ANÁLISIS TRANSITORIO DE UN CIRCUITO RLC EN SERIE

Juan P. Vélez.
jvelezs1@est.ups.edu.ec
Luis Sanchez
lsanchezp3@est.ups.edu.ec

Señales y Sistemas

Resumen--- En este informe se presenta el diseño de una aplicación en software MatLab para realizar gráficas de amortiguamiento de un circuito RLC serie, previo a esto se definirá matemáticamente las ecuaciones características que describen a los tres diferentes tipos de soluciones de la ecuación diferencial del circuito, en donde se detallará el proceso para encontrar dicha solución estableciendo los tres casos: sistema con amortiguamiento crítico, sobre amortiguado y subamortiguada, al final se contará con las gráficas obtenidas en nuestro programa para cada caso de amortiguamiento.

Palabras Claves— amortiguamiento crítico, subamortiguada, sobre amortiguado, frecuencia resonante, oscilación, taza de amortiguamiento.

I. OBJETIVOS

Objetivo General: Diseño de un programa en MatLab para graficar el tipo de amortiguamiento de un circuito RLC serie.

Objetivos Específicos: Establecer la ecuación diferencial del circuito que defina su señal de salida.

Encontrar los tres diferentes casos de solución de dicha ecuación diferencial.

Las soluciones encontradas llevarlas a la programación en MatLab para graficarlas.

Reconocer el tipo de amortiguamiento de cada una de ellas y determinar su frecuencia y periodo de oscilación.

II. INTRODUCCIÓN

El estudio de estado transitorio de un circuito determina las variaciones existentes que hay en las tensiones y corrientes en función del tiempo antes de llegar a un estado de equilibrio o estado estacionario impuesta por los parámetros de la red. El periodo de tiempo requerido para que las corrientes y tensiones alcancen el estado final estacionario, se denomina estado transitorio. Durante este tiempo, las expresiones matemáticas de la señales de tensión o corriente varían, con una corta duración, siendo amortiguadas por ciertos factores exponenciales decrecientes, cuyos valores dependerán de los valores del circuito.

Los fenómenos transitorios son de corta duración y es en donde se presenta los problemas más serios y complicados de funcionamiento de un circuito eléctrico.

En este informe se resolverá la ecuación de un circuito eléctrico RLC serie por ecuaciones diferenciales, la cual resulta al aplicar la ley de Kirchhoff al circuito y considerando condiciones iniciales. Se verá también los tres casos de soluciones del sistema dependiendo del resultado de la raíz de la ecuación diferencial, así como frecuencias resonantes y taza de amortiguamiento para cada solución.

III. MARCO TEÓRICO

Se entiende por análisis transitorio a la respuesta que obtenemos del circuito con sus diferentes ecuaciones es así que para determinar la ecuación general del circuito tenemos que analizar el comportamiento del voltaje el mismo.

Las ecuaciones que vamos a utilizar para el circuito son:

V= voltaje
R= resistencia
L= inductor
C=capacitor

Utilizando las expresiones que se utilizan para trabajar con inductores y capacitores podemos obtener las siguientes:

Voltaje en el inductor

$$\mathrm{V}_L = \mathrm{L} * \frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{il} = \frac{1}{\mathrm{L}} \int (\mathrm{Vl})\mathrm{dt}$$

Voltaje el capacitor

$$\mathrm{Vc} = \frac{1}{\mathrm{C}} \int (\mathrm{ic})\mathrm{dt} \quad \rightarrow \quad \mathrm{ic} = \frac{\mathrm{Cdv}}{\mathrm{dt}}$$

Voltaje en la resistencia

$$V_R = R * i(t)$$

Con estas expresiones matemáticas elaboramos una ecuación diferencial de segundo grado [3].

IV. DESARROLLO

Se planteó la ecuación diferencial del circuito con resistencia, inductor y capacitor conectados en serie a una fuente de tensión tal como se muestra en la siguiente figura.

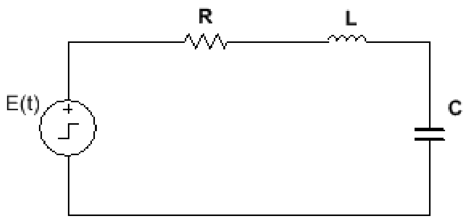

Fig. 1. Circuito RLC en serie con fuente de tensión.

