Informe - Laboratorio 10

Juan José Caballero y Laura Ortiz

23 de mayo de 2023

1. Problema:

En este taller se realizará el control de un péndulo invertido (sistema no lineal), partiendo de la representación dada por el modelo en espacio de estados.

A partir de las ecuaciones diferenciales presentadas a continuación, definir el modelo en espacio de estados:

$$(m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \tag{1}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \tag{2}$$

Modelo en espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Realizar:

- Determinar el modelo en espacio de estados teniendo en cuenta la siguiente asignación de estados:
$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},\ x_3 = x,\ x_4 = \dot{x}$$
- Determinar si el sistema es estable.
- Determinar si el sistema es observable.
- Diseñar un controlador por realimentación de estados.
- Observar la respuesta del sistema frente a una entrada impulso, r(t) = impulso.
- Determinar la salida del sistema ante un estado inicial de $x_0 = [0{,}1\ 0\ 0\ 0]^T$. En este punto coloque una entrada igual a cero, r(t) = 0. Tenga en cuenta que es necesario identificar como hay que modificar el estado inicial de un integrador.

En los dos últimos ítems, observe el comportamiento de cada uno de los estados.

1.1. Modelo en espacio de estados:

Teniendo en cuenta la ecuación (1), despejamos $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{u - ml\ddot{\theta}}{(m+M)} \tag{3}$$

Con la ecuación (3), remplazamos $\ddot{x}$ en la ecuación (2), dando como resultado:

$$\ddot{\theta} = \frac{(m+M)g\theta}{Ml} - \frac{u}{Ml} \tag{4}$$

Ahora teniendo en cuenta la ecuación (4), remplazamos $\ddot{\theta}$ en la ecuación (3), así $\ddot{x}$ nos queda:

$$\ddot{x} = \frac{u}{M} - \frac{mg\theta}{M} \tag{5}$$

Así, con las ecuaciones (4) y (5) y usando la asignación de estados dada podemos obtener nuestro modelo, el cuál nos dió el siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2 \\
\dot{x_2} &= \frac{(m+M)g}{Ml}x_1 - \frac{1}{Ml}u \\
\dot{x_3} &= x_4 \\
\dot{x_4} &= \frac{1}{M}u - \frac{mg}{M}x_1
\end{aligned}$$

Con lo anterior ya podemos calcular las matrices de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Vamos a tener en cuenta que $m = M = l = 1$ y g es el valo de la gravedad, luego tendremos que nuestras matrices de estado son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9{,}8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

1.2. Estabilidad del sistema

Haciendo uso de la ecuación $|SI - A|$ y de Matlab para calcular las raices que son $s = [0\ 0\ 4{,}4272\ \ -4{,}4272]$, nos da que **el sistema no es estable**, ya que hay una raiz positiva en el polinómio característico.

1.3. Observabilidad del sistema

Para determinar si el sistema es observable, necesitamos encontrar la matriz de observabilidad, y ver que el rango sea igual al número de filas.

Teniendo en cuenta lo anterior, utilizamos obsv que calcula una matriz de observabilidad a partir de matrices de estado ($O = [C^* \ A^*C^* \ (A^*)^2C^* \ (A^*)^3C^*)$. Esto nos dio como resultado:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ -9{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -9{,}8 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Por último, se calculó el rango de la matriz con matlab el cuál dio igual a 4, que es el mismo número de filas de la matriz A. Por lo tanto **el sistema es observable**.

1.4. Controlador por realimentación de estados

El controlador del sistema es el siguiente:

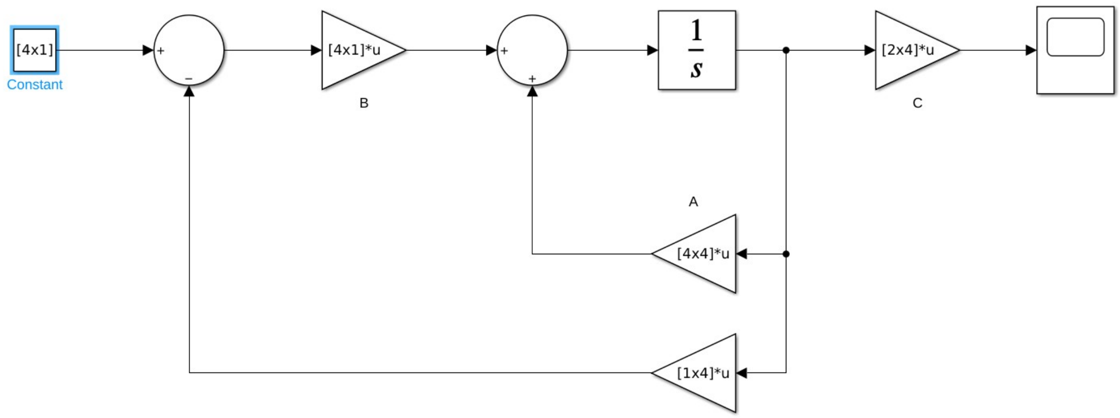

Figura 1: Controlador por realimentación de estados en Simulink

Como nuestro sistema es inestable, vamos a hacer uso del control mediante la realimentación de estados $u = -Kx$, donde $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ son los valores necesarios para hacer el sistema estable. Para esto vamos a necesitar que los polos estén en $s = \left[-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2\right]$.

