CORRECCION
PARCIAL 2

(1) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2y)$

- $u = x^3 - 3xy^2$ $\Rightarrow$ Note que u y v son continuas
  $v = -y^3 + 3x^2y$ en todos los reales.

- Además obteniendo las derivadas parciales:

$u_x = 3x^2 - 3y^2$ $\quad v_x = 6xy$ $\quad \Rightarrow$ Siguen siendo continuas.

$u_y = -6xy$ $\quad v_y = -3y^2 + 3x^2$

- Por último analizaremos las ecuaciones Cauchy - Rieman (Teorema)

Como $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$

$3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2$ $\quad -6xy = -6xy$

$\Rightarrow$ Las ecuaciones Cauchy - Rieman se satisfacen, por lo tanto $f(z)$ es analítica en cualquier dominio D.

② $g(z) = e^{\bar{z}} \rightarrow e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

- $u = e^{x}\cos y$ $\Rightarrow$ Note que $g(z)$ es diferenciable en unos puntos
  $v = -e^{x}\operatorname{sen} y$ pero no es diferenciable en un rango.

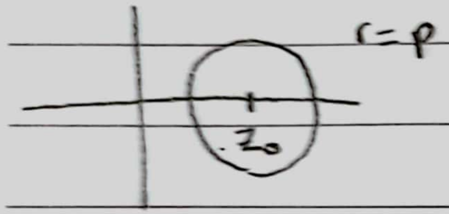
- $u_x = e^{x}\cos y$ $v_x = -e^{x}\operatorname{sen} y$ $\Rightarrow$ Note que $u_x \neq v_y$ y $u_y \neq -v_x$
  $u_y = -e^{x}\operatorname{sen} y$ $v_y = -e^{x}\cos y$

- Es decir, no se cumplen las ecuaciones de Cauchy – Rieman en ningún conjunto abierto. Lo anterior porque:

- $u_x = v_y \Rightarrow e^x \cos y = -e^x \cos y \Rightarrow 2e^x \cos y = 0$ → como $e^x \neq 0$, $\cos y = 0$ esto se cumple por ej. en: $y = -5\pi/2, -3\pi/2, \ldots, \pi/2, 3\pi/2, \ldots$ Es decir $u_x = v_y$ en ciertas rectas
- Lo mismo para $u_y = -v_x \Rightarrow -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow 2e^x \operatorname{sen} y = 0$ → como el anterior $e^x \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} y = 0$ esto se cumple en: $y = -2\pi, -\pi, \ldots, \pi, 2\pi, \ldots$

Como las ecuaciones Cauchy-Rieman se cumplen solo en ciertas rectas, es decir que no existe ningún conjunto abierto que las satisface. Por lo tanto la función no es analítica en todo $\mathbb{C}$.

3 $|z - z_0| = \rho \to \rho e^{i\theta} + z_0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$



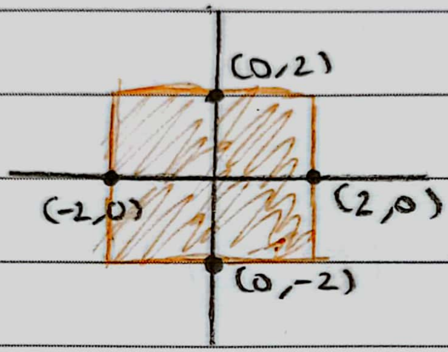
$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta} + \cancel{z_0 - z_0}} \cdot \rho i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i\, d\theta = i\theta \Big|_0^{2\pi} = \boxed{2\pi i}$$

4 $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$

$\downarrow$

$z(z+8i)(z-8i)$



- $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2+8}$

- $$\int_C \frac{\frac{\cos z}{z^2+8}}{z-0} = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\, \frac{\cos(0)}{0+8} = 2\pi i\, \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{4}\pi i}$$