De acuerdo con la Ley de Tensiones de Kirchhoff en el circuito se tiene:

$$E(t) = V_R + V_L + V_C$$

Siendo:

$$V_R = R * i(t)$$

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt \rightarrow i_C = C\frac{dv}{dt}$$

Reemplazando y dejando la ecuación en función de la tensión del capacitor tenemos:

$$E(t) = R * i(t) + L\frac{di}{dt} + V_C$$

$$E(t) = R * C\frac{dV_c}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dV_c}{dt}\right) + V_C$$

$$LCV_C'' + RCV_C' + V_C = E(t)$$

$$V_C'' + \frac{R}{L}V_C' + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}E(t)$$

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial de segundo grado en función del voltaje del capacitor (*voltaje de salida del circuito*), para obtener la solución de esta ecuación diferencial primero se definirá la frecuencia resonante y la taza de amortiguamiento del circuito en estudio [2].

Frecuencia resonante del circuito:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

Taza de amortiguamiento:

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

Estos datos serán reemplazados en la ecuación diferencial para obtener:

$$V_C'' + 2\alpha V_C' + {\omega_0}^2 V_C = {\omega_0}^2 E(t)$$

Ahora bien, como se sabe, esta ecuación diferencial tiene como solución la suma de la parte homogénea con la parte particular.

$$V_C(t) = V_C(t)_h + V_C(t)_p$$

La ecuación particular en este caso es una constante arbitraria, la cual es el voltaje de entrada en el circuito, para nuestro caso la definiremos como $u(t)$, ya que representaremos a nuestro circuito con una fuente escalón.

$$V_C(t)_p = A$$

$$V_C(t)_p = u(t)$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial parte de la ecuación característica, es decir igualando a cero la ecuación obtenida del circuito.

$$V_C'' + 2\alpha V_C' + {\omega_0}^2 V_C = 0$$

$$S'' + 2\alpha S' + {\omega_0}^2 S = 0$$

Esta ecuación tiene como solución la forma de un exponencial, que es una combinación lineal de N exponenciales.

$$V_C(t)_h = Ke^{St}$$

Encontrando las raíces de la ecuación característica tenemos:

$$S_1, S_2 = \frac{-2\alpha + \sqrt{(2\alpha)^2 + 4(1)({\omega_0}^2)}}{2(1)}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - {\omega_0}^2}$$

Estas raíces pueden ser de tres tipos: Reales Iguales, Reales Diferentes y Complejas, dependiendo de los valores de resistencia, inductancia y capacitancia en el circuito. Según como sea el resultado de las raíces, las ecuaciones de solución del circuito cambiaran.

La primera de ellas es cuando se obtiene raíces reales e iguales (*discriminante nulo*) y se cumple si:

$$R^2 = \frac{4L}{C}$$

Resolviendo la parte homogénea tenemos:

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{(0)} = -\alpha$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{(0)} = -\alpha$$

$$V_C(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t}$$

Al aplicar las siguientes condiciones iniciales.

$$V_C(0) = 1$$

$$V_C{}'(0) = 0$$

$$V_C(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t}$$

$$1 = K_1 e^{-\alpha(0)} + K_2(0) e^{-\alpha(0)}$$

$$1 = K_1 e^{-\alpha(0)} + 0$$

$$K_1 = 1$$

$$V_C{}'(t) = -\alpha K_1 e^{-\alpha t} + K_2[e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}]$$

$$V_C'(t) = -\alpha K_1 e^{-\alpha t} + K_2 e^{-\alpha t} - K_2 \alpha t e^{-\alpha t}$$

$$0 = -\alpha K_1 e^{-(0)t} + K_2 e^{-\alpha(0)} - K_2 \alpha(0) e^{-\alpha(0)}$$

$$0 = -\alpha K_1 + K_2 + 0$$

$$K_2 = \alpha$$

$$V_C(t)_{ZIR} = e^{-\alpha t} + \alpha t e^{-\alpha t}$$

Para la respuesta de estado cero tenemos:

$$V_C(t)_p = A = E(t)$$

$$V_C(t)_{ZSR} = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t} + A$$

Condiciones iniciales nulas:

$$V_C(0) = 0$$

$$V_C{}'(0) = 0$$

$$0 = K_1 e^{-\alpha(0)} + K_2(0) e^{-\alpha(0)} + A$$

$$K_1 = -A$$

Derivando:

$$V_C'(t) = -\alpha K_1 e^{-\alpha t} + K_2 e^{-\alpha t} - K_2 \alpha t e^{-\alpha t}$$

$$0 = -\alpha K_1 e^{-\alpha(0)} + K_2 e^{-\alpha(0)} - K_2 \alpha(0) e^{-\alpha(0)}$$

$$0 = -\alpha K_1 + K_2$$

$$K_2 = -A\alpha$$

La respuesta de estado cero es:

$$V_C(t)_{ZSR} = -Ae^{-\alpha t} - A\alpha t e^{-\alpha t} + A$$

La respuesta total es:

$$V_C(t) = V_C(t)_{ZIR} + V_C(t)_{ZSR}$$

$$\therefore \quad V_C(t) = A + e^{-\alpha t} + \alpha t e^{-\alpha t} - Ae^{-\alpha t} - A\alpha t e^{-\alpha t}$$

$$V_C(t) = A - Ae^{-\alpha t} - A\alpha t e^{-\alpha t}$$

Esta solución identifica que el circuito tiene un amortiguamiento crítico por su discriminante nulo.

El segundo caso sería cuando tenemos raíces reales y diferentes (*discriminante positivo*), la ecuación para identificar aquello es:

$$R^2 > \frac{4L}{C}$$

La solución homogénea tiene la siguiente forma.

$$V_C(t)_{ZIR} = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$$

Dónde:

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$$

Al aplicar las siguientes condiciones iniciales tenemos:

$$V_C(0) = 1$$

$$V_C{}'(0) = 0$$

$$V_C(t)_{ZIR} = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$$

$$1 = K_1 e^{S_1(0)} + K_2 e^{S_2(0)}$$

$$1 = K_1 + K_2$$

$$V_C{}'(t)_{ZIR} = S_1 K_1 e^{S_1 t} + S_2 K_2 e^{S_2 t}$$

$$0 = S_1K_1e^{S_1(0)} + S_2K_2e^{S_2(0)}$$

$$0 = S_1K_1 + S_2K_2$$

Al igualar las ecuaciones encontramos los valores de K_1 y K_2.

$$K_1 = 1 - \left(\frac{-S_1}{-S_1 + S_2}\right)$$

$$K_2 = \frac{-S_1}{-S_1 + S_2}$$

$$V_C(t)_{ZIR} = \left[1 - \left(\frac{-S_1}{-S_1 + S_2}\right)\right] e^{S_1t} + \left(\frac{-S_1}{-S_1 + S_2}\right) e^{S_2t}$$

Ahora se define la ecuación particular:

$$V_C(t)_p = A = E(t)$$

La respuesta de estado cero es:

$$V_C(t)_{ZSR} = K_1e^{S_1t} + K_2e^{S_2t} + A$$

Condiciones iniciales nulas:

$$V_C(0) = 0$$

$$V_C{}'(0) = 0$$

$$V_C(t)_{ZSR} = K_1e^{S_1t} + K_2e^{S_2t} + A$$

$$0 = K_1 + K_2 + A$$

Derivando:

$$V_C{}'(t)_{ZSR} = S_1K_1e^{S_1t} + S_2K_2e^{S_2t} + 0$$

$$0 = S_1K_1e^{S_1(0)} + S_2K_2e^{S_2(0)}$$

$$0 = S_1K_1 + S_2K_2$$

Las ecuaciones se igualan para obtener K_1 y K_2.

$$K_2 = \frac{S_1A}{-S_1 + S_2}$$

$$K_1 = -\left(\frac{S_1A}{-S_1 + S_2}\right) - A$$

Por tanto la respuesta de estado cero es:

$$V_C(t)_{ZSR} = \left[-\left(\frac{S_1A}{-S_1 + S_2}\right) - A\right] e^{S_1t} + \left(\frac{S_1A}{-S_1 + S_2}\right) e^{S_2t} + A$$