Para calcular K, usamos la función de matlab $k = place(A, B, [s])$, que nos dió como resultado que:

$$k_1 = -28{,}5031$$
$$k_2 = -5{,}6378$$
$$k_3 = -0{,}1531$$
$$k_4 = -0{,}6378$$

1.4.1. Respuesta

Ahora vamos a observar la respuesta del sistema frente a una entrada impulso, r(t) = impulso. Que nos dió como resultado:

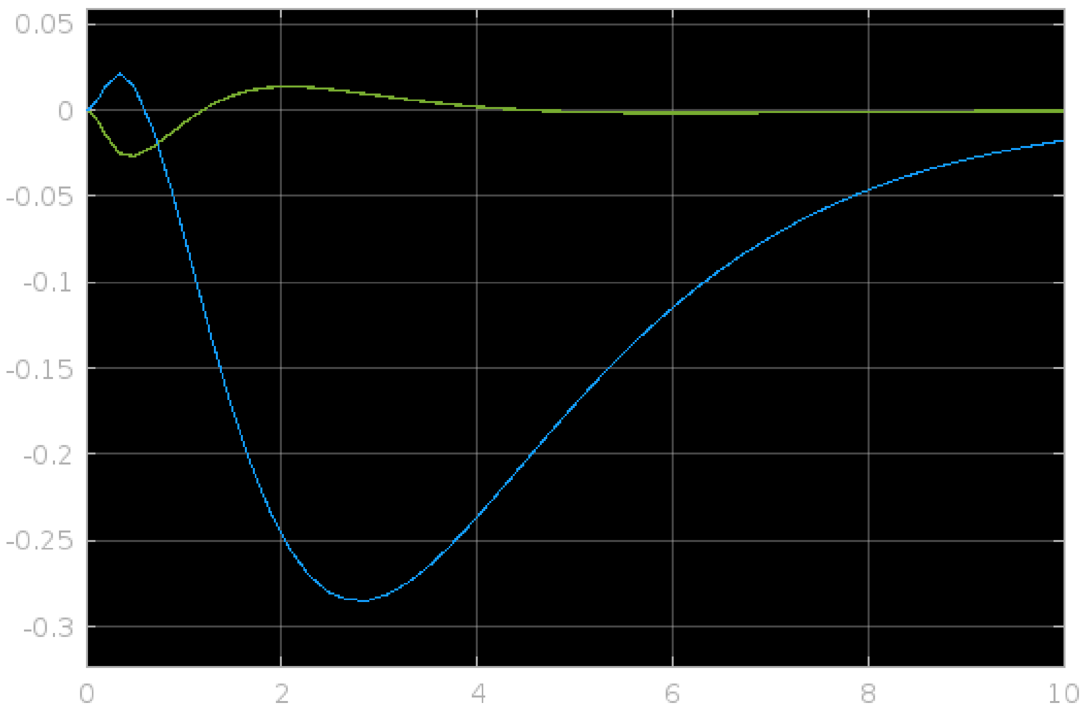

Figura 2: Respúesta del sistema frente a una entrada impulso

1.4.2. Salida del sistema

Finalmente, vamos a determinar la salida del sistema ante un estado inicial de $x_0 = [0, 1\ 0\ 0\ 0]^T$. Y esto nos dió como resultado lo siguiente:

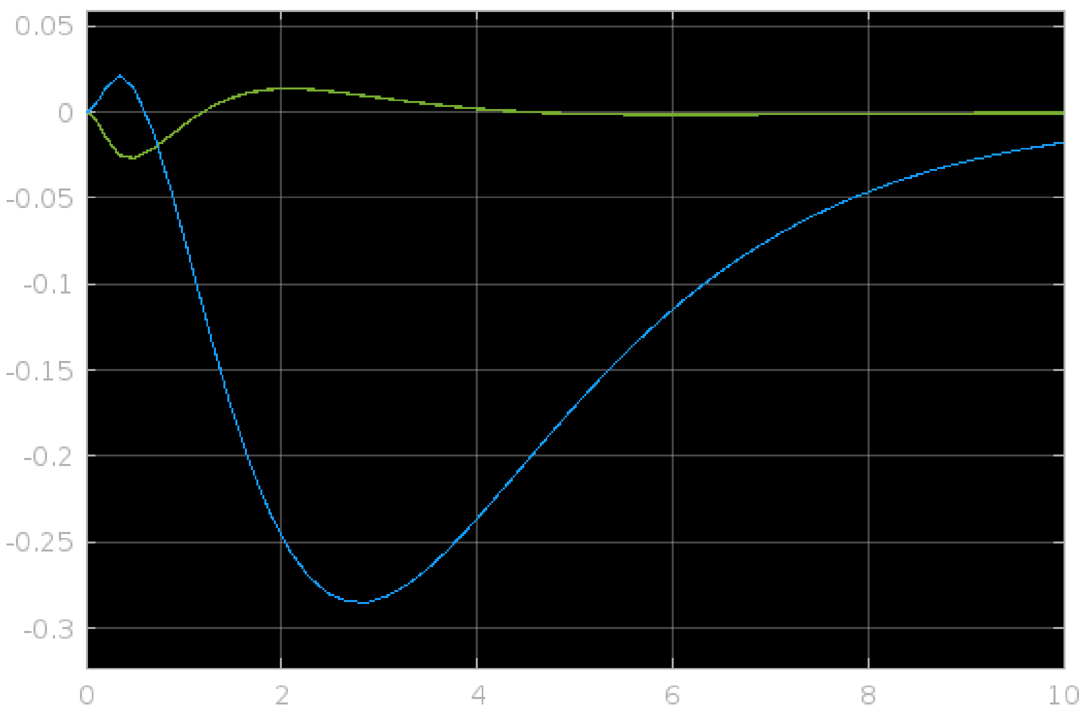

Figura 3: Salida del sistema ante el estado inicial x_0