Curvas geodésicas sobre la superficie terrestre.

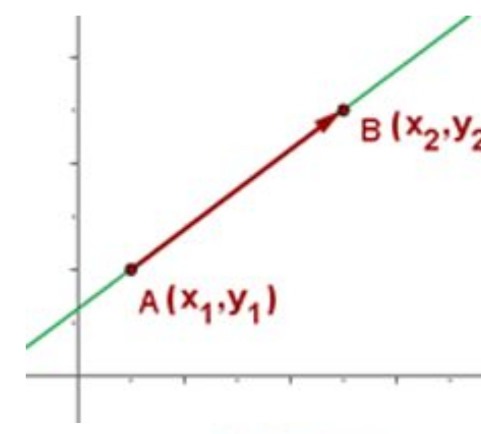
Semillero en Física - Matemática. Departamento de Matemáticas.

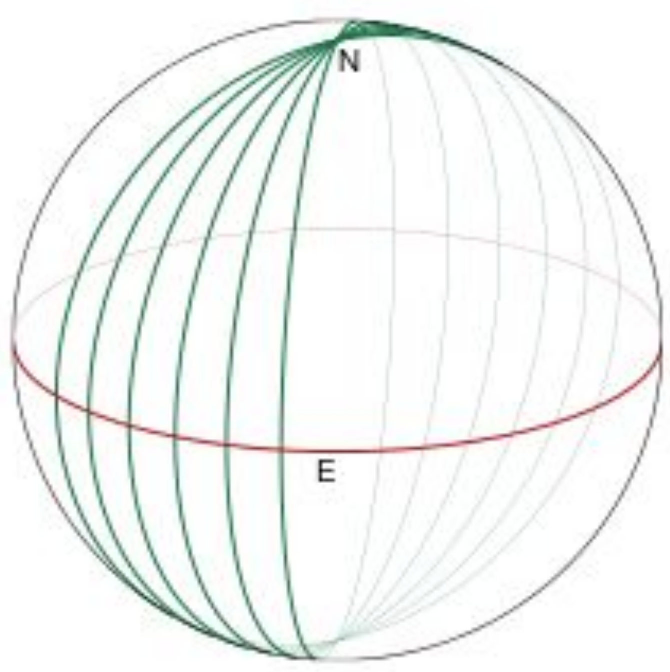
Laura Ramos

lramosm@ucentral.edu.co

1) Introducción:

La geodésica se define como la línea que minimiza la distancia entre dos puntos en una superficie dada. El cálculo de ecuaciones geodésica en la superficie terrestre se dificulta, dado que la tierra no es completamente esférica. Por esto, nos pusimos en la tarea de calcular superficies parametrizadas que modelen la superficie terrestre para luego resolver la ecuación geodésica sobre dicha superficie.





2) Objetivos:

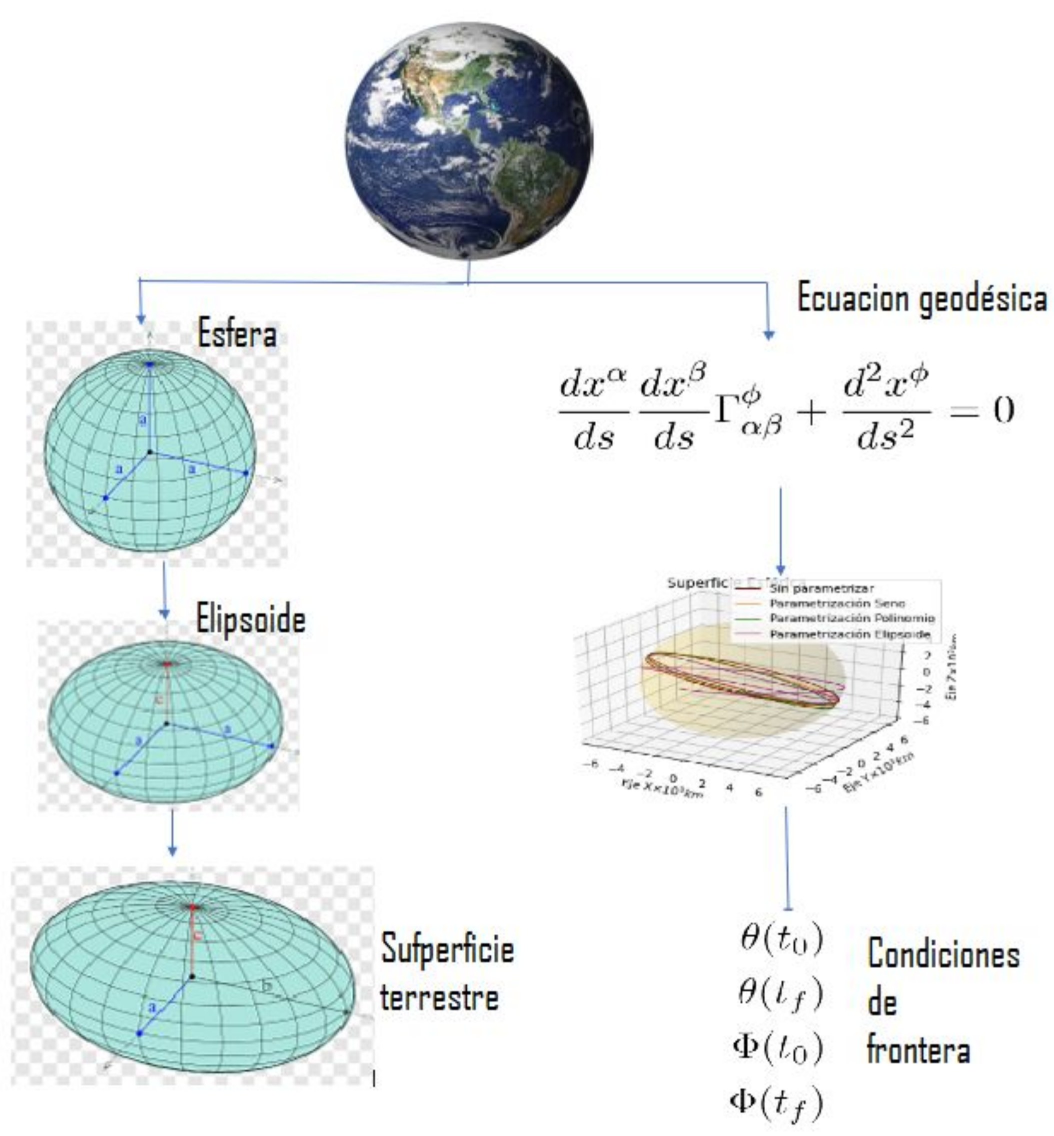
Objetivo General:

