

## Modelado, Simulación y Control de Satélites en los Puntos de Lagrange del Sistema Tierra - Luna

F. Alonso Zotes<sup>a</sup>, M. Santos Peñas<sup>b\*</sup>

<sup>a</sup> Dpto. de Informática y Automática. Escuela Superior de Ingeniería Informática. UNED. C/ Juan del Rosal s/n. 28040-Madrid, España.

<sup>b</sup> Dpto. de Arquitectura de Computadores y Automática, Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid, C/ Profesor García Santesmases s/n, 28040-Madrid, España.

### Resumen

El objetivo de este artículo es modelar, analizar y controlar una constelación de cinco satélites, situados en los puntos de Lagrange del sistema Tierra – Luna. El modelo se ha desarrollado incluyendo efectos complejos no considerados habitualmente, como el viento solar, la no esfericidad de los planetas y la deriva de la órbita lunar, para hacerlo más realista. Sobre los satélites se ejerce una propulsión continua, calculada por medio de controladores tipo PD, tanto convencionales como borrosos, y cuya finalidad es situar y mantener a cada satélite en su punto de Lagrange frente a las inestabilidades y derivas inherentes al sistema. El sistema completo se ha implementado en el lenguaje de modelado *Modelica*, para el que se han creado una serie de elementos aeroespaciales, y las simulaciones se han desarrollado con el software *Dymola*. Tanto con los controladores clásicos como con los borrosos se han obtenido muy buenos resultados. Copyright © 2011 CEA.

### Palabras Clave:

modelado, simulación, control borroso, satélites, puntos de Lagrange, sistema Tierra-Luna.

### 1. Introducción

Se llaman puntos de Lagrange o de libración de un sistema planetario binario a los cinco lugares en los que, para el sistema de referencia rotatorio correspondiente, se cancelan la fuerza de la gravedad y centrífuga (Bate *et al.*, 1971; Garzón Florez y Florez, 2006). Por consiguiente, un satélite artificial situado en uno de esos puntos mantendrá indefinidamente su posición respecto a los dos cuerpos mayores, sin necesidad de aplicar propulsión alguna (Sutton and Biblarz, 2001).

Sin embargo hay una serie de circunstancias que impiden que este planteamiento teórico se cumpla, fundamentalmente debidas a la excentricidad de las órbitas de los planetas y a los efectos gravitatorios de terceros cuerpos. En concreto, en el sistema Tierra-Luna se pueden constatar algunas desviaciones respecto a ese comportamiento ideal como son: la no esfericidad de la Tierra (y en menor medida de la Luna), la excentricidad de la órbita lunar, y la gravedad del sol. Además, otros factores o perturbaciones orbitales que también impiden la compensación total de fuerzas en los puntos de Lagrange son: la variabilidad de los parámetros orbitales de la Luna, la gravedad de otros planetas (no es despreciable a largo plazo), el viento solar, etc.

De los cinco puntos de Lagrange, dos se pueden considerar estables, si bien un satélite situado en las proximidades describiría trayectorias circulares en torno a esos puntos, sin llegar nunca a alcanzarlos. Los otros tres puntos de Lagrange son inestables aunque con derivas lentas. Es posible mantener un satélite en un punto de Lagrange cualquiera aplicando una propulsión relativamente baja, lo que permite misiones de larga duración. Para ello es necesario un sistema de control adecuado que establezca la posición de la aeronave en esos puntos y frente a perturbaciones. Con el control correspondiente, todos los puntos de Lagrange pueden resultar interesantes para misiones de observación de larga duración.

En la literatura sobre control de satélites cabe citar a Nagarajan *et al.* (2009), donde se aplica a un microsátélite un control PID inteligente adaptativo-predictivo y a Moreno y Aeyels, 2006, con programación dinámica. En los trabajos de (Doruk and Kocaoglan, 2008; Bodley and Flanders, 1986; Alonso and Santos, 2010) se presentan estrategias de control aeroespacial válidas y originales aplicadas en diferentes contextos al aquí expuesto y con propósitos variados. Para el caso particular de puntos de libración o de Lagrange, cabe nombrar los trabajos de la reciente misión Herschel-Planck (Herschel-Planck, 2010), en los que se aplica un control

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [aveparda@yahoo.com](mailto:aveparda@yahoo.com) (F. Alonso), [msantos@dacya.ucm.es](mailto:msantos@dacya.ucm.es) (M. Santos)

impulsivo muy separado en el tiempo y de manera variable, a diferencia del control continuo del presente artículo. Relacionado con la materia de este artículo, Bengoa *et al.*, (2004), aplican control LQG con propulsión continua para lograr una posición estable en los puntos de Lagrange, y para mantener la posición relativa de varios satélites (*formation flying*). En (Stuchi, 2008) se realiza un análisis de los puntos de Lagrange en un sistema distinto del aquí considerado. Otros artículos igualmente interesantes son (Hamilton, 2001; Howell y Marchand, 2003a y 2003b, Scheeres y Vinh, 2000; Gurfil y Kasdin, 2001; Ming *et al.*, 2004). Aunque estos y otros trabajos están relacionados con el control PID de satélites, los puntos de Lagrange y el análisis de la estabilidad en esas posiciones, en el presente artículo se utiliza -quizás por primera vez- el control continuo para todos los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna, implementando además lógica borrosa en el controlador, toda vez que, también por primera vez, se utiliza el lenguaje *Modelica* y el software *Dymola* para una aplicación aeroespacial de este tipo.

La estructura del artículo es la siguiente. En la Sección 2 se presenta el modelo del sistema Tierra-Luna y de cinco satélites situados en los puntos de Lagrange; en la Sección 3 el de los puntos de Lagrange. En el apartado 4 se comentan algunos de modelos de elementos aeroespaciales desarrollados en *Modelica*. La sección 5 recoge la implementación de estos modelos con *Dymola*. Los resultados de aplicar controladores P y PD clásicos y borrosos se describen y discuten en la sección 6. El artículo termina con las conclusiones.

## 2. Modelado del Sistema

### 2.1. Modelica y Dymola

El modelo ha sido implementado en el lenguaje *Modelica*. Este lenguaje está orientado a objetos y se basa en ecuaciones en vez de algoritmos. Se utiliza habitualmente para modelar complejos sistemas físicos que contienen elementos mecánicos, eléctricos, electrónicos, hidráulicos, térmicos, etc (Tiller, 2001). En este artículo, y de manera original e innovadora, *Modelica* se ha utilizado para modelar un sistema astrodinámico que incluye la simulación de dos cuerpos celestes (Tierra y Luna), de los puntos de Lagrange correspondientes, y de cinco satélites que, colocados en el entorno de dichos puntos, implementan controladores P y PD convencionales y difusos.

Para simular el modelo creado en *Modelica* se ha utilizado el software *Dymola* (Dynasim, 2008), que sirve para dotar de un entorno de análisis a los modelos escritos en *Modelica*, calculando y simulando el comportamiento dinámico y las interacciones complejas de sistemas ingenieriles, llevando a cabo interesantes animaciones y finalmente creando gráficos con los resultados obtenidos. En nuestro caso, el modelo implementado representa el comportamiento de cinco satélites, situados en los cinco puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna y los correspondientes controles.

### 2.2. Modelo del sistema Tierra-Luna

Se ha definido un sistema Tierra – Luna tridimensional que tiene en cuenta la deriva de la órbita lunar fuera del plano (Bate *et al.*, 1971).

La fuerza de la gravedad deriva de un potencial que en planetas reales suele expresarse como un desarrollo en serie de funciones armónicas (Kaula, 1966), cuyos parámetros se obtienen empíricamente a partir de los datos de trayectorias conocidas de satélites naturales o artificiales. El potencial gravitatorio considerado se expresa mediante (1), la cual sería equivalente a la que define la fuerza de la gravedad entre dos partículas en caso de simetría esférica perfecta, es decir, si los armónicos zonales y teserales se anulasen. Para la Tierra se han considerado 50 armónicos, mientras que para la Luna se han tenido en cuenta un total de 20. La no-esfericidad podría tener efectos importantes a largo plazo en la evolución de las órbitas de los satélites, y también en su orientación, especialmente el armónico llamado  $J_2$  (Elices, 1989).

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos m\phi + S_{n,m} \sin m\phi) P_{n,m}(\cos \theta) \right] \quad (1)$$

donde:

$a$  es el semieje mayor del cuerpo central considerado (Tierra y Luna en nuestro caso)

$\vec{r}$  es el vector distancia con origen en la partícula considerada y destino en la otra partícula

$\theta$  y  $\phi$  son la latitud y la longitud respecto al astro considerado

$C_{n,m}$  y  $S_{n,m}$  son coeficientes armónicos (relacionados con la esfericidad) de grado  $n$  y orden  $m$

$J_n$  y  $P_n$  son funciones de Bessel y polinomios de Legendre de grado  $n$ , respectivamente

$P_{n,m}$  son las funciones de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$  asociadas.

Otros efectos que se deben considerar a la hora de modelar el sistema son el viento solar y, en mucha menor medida, la gravedad de terceros cuerpos. Ambos fenómenos se pueden considerar ruido externo al sistema. En el caso del viento solar, se puede utilizar la ecuación (2) para calcular su presión, según (Fahr, 2002) y (Fahr and Chashei, 2002):

$$P = \alpha(r) \rho V^2 \quad (2)$$

donde  $\alpha(r)$  es una función que depende de la distancia al sol  $r$ , mientras que  $\rho$  es la densidad iónica, y  $V$  es la velocidad del viento solar. De esta expresión se puede obtener la fuerza perturbadora, simplemente multiplicando por el área equivalente del satélite, que depende de su orientación y que sería constante en caso de un satélite con simetría esférica.

