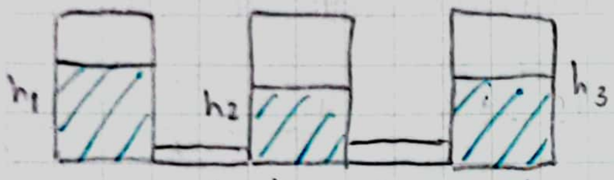
LAB 8 - Punto 2

- $h_i \rightarrow$ altura del agua en el i-ésimo tanque
- $f_a \rightarrow$ flujo de agua del tanque 1 al 2.
- $f_b \rightarrow$ " " " " " 2 al 3.

- $\frac{d}{dt} h_i(t)$ = flujo de entrada al i-ésimo tanque en t - flujo de salida del i-ésimo tanque en t.



$f_a = h_1 - h_2$ $\quad f_b = h_2 - h_3$

a. Conjeturamos que el tanque 1 va a tener una altura menor de agua que el tanque 2, y el 2 una altura menor que la del tanque 3.

b. $\dot{h}_1(t) = -h_1(t) + h_2(t)$

$$\dot{h}_2(t) = h_1(t) - h_2(t) - h_2(t) + h_3(t) = h_1(t) - 2h_2(t) + h_3(t)$$

$$\dot{h}_3(t) = h_2(t) - h_3(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = -1 \\ -\lambda_3 = -3 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 = \beta_0 \\ e^{-t} = \beta_2 - \beta_1 + \beta_0 \\ e^{-3t} = 9\beta_2 - 3\beta_1 + \beta_0 \end{bmatrix}$$

$$-1 + e^{-t} = \beta_2 - \beta_1 \quad (-3)$$
$$-1 + e^{-3t} = 9\beta_2 - 3\beta_1$$

$$-3\beta_2 + \cancel{3\beta_1} = -3e^{-t} + 3$$
$$9\beta_2 - \cancel{3}\beta_1 = e^{-3t} - 1$$
$$6\beta_2 = e^{-3t} - 3e^{-t} + 2$$
$$\boxed{\beta_2 = \frac{e^{-3t} - 3e^{-t} + 2}{6}}$$

$$e^{-t} - 1 = \frac{e^{-3t} - 3e^{-t} + 2}{6} - B1$$

$$B1 = \frac{e^{-3t} - 3e^{-t} + 2}{6} + \frac{-6e^{-t} + 6}{6}$$

$$\boxed{B1 = \frac{e^{-3t} - 9e^{-t} + 8}{6}}$$

c.

Así, $e^{At} = B_2 A^2 + B_1 A + B_0 I$

$$= B_2 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{3} & -\left(\frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{2}\right) & \frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{6} \\ -\left(\frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{2}\right) & e^{-3t}-3e^{-t}+2 & -\left(\frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{2}\right) \\ \frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{6} & -\left(\frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{2}\right) & \frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{3} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{6}\right) & \frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{6} & 0 \\ \frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{6} & -\left(\frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{3}\right) & \frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{6} \\ 0 & \frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{6} & -\left(\frac{e^{-3t}-4e^{-t}+8}{6}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-3t}+3e^{-t}+2}{6} & \frac{-e^{-3t}+1}{3} & \frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{6} \\ \frac{-e^{-3t}+1}{3} & \frac{2e^{-3t}+1}{3} & \frac{-e^{-3t}+1}{3} \\ \frac{e^{-3t}-3e^{-t}+2}{6} & \frac{-e^{-3t}+1}{3} & \frac{e^{-3t}+3e^{-t}+2}{6} \end{pmatrix}$$

Calculando $\lim_{t \to \infty} h(t)$, tendremos entonces:

$$\left[= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right],$$

ahora asumiendo una condición inicial arbitraria $h(0) = (1\ 1\ 1)^T$, vamos a tener que:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Por lo tanto nuestra intuición del punto a). es incorrecta, ya que tendrán la misma altura