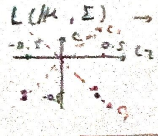
Análisis canónico

Tuesday, April 26, 2022 6:24 PM

Análisis Canónico

$L(\mu, \Sigma) \rightarrow L(\mu, LL' + \Psi)$



%. Si los rots. van a tener mucho peso unas vars y las otras casi nada. ⇒ usualm. son ortogonales, xa mantener estructura.

El análisis canónico tiene mucha utilidad para comparar grupos (suele usarse en sociales).

Buscamos ver asociaciones entre 2 conjuntos de vars.

Ej: desempeño escolar vs universitario : ver correlación.
(con sus vars) (con vars)

La ≠ es q' ahora son grupos de vars., no 1-a-1.

Metodología: Estudiar corr. entre comb. lin de vars del grupo 1 con comb. lin de vars del g2.
↳ Buscar las comb. lin con correlación más alta entre sí.
↳ Luego la 2da no corr. con las iniciales
⋮

Los pares de comb. lin se conocen como variantes canónicas

sus corr. son las correlaciones canónicas
↳ muestran la fuerza de la asoc. entre 2 grupos

ej: Math, Phy, Chem | Eng, Lit, Geo, Hist — no necesariam. del mismo n.

$U = a' X^{(1)}$

$V = b' X^{(2)}$

$cov(U, V) \sim \cdots$

- Al hacer el análisis tenemos la forma de las comb. lin. de ahí saco la corr. de los grupos 1 el peso de c/var ahí.
- El val de a_i nos da el peso de $X_i^{(1)}$ en la corr.
- La corr. a medida q' se sacan + combs. irá bajando.
- Idealm. busco reducir info de muchas dims de relaciones de 2 grupos a pocos pares de variantes canónicas

Suponga q' el G1 tiene p vars ⇒ $X^{(1)}$ con $p \leq q$
G2 tiene q vars ⇒ $X^{(2)}$

- $E[X^{(1)}] = \mu^{(1)}$
- $E[X^{(2)}] = \mu^{(2)}$
- $cov(X^{(1)}) = \Sigma_{11}$
- $cov(X^{(2)}) = \Sigma_{22}$

$cov(X^{(1)}, X^{(2)}) = \Sigma_{12} = \Sigma_{21}$

- $\Sigma = E[(X-\mu)(X-\mu)']$

! Las p.q asoc. lin entre vars $X^{(1)}$ y vars $X^{(2)}$ están en Σ_{12}

Sean

→ $U = a' X^{(1)}$ $V = b' X^{(2)}$ a, b vecs. de coef.

- $Var(U) = a' \, cov(X^{(1)}) \, a = a' \Sigma_{11} a$
- $Var(V) = b' \, cov(X^{(2)}) \, b = b' \Sigma_{22} b$
- $cov(U, V) = a' cov(X^{(1)}, X^{(2)}) \, b = a' \Sigma_{12} b$

Buscamos a, b t.q':

$$corr(U, V) = \frac{a' \Sigma_{12} b}{\sqrt{a' \Sigma_{11} a} \sqrt{b' \Sigma_{22} b}} \; * \text{ sea máx.}$$

1) El 1er par de variantes canónicas sean comb lin U_1, V_1 con varianza 1 q' maximiza *.

El k par de variantes canónicas son comb. lin U_k, V_k con varianza 1 q' max * y no están corr. con los $k-1$ pares anteriores.

↳ Como $p \leq q$, siempre puedo calcular como máximo p.

Teo: Sup $p \leq q$ y $X^{(1)}, X^{(2)}$ t.q' $\Sigma = cov(X)$.
Si $U = a' X^{(1)}$ $V = b' X^{(2)}$ comb. lin:

1) $\max_{a,b} corr(U, V) = \rho_1^*$

Se obtiene con: $U_1 = e_1' \Sigma_{11}^{-1/2} X^{(1)}$
$V_1 = f_1' \Sigma_{22}^{-1/2} X^{(2)}$

$a' = e_k' \Sigma_{11}^{-1/2}$

$b' = f_k' \Sigma_{22}^{-1/2}$

2) El k-ésimo par de variantes canónicos $k = 2, 3, \dots, p$

$$U_k = \underbrace{e_k' \Sigma_{11}^{-1/2}}_{a'} X^{(1)} \qquad V_k = \underbrace{f_k' \Sigma_{22}^{-1/2}}_{b'} X^{(2)}$$

$$\max \operatorname{corr}(U_k, V_k) = \rho_k^*$$

no correlacionado con los $k-1$ pares anteriores de variantes canónicas.

Dónde $\rho_1^{*2} \geq \rho_2^{*2} \geq \dots \geq \rho_p^{*2}$ son vals propios de.

$$\Sigma_{11}^{-1/2} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1/2}$$ con vecs prop asoc. $e_1, \dots, e_p$.

y $f_1, \dots, f_p$ son los vecs propios de

$$\Sigma_{22}^{-1/2} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1/2}$$

3) Estas variantes canónicas satisfacen $\operatorname{var}(U_k) = \operatorname{Var}(V_k) = 1 \ \forall k$.

- $\operatorname{cov}(U_k, U_l) = \operatorname{corr}(U_k, U_l) = 0 \quad k \neq l$
- $\operatorname{cov}(V_k, V_l) = \operatorname{corr}(V_k, V_l) = 0$
- $\operatorname{Cov}(U_k, V_l) = \operatorname{Corr}(U_k, V_l) = 0$

Si las vars se estandarizan

$Z^{(1)}, Z^{(2)}$

$U_k = a_k' Z^{(1)} = e_k' \rho_{11}^{-1/2} Z^{(1)}$ con $\operatorname{cov}(Z^{(1)}) = \rho_{11}$

$V_k = b_k' Z^{(2)} = f_k' \rho_{22}^{-1/2} Z^{(2)}$ $\quad \operatorname{cov}(Z^{(2)}) = \rho_{22}$

$\operatorname{cov}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = \rho_{12}$

Ej: Apuntes Yepes.

$a_1 = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.68 \end{bmatrix}$ → Esta explica más en el 1er grupo.

$b_1 = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.77 \end{bmatrix}$ → Esto explica más en G2.

} son las q' tienen mayor val.

$\rho_1^* = 0.74$

$\rho_2^* = 0.03$ → Solo explica el 3%. → Blegh / Meh.

ANÁLISIS PURO Y DURO