En cuanto a la gravedad de terceros cuerpos, el efecto medio sobre los satélites en los puntos de Lagrange producido por el Sol (la mayor gravedad perturbadora procede de este cuerpo) es del orden de  $0.0059 \text{ m/s}^2$ , por lo que no se estima necesario su modelado ni inclusión en el sistema simulado.

Considerando la perturbación del viento solar como una fuerza externa al sistema Tierra-Luna, se concluye que el centro de masas de dicho sistema está sometido a una cierta aceleración, cumpliéndose por tanto la ecuación (3), de la que se deducen trivialmente (4) y (5). A pesar de la trivialidad de estas ecuaciones, es importante tener en cuenta su mutua equivalencia para evitar redundancias a la hora de programar este sistema en *Dymola* y *Modelica*.

Dentro del sistema Tierra-Luna los efectos gravitatorios de unos cuerpos sobre otros son recíprocos y su sumatorio por tanto nulo, así como nulo también es su efecto sobre el momento angular del sistema. Este hecho físico, con independencia de los efectos que pudieran inducir fuerzas exteriores como el mencionado viento solar, permite definir para los objetos del sistema Tierra-Luna una conexión “geométrica” en *Modelica*, que tiene en cuenta la reciprocidad de la fuerza de la gravedad, así como los momentos de inercia de cada cuerpo respecto al centro de masas.

El centro de masas mantendría un movimiento inercial (sin aceleración) de no existir viento solar. Imponiendo la ecuación (3) se asegura que la dinámica del centro de masas refleje los efectos del viento solar (importantes sobre el satélite, aunque no así sobre la masa total del sistema), manteniendo al mismo tiempo la consistencia y reciprocidad de fuerzas internas al sistema Tierra-Luna.

$$\sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i \bar{\mathcal{G}}_i \quad (3)$$

$$\sum_i m_i \bar{v}_i = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \sum_i \bar{\mathcal{G}}_i \right] dt + M \bar{v}_0 \quad (4)$$

$$\sum_i m_i \bar{r}_i = \iint_{t_0}^{\cdot} \left[ \sum_i \bar{\mathcal{G}}_i \right] dt^2 + M(\bar{r}_0 + \bar{v}_0 t) \quad (5)$$

donde:

$m_i$  es la masa de la partícula  $i$  del sistema considerado

$M$  es la masa total del sistema (sumatorio de las masas de todas las partículas)

$a_i$  es la aceleración de la partícula  $i$

$v_i$  es la velocidad de la partícula  $i$

$v_0$  es la velocidad inicial del centro de masas del sistema

$r_i$  es la posición de la partícula  $i$

$r_0$  es la posición inicial del centro de masas del sistema

$\mathcal{G}_i$  es la fuerza aleatoria (ruido) ejercida sobre la partícula  $i$

$t$  es el tiempo.

El centro de masas del sistema, pues, está sometido a una aceleración que depende del viento solar. Tomando como origen el centro de masas del sistema, y teniendo en cuenta que el efecto del viento solar sobre la dinámica de la Tierra y la Luna es prácticamente inexistente (dadas las masas enormes de ambos cuerpos), se concluye de las ecuaciones (3) a (5) que es relevante considerar el efecto del viento solar sólo sobre el satélite, si bien, a efectos de *Modelica* y *Dymola*, las ecuaciones del movimiento de los planetas deben tener en cuenta el efecto de la fuerza externa también sobre la Tierra y la Luna, con el fin de que el sistema de ecuaciones programadas en *Modelica* sea determinado y resoluble.

### 2.3 Modelo de los satélites

En cada uno de los cinco puntos de Lagrange del sistema Tierra – Luna se desea colocar un satélite artificial. Cada satélite se considera una masa puntual sobre la que actúan tres fuerzas: la fuerza de la gravedad (ejercida por los dos astros del sistema), la fuerza del viento solar (2) y la fuerza de los propulsores (6).

$$\bar{F} = \bar{F}_{\text{gravedad}} + \bar{F}_{\text{vsolar}} + \bar{F}_{\text{control}} \quad (6)$$

Las únicas fuerzas gravitatorias consideradas son las ejercidas por la Tierra y la Luna. La fuerza de la gravedad se modela mediante la ecuación (1). Esta ecuación puede particularizarse al caso de un satélite sometido a la gravedad combinada de dos cuerpos, obteniéndose la ecuación vectorial (7), de la que se han excluidos los términos armónicos por simplicidad:

$$\bar{F}_{\text{gravedad}} = Gm \left[ \frac{M_1}{|\bar{R}_1 - \bar{r}|^3} (\bar{R}_1 - \bar{r}) + \frac{M_2}{|\bar{R}_2 - \bar{r}|^3} (\bar{R}_2 - \bar{r}) \right] \quad (7)$$

donde:

$\bar{F}_{\text{gravedad}}$  es la fuerza de la gravedad ejercida sobre el satélite, debida a los dos planetas que ejercen atracción.

$M_1$  y  $M_2$  son los valores de masa de los dos planetas.

$m$  es la masa del satélite.

$\bar{r}$  es el vector de posición del satélite respecto al centro de masa

$\bar{R}_1$  y  $\bar{R}_2$  son los vectores de posición de los dos planetas en el marco de referencia rotatorio, respecto al centro de masas CM del sistema Tierra – Luna.

$G$  es la Constante de Gravitación Universal.

#### 2.3.1 Propulsión en cada satélite y bucle de control

Mientras que en (Alonso and Santos, 2008) se simulaban para un modelo simplificado las trayectorias libres (sin control) de los satélites situados en los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna, en el presente artículo se establece el nuevo objetivo de aplicar controles tipo PD, tanto convencionales como borrosos, con el fin de mantener la posición de los satélites en los cinco puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna.

El esquema de control es el de la Figura 1, donde se muestra la función de transferencia del satélite. El error utilizado por el sistema de control es la diferencia de posición entre el punto de Lagrange especificado y la posición real del satélite en las tres dimensiones del espacio. En función de este error, el algoritmo de control calcula la fuerza de los propulsores (señal de control).

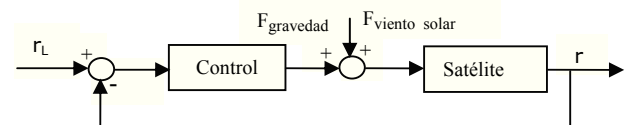


Figura 1. Esquema de control de cada satélite.

Se utilizan propulsores continuos de propulsión variable (Bate et al., 1971; Sánchez Peña y Alonso, 2005), con un flujo másico despreciable y un alto empuje específico. El producto de ambas magnitudes es igual a la fuerza ejercida por la propulsión, que suele ser baja pero suficiente dada la lenta deriva de los satélites respecto a los puntos de Lagrange. La ventaja de esta clase de propulsión es el bajo gasto de combustible, que permite alargar la vida de la misión durante años (Hechler, 2009). Despreciando por tanto el gasto de combustible, se supondrá que la masa total de cada satélite es constante.

La justificación de la necesidad del control queda patente en la sección 3.2, al analizar la estabilidad de los puntos de Lagrange.

### 3. Modelado de los Puntos de Lagrange

En la Figura 2 se representa un sistema teórico de dos planetas y sus puntos de Lagrange correspondientes. Las masas de los dos planetas, consideradas puntuales, son  $M_1$  y  $M_2$ , representadas con círculos rojos. Los dos planetas giran describiendo sendas órbitas circulares perfectas respecto al centro de masas CM, con una velocidad angular  $\omega$  constante. A lo largo del artículo se ha utilizado la notación más habitual para designar a los puntos de Lagrange (Garzón Florez and Florez, 2006).

En los cinco puntos de Lagrange (L1, L2, L3, L4 y L5), una partícula podría mantener su posición relativa indefinidamente, debido a la compensación perfecta entre la fuerza de la gravedad ejercida por cada uno de los dos planetas, y la fuerza centrífuga del sistema rotatorio.

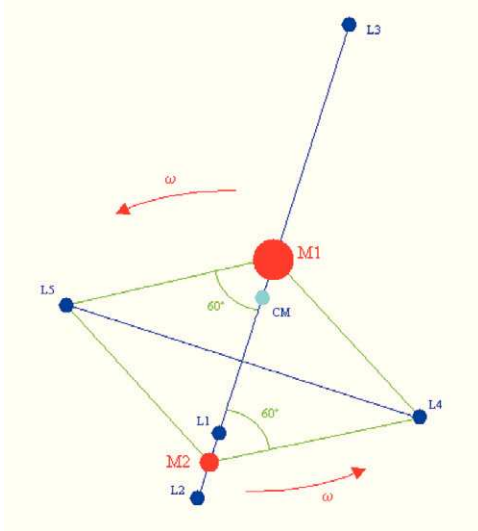


Figura 2. Sistema teórico binario con sus cinco puntos de Lagrange.

