Vectores Aleatorios

Tuesday, February 1, 2022 2:00 PM

Vectores Aleatorios

Matriz raíz cuadrada.

Sea A una matriz $k \times k$ def. pos y simétrica con descomposición espectral.

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i e_i'$$

Sea $P = [e_1' \; e_2' \cdots e_k']$

Entonces, $A = P \Lambda P'$ donde, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_k \end{bmatrix}$

Además,

$$A^{-1} = P\Lambda^{-1}P' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i' \quad \text{con } \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1/\lambda_k \end{bmatrix}$$

Def: Sea A una matriz $k \times k$ simétrica, def. pos $\Lambda^{1/2}$ es la matriz con entradas en la diagonal $\sqrt{\lambda_i}$ $i = 1, \dots, k$. Entonces, la matriz $\sum \sqrt{\lambda_i} e_i e_i' = P\Lambda^{1/2}P'$ se conoce como la matriz raíz cuadrada de A y se denota $A^{1/2}$.

$A^{1/2}$ satisface:

- $(A^{1/2})^T = A^{1/2}$
- $A^{1/2}A^{1/2} = A$
- $(A^{1/2})^{-1} = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i' = P\Lambda^{-1/2}P'$
- $A^{1/2}A^{-1/2} = A^{-1/2}A^{1/2} = I_k$
- $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$

Vectores y matrices aleatorias

i. Un vec. aleatorio es aquel cuyas entradas son v.a.

ii. Una matriz aleat. tiene como entradas v.a

iii. El valor esperado de un vec. aleat (o matriz) es un vec. (o matriz) con entradas correspondientes a los vals. esp. de los elems. de x.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{1p} \\ x_{p1} & x_{pp} \end{bmatrix} \qquad E[X] = \begin{bmatrix} E[x_{11}] & E[x_{1p}] \\ E[x_{p1}] & E[x_{pp}] \end{bmatrix}$$

$$E[x_{ij}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(x_{ij})\, x_{ij}\, dx & x_{ij} \text{ continua con densidad conj. } f_{ij} \\ \sum p_{ij}(x_{ij})\, x_{ij} & x_{ij} \text{ discreta con PMF conjunta } p_{ij} \end{cases}$$

Sean X, Y matrices (o vecs.) aleat. del = tamaño (= dim.).
Sean A, B matrices (o vecs) conformados por ctes.

1. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
2. $E[AXB] = A\,E[X]\,B$

Vec. de medias y matriz de cov

Sea $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_p \end{bmatrix}$ un vec. aleat.

c/ elem. de X es una v.a con ~ marginal

Sean μ_i y σ_i^2 la media y varianza de x_i (marginales)

$$\mu_i = E[x_i] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i)\, dx_i \\ \sum x_i p_i(x_i) \end{cases} \qquad \sigma_i^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i)\, dx_i \\ \sum (x_i - \mu_i)^2 p_i(x_i) \end{cases} = E((x_i - \mu_i)^2)$$

X → vec
X → mat

Ahora, la $\text{cov}(x_i, x_k)$ $i, k = 1, \dots, p$ $\quad \sigma_i^2 = \sigma_{ii}$

$$\sigma_{ik} = \text{cov}(x_i, x_k) = E[(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)]$$

$$= \begin{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) f_{ik}(x_i x_k)\, dx_i\, dx_k \\ \sum\sum (x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k) p_{ik}(x_i x_k) \end{cases}$$

→ si $i = k$, se tiene σ_{ii} (varianza marginal de i)

La ~ de ese vec. se puede describir mediante la ~ conjunta de sus entradas.

$f_{x_1 \dots x_p}(x_1 \dots x_p) = f_X(x)$ → muchas veces es la f° de densidad multivariada.

x_1, x_k son indeps. si $F_{ik}(x_i, x_k) = F_i(x_i)F_k(x_k)$
$f_{ik}(x_i, x_k) = f_i(x_i) f_k(x_k)$

Generalizando:

p v.a $x_1, \dots, x_p$ continuas son indep si
$f_{x_1,\dots x_p}(x_1,\dots,x_p) = \prod^{p} f_i(x_i) \quad \forall x_1,\dots,x_p$.
$x_i\, x_p$ indep $\Rightarrow cov(x_1, x_p) = 0$

Nota: vector aleatorio X.

