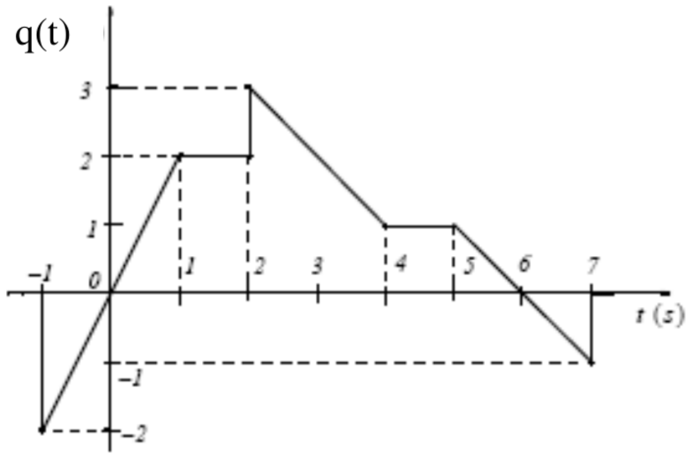
Informe - Tarea 2

Laura Sofía Ortiz

28 de mayo de 2023

Problema:

1. Considere la siguiente señal:



   Exprese q(t) como una suma de escalones $\{u(t-k)\}$.

2. Obtenga, analíticamente y con Simulink, $\frac{dq}{dt} = x(t)$.

3. Sume la señal x(t) con la señal:

   $y(t) = -2u(t+1) + 2u(t-1) + 2\delta(t+1) - \delta(t-7) + u(t-2) - u(t-4) + u(t-5) - u(t-7)$

4. Considere el siguiente sistema que posee una entrada y una salida:

$$\frac{df}{dt} = -Af(t) + g(t) + e(t)$$
$$\frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt} - Bg(t)$$

   Donde g(t) es la salida y e(t) es la entrada al sistema. Donde A , B > 0 , A ≡ DC1 , B ≡ DC1. DC1 y DC2 son los últimos dígitos de las cédulas de los integrantes del grupo de trabajo. (Si el dígito es cero, se toma el siguiente dígito no cero).

a) Construya el sistema en Simulink y realice las simulaciones.

b) Verifique que el sistema cumple con las propiedades básicas.

5. Encuentre la respuesta al impulso del sistema conformado por dos ecuaciones diferenciales. Utilice dos métodos, uno de los cuales debe ser la Transformada de Laplace.

6. Utilice la siguiente función de entrada al sistema representado por la respuesta al impulso, $x_2(t) = cos(2 * pi * K * t + A)$, donde $K = [B\ 3B\ 9B\ 15B\ 200B\ 1000B]$. A y B son como los propuestos en el numeral 3.

Soluciones:

1. Note que podemos dividir por intervalos la señal, para poder expresarla como una suma de escalones, los intervalos son los siguientes:

   - $I_1 = 2t\{u(t+1) - u(t-1)\}$
   - $I_2 = 2\{u(t-1) - u(t-2)\}$
   - $I_3 = (-t+5)\{u(t-2) - u(t-4)\}$
   - $I_4 = \{u(t-4) - u(t-5)\}$
   - $I_5 = (-t+6)\{u(t-5) - u(t-7)\}$

   Así, q(t) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} q(t) &= 2t\{u(t+1) - u(t-1)\} + 2\{u(t-1) - u(t-2)\} + (-t+5)\{u(t-2) - u(t-4)\} \\ &\quad + \{u(t-4) - u(t-5)\} + (-t+6)\{u(t-5) - u(t-7)\} \\ \\ &= 2tu(t+1) + (-2t+2)u(t-1) + (-t+3)u(t-2) + (t-4)u(t-4) \\ &\quad + (-t+5)u(t-5) + (t-6)u(t-7) \end{aligned}$$

2. Ahora vamos a obtener analíticamente la derivada de la señal:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = x(t) &= 2u(t+1) + 2t\delta(t+1) - 2u(t-1) + (-2t+2)\delta(t-1) - u(t-2) + (-t+3)\delta(t-2) \\ &\quad + u(t-4) + (t-4)\delta(t-4) - u(t-5) + (-t+5)\delta(t-5) + u(t-7) + (t-6)\delta(t-7) \end{aligned}$$

   Se puede observar que existen discontinuidades en $t = -1,\ t = 2\ t = 7$. Luego, $\delta(t-1) = 0,\ \delta(t-4) = 0\ \delta(t-5) = 0$. Y así:

$$\begin{aligned} 2t\delta(t+1) =& \{2t\Big|_{t=-1}\}\delta(t+1) = -2\delta(t+1) \\ (-t+3)\delta(t-2) =& \{(-t+3)\Big|_{t=2}\}\delta(t-2) = \delta(t-2) \\ (t-6)\delta(t-7) =& \{(t-6)\Big|_{t=7}\}\delta(t+1) = \delta(t-7) \end{aligned}$$

   Finalmente vamos a tener que:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = x(t) &= 2u(t+1) - 2\delta(t+1) - 2u(t-1) - u(t-2) + \delta(t-2) + u(t-4) - u(t-5) \\ &\quad + u(t-7) + \delta(t-7) \end{aligned}$$

Ahora pasamos a Simulink, para crear nuestra señal q(t), y derivarla:

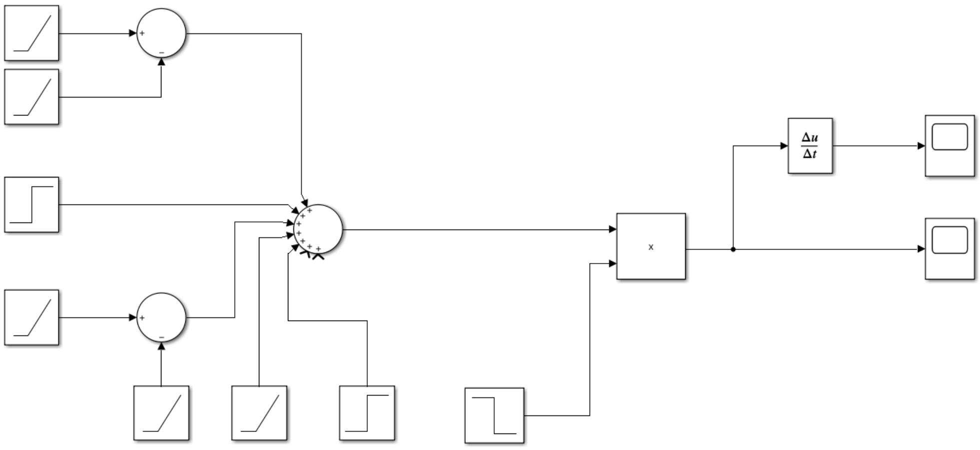


Figura 1: Construcción de la señal y su derivada

Que dio como resultado:

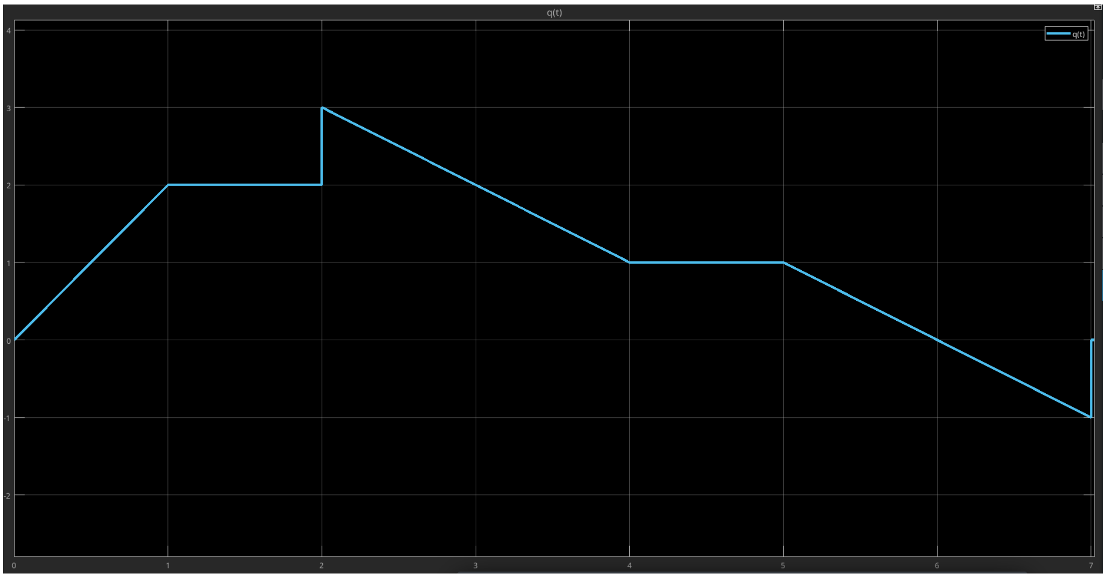


Figura 2: Señal q(t) en Simulink

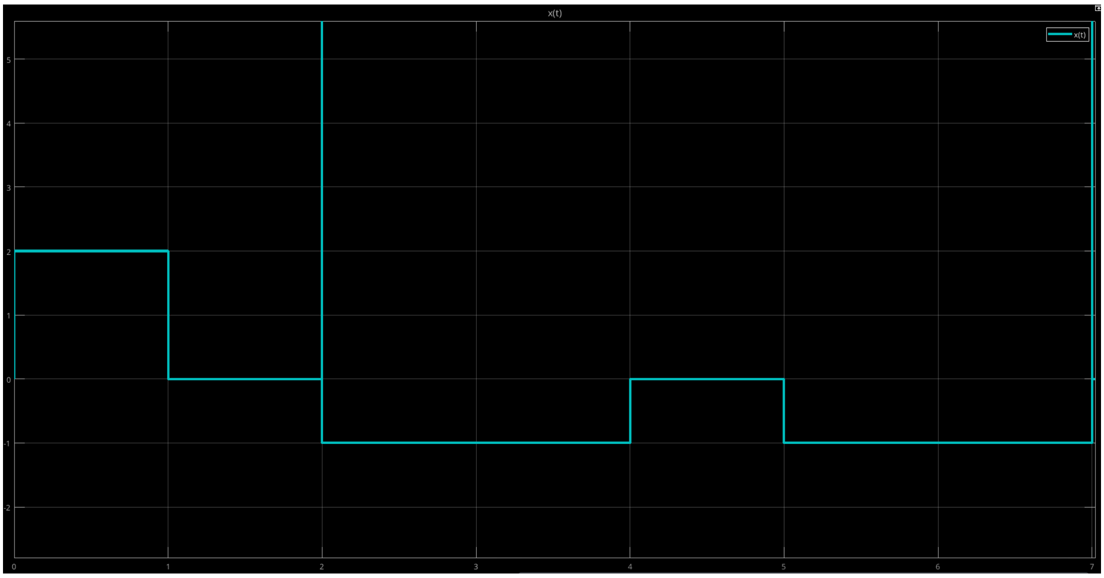


Figura 3: Derivada de la señal q(t) en Simulink

Note que en la gráfica también podemos observar las discontinuidades en $t = 2$ $t = 7$, la de $t = -1$ gráficamente no se alcanza a observar ya que tuve algunos problemas con Simulink para que me mostrara desde $x = -1$, ya que se corría y se dañaba la gráfica.