#### 3.1 Cálculo de los puntos de Lagrange

Es posible calcular la posición de los puntos de Lagrange buscando aquellos lugares en los que la fuerza de la gravedad se compensa con la fuerza centrífuga del sistema rotatorio Tierra – Luna. Basándose en esto es posible demostrar que en cada uno de los puntos de Lagrange  $L_i$  se cumple la siguiente ecuación vectorial (8):

$$\omega^2 \bar{r}_i = G \left[ \frac{M_1}{|\bar{R}_1 - \bar{r}_{Li}|^3} (\bar{R}_1 - \bar{r}_{Li}) + \frac{M_2}{|\bar{R}_2 - \bar{r}_{Li}|^3} (\bar{R}_2 - \bar{r}_{Li}) \right] \quad (8)$$

donde:

$\omega$  es la velocidad angular del sistema Tierra – Luna,

$\bar{R}_1$  es el vector con origen en CM y destino la Tierra ( $M_1$ ),

$\bar{R}_2$  es el vector con origen en CM y destino la Luna ( $M_2$ ),

$\bar{r}_{Li}$  es el vector con origen en CM y destino  $L_i$ .

Es importante hacer notar que *Dymola* (al igual que ocurre con la mayoría de las herramientas de modelado) detiene la búsqueda de soluciones de la ecuación (8) una vez que se ha encontrado la primera solución válida. Sin embargo, hay en realidad cinco posibles soluciones vectoriales distintas para esa ecuación, correspondientes a los cinco puntos de

Lagrange. Por ello, es importante particularizar la ecuación (8) para cada uno de los puntos de Lagrange, según se muestra en las ecuaciones (9) a (13), y que son menos problemáticas que (8) desde un punto de vista numérico. Estas ecuaciones son vectoriales, pero cabe hacer notar que la aparición de vectores se ha reducido a un producto de un vector unitario por un módulo en cada caso, lo que facilita la resolución por parte del software; las ecuaciones (9), (10) y (11) no se pueden resolver analíticamente, de ahí la necesidad de resolverlas numéricamente con *Dymola*.

$$\omega^2 \bar{r}_{L1} = \frac{\bar{R}_2}{R_2} G \left[ \frac{M_1}{(R_1 + r_{L1})^2} - \frac{M_2}{(R_2 - r_{L1})^2} \right] \quad (9)$$

$$\omega^2 \bar{r}_{L2} = \frac{\bar{R}_2}{R_2} G \left[ \frac{M_1}{(R_1 + r_{L2})^2} + \frac{M_2}{(R_2 - r_{L2})^2} \right] \quad (10)$$

$$\omega^2 \bar{r}_{L3} = -\frac{\bar{R}_2}{R_2} G \left[ \frac{M_1}{(R_1 - r_{L3})^2} + \frac{M_2}{(R_2 + r_{L3})^2} \right] \quad (11)$$

$$\bar{r}_{L4} - \bar{R}_1 = \frac{\bar{L}}{2} - \frac{\sqrt{3}\bar{L}^*}{2} \quad (12)$$

$$\bar{r}_{L5} - \bar{R}_1 = \frac{\bar{L}}{2} + \frac{\sqrt{3}\bar{L}^*}{2} \quad (13)$$

donde:

$\bar{L}$  es el vector con origen en  $M_1$  y destino en  $M_2$

$\bar{L}^*$  es el vector perpendicular a  $\bar{L}$  y con sentido hacia  $L_4$ .

En la realidad en el sistema Tierra – Luna los puntos de Lagrange no son de equilibrio, debido a la excentricidad de la órbita de la Luna, que impide la perfecta anulación de la gravedad con la fuerza centrífuga; de ahí la necesidad de aplicar algún algoritmo de control, incluso aunque se ignorase el efecto de la no-esfericidad de los planetas (armónicos del campo gravitatorio) y el viento solar. Efectivamente, en las órbitas elípticas la distancia relativa entre los cuerpos es variable, toda vez que la velocidad angular  $\omega$  también varía de forma periódica. Para calcular  $\omega$ , se considera válida la aproximación dada en (14), basada en la casi circularidad de la órbita lunar (NASA Planetary Fact Sheet, 2009):

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_1}{r^2 R_2}} = \sqrt{\frac{GM_2}{r^2 R_1}} \quad (14)$$

donde:

$R_1$  y  $R_2$ : distancias de la Tierra y la Luna al centro de masas del sistema, respectivamente,

$r$ : distancia entre  $M_1$  (Tierra) y  $M_2$  (Luna), suma de  $R_1$  y  $R_2$ .

#### 3.2 Estabilidad de los puntos de Lagrange y justificación del control

Se puede probar que sólo los puntos de Lagrange  $L_4$  y  $L_5$  presentan un equilibrio estable. No obstante, incluso para esos puntos, cualquier partícula situada en sus cercanías no se aproximará al punto de equilibrio, sino que mantendrá una oscilación periódica sostenida en las dos componentes del plano alrededor del punto correspondiente, describiendo una trayectoria similar a una curva de Lissajous abierta (Hechler, 2009). Se puede demostrar también que los puntos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  son puntos “de silla”, y por lo tanto inestables. Cualquier



partícula cercana a estos puntos de Lagrange se alejará progresivamente de los mismos.

Las características orbitales hacen que todos los puntos de Lagrange cambien de posición periódicamente (su definición, pues, sólo tiene sentido en un instante de tiempo dentro del contexto de un sistema binario real). Por ello, un satélite situado en un punto de Lagrange en un instante determinado no se mantendrá en ese punto. En este contexto, la inestabilidad de los puntos L1, L2 y L3 cobra especial importancia ya que en sus proximidades los satélites se encuentran sometidos a campos de fuerzas que les alejan de la posición de equilibrio; de ahí la necesidad de un controlador para mantenerlos en la posición deseada. Los puntos L4 y L5, estables en el caso de órbitas circulares perfectas, son levemente inestables debido a la excentricidad de la órbita lunar, al viento solar y a la presencia de terceros cuerpos, de manera que los satélites oscilan alrededor de los puntos de equilibrio con amplitud creciente hasta alejarse definitivamente a largo plazo, por lo que sigue siendo necesario el control también en estos dos puntos de libración.

De forma empírica, es posible comprobar las afirmaciones de esta sección a través de las gráficas presentes en la sección 5 (en particular, figuras 6 a 10).

#### 4. Desarrollo de Elementos Aeroespaciales con *Modelica*

Se han creado en *Modelica* una serie de objetos que permiten el modelado y la simulación con *Dymola* (Dynasim, 2008) del sistema Tierra – Luna, con cinco satélites situados en los puntos de Lagrange correspondientes. Siendo *Modelica* un lenguaje orientado a objetos, es posible reutilizar varias veces los elementos creados con el fin de implementar nuevos objetos, a veces directamente, y a veces con pequeños añadidos o modificaciones (Tiller, 2001). Todos los objetos generados se encuentran dentro de un paquete guardado en un único archivo llamado *PlanetsAndSpacecrafts.mo*. Las clases de tipo modelo se encuentran dentro de un *sub-package* llamado *Examples*. Entre los objetos o clases generados cabe mencionar: "punto adimensional", "masa adimensional", "planeta puntual" y "satélite puntual". Se pueden ver los detalles de estas implementaciones en el listado de código I (por brevedad, en los listados de código de este artículo se han quitado comentarios y líneas en blanco del código original).

##### Listado de código I

```
class DimensionlessDot "Dimensionless dot with position
and speed"
  Modelica.SIunits.Distance position[2];
  Modelica.SIunits.Velocity speed[2];
  equation
    speed = der(position);
  end DimensionlessDot;

class DimensionlessMass "Dimensionless mass with
position, speed, acceleration, mass and force"
  extends DimensionlessDot;
  Modelica.SIunits.Acceleration acceleration[2];
  parameter Modelica.SIunits.Mass mass;
  Modelica.SIunits.Force force[2];
  equation
    acceleration = der(speed);
    mass * acceleration = force;
  end DimensionlessMass;

class Planet "Planet as a dimensionless dot"
  extends DimensionlessMass;
  Modelica.SIunits.Force gravity[2];
  equation
```

```
force = gravity;
mass*position = geometry.weightedPosition;
end Planet;

class Spacecraft "Generic spacecraft"
  Modelica.SIunits.Force propulsion[2];
  Modelica.SIunits.Force gravity[2];
  Modelica.SIunits.Distance error[2];
  Modelica.SIunits.Distance d_earth_sp[2];
  Modelica.SIunits.Distance d_moon_sp[2];
  equation
    force = propulsion + gravity;
  end Spacecraft;
```

Los distintos elementos se han conectado por medio de “conectores de gravedad”, que se han utilizado para reflejar en el modelo el aislamiento del sistema, por lo que las fuerzas de la gravedad no pueden modificar la posición del centro de masas.

Mediante la combinación de los objetos mencionados es posible implementar y simular el problema completo que se desea analizar. También se han creado las clases correspondientes a los distintos tipos de controlador y otros objetos necesarios para implementar operaciones o funciones. Estos objetos se pueden arrastrar y usar en modo texto (una de las posibilidades de *Modelica*), quedando un código abierto que otros usuarios pueden modificar y utilizar.