La respuesta total es la suma de las dos respuestas:

$$V_C(t) = V_C(t)_{ZIR} + V_C(t)_{ZSR}$$

$$V_C(t) = A + \left[1 - \left(\frac{-S_1}{-S_1 + S_2}\right)\right] e^{S_1t} + \left(\frac{-S_1}{-S_1 + S_2}\right) e^{S_2t} + \left[-\left(\frac{S_1A}{-S_1 + S_2}\right) - A\right] e^{S_1t} + \left(\frac{S_1A}{-S_1 + S_2}\right) e^{S_2t}$$

El tercer caso es cuando tenemos raíces complejas (*discriminante negativo*), la condición para este caso y la solución del sistema se muestran a continuación.

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

$$V_C(t) = K_1e^{-\alpha + j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}t} + K_2e^{-\alpha - j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}t}$$

Uno de los exponentes es complejo conjugado del otro, esto servirá para que la solución no pueda expresarse en complejos sino en una función de valores reales.

Al aplicar condiciones iniciales y con estrada escalón se tiene lo siguiente:

$$V_C(t) = A\left[\frac{1}{2}\left(-1 + j\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}}\right)e^{\left(-\alpha + j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}\right)t} + \frac{1}{2}\left(-1 - j\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}}\right)e^{\left(-\alpha - j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}\right)t} + 1\right]$$

La señal de salida puede reducirse a

$$V_C(t) = A\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}} sen\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \alpha^2}t\right)\right]\right\}$$

Esta solución obtenida esta en forma de una senoide multiplicada con un exponencial descendente lo cual indica que el sistema tiene un subamortiguamiento [1].

Ya determinadas las tres posibles soluciones que podrían tomar el circuito, es decir el voltaje de salida del sistema (*voltaje del capacitor*), se procede a llevar los cálculos a una aplicación en MatLab para poder obtener en ella las gráficas de cada caso de amortiguamiento, mostrar la ecuación del voltaje en el capacitor en función del tiempo y además los valores como frecuencia resonante, taza de amortiguamiento de la señal, frecuencia y periodo de oscilación.

El programa consta de interfaz gráfica en el cual se muestra un circuito RLC en serie con valores a editar, así mismo con una fuente escalón unitario; estos valores ingresaran y el programa lo que hará es determinar el tipo de raíces y con ello ejecutar un proceso específico de acuerdo con las tres diferentes ecuaciones obtenidas en los cálculos.

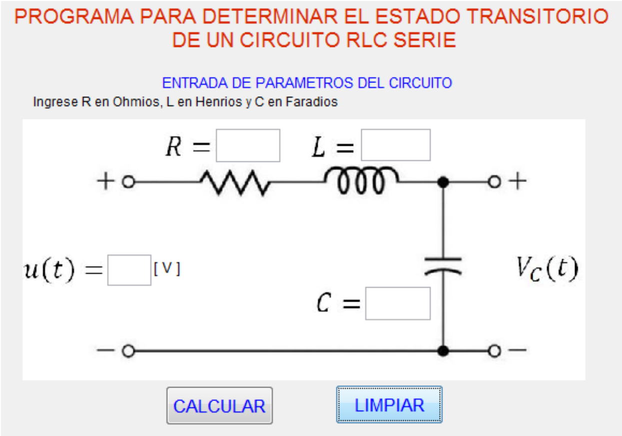

Fig. 2. Interfaz del programa, para el ingreso de valores.

Al ejecutar el programa, este mostrará las gráfica del voltaje en el capacitor en escala normal así como en escala logarítmica, además mostrará su frecuencia y periodo de oscilación. El detalle más relevante por el cual se procedió a determinar las tres ecuaciones diferentes que podría tomar el sistema, es para que estas ecuaciones puedan ser visualizadas en el programa pero ya con los valores de los datos ingresados tanto del voltaje de entrada como de los componentes del circuito.

V. Datos y Graficas Obtenidas del Programa

Para obtener una señal sobre amortiguada se ingresaron los siguientes datos: $R = 2\,k\Omega, L = 1\,mH,\ C = 3\,uF$ con un voltaje de $4\,V$.