3. Para sumar la señal x(t) que es la derivada de q(t), junto a la señal y(t), se realizó el siguiente sistema en Simulink:

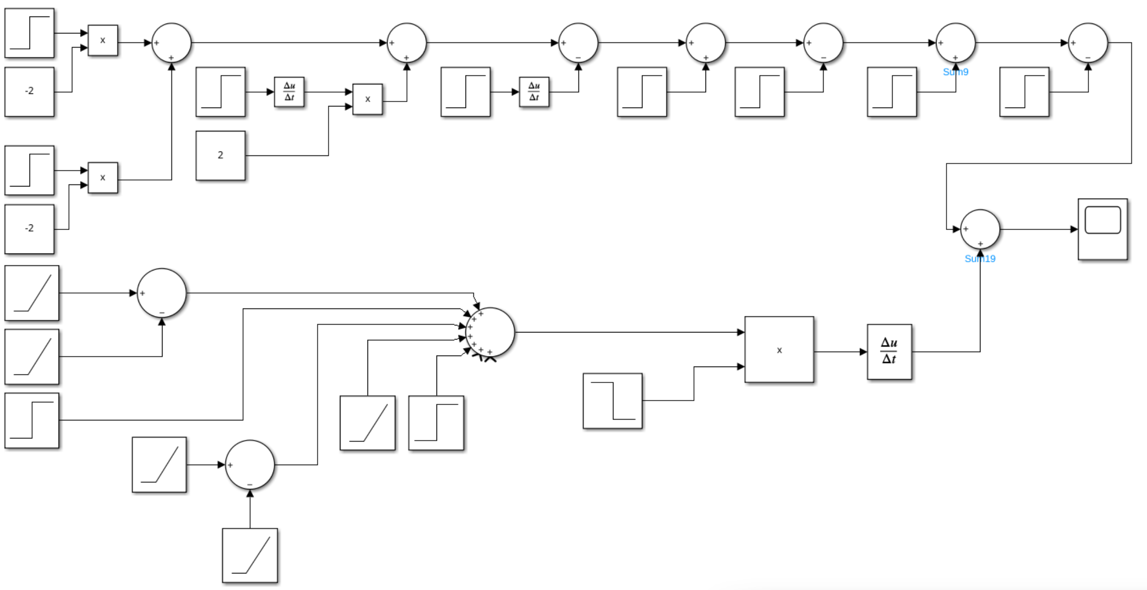


Figura 4: Señal x(t) + y(t) en Simulink

Que dio como resultado el siguiente:

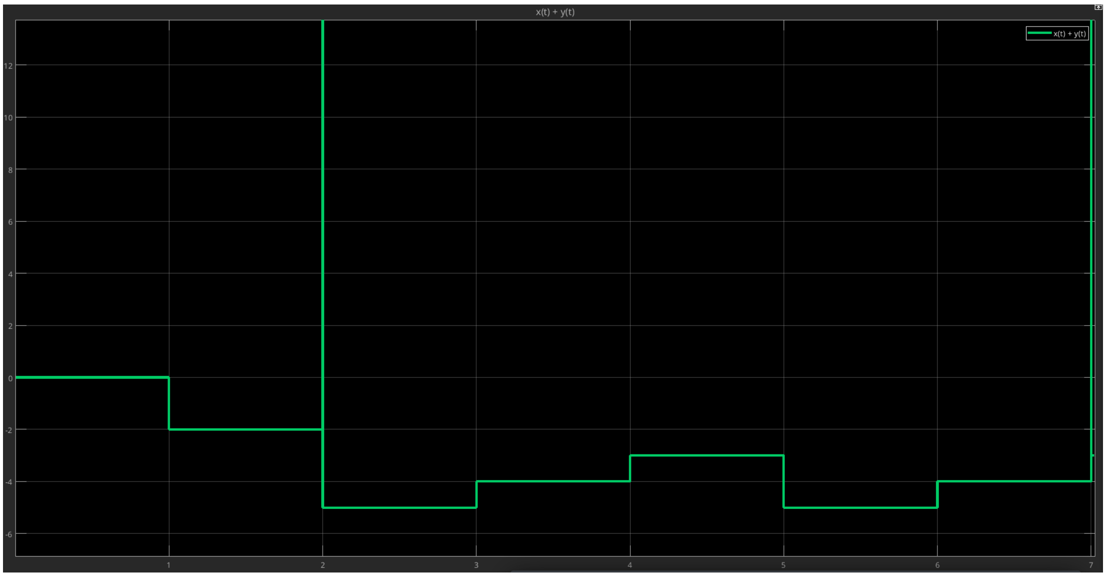


Figura 5: Gráfica de la suma de señales

4. *a*) El sistema en Simulink es el siguiente:

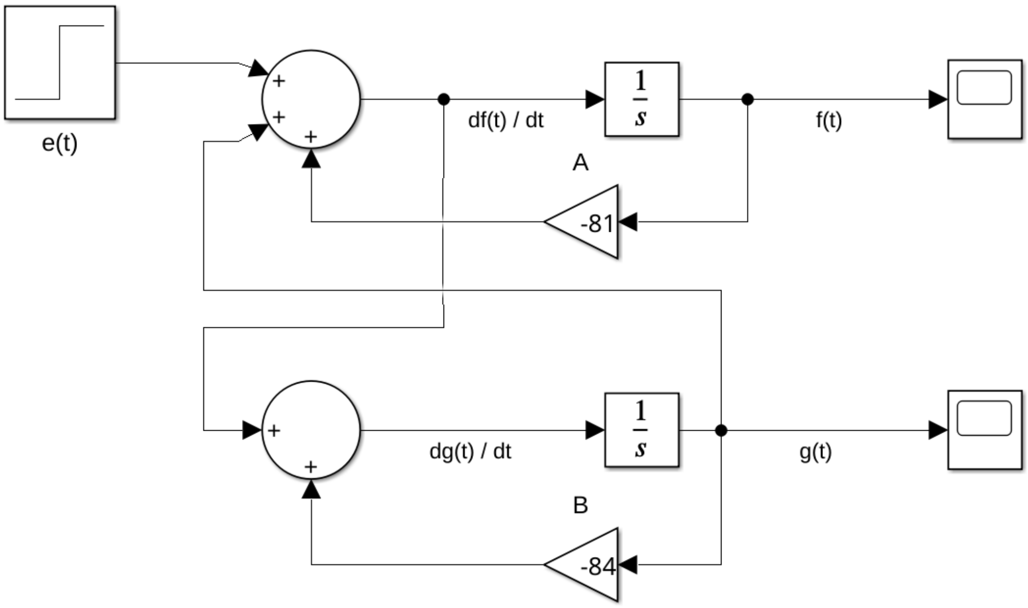


Figura 6: Construcción del sistema en Simulink

Al simularlo da como resultado:

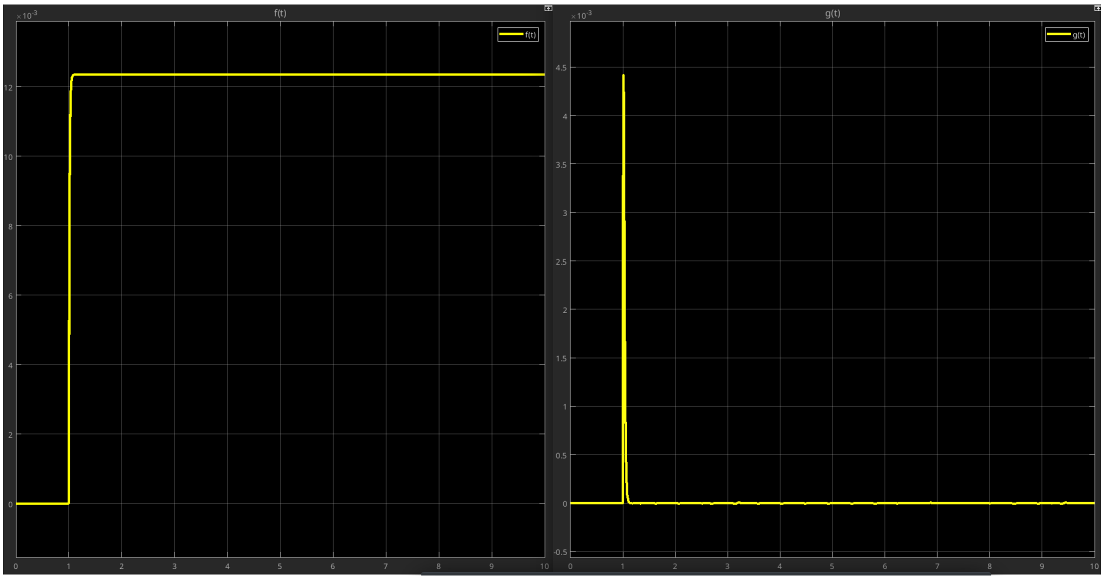


Figura 7: Gráfica de f(t) y la salida g(t)

b) Ahora vamos a comprebar que el sistema cumple con las propiedades de Linealidad, la Invarianza en el tiempo y la Estabilidad.

Se sabe que un sistema es lineal, cuando la respuesta que se obtiene al someterlo a dos o mas entradas cualesquiera es la misma, que si se sumaran esas respuestas al someterlo a las mismas entradas de manera independiente.

Entonces, realizamos los sistemas en Simulink de la siguiente manera:

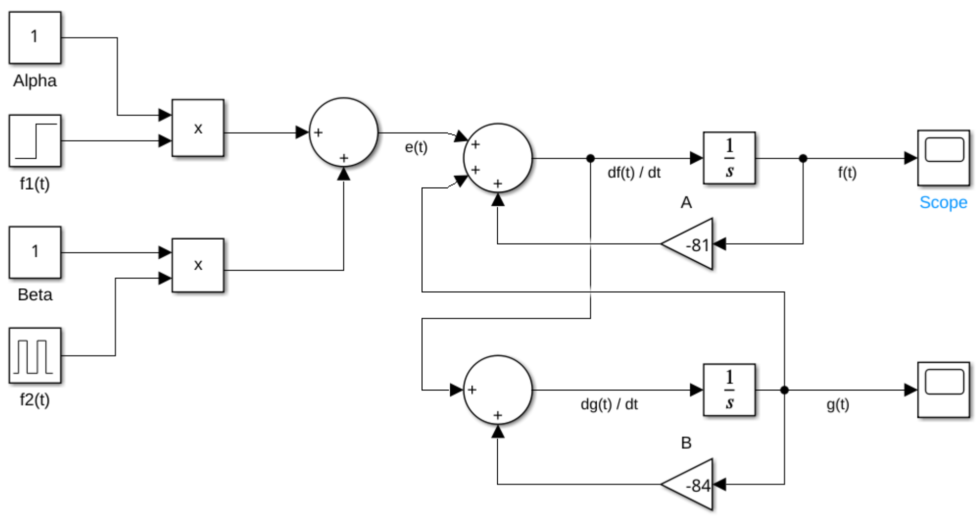


Figura 8: Construcción de las respuestas

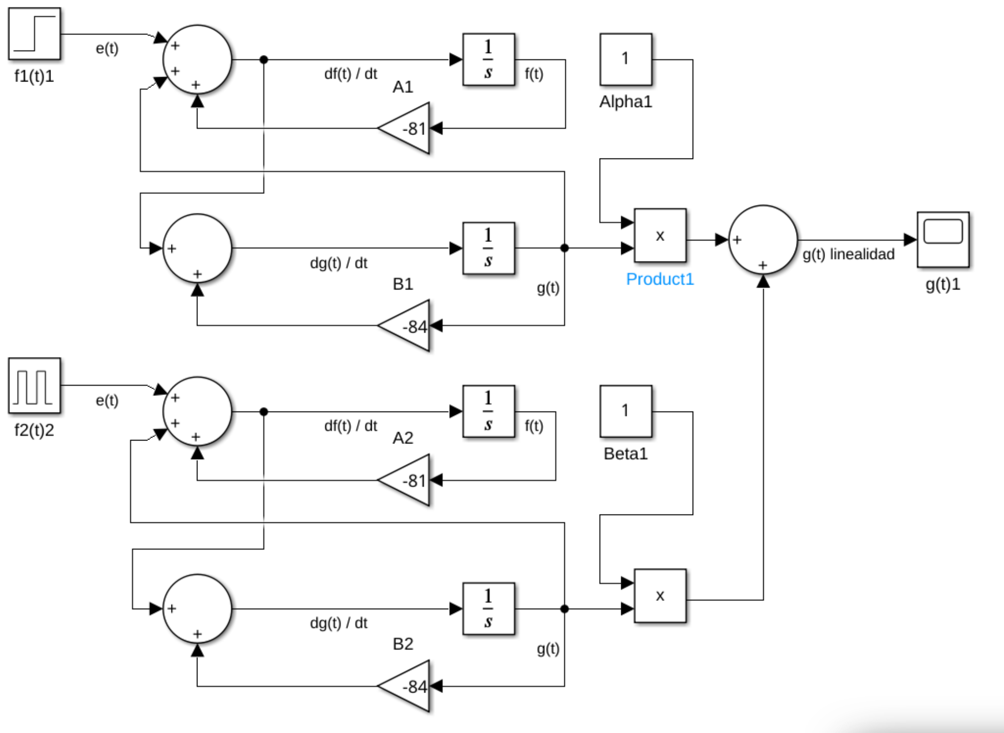


Figura 9: Construcción de la suma de las respuestas

Que dio como resultado lo siguiente:

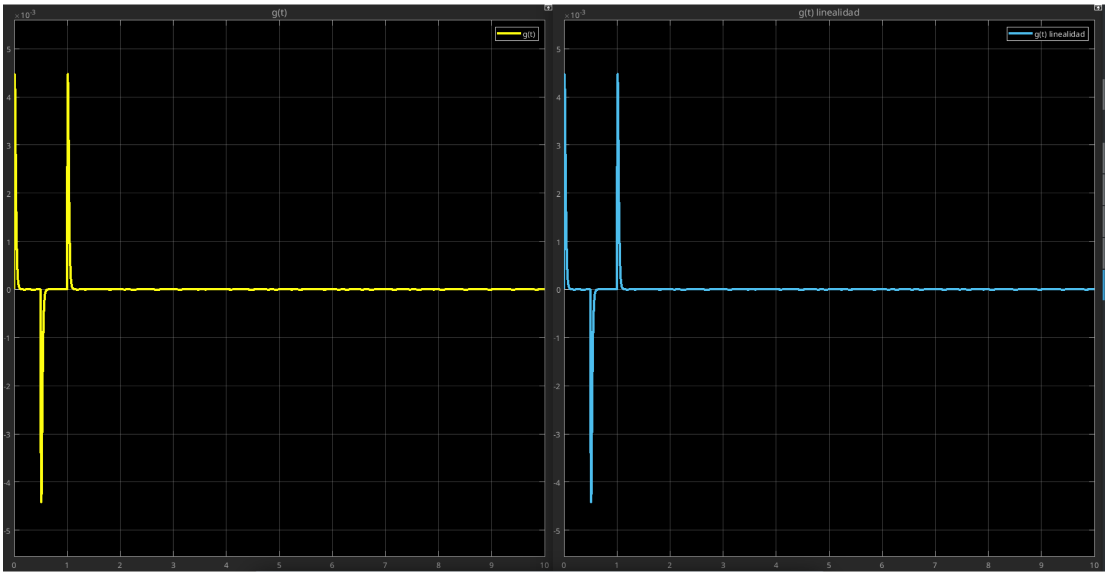


Figura 10: Comprobar linealidad

Podemos observar que las gráficas son iguales, y por lo tanto **el sistema es lineal**.