Como ejemplo de la mencionada reutilización se muestra en el listado de código II la implementación en *Modelica* del sistema Tierra – Luna y los cinco puntos de Lagrange correspondientes (por brevedad, se muestra sólo la parte correspondiente a los objetos creados, omitiéndose ecuaciones y evitando la repetición de objetos similares). Los puntos de Lagrange son de tipo "punto adimensional", mientras que la Tierra y la Luna son "planetas", que a su vez son "puntos adimensionales" modificados para que tengan masa (Código I). Se han utilizado objetos gráficos de *Modelica* para crear una animación del sistema, en la que la Tierra y la Luna aparecen como esferas azul y blanca respectivamente. La Figura 3 muestra el instante inicial.

##### Listado de código II

```
model EarthMoonSystem "Simulation of Earth-Moon system
(including Lagrange points)"
  import PlanetsAndSpacecrafts.*;

  //Earth and Moon definition
  Planet earth( mass=5.972e24);
  Planet moon( mass=7.35e22);
  VisualShape earth_shape(Material, r0, Shape =
"sphere", Length, Width, Height) "Shape for the Earth";
  VisualShape moon_shape

  //Lagrange points definition
  PlanetsAndSpacecrafts.DimensionlessDot L[5];

  //Distance between planets
  Modelica.SIunits.Distance d_planets[2];
  d_planets= moon.position - earth.position;

  equation
    // Isolated system means internal geometry between
    bodies are linked (position and velocity CM constant)
    connect(earth.geometry,moon.geometry);

    // Square of angular velocity of the system
    w2= Modelica.Constants.G*earth.mass
    .../module(moon.position)^3;

    // Gravity force between planets
    earth.gravity = Modelica.Constants.G*earth.mass
    *moon.mass*d_planets/module(d_planets)^3;

    // Lagrange point L1, L2 and L3
```

```

w2 * L[1].position=unitary(moon.position) *
Modelica.Constants.G *(
  earth.mass / module2(earth.position +
L[1].position)
-moon.mass / module2(moon.position -
L[1].position));

// Lagrange points L4 and L5
L[4].position - earth.position = 0.5 *(
  d_planets - sqrt(3) *{ -
d_planets[2],d_planets[1]});

// Animation of planets (re-scaled)
annotation (experiment(
  StopTime=1e+007,
  Tolerance=1e-006,
  Algorithm="Dassl"),
end EarthMoonSystem;

```

El modelo implementado del sistema Tierra - Luna es tridimensional, aproximándose la órbita elíptica real de la Luna por medio de una elipse, con tamaños y excentricidad tomados de la realidad, e incluyendo la deriva tridimensional que la órbita lunar exhibe con el transcurso de los años.

El sistema de referencia utilizado tiene el origen en el centro de masas del sistema Tierra - Luna, situándose el eje Y sobre la recta que uniría los dos planetas cuando la Luna se encuentra en el perigeo (punto de la órbita más cercano a la Tierra). En el instante inicial, la Luna se encuentra sobre el perigeo, en la dirección positiva del eje Y. El sistema Tierra - Luna gira en sentido horario. La posición y velocidad relativas iniciales entre los dos planetas se especifican mediante ecuaciones iniciales, basadas en la cinemática de los puntos de Lagrange en el momento inicial, y que se puede calcular matemáticamente a partir de la ecuación (8).

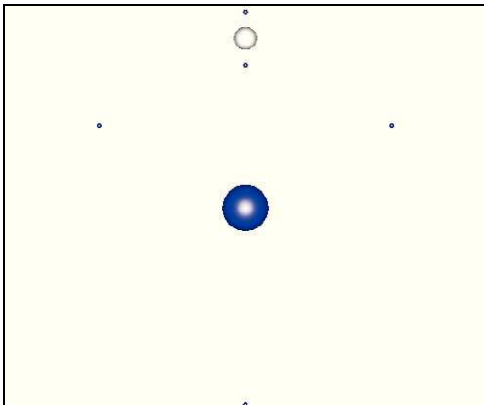


Figura 3. Instante inicial de la animación del sistema Tierra - Luna y satélites en puntos de Lagrange.

Los dos planetas deben ocupar en todo momento posiciones tales que el centro de masas del sistema se mantenga siempre en la misma posición (0,0), y que es el origen del sistema de referencia utilizado. Nótese que esta condición, expresada como una conexión entre conectores tipo "geometría", implica a su vez ciertas restricciones para los momentos lineales y las fuerzas de los dos planetas (basta para ello derivar las "masas ponderadas"). De esta manera, la conexión entre conectores tipo "geometría" garantiza la reciprocidad de fuerzas gravitatorias. Debido a esta conexión, sería redundante definir la fuerza de la gravedad sobre los dos planetas, siendo necesario y suficiente definirla para uno de los dos.

Finalmente, se implementan las ecuaciones que permiten obtener las posiciones de los puntos de Lagrange. Nótese que

se ha especificado, mediante una "annotation" (Dynasim, 2008), la utilización del método de integración a utilizar por *Dymola*, con tiempo de simulación  $10^7$  y tolerancia  $10^{-6}$ .

Mediante una extensión del sistema Tierra - Luna se puede crear un nuevo modelo al que se añaden cinco satélites, en principio no controlados, pero que son reemplazables ("replaceable"), lo que resulta muy útil a la hora de reutilizar este modelo para los satélites con control. De esta forma, sin apenas modificar el modelo para el satélite sin control, se puede añadir a este objeto un controlador tipo P o PD, convencional o borroso, y de esta manera los satélites con control quedan implementados de una manera muy sencilla y modular.

Para el modelo completo (planetas, puntos de Lagrange y satélites), el número de ecuaciones escalares a resolver por *Dymola* es de 585 para el caso de satélites sin control, y 645 en el caso de que se aplique control PD borroso; estas cifras dan una idea de la complejidad del modelo con el que se trabaja.

## 5. Simulación, Validación del Modelo y Análisis del Sistema

Para validar el modelo se han realizado una serie de simulaciones con objeto de verificar la corrección de su implementación. Se simularon inicialmente las trayectorias de la Tierra y de la Luna alrededor del centro de masas del sistema, y la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra. En los resultados obtenidos de la simulación se ha podido comprobar que el apogeo de la Luna es 405.560 kilómetros y la excentricidad 0,055, datos que coinciden con los reales.

Se pudo observar (aunque no se muestra, por brevedad, que la posición inicial de la Luna respecto a la Tierra es la más cercana posible (el perigeo). Esta posición coincide con la de mayor velocidad relativa de la Luna respecto a la Tierra, lo que también se ha comprobado, y siempre guardando coherencia con la Figura 3. Se probó también mediante la simulación del modelo propuesto que la Tierra y la Luna se encuentran sobre el eje Y en el instante inicial (posición nula en la componente X inicial), así como que las velocidades iniciales de la Luna y la Tierra tienen dirección X (sentido negativo en el caso de la Tierra, sentido positivo en el caso de la Luna).

Estos resultados confirman lo esperado por el desarrollo del modelo teórico y concuerdan con los datos experimentales disponibles, asumiendo un giro en sentido horario.

Se simularon las componentes del vector de posición del punto de Lagrange L1, que se encuentra sobre el eje Tierra - Luna, entre ambos cuerpos, así como las del vector de posición del punto de Lagrange L2, que se encuentra sobre el eje Tierra - Luna, fuera del segmento delimitado por ambos cuerpos, y del lado de la Luna. De acuerdo con lo previsto, se comprobó que el vector de posición del punto de Lagrange L3 se encuentra sobre el eje Tierra - Luna, fuera del segmento delimitado por ambos cuerpos, y del lado de la Tierra.

Por último se simularon, para cada uno de los puntos de Lagrange, las componentes de las velocidades y las aceleraciones. En el instante inicial, los puntos L1, L2 y L3 están sometidos a una aceleración en dirección Y, lo que se puede confirmar geoméricamente.

### 5.1. Análisis del Sistema

Con el fin de analizar el movimiento de la Tierra, la Luna y los puntos de Lagrange correspondientes, se ha simulado el modelo *EarthMoonSystem\_plus\_NoControlSpacecraft*, que incluye una animación con los satélites utilizados.

En las Figuras 4 a 8 se muestran las dos componentes del error de posición para los satélites libres (sin control) en las cercanías de los puntos de Lagrange L1, L2, L3, L4 y L5, respectivamente, para una simulación de  $10^7$  segundos (algo menos de 116 días). En todas las figuras, la línea azul corresponde al error en la coordenada  $x$  y la roja al error de posición en  $y$ . Se puede apreciar que el satélite en L1 (Figura 4) se aleja varios centenares de miles de kilómetros del punto de equilibrio casi inmediatamente (en menos de seis días), con un comportamiento que parece cíclico pero que no vuelve a situarlo jamás de nuevo en L1.

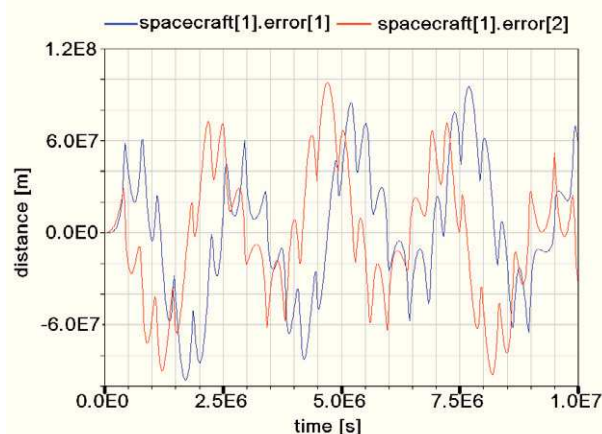


Figura 4: Errores de posición de un satélite sin control en L1.

