Informe - Laboratorio 7

Juan José Caballero y Laura Ortiz

30 de marzo de 2023

1. Problema 1:

Para el sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz de transición de estados $\Phi[k, 0]$.

Solución:

Para empezar vamos a tomar las siguientes condiciones iniciales linealmente independientes:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que nuestro sistema es:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= 2x_1[k] + x_2[k] \\ x_2[k+1] &= 2x_2[k] \end{aligned}$$

Para $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nuestra secuencia será:

$$\begin{aligned} k = 0, x_1[1] &= 2 \\ x_2[1] &= 0 \\ \\ k = 1, x_1[2] &= 4 \\ x_2[2] &= 0 \\ \\ k = 2, x_1[3] &= 8 \\ x_2[3] &= 0 \\ \\ k = 3, x_1[4] &= 16 \\ x_2[4] &= 0 \end{aligned}$$

$$\ldots$$

Luego, nuestra primer solución L.I. es: $x^{(1)}[k] = \begin{pmatrix} 2^k \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ nuestra secuencia será:

$$\begin{aligned} k = 0, x_1[1] &= 2 \\ x_2[1] &= 4 \\ \\ k = 1, x_1[2] &= 8 \\ x_2[2] &= 8 \\ \\ k = 2, x_1[3] &= 24 \\ x_2[3] &= 16 \\ \\ k = 3, x_1[4] &= 64 \\ x_2[4] &= 32 \end{aligned}$$

$$\cdots$$

Luego, nuestra segunda solución L.I. es: $x^{(2)}[k] = \begin{pmatrix} 2^k k \\ 2^{k+1} \end{pmatrix}$

Así,

$$X[k] = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz de transición de estados $\Phi[k, 0]$ es:

$$\Phi[k, 0] = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Phi[k, 0] = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi[k, 0] = \begin{pmatrix} 2^k & 2^{k-1} k \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

2. Problema 2:

Para el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz de transición de estados $\Phi(t, \tau)$, y calcule $x(0)$ si $x(1) = (1, 1)^T$.

Solución:

Sabemos que $\Phi[t, \tau]$ se puede expresar como, $\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$. Note que $A(t - \tau)$ es igual a:

$$A(t - \tau) = \begin{pmatrix} \pi(t - \tau) & t(t - \tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\Phi(t,\tau)\begin{pmatrix} e^{\pi(t-\tau)} & e^{t(t-\tau)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, vamos a encontrar $x(0)$, si $x(1) = (1,1)^T$. Sabemos que $x(t) = \Phi(t,\tau)x(\tau)$. Así:

$$x(0) = \Phi(0,1)x(1)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} e^{-\pi} & e^{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} e^{-\pi}+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Problema 3:

Considere el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$x[k+1] = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x[k]$$

1. Encuentre la matriz de transición de estados $\Phi[k,l]$.

2. Encuentre dos soluciones L.I.

3. Encuentre $x[100]$, si $x[0] = [1,0]^T$.

Solución:

2. Si elegimos los 2 condiciones linealmente independientes de la identidad:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que nuestro sistema es:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] + (k+1)x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_2[k] \end{aligned}$$

Para $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nuestra secuencia será:

$$\begin{aligned} k = 0, x_1[1] &= 1 \\ x_2[1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1, x_1[2] &= 1 \\ x_2[2] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2, x_1[3] &= 1 \\ x_2[3] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3, x_1[4] &= 1 \\ x_2[4] &= 0 \end{aligned}$$

$$\cdots$$

Luego, nuestra primer solución L.I. es: $x^{(1)}[k] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nuestra secuencia será:

$$\begin{aligned} k = 0, x_1[1] &= 1 \\ x_2[1] &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1, x_1[2] &= 3 \\ x_2[2] &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2, x_1[3] &= 6 \\ x_2[3] &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3, x_1[4] &= 10 \\ x_2[4] &= 1 \end{aligned}$$

$$\dots$$

Luego, nuestra segunda solución L.I. es: $x^{(2)}[k] = \begin{pmatrix} \frac{k(k+1)}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Así,

$$X[k] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Luego, la matriz de transición de estados $\Phi[k,l]$ es:

$$\Phi[k,l] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{l(l+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Phi[k,l] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{l(l+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi[k,l] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k^2+k-l^2-l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Finalmente, vamos a encontrar $x[100]$, si $x[0] = [1,0]^T$:

$$\Phi[100,0] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{100^2+100-0-0}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi[100,0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Problema 4:

Sea un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes $x[k+1] = Ax[k]$.

Si se sabe que su matriz de transición de estados es:

$$\Phi[k,0] = \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k^2+k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz del sistema, A.

Solución:

Sabemos que $\Phi[k+1,l] = A[k]\Phi[k,l]$, luego tendremos que $\Phi[k+1,0] = A[k]\Phi[k,0]$. Con esto podemos ver que A[k] será:

$$\begin{aligned} \Phi[k+1,0] &= A[k]\Phi[k,0] \\ \Phi[k+1,0]\Phi[k,0]^{-1} &= A[k]\Phi[k,0]\Phi[k,0]^{-1} \\ \Phi[k+1,0]\Phi[k,0]^{-1} &= A[k]I \\ \Phi[k+1,0]\Phi[k,0]^{-1} &= A[k] \end{aligned}$$

Note que:

$$\Phi[k+1,0] = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k^2+3k+2}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y,

$$\Phi[k,0]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k^2-k}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, tendremos que:

$$A[k] = \Phi[k+1,0]\Phi[k,0]^{-1}$$

$$A[k] = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k^2-k}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A[k] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$