- Encontrar las trayectorias que minimizan la distancia entre dos puntos sobre la superficie terrestre, aplicando la geometría en espacios curvos.

Objetivos Específicos:

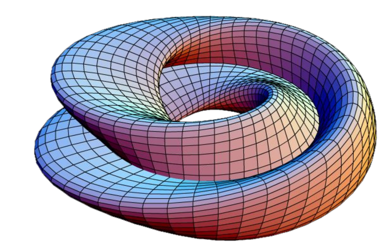
- Obtener una superficie parametrizada que modele la Tierra teniendo en cuenta la diferencia de las longitudes de los ejes polar y ecuatorial.
- Obtener la ecuación geodésica para la superficie parametrizada.
- Resolver numéricamente la ecuación geodésica para la superficie parametrizada.

3) Problema y metodología:



4) Marco Teórico:

Matemáticas

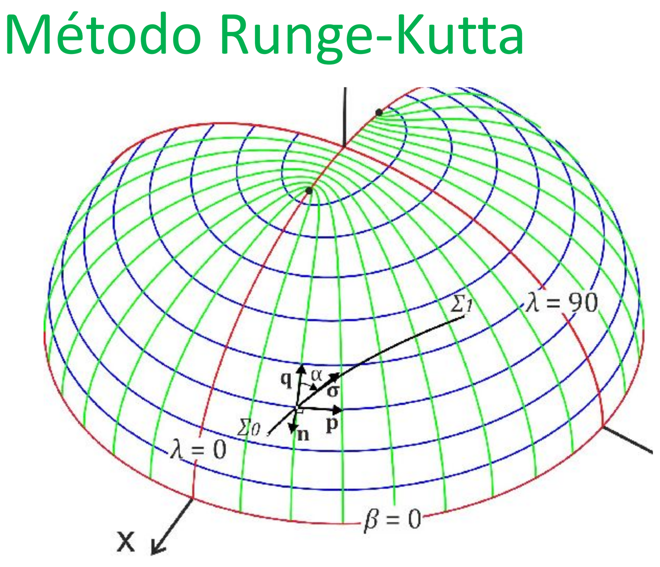


Geometría diferencial y espacios curvos

Se obtiene inicialmente el tensor métrico, para luego obtener las ecuaciones geodésicas asociadas y finalmente encontrar su solución