Los satélites de los puntos L2 y L3 (Figuras 5 y 6) tienen una deriva inicial más lenta, pero finalmente el desequilibrio entre las fuerzas gravitacional y centrífuga los alejan de los puntos de equilibrio, y transcurridos  $10^7$  segundos esta distancia es unas treinta veces mayor que en el caso de L1. Los puntos L4 y L5 (Figuras 7 y 8) aparentan un comportamiento cíclico inestable, si bien la deriva es mucho más lenta (del orden de 16 mm al cabo de  $10^7$  segundos).

Estos resultados confirman el análisis de estabilidad llevado a cabo en la sección 3.2.

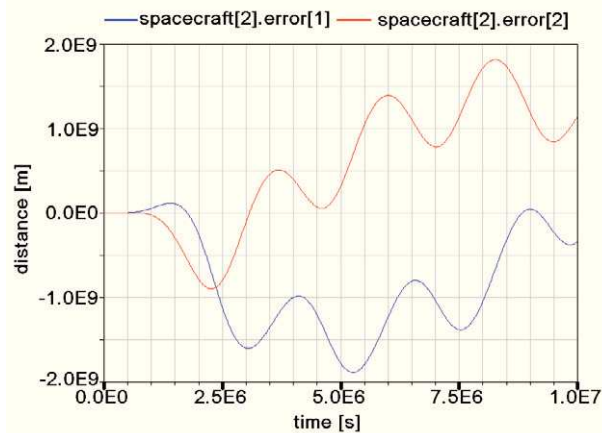


Figura 5: Errores de posición de un satélite sin control en L2.

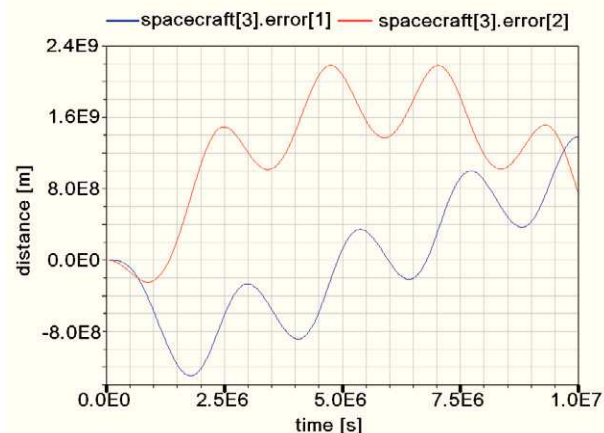


Figura 6: Errores de posición de un satélite sin control en L3.

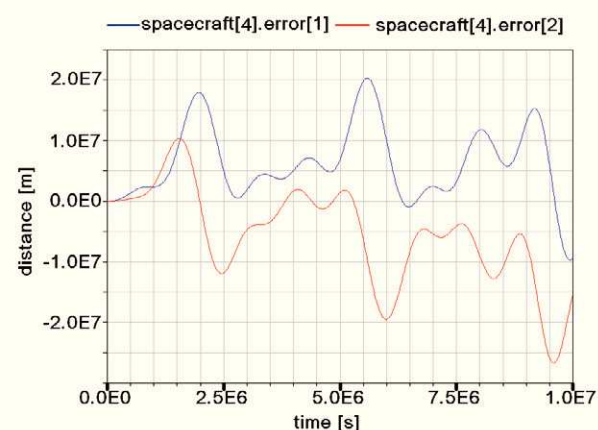


Figura 7: Errores de posición de un satélite sin control en L4.

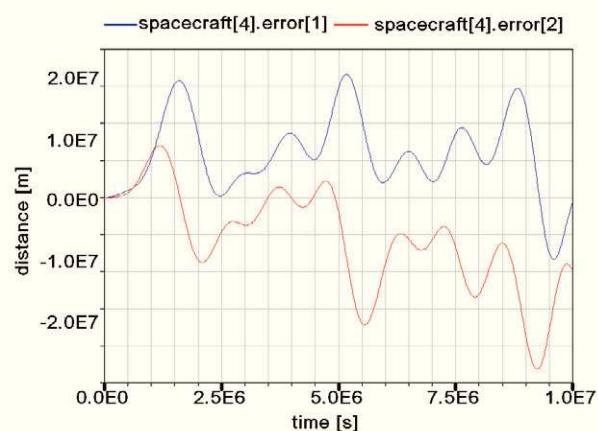


Figura 8: Errores de posición de un satélite sin control en L5.

## 6. Control

En las Figuras 4 a 8 se han mostrado las dos componentes del error de posición para cada satélite en los puntos de Lagrange. Cabe recordar que los puntos L4 y L5 presentan una estabilidad mayor que L1, L2 y L3, aunque también en ellos se producen derivas que alejan a los satélites de la posición deseada. Debido a este comportamiento, en todos los casos es necesario implementar estrategias de control para mantener los



satélites en la posición de consigna. Por ello, y como continuación al artículo (Alonso and Santos, 2008), se han aplicado controladores tanto convencionales como basados en lógica borrosa, en ambos casos de tipo proporcional y proporcional-derivativo. Los parámetros de los controladores se han ajustado de manera cualitativa, por medio de prueba y error. El objetivo de estos controladores es estudiar con qué precisión se podrían llegar a cumplir las especificaciones requeridas, para mantener los satélites en los puntos de libración, y analizar si esta estrategia de posicionamiento es factible y ventajosa. Las componentes consideradas por los controladores son las del plano, pues la tercera componente (Z, fuera del plano Tierra – Luna – puntos de Lagrange) es prácticamente despreciable y carece de interés práctico, además presenta un comportamiento oscilatorio sin inestabilidades. La acción integral del controlador no es necesaria dada la naturaleza del sistema. Se ha definido el error de posición en cada una de las direcciones del plano como la diferencia entre la posición exacta del punto de Lagrange donde se quiere situar el satélite y su posición real.

## 6.1 Aplicación de Control Convencional

### 6.1.1 Satélites con control proporcional

En las figuras 9 y 10 se muestran las dos componentes del error de posición para los satélites en L1 y L4 (por brevedad, no se han incluido todas las gráficas para L2, L3 y L5, si bien los resultados obtenidos se comentan a continuación). Las componentes del error de posición son siempre inferiores a 6 m para el satélite en L1, inferiores a 25 cm para el satélite en L2, e inferiores a 40 m para el satélite en L3. En estos casos (L1, L2 y L3), se puede apreciar un cierto transitorio inicial, debido a que los puntos de Lagrange tienen una cierta aceleración distinta a la de los satélites, por lo que los satélites mantienen durante sólo un instante de tiempo la misma posición y velocidad que tales puntos de libración.

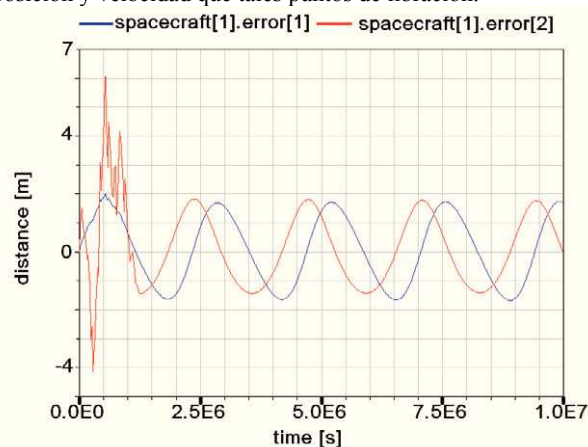


Figura 9: Errores de posición del satélite con control proporcional en L1.

Con el fin de evitar la repetición excesiva de gráficas semejantes, se hace notar (sin mostrar las figuras correspondientes,) que las gráficas para L2 y L3 son similares a la de L1, mientras que la de L5 es similar a la de L4 (Figura 10). Los errores de posición de los satélites en L4 y L5 serían prácticamente nulos si no fuera por las diversas perturbaciones orbitales consideradas (no esfericidad, viento solar, etc).

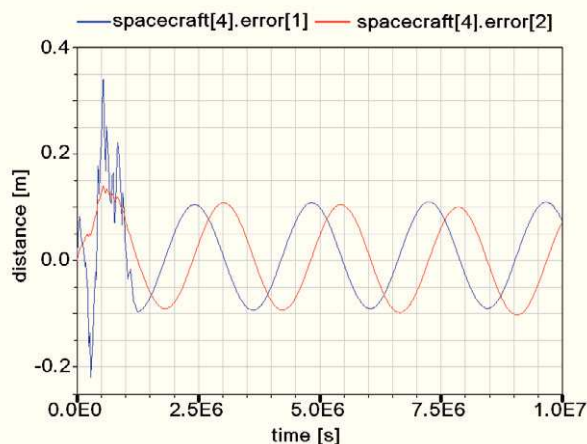


Figura 10: Errores de posición del satélite con control proporcional en L4.

Con el controlador P, la propulsión aplicada a cada satélite es proporcional a su error de posición, como se ha podido comprobar en la simulación. El valor de la acción de control es bastante bajo, especialmente en el caso de L4 y L5, lo que permite consumir poca energía.

Los resultados obtenidos por medio del control proporcional son bastante buenos, si bien sería necesario mejorar el control para evitar los transitorios iniciales observados en los errores de posición y especialmente en la propulsión de los satélites situados en las cercanías de L1, L2 y L3.