Se obtuvo lo siguiente:

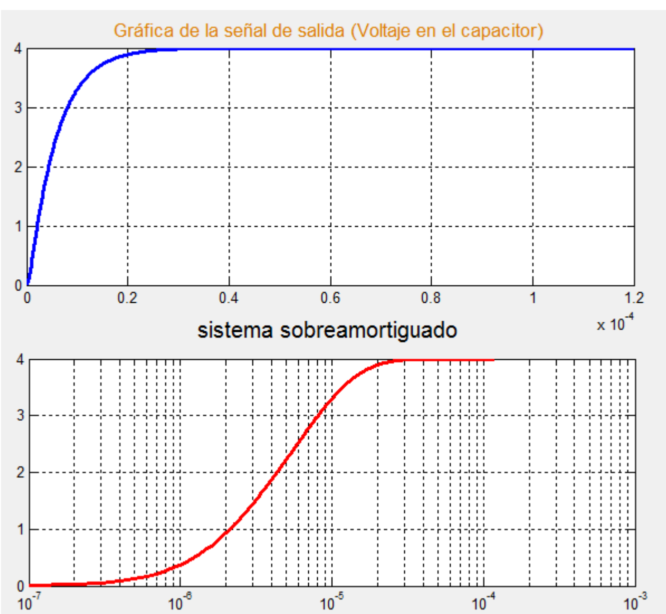

Fig. 3. Graficas del voltaje del capacitor, en escala normal y en escala logarítmica; además se indica el tipo de amortiguamiento.

$$V_c(t) = \frac{506080459526295\, e^{-\frac{7801793408380401\, t}{4294967296}}}{1125899906842624} - \frac{5009680086896791\, e^{-\frac{788141183619599\, t}{4294967296}}}{1125899906842624} + 4$$

Fig. 4. Ecuación del voltaje en el capacitor que devuelve el programa.

Para obtener una señal críticamente amortiguada se ingresaron los siguientes datos: $R = 2\,k\Omega, L = 5\,mH,$ $C = 5\,uF$ con un voltaje de $8\,V$.

Se obtuvo lo siguiente:

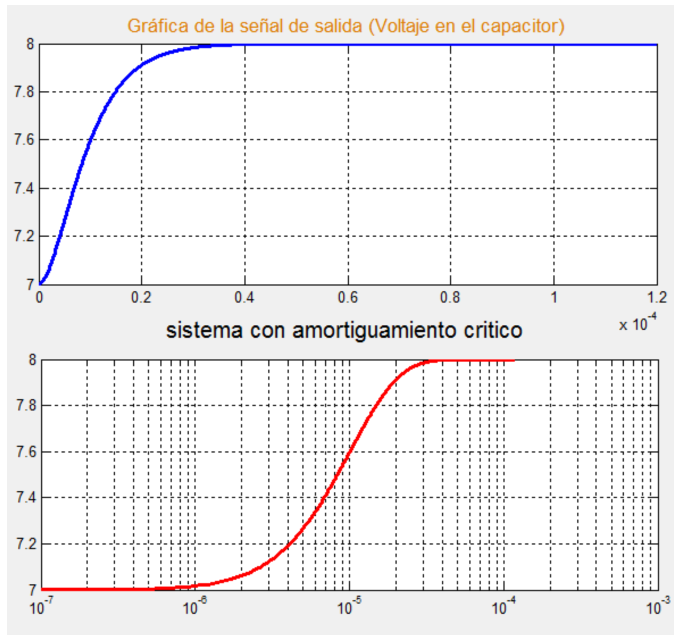

Fig. 5. Graficas del voltaje del capacitor, en escala normal y en escala logarítmica; además se indica el tipo de amortiguamiento.

$$V_c(t) = 8 - 200000\, t\, e^{-200000\, t} - e^{-200000\, t}$$

Fig. 6. Ecuación del voltaje en el capacitor que devuelve el programa.

Para obtener una señal subamortiguada se ingresaron los siguientes datos: $R = 200\,\Omega, L = 2\,mH,\ C = 4\,uF$ con un voltaje de $5\,V$.