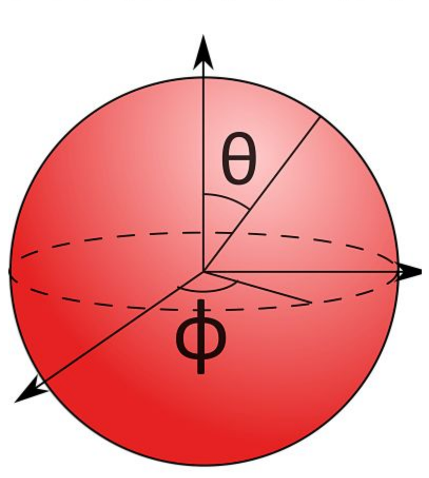
Métodos numéricos y Programación

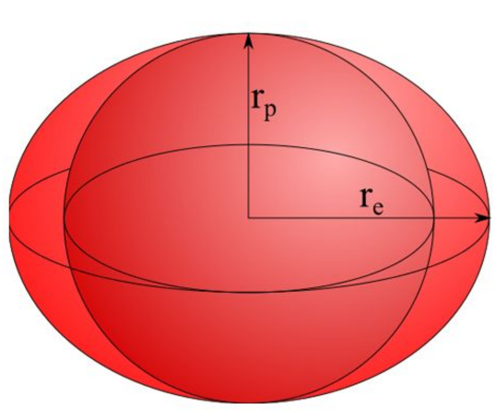
Método Runge-Kutta



Método de diferencias finitas

7) Avance de Resultados:





$$\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\Gamma^\phi_{\alpha\beta}+\frac{d^2x^\phi}{ds^2}=0$$

$$\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}=\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$$

$$\Gamma^\gamma{}_{\beta\beta}=-\frac{1}{2}g^{\gamma\gamma}\partial_\gamma g_{\beta\beta}$$

$$\Gamma^\beta{}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\beta\beta}\partial_\alpha g_{\beta\beta}$$

Elemento de línea

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta+r^2sen^2(\theta)d\phi$$ Esfera

$$ds^2=((a-b)^2cos^2(\theta)+(b+(a-b)sen(\theta))^2)+(a+(a-b)sen(\theta))^2sen^2(\theta)d\phi^2$$ Elipsoide

Esfera:

Tensor métrico

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}R^2 & 0\\ 0 & R^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\cot\theta$$

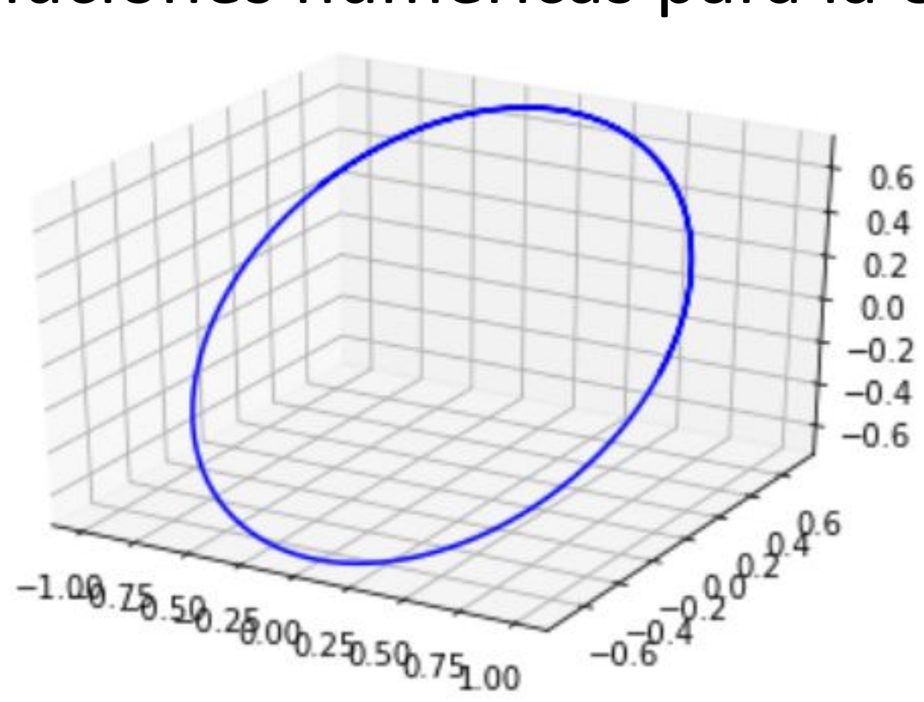
$$\Gamma^1{}_{22}=-\cos\theta\sin\theta$$