### 6.1.2 Satélites con control proporcional derivativo

En las figuras 11 y 12 se muestran las dos componentes del error de posición para cada satélite en L3 y L5, cuando se controla la posición de cada uno de ellos con controladores PD convencionales. Las componentes del error de posición son siempre inferiores a 2 m para el satélite en L1, e inferiores a 12 m para el satélite en L3 (Figura 11). Estos resultados en posición son bastante mejores que los obtenidos para el control proporcional. No se ha creído conveniente mostrar todas las gráficas obtenidas, debido a su similitud, de modo que sirva el resultado de L3 (el de mayor error) como ejemplo. El algoritmo de control PD permite mantener la posición de estos satélites, con oscilaciones de mucha menor amplitud que en el caso del controlador P.

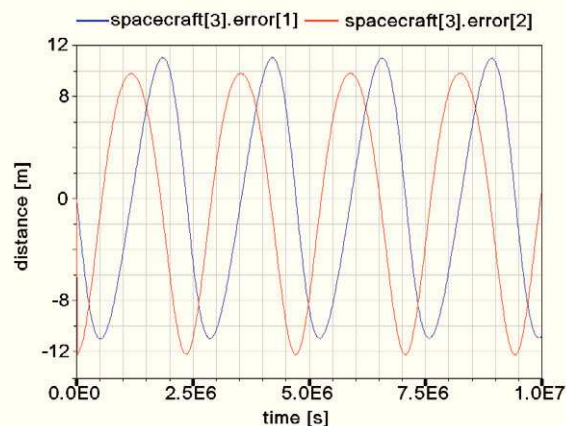


Figura 11: Errores de posición del satélite con control PD en L3.



Los errores de posición de los satélites en L4 y L5 (en la figura 12 se muestra el de L5) pueden considerarse similares al caso anterior, pero sin transitorio inicial.

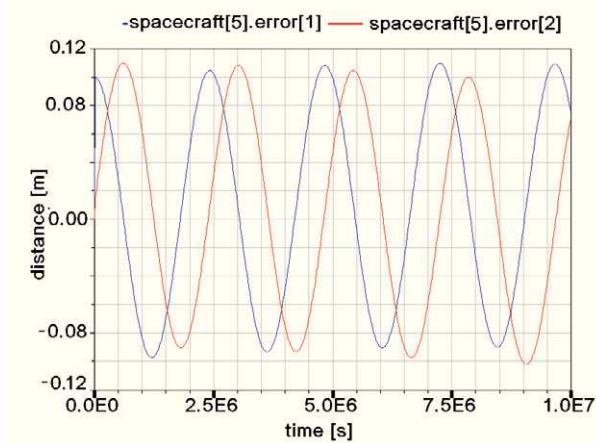


Figura 12: Errores de posición del satélite con control PD en L5.

La propulsión aplicada a cada satélite a lo largo de la misión ha resultado similar al caso del controlador P, pero sin el pronunciado transitorio inicial para en L1, L2 y L3.

## 6.2 Aplicación de Control Borroso

A continuación se van a aplicar controladores inteligentes basados en lógica borrosa (*fuzzy logic*), con objeto de mejorar la respuesta del sistema. La ventaja del control borroso es la posibilidad de aplicar un control más suave en términos de propulsión y gasto de combustible.

### 6.2.1 Satélites con control proporcional borroso

En cada satélite, las variables de entrada para el controlador borroso proporcional son el error de posición (km) en la dirección de cada una de las dos dimensiones del plano. La salida del controlador es la propulsión (fuerza) aplicada sobre el satélite (siempre según las dos direcciones del plano).

Se ha trabajado con dos conjuntos borrosos para cada componente del error de posición, etiquetados como “error positivo” y “error negativo”. Ambos conjuntos se han implementado como funciones rampa saturadas, cuyo valor mínimo y máximo son 0 y 1 respectivamente, y alcanzando tales valores a una distancia de 10 kilómetros respecto a la posición de referencia (ver Figura 13).

Para la salida, se ha definido la variable de propulsión con dos conjunto borrosos: situación de “no-propulsión”, y situación de “propulsión”. La “no-propulsión” se define como aquella situación en la que la suma de los grados de pertenencia de las entradas (error positivo y error negativo) es inferior a un cierto umbral; en este caso, y para la dirección considerada, la salida es nula, pues el error de posición no es ni demasiado alto (positivo) ni demasiado bajo (negativo) como para considerarse necesaria la activación de la propulsión del satélite y forzar su movimiento a lo largo de la dimensión considerada. Por medio de esta estrategia, se minimiza la acción de control y se disminuye en lo posible el gasto de combustible. En caso contrario (es decir, si el error de posición en una cierta dirección es grande, ya sea con signo positivo o negativo), entonces se produce la situación de “propulsión”, aplicándose en este caso la fórmula mostrada en

(15) para calcular la componente de la propulsión en esa misma dirección, de forma proporcional a los errores:

$$\bar{F}_{control} = k(\mu^+ - \mu^-) \quad (15)$$

donde:

$\mu^+$  es el valor de pertenencia de la entrada al conjunto borroso error positivo

$\mu^-$  es el valor de pertenencia de la entrada al conjunto borroso error negativo

$k$  es una constante (máxima propulsión) definida por el diseñador.

La ecuación (15) es una expresión explícita y funcional de las reglas borrosas, que se puede interpretar cualitativamente de la manera siguiente: el valor de la propulsión (señal de control para cada dimensión) tendrá un signo tal que el satélite se acercará hacia la posición de referencia, disminuyendo el error y por tanto la suma de los grados de pertenencia a la variable error. De hecho, la posición de equilibrio se produce cuando se anula completamente el error de posición en la dirección considerada.

El valor de la propulsión aumenta con el valor de cualquiera de las dos  $\mu$ s (ya sea error positivo o negativo).

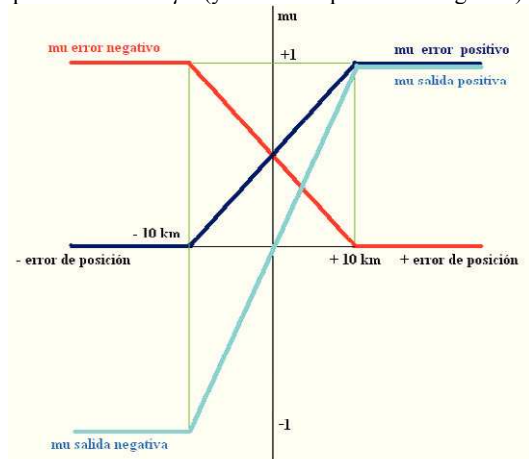


Figura 13: Conjuntos borrosos definidos para las variables de entrada y salida, en las direcciones X e Y del plano.

Los resultados del controlador proporcional borroso se muestran en las gráficas 14 (para L3, similar para L1 y L2), y 15. Como se puede observar, con el controlador *fuzzy*-P se obtienen mejores resultados para L1, L2 y L3 que con el controlador convencional, hasta llegar a errores causados únicamente por el viento solar y la no esfericidad de la gravedad. El error en L3 es estable en el largo plazo, si bien esto no se aprecia en la gráfica (se ha mantenido la misma escala de tiempos en el eje de abscisas para todas las gráficas por claridad).

Los errores de posición han disminuido en algunos casos en órdenes de magnitud: el error en L1 y L2 es menor que 0,02 m, y en L3 es menor que 1,5 m. Esta reducción de los errores es efectiva sobre todo en el transitorio inicial.

En el caso de los puntos L4 y L5, los errores obtenidos son prácticamente iguales que con el controlador P convencional, si bien se aprecia una mejora en los transitorios en el caso del controlador inteligente, como cabría esperar ya que el controlador borroso tiende a suavizar la salida. A su vez, los errores en L4 y L5 son iguales entre sí, ya que dichos errores

son debidos prácticamente en su totalidad a los efectos de la no esfericidad del campo gravitatorio y al viento solar (sin estos efectos, los errores intrínsecos a la excentricidad de la órbita serían mucho menores y distintos entre sí para L4 y L5).

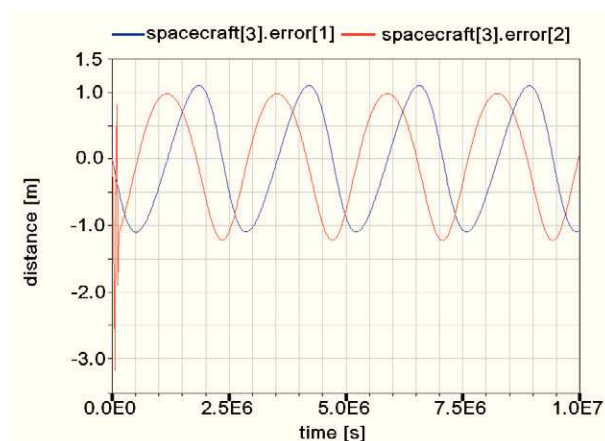


Figura 14: Errores de posición de un satélite con control P borroso en L3.

