrow \hat{\Sigma}_0 . \qquad = \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|}\right)^{n/2}.$$

Lambda de Wilk

Si Λ es pequeño, $H_0: \mu = \mu_0$ es poco probable, H_0 rechazado

(si μ_0 está muy lejos de μ, $|\hat{\Sigma}_0|$ va a ser mucho más grande que $|\hat{\Sigma}|$.)

Mas concretam.,

H_0 se rechaza si $\Lambda < C(\alpha) \longrightarrow \alpha$: percentil de la $\sim$ de Λ