Se obtuvo lo siguiente:

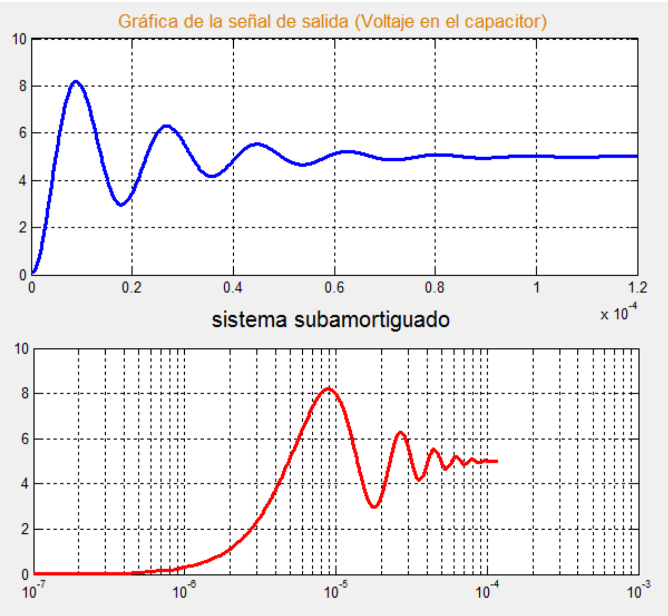

Fig. 7. Graficas del voltaje del capacitor, en escala normal y en escala logarítmica; además se indica el tipo de amortiguamiento.

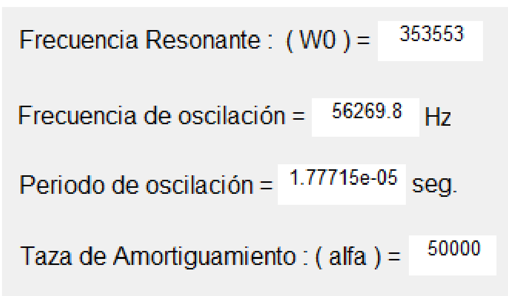

Fig. 8. Datos obtenidos de frecuencia resonante, frecuencia y periodo de oscilación, taza de amortiguamiento para este circuito.

$$V_c(t) = 5 - 5\,e^{-50000\,t}\left(\cos(350000\,t) + \frac{\sin(350000\,t)}{7}\right)$$

Fig. 9. Ecuación del voltaje en el capacitor que devuelve el programa.

VI. CONCLUSIONES

La señal obtenida del voltaje en el capacitor constará de funciones exponenciales, las cuales estarán elevadas a un factor de amortiguamiento, el cual definirá la forma de onda, su tiempo de estabilización del sistema.

Se puede ver que la condición de amortiguamiento dependerá de cada valor de los elementos del circuito. Se realizó un experimento en nuestro circuito y pusimos una resistencia muy baja; el resultado fue que el discriminante es negativo, lo cual resulto con esto una señal subamortiguada. Al momento de ir aumentado el valor de la resistencia iba disminuyendo la oscilación del sistema hasta un punto en donde se mostraba una señal críticamente amortiguada. El efecto de ir aumentando el valor de la resistencia con respecto a los otros valores del circuito es importante ya que denota la oscilación del sistema. El ultimo experimento fue cuando se puso una resistencia mucho mayor que el resto de elementos del circuito y nos devolvió una señal sobre amortiguada.

Normalmente el tiempo en que se da el transitorio del circuito es muy pequeño, por lo cual al momento de graficar la señal se debe tener en cuenta el intervalo para poder visualizarla.

Las ecuaciones obtenidas en el programa tienen mucha exactitud, por lo que se muestran en dígitos muy grandes y fraccionarios para representar números decimales.

VII. REFERENCIAS

[1] Roberts M.J. “Señales y Sistemas”, McGraw-Hill Interamericana, Segunda Edición, 2008.

[2] Kemmerly J.E. Hayt “Análisis de Circuitos en Ingeniería” Séptima Edición, Mc Graw-Hill Interamericana.

[3] http://gco.tel.uva.es/tutorial_cir/tema6/aplicinter1.html