- $\mu_x = \mu = E[X] \rightarrow$ vec. media.
- $\Sigma = E[(x-\mu)^2] \rightarrow$ vec. varianza cov. $\hookrightarrow$ simétrica. $\rightarrow$ los elems son las p varianzas (σ_{ii}) en su diagonal, con $\frac{p(p-1)}{2}$ cov $\neq$. (σ_{ij})
- $E[X] = \mu_x = \mu = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_p\end{bmatrix} \rightarrow$ vec media poblacional.
- $\Sigma = E\left[\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_p-\mu_p\end{pmatrix}(x_1-\mu_1 \dots x_p-\mu_p)\right] = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{p1}\\ \sigma_{1p} & \sigma_{pp}\end{bmatrix} \rightarrow$ Matriz de var-cov. poblacional.
- $\rho = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{p1}\\ \rho_{1p} & \rho_{pp}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \rho_{p1}\\ \rho_{1p} & 1\end{bmatrix} \rightarrow$ matriz de correla° poblacional (simétrica).

Donde $\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$ mide la asocia° lin. entre las vars. aleat. x_i, x_k

---

Ahora:

- Sea $V^{1/2} = \begin{bmatrix}\sqrt{\sigma_{11}} & 0\\ 0 & \sqrt{\sigma_{pp}}\end{bmatrix} \rightarrow$ matriz desv. estandar

1) $V^{1/2}\rho V^{1/2} = \Sigma$
2) $\rho = (V^{-1/2})^{-1}\,\Sigma\,(V^{-1/2})^{-1}$

Particiones de vecs y matrices: $X = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_q\\ \hline x_{q+1}\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X^{(1)}\\ X^{(2)}\end{bmatrix}$

- $\mu = E[X] = \begin{bmatrix}E[X]^{(1)}\\ E[X]^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu^{(1)}\\ \mu^{(2)}\end{bmatrix}$
- $E[(X^{(1)}-\mu^{(1)})(X^{(2)}-\mu^{(2)})] = E\left[\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ \vdots\\ x_q-\mu_q\end{pmatrix}(x_{q+1}-\mu_{q+1},\dots, x_p-\mu_p)\right]$
  $= \begin{bmatrix}\sigma_{1,q+1} & \sigma_{1p}\\ \sigma_{q,q+1} & \sigma_{qp}\end{bmatrix} = \Sigma_{12} \rightarrow$ matriz de cov entre los componentes de $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$
  $\downarrow$
  No siempre es simétrica y cuadrada.
- $$\underset{p\times p}{\Sigma} = \begin{array}{c|cc} & q & p-q\\ \hline q & \Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ p-q & \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{array} = \left[\begin{array}{c|c}\sigma_{11} \;\; \sigma_{qq} & \Sigma_{12}\\ \hline \Sigma_{21} & \sigma_{q+1,q+1} \;\; \sigma_{pp}\end{array}\right]$$ con $\Sigma_{21} = \Sigma_{12}^T$

- La cov de $X^{(1)}$ es Σ_{11} y la de $X^{(2)}$ es Σ_{22}
  - Σ_{12} : $cov(X^{(1)}, X^{(2)})$

Combinaciones lin. de vecs. aleat.

Recordemos:
- $Y = aX + b$
- $E[Y] = aE[X] + b$
- $var(Y) = a^2 var(X)$

- $cov(aX, bY) = ab\,cov(X,Y)$
- $cov(X, Y+c) = cov(X,Y)$
- $cov(X, Y+Z) = cov(X,Y) + cov(X,Z)$

Sea $c = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}$. $X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \in$ v.a

- $E[c'X] = c'E[X] = c'\mu_x$
- $var(c'X) = c'\Sigma c = [a, b]\begin{bmatrix}var(x_1) & cov(x_2,x_1)\\ cov(x_1,x_2) & var(x_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$

En general:

$c'X = c_1x_1 + \dots + c_px_p$

$E[c'X] = c'E[X] = c'\mu_x$

$var(c'X) = c'\Sigma c$

Más general:

Se tienen q comb. lin de p v.a's

$z_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1p}x_p$
$\vdots$
$z_q = c_{q1}x_1 + \dots c_{qp}x_p$

Así, $Z = \begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_q\end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1p}\\ c_{q1} & \cdots & c_{qp}\end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}$

$\underset{q\times 1}{Z} = CX = \begin{bmatrix}c_{11} & \\ & c_{qp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_p\end{bmatrix}$

$\mu_z = E[Z] = CE[X] = C\mu_x$

$\Sigma_z = C\,\Sigma_x\,C'_{\,p\times q}$

$y \times q$ $q \times p$ $p \times p$