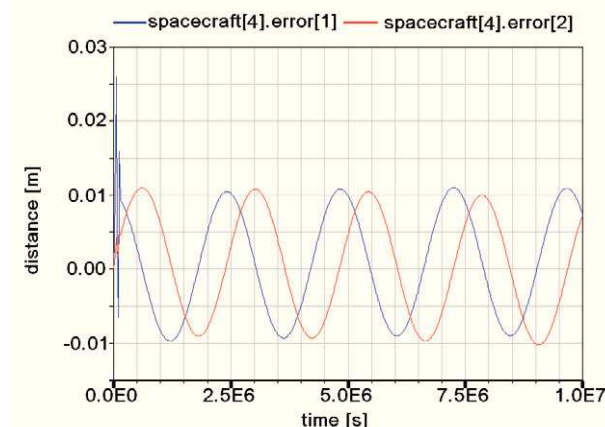


Figura 15: Errores de posición de un satélite con control P borroso en L4 (igual para L5).

### 6.2.2 Satélites con control proporcional derivativo borroso

En cada satélite, las variables de entrada para el controlador borroso proporcional derivativo son el error de posición y su derivada (para cada una de las dos direcciones del plano), siendo la salida la propulsión (fuerza) aplicada sobre el satélite (siempre según la dirección de cada una de las dos dimensiones del plano). Como en el caso anterior, se han definido dos conjuntos borrosos para cada entrada, etiquetados como “error positivo” y “error negativo” para el error y “alejamiento” y “acercamiento” para la derivada. Los conjuntos se han implementado como funciones rampa con valores de saturación 0 y 1 respectivamente, para distancias de 10 km respecto a la posición de referencia (Figura 13) o para errores superiores a 10 m/s en valor absoluto para la derivada, siempre a lo largo de cada una de las dos dimensiones del plano.

Se ha trabajado con dos conjuntos borrosos para la salida, etiquetados como “no-propulsión” y “propulsión”. La situación de “propulsión” se considera cuando el alejamiento

en una cierta dirección es grande y, al mismo tiempo, el satélite se aleja. Esta conjunción se interpreta como la función *and*, implementada como el mínimo de los valores de pertenencia de las entradas borrosas para el error de posición y su derivada. La situación de “no-propulsión” se produce cuando no se dan las condiciones de “propulsión”, es decir, cuando el error de posición o su derivada tienen valores por debajo de cierto umbral, en cuyo caso no se considera necesario utilizar propulsión. En el caso de la situación de “propulsión”, se aplica la fórmula (16):

$$\bar{F}_{control} = k(\mu^{++} - \mu^{--}) \quad (16)$$

donde:

$\mu^{++} = \min(\mu^+, \mu^{d+})$ , siendo  $\mu^{d+}$  el valor de pertenencia de la entrada al conjunto borroso derivada del error positivo

$\mu^{--} = \min(\mu^-, \mu^{d-})$ , siendo  $\mu^{d-}$  el valor de pertenencia de la entrada al conjunto borroso derivada del error negativo

$k$  es una constante (máxima propulsión) definida por el diseñador.

Según la fórmula (16), y de manera análoga a como se explicó para la fórmula (15), se aplica una propulsión (señal de control para cada dimensión) que acerca al satélite a la posición de equilibrio, en la cual se obtendría un error de posición nulo con derivada del error también nula, para la dirección considerada del plano. En esta ocasión (control borroso proporcional derivativo), la señal de control depende de  $\mu^{++}$  y  $\mu^{--}$  (y no de  $\mu^+$  y  $\mu^-$ , como en el caso del controlador borroso proporcional).

Los resultados obtenidos se pueden observar en las gráficas 16 y 17 (se muestran los casos más significativos por brevedad, aunque se comentan todos). Con el controlador *fuzzy*-PD se mejoran los resultados del PD convencional y también del *fuzzy*-P. El PD borroso es claramente mejor que el PD convencional para los puntos de Lagrange L1, L2 y L3, mientras que en L4 y L5 se obtienen errores inapreciables en ambos casos.

El control PD borroso mejora los resultados porque el transitorio inicial ha sido eliminado, a costa de aumentar ligeramente el error de posición. Su acción de control más suave mantiene aún algunos errores en régimen permanente, errores que son aceptables toda vez que por ese motivo el PD borroso ahorra energía respecto al P borroso, precisamente por la menor exigencia a la hora de aplicar la señal de control o propulsión.

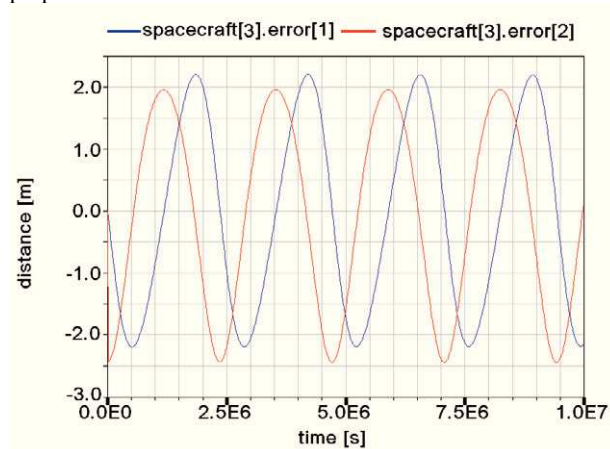


Figura 16: Errores de posición del satélite con control PD borroso en L3.

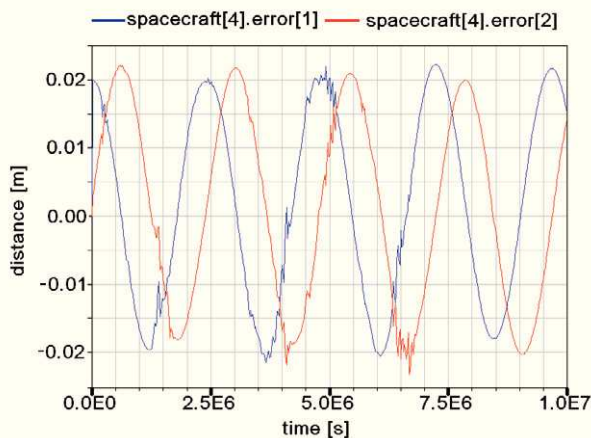


Figura 17: Errores de posición de un satélite con control PD borroso en L4 (igual para L5).

Los transitorios que aleatoriamente aparecen en los errores de L4 y L5 se debe a errores puramente numéricos, dado el bajo orden de magnitud manejado en comparación con las distancias consideradas (milímetros frente a cientos de kilómetros, lo que implica una diferencia de 8 órdenes de magnitud).

La Tabla 1 resume los resultados, mostrando los errores en valor absoluto de la dimensión del plano donde son mayores para cada tipo de controlador.

Tabla 1: Errores de posición (m) de los satélites en los puntos de Lagrange con distintos controladores

	P	PD	Fuzzy-P	Fuzzy-PD
L1	2	2	0.02	0.4
L2	0.02	0.08	0.02	0.04
L3	40	12	1.5	2.5
L4	0.12	0.12	0.012	0.025
L5	0.12	0.12	0.012	0.025
Transitorio	1.106 s	No hay	1.106	No hay

En general, la energía requerida por un sistema de propulsión es un parámetro importante en misiones aeroespaciales, ya que de ella depende la cantidad de combustible que debe transportar la aeronave desde su lanzamiento. Sin embargo, si la propulsión requerida tiene un valor muy bajo (propulsión basada en iones o plasma), la energía necesaria se puede conseguir por medio de radioactividad o a partir de la electricidad obtenida con paneles solares, por lo que la cantidad de combustible resultaría irrelevante y el factor limitador de la misión sería la potencia. En nuestro caso, la potencia del sistema de propulsión es oscilatoria pero muy baja en todo instante, tal y como se deduce de la Tabla 2, que muestra los valores máximos de la potencia para todos los satélites y controladores implementados en este artículo. Se aprecia una demanda de potencia en general baja, pero especialmente mejorada en el caso de los controladores PD. Cabe destacar los valores de potencia en L1 y L3, que mejoran si se utiliza un PD borroso en vez de un controlador PD convencional. Todos estos valores de potencia se pueden conseguir por medio de los modernos sistemas eléctricos de propulsión, basados en iones y plasma, como es el caso de la misión GOCE de la ESA (Drinkwater et al., 2002).

Tabla 2: Potencia máxima (W) del sistema de propulsión, en régimen permanente, una vez concluido el transitorio inicial

	P	PD	Fuzzy-P	Fuzzy-PD
L1	85	70	65	55
L2	1.2	0.40	1.0	0.40
L3	75	65	65	55
L4	0.5	0.35	0.5	0.35
L5	0.5	0.35	0.5	0.35

## 7. Conclusiones

En este trabajo se han creado objetos y modelos que permiten simular un sistema binario con sus puntos de libración correspondientes, y analizar el comportamiento de satélites situados en cada uno de esos puntos.

Para el sistema Tierra-Luna se han simulado sus cinco puntos de Lagrange, y se ha comprobado que el modelo refleja fielmente la realidad en cuanto a estabilidad. Se han incorporado efectos que generalmente se omiten, como la perturbación inducida por el viento solar, la deriva de la órbita lunar, y la no esfericidad de los planetas.

