Primer Parcial

Indicaciones generales

- Este es un examen **individual** con una duración de **120 minutos: de 9:00 a 11:00 a.m.**.
- Sólo se permite el uso de calculadoras como medio electrónico. Los celulares deben estar apagados durante todo el examen.
- Las cámaras deben estar activas durante todo el examen.
- Puede usar una única hoja con fórmulas. El uso de libros u otro recurso "analógico" diferente no está permitido.
- Cualquier incumplimiento de lo anterior conlleva a la anulación del examen.
- Las respuestas deben estar totalmente justificadas.
- ¡Suerte y ánimo!

1. (25 pts) Sea V un vector aleatorio con media E(V)=μ y matriz de covarianza E[(V$-\mu$)(V$-\mu)'$] =Σ. Muestre que E(VV$'$) =$\Sigma + \mu\mu'$.

2. (25 pts) Sea X una variable aleatoria con distribución $N_3(\mu, \Sigma)$ con $\mu' = [2, -3, 1]$ y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Encuentre la distribución de $3X_1 - 2X_2 + X_3$.

3. (20 pts) Sea $A^{1/2}$ una matriz de dimensión m x m, donde $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i} e_i e_i' = P\Lambda^{1/2}P'$ y $PP' = P'P = I$. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) $A^{1/2}A^{1/2} = A$.

   b) $A^{1/2}$ es simétrica.

4. (25 pts) En una universidad se estudian las notas de los alumnos en dos asignaturas: estadística y cálculo. El director de las dos asignaturas afirma que la nota media de ambas asignaturas es de 60 sobre 100. Se toma una muestra de 100 alumnos de la universidad que cursaron las dos asignaturas y la notas promedio fueron 62.1 y 62.7 respectivamente. Adicionalmente, se la desviación estándar en las notas de estadística fue de 14 y la de cálculo fue 17. La covarianza muestral entre las notas de las dos asignaturas fue 150. ¿Según estos datos, el director de las asignaturas está en lo correcto?

5. (5 pts) Defina qué es el p-valor en un test estadístico.

Día	Mes	Año	Hora	Institución
04	03	22		Universidad del Rosario

Alumno	Código	Materia
Laura Sofia Rincón Sierra		Análisis Estadístico de Datos

Curso	Bimestre	Semestre	Salón	Hoja No ___ de ___	CALIFICACIÓN

Profesor: Juan Camilo Yepes

97/100

PARCIAL 1

(1) Sea V un vector aleatorio con media $E(V) = \mu$ y matiz de covarianza $E[(V-\mu)(V-\mu)'] = \Sigma$. Muestre que $E(VV') = \Sigma + \mu\mu'$

★ Partimos de $\Sigma + \mu\mu'$

$$= E[(V-\mu)(V-\mu)'] + \mu\mu'$$

$$= E[(V-\mu)(V'-\mu')] + \mu\mu'$$

$$= E[VV' - V\mu' - \mu V' + \mu\mu'] + \mu\mu'$$

$$= E(VV') - E(V\mu') - E(\mu V') + E(\mu\mu') + \mu\mu'$$

$$= E(VV') - E(V)\mu' - \mu E(V') + \mu\mu' + \mu\mu'$$

$$= E(VV') - \mu\mu' - \mu\mu' + 2\mu\mu'$$

$$\boxed{= E(VV')}$$

✓ 25/25

(2) Sea X una variable aleatoria con distribución $N_3(\mu, \Sigma)$ con $\mu' = [2, -3, 1]$ y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre la distribución de $3X_1 - 2X_2 + X_3$

★ $3x_1 - 2x_2 + x_3$ podemos escribirlo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C'X$$

- Valor esperado : $E(C'X) = C'E(X) = C'\mu$

$$\rightarrow C'\mu = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \boxed{= 13}$$

- Varianza : $Var(C'X) = C'\Sigma C$

$$\rightarrow C'\Sigma C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \boxed{= 9}$$

④ Notas de estadística y cálculo

$\bar{X}_1 = 62.1$ $\bar{X}_2 = 62.7$

$S_1 = 14$ $S_2 = 17$

$X_1 \rightarrow$ Estadística

$X_2 \rightarrow$ Cálculo

$cov(X_1, X_2) = 150$

23

El director afirma que la nota media de ambas asignaturas es 60.