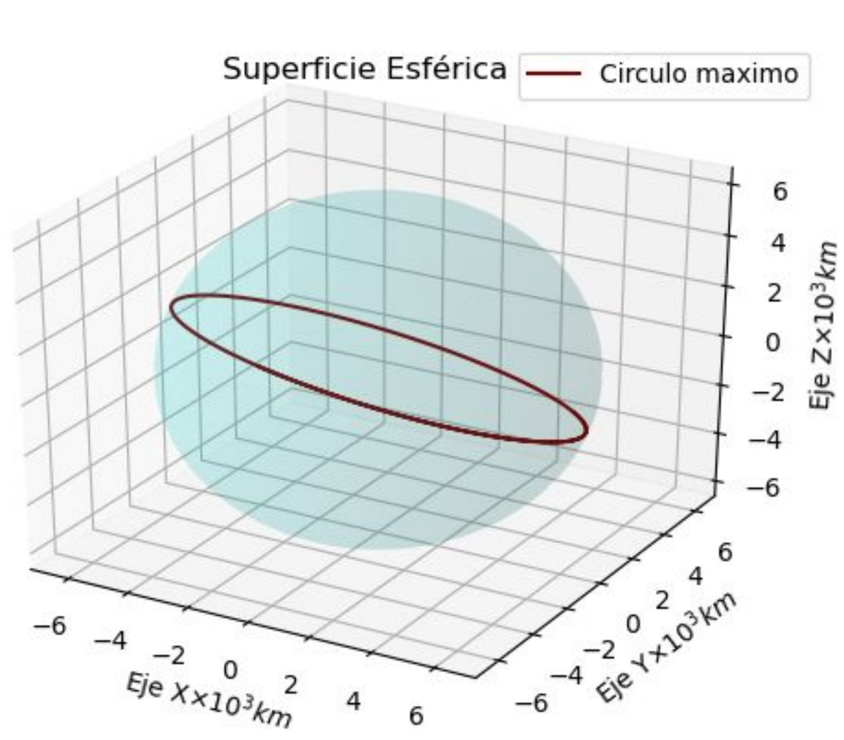
Ecuaciones geodésicas

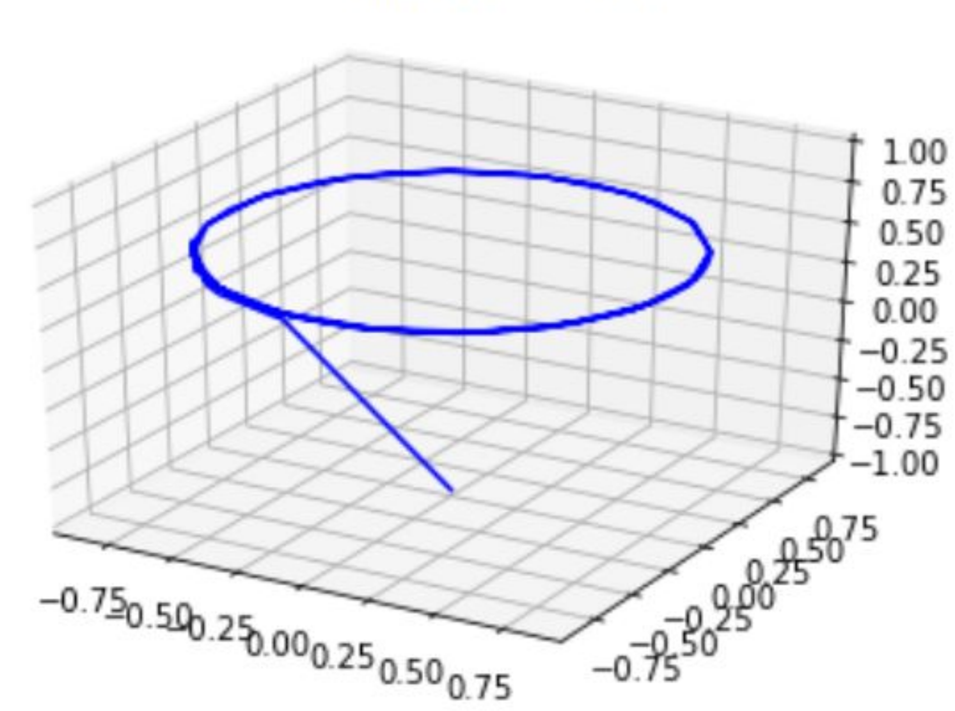
$$-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2+\frac{d^2\theta}{ds^2}=0$$

$$2\cot\theta\frac{d\phi}{ds}\frac{d\theta}{ds}+\frac{d^2\phi}{ds^2}=0$$

Soluciones numéricas para la esfera







Bibliografía:

- VALVERDE C . "La geometría esférica" Trabajo Fin de Grado, Universidad de Sevilla. Departamento de Geometría y Topología. 2016.
- Dray, Tevian. Differential forms and the geometry of general relativity. CRC Press, 2014.
- Abdel-All, Nassar H., and E. I. Abdel-Galil. "Numerical Treatment of Geodesic Differential." International Mathematical Forum. Vol. 8. No. 1. 2013.
- Randall, David A., et al. "Climate modeling with spherical geodesic grids." Computing in Science & Engineering 4.5 (2002): 32-41.
- Kasap, Emin, Mustafa Yapici, and F. Talay Akyildiz. "A numerical study for computation of geodesic curves." Applied Mathematics and Computation 171.2 (2005): 1206-1213.