Continuando con la propiedad de invarianza:

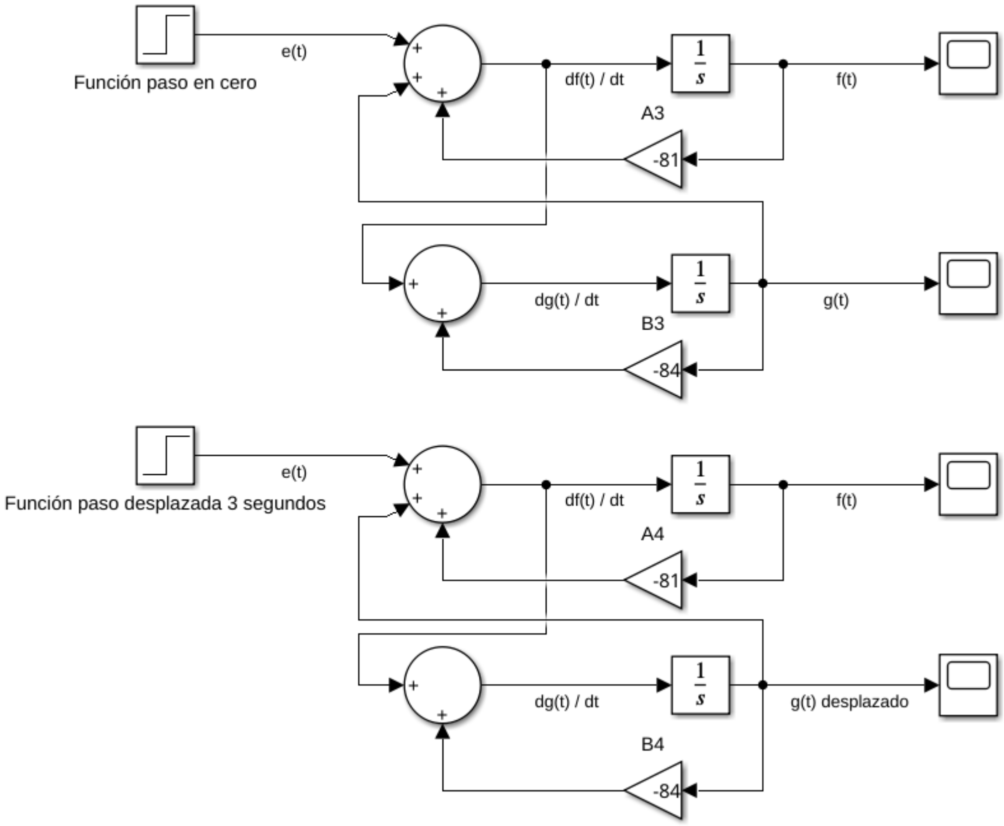


Figura 11: Construcción para la invarianza en el tiempo

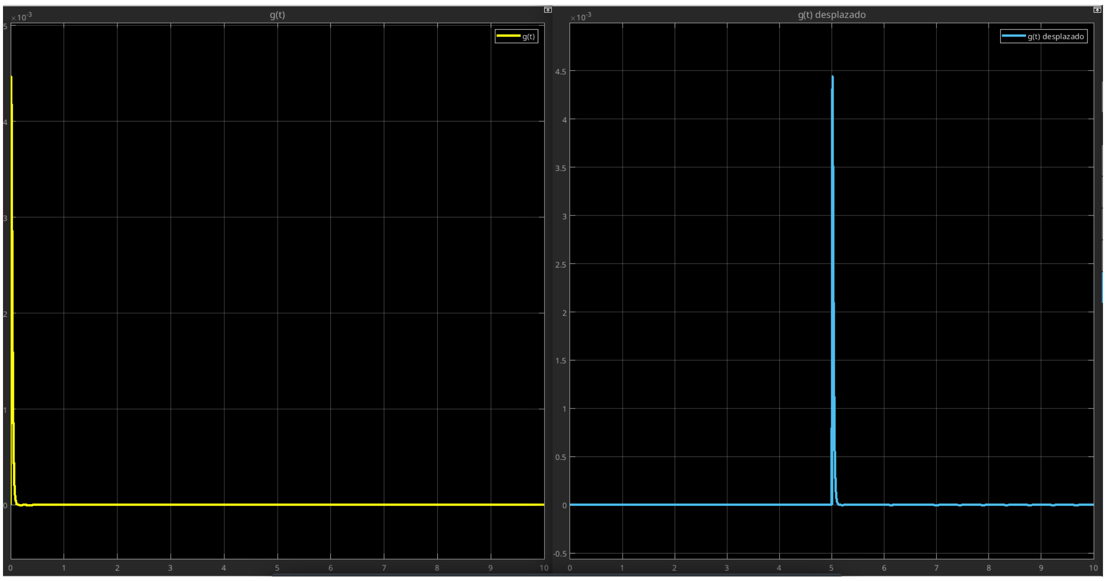


Figura 12: Comprobar invarianza en el tiempo

Podemos observar que **el sistema es invariante en el tiempo**, las gráficas son iguales, y la única diferencia es el desplazamiento de 3 segundos.

Finalmente **la estabilidad del sistema**, que da como resultado:

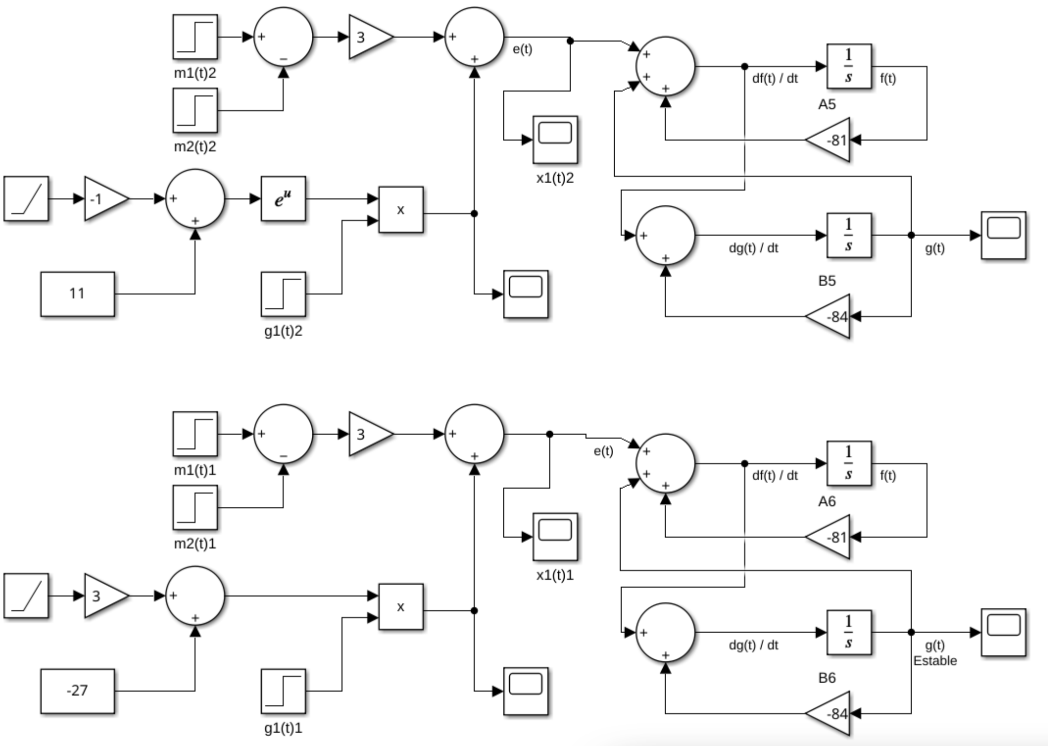


Figura 13: Construcción para la estabilidad

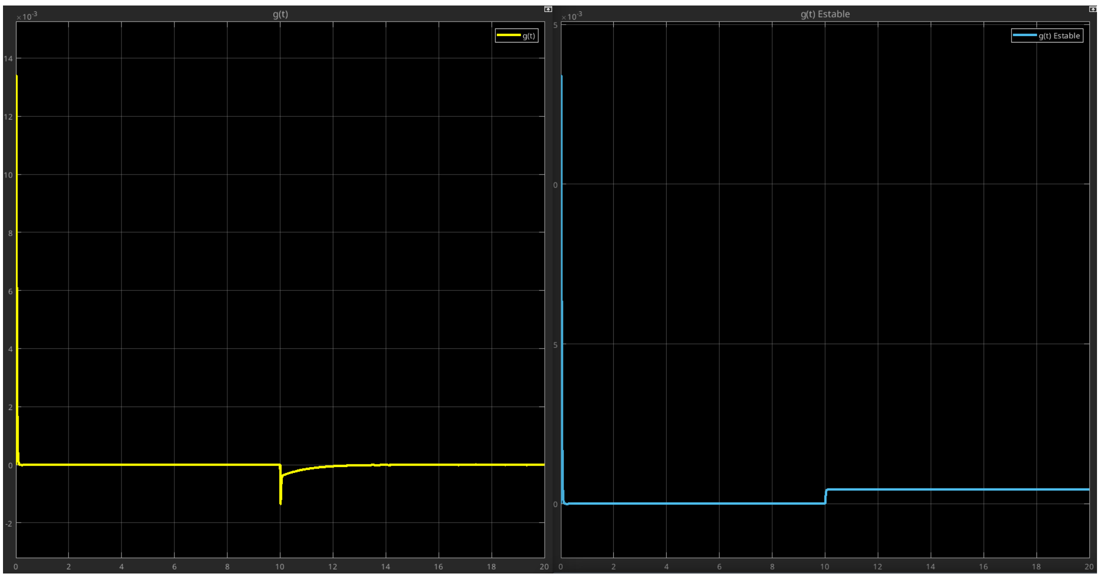


Figura 14: Comprobar estabilidad del sistema

Hemos verificado que el sistema cumple con las propiedades básicas.

5. **Método 1 - Transformada de Laplace:**

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales originales, obtenemos:

$$sF(s) - f(0) = -81F(s) + G(s) + E(s)$$
$$sG(s) - g(0) = sF(s) - 84G(s)$$

Donde F(s), G(s) y E(s) son las transformadas de Laplace de f(t), g(t) y e(t) respectivamente.

Suponiendo que las condiciones iniciales f(0) y g(0) son cero, podemos simplificar las ecuaciones a:

$$sF(s) = -81F(s) + G(s) + E(s) \tag{1}$$
$$sG(s) = sF(s) - 84G(s) \tag{2}$$

Ahora, despejamos F(s) en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} sF(s) + 81F(s) &= G(s) + E(s) \\ F(s)(s+81) &= G(s) + E(s) \\ F(s) &= \frac{G(s) + E(s)}{s+81} \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación (2), obtenemos:

$$sG(s) = s\Big(\frac{G(s) + E(s)}{(s+81)}\Big) - 84G(s)$$

$$G(s) = \frac{G(s) + E(s) - 84G(s)(s+81)}{(s+81)}$$

$$G(s)(s+81) = G(s) + E(s) - 84G(s)(s+81)$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} G(s)(s+81) - G(s) + 84G(s)(s+81) &= E(s) \\ G(s)((s+81) - 1 + 84(s+81)) &= E(s) \\ G(s)(85s + 6884) &= E(s) \\ G(s) &= \frac{E(s)}{(85s + 6884)} \end{aligned}$$

Esta es la función de transferencia del sistema en el dominio de Laplace. Para obtener la respuesta al impulso, debemos encontrar la transformada inversa de Laplace de G(s).