$n = 100$ alumnos. $\rightarrow$ Tamaño muestra.

★ ¿Según estos datos, el director de las asignaturas está en lo correcto?

★ Tenemos : $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\bar{X} = \begin{bmatrix} 62.1 \\ 62.7 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 14^2 & 150 \\ 150 & 17^2 \end{bmatrix}$ $\mu_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$

$n = 100$

→ PRUEBA DE HIPÓTESIS :

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_a : \mu \neq \mu_0$

- Estadístico de prueba

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1} (\bar{X} - \mu_0)$$

$$= (100)\left(\begin{bmatrix} 62.1 \\ 62.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}\right)' \left(\begin{bmatrix} 196 & 150 \\ 150 & 289 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 62.1 \\ 62.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (100)\left(\begin{bmatrix} 2.1 & 2.7 \end{bmatrix}\right) \frac{1}{34144} \begin{bmatrix} 289 & -150 \\ -150 & 196 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.7 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{100}{34144}\left(\begin{bmatrix} 2.1 & 2.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 289 & -150 \\ -150 & 196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.7 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{100}{34144}\left(\begin{bmatrix} 201.9 & 214.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.1 \\ 2.7 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{100}{34144}(1002.33) \quad \boxed{\approx 2.93}$$

- Región de rechazo

$$T^2 > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)$$

$$T^2 > \frac{(100-1)p}{(100-2)} F_{2, 100-2}(0.05)$$

$$T^2 > \frac{(99)p}{(98)} F_{2,98}(0.05)$$

$$T^2 > \frac{99}{98}p(3.087)$$

$$\boxed{T^2 > 3.118}$$

★ Como el estadístico de prueba está a fuera de la región de rechazo, aceptamos H_0 con $1-\alpha : 0.95$. El director está en lo correcto.

→ Por propiedades de la normal multivariada, combinaciones lineales de normales multivariadas es normal.

- La distribución de $3X_1 - 2X_2 + X_3$ es normal univariada con media $\mu = 13$ y varianza $\sigma^2 = 9$

$\boxed{N(13, 9)}$

25/25

③ Sea $A^{1/2}$ una matriz de dimensión $m \times m$, donde
$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i}\, e_i e_i' = P \Lambda^{1/2} P'$ y $PP' = P'P = I$.
Demuestre las siguientes propiedades:

a) $A^{1/2} A^{1/2} = A$

- Tomamos
$$(A^{1/2})(A^{1/2}) = (P\Lambda^{1/2}P')(P\Lambda^{1/2}P')$$
$$= P\Lambda^{1/2}(P'P)\Lambda^{1/2}P'$$
$$= (P\Lambda^{1/2})\, I\, (\Lambda^{1/2}P')$$
$$= (P\Lambda^{1/2})(\Lambda^{1/2}P')$$

Como $\Lambda^{1/2}$ es una matriz diagonal y además cuadrada, tenemos que $\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2} = (\Lambda^{1/2})^2 = \Lambda$

entonces $\boxed{(A^{1/2})(A^{1/2}) = P\Lambda P' = A}$

b) $A^{1/2}$ es simétrica

- Tomamos
$$(A^{1/2})' = (P\Lambda^{1/2}P')'$$
$$= ((P\Lambda^{1/2})(P'))'$$

Por propiedades de matrices, $(AB)' = B'A'$, luego
$$= (P')'(P\Lambda^{1/2})'$$
$$= (P')'(\Lambda^{1/2})'(P)'$$

También por propiedades de matrices, $(A')' = A$, y, una matriz diagonal es simétrica, entonces:
$$= P\Lambda^{1/2}P'$$
$$\boxed{= A^{1/2}}$$