Los modelos se han desarrollado en el lenguaje orientado a objetos *Modelica*, que permite la simulación de sistemas dinámicos, variables con el tiempo (Mattsson, Elmqvist and Otter, 1998). Se han creado objetos y elementos reutilizables y extensibles, cuya combinación permite implementar modelos complejos, específicamente para sistemas aeroespaciales. Se han comprobado las ventajas de implementar sistemas de ecuaciones frente a la programación tradicional de algoritmos, especialmente en el caso de los puntos de Lagrange L1, L2 y L3, de difícil solución analítica. El programa *Dymola* ha utilizado los modelos para realizar simulaciones y representar los resultados gráficamente, incluyendo animaciones.

Se han aplicado cuatro tipos diferentes de controladores (P y PD, convencionales y borrosos), todos los cuales han sido capaces de contrarrestar la inestabilidad de la posición de los satélites situados en las proximidades de los puntos de Lagrange. El comportamiento de los satélites correspondientes a L4 y L5 ha sido especialmente bueno, consiguiendo que los errores de posición prácticamente desaparezcan. Para los puntos L1, L2 y L3, se concluye que los dos controladores proporcionales analizados (convencional y borroso) son bastante buenos, si bien los derivativos presentan resultados mejores porque permiten suavizar los transitorios iniciales, además de reducir considerablemente el error de posición a lo largo de toda la misión espacial.

Con los controladores utilizados, y para todos los puntos de Lagrange, la propulsión ejercida ha sido baja, siendo por tanto también baja la cantidad de energía necesaria para mantener las posiciones de los satélites, lo que es una ventaja fundamental a la hora de considerar misiones de observación de larga duración.

Los resultados se podrían mejorar aún más con otro tipo de control no lineal, pero resulta innecesario a la vista de los órdenes de magnitud manejados en las distintas gráficas (errores inferiores a un metro, despreciables frente a distancias del orden de centenares de kilómetros), toda vez que los efectos de debris, actividad solar, etcétera, son impredecibles, por lo que los resultados obtenidos con cualquier controlador siempre estará sujeto a errores. En general, pues, parece innecesario aplicar ningún otro control alternativo o más complejo, siendo suficiente con los controladores P y PD



convencionales y borrosos que se han aplicado de manera muy satisfactoria en este artículo.

El planteamiento utilizado en este artículo es novedoso y distinto al empleado en otras misiones espaciales ya realizadas. Por ejemplo, en Herschel-Planck (lanzamiento realizado en el año 2010) no se pretende alcanzar exactamente el punto de Lagrange (L2, en ese caso), sino rodearlo, manteniendo una posición arbitraria mediante la aplicación de maniobras cada 4-6 semanas, con el objetivo de que los satélites Herschel y Planck no se alejen demasiado. Para ello, se aplican maniobras correctivas de carácter impulsivo, mientras que en el presente artículo se utiliza un control continuo para mantener a cada satélite lo más cerca posible de los puntos de Lagrange. Resultaría interesante plantear, en futuros trabajos, una combinación de ambas estrategias, de forma que se armonice el objetivo de mantener una cierta distancia respecto al punto de Lagrange (como en el caso de la misión Herschel-Planck) con el control continuo de tipo P y PD, convencional y borroso, que se puede implementar mediante los modernos sistemas de propulsión eléctricos (*ion/plasma drives*) que permiten un empuje bajo y continuo durante muy largos periodos de tiempo (tal es el caso de la misión GOCE). En ese sentido, siendo interesantes los resultados obtenidos en el presente artículo, el controlador continuo se puede desarrollar y mejorar siguiendo múltiples estrategias y varias líneas de investigación que aporten mejoras sucesivas, tales como PID's, filtros, simulación de otros tipos de perturbaciones, control no lineal, etc.

## English Summary

### Modeling, Simulation and Control of Satellites in the Lagrangian Points of the Earth-Moon System

#### Abstract

In this work, a constellation of five satellites placed in the Lagrange points of the Earth-Moon system has been modelled, analyzed and controlled. Non-linear effects such as the solar wind, the orbital eccentricity, etc. have been included in the model to make it more realistic. Conventional and fuzzy PID-like controllers have been applied in order to maintain the satellites in the desired position despite the instabilities and drifts inherent in this system. The system has been developed using Modelica and simulated with Dymola; besides, several aerospace objects have been generated using this language. Both conventional and fuzzy controllers have provided good results.

#### Keywords:

Modeling, simulation, satellites, Lagrangian points, Earth-Moon system, PID control, Fuzzy Controllers

#### Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo del proyecto CICYT DPI2009-14552-C02-01 del Ministerio de Educación y Ciencia.

## Referencias

- Alonso Zotes F., Santos M., 2010. Multi-criteria Genetic Optimisation of the Manoeuvres of a Two-Stage Launcher. *Information Sciences*, 180(6), 896–910.
- Alonso Zotes, F., Santos M., 2008. Modelado y simulación con Modelica y Dymola de cinco satélites en los puntos de Lagrange del sistema tierra-luna. In: *Actas XXIX Jornadas Automática*, Tarragona, España.
- Bate, R. R., Mueller D. D., White J. E., 1971. *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications.
- Bengoa, G., Alonso, F., García, D., Graziano, M., Beech T., Ortega G., 2004. FAMOS-V2: Formation Flying and Rendezvous and Docking Tool for Exploration Mission in Circular and Elliptical Orbits. In: *Proc. 2nd Int. Symp. on Formation Flying Missions and Technologies*.
- Bodley, C. S., Flanders H. A., 1986. Tethered satellite program control strategy. *Proc. Int. Conference*, Arlington, CA, Univelt, 295–299.
- Doruk R. O., Kocaoglan E., 2008. Satellite attitude control by integrator back-stepping with internal stabilization. *Aircraft Engineering & Aerospace Technology*, 80(1), 3–10.
- Drinkwater, M. R., Floberghagen, R., Haagmans, R., Muzi D., Popescu A., 2002. GOCE: ESA's First Earth Explorer Core Mission. *Space Sciences Review*, 108, 1–2, 419–432.
- Dynasim AB, 2008. [www.dynasim.se](http://www.dynasim.se)
- Elices, T., 1989. Introducción a la Dinámica Espacial. INTA.
- Fahr, H. J., 2002. Global Energy Transfer from Pick-up Ions to Solar Wind Protons. *Solar Physics*, 208, 335–344.
- Fahr, H. J., Chahshei I. V., 2002. On the thermodynamics of MHD wave-heated solar wind protons, *Astron. Astrophys.*, 395, 991–1000.
- Garzón Florez, C.M., Florez A., 2006. Túneles gravitacionales. *R. Colombiana de Física*, 38(3), 1186–1189.
- Gurfil, P., Kasdin N. J., 2001. Dynamics and Control of Spacecraft Formation Flying in Three-Body Trajectories. In: *Guidance, Navigation, and Control Conf.*, Montreal, Canada, AIAA 01-4026.
- Hamilton, N., 2001. Formation Flying Satellite Control Around the L2 Sun-Earth Libration Point. Master's thesis, George Washington University, Washington D.C.
- Hechler, M., 2009. Launch Windows for libration point missions. *Acta Astronautica*, 64, 139–151.
- Herschel-Planck, 2010. [www.esa.int/esaMI/Herschel/SEMZETEHTF\\_0.html](http://www.esa.int/esaMI/Herschel/SEMZETEHTF_0.html)
- Howell, K. C., Marchand B. G., 2003a. Control Strategies for Formation Flight in the Vicinity of the Libration Points. In: *Space Flight Mechanics Conference*, AAS Paper 03-113.
- Howell, K. C., Marchand B. G., 2003b. Design and Control of Formations near the Libration Points of the Sun-Earth/Moon Ephemeris System, *Space Flight Mechanics Symposium*, Maryland.
- Kaula W. M., 1996. *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publishing Company. Waltham, Massachusetts.
- Mattsson, S. E., Elmqvist H., Otter M., 1998. Physical system modelling with Modelica. *Control Engineering Practice*, 6(4), 501–510.
- Ming, X., Dancer, M. W., Balaskrishnan S. N., Pernicka H.J., 2004. Stationkeeping of an L2 libration point satellite with  $\theta$ -D technique. In: *Proc. of the American Control Conference*, Boston Massachusetts.
- Moreno V., Aeyels D., 2006. Minimización del Tiempo de Vuelo de Satélites Utilizando Programación Dinámica. *RIAI*, 3(3), 108–115.
- Nagarajan, R. P., Yaacob, M. P., Zain, S., Soh Kay Hoh Z.M., Arshad A.S., 2008. PID and Adaptive Predictive Fuzzy Logic Controller for a micro-satellite. In: *International Conference on Electronic Design*.
- NASA Planetary Fact Sheet, 2009. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>
- Sánchez Peña, R. S. Alonso R. J., 2005. Control de vehículos espaciales. *RIAI*, 2(3), 6–24.
- Scheeres, D. J., Vinh N. X., 2000. Dynamics and control of relative motion in an unstable orbit. In: *Astrodynamics Specialist Conference*, Denver, AIAA Paper 00-4135.
- Stuchi, T.J., Yokoyama, T., Correa, A. A., Solórzano, R. H., Sánchez D. M., Winter S. M. G., Winter O. C., 2008. Dynamics of a spacecraft and normalization around Lagrangian points in the Neptune–Triton system. *Science Direct, Advances in Space Research*, 42, 1715–1722.
- Sutton, P. Biblarz O., 2001. *Rocket Propulsion Elements*. 7th Ed. Wiley-Interscience, USA.
- Tiller, M. M., 2001. *Introduction to physical modeling with Modelica*. Kluwer Academic Publishers, Springer.