Método 2 - Solución directa:

Supongamos que la entrada $e(t)$ es un impulso unitario $\delta(t)$. Esto significa que $e(t) = \delta(t)$. Entonces, la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{df}{dt} = -81f(t) + g(t) + \delta(t) \tag{3}$$
$$\frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt} - 84g(t) \tag{4}$$

La ecuación (4) puede ser reescrita como:

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) - 84\frac{dg(t)}{dt} \tag{5}$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la (5), obtenemos:

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-81f(t) + g(t) + \delta(t)) - 84\frac{dg(t)}{dt}$$

Aplicando la derivada, obtenemos:

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = -81\frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt} + \frac{d\delta(t)}{dt} - 84\frac{dg(t)}{dt}$$

Dado que $\frac{d\delta(t)}{dt} = 0$ (el impulso unitario no tiene derivada), simplificamos la ecuación a:

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = -81\frac{df(t)}{dt} - 83\frac{dg(t)}{dt}$$

Ahora, reemplazamos $\frac{df(t)}{dt}$ de la ecuación (3):

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = -81(-81f(t) + g(t) + \delta(t)) - 83\frac{dg(t)}{dt}$$

Simplificamos aún más:

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = 6561f(t) - 81g(t) - 81\delta(t) - 83\frac{dg(t)}{dt}$$

Esta es la ecuación diferencial de segundo orden que describe la respuesta al impulso del sistema. Podemos resolver esta ecuación utilizando métodos estándar de solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

6. Para representar el sistema con una entrada $x_2(t) = cos(2 * \pi * K * t + A)$ con $K = [B\ 3B\ 9B\ 15B\ 200B\ 1000B]$, siendo $A = 81$ y $B = 84$, el sistema en Simulink es el siguiente:

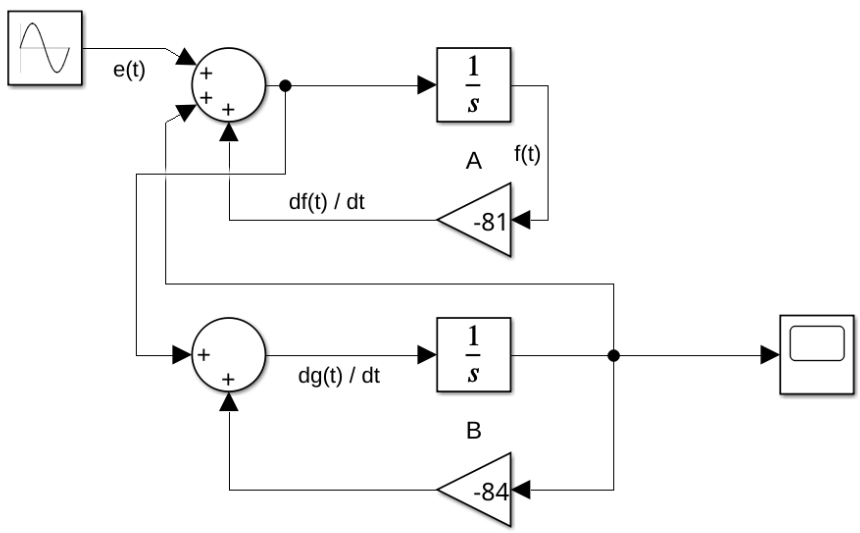


Figura 15: Construcción del sistema en Simulink

Que dio como resultado:

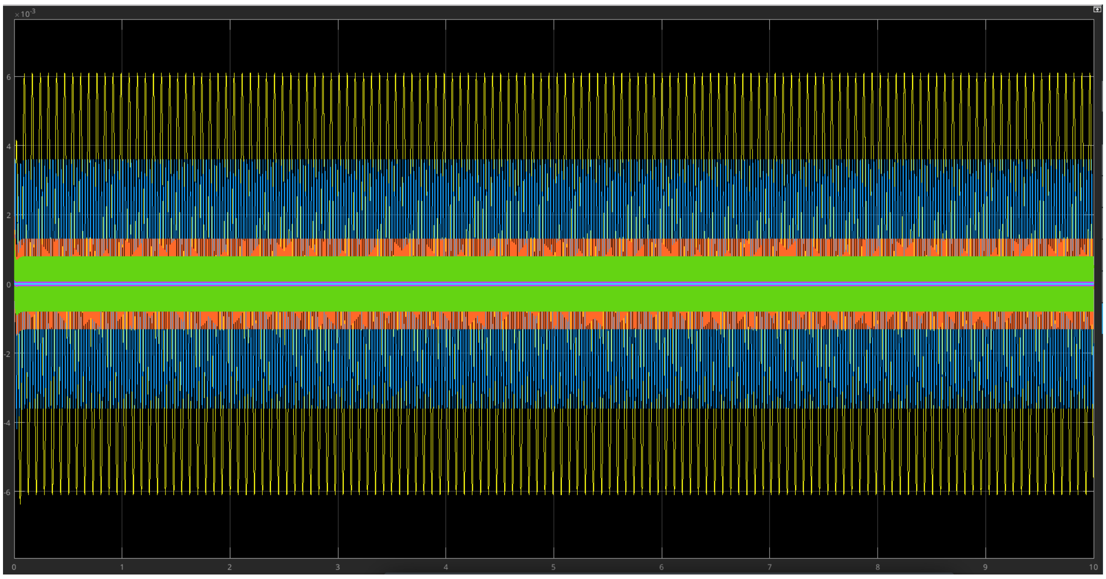


Figura 16: Respuesta a la entrada $x_2(t) = cos(2 * \pi * K * t + A)$