



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias  
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de  
Telecomunicaciones

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Localización de Regiones de Interés Utilizando Aprendizaje Profundo

Presentado por:  
Laura Gómez Garrido

Tutor:  
Jesús Chamorro Martínez  
*Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial*

Curso académico 2019-2020



# Localización de Regiones de Interés Utilizando Aprendizaje Profundo

Laura Gómez Garrido

Laura Gómez Garrido *Localización de Regiones de Interés Utilizando Aprendizaje Profundo.*  
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2019-2020.

**Responsable de  
tutorización**

Jesús Chamorro Martínez  
*Ciencias de la Computación e Inteligencia  
Artificial*

Grado en Ingeniería  
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias  
Escuela Técnica Superior  
de Ingenierías Informática  
y de Telecomunicaciones

Universidad de Granada

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Laura Gómez Garrido

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2019-2020, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 17 de octubre de 2020

Fdo: Laura Gómez Garrido

*Dedicatoria (opcional)*

*Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex*



# Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
Agradecimientos	XIII
Summary	XV
Introducción	XVII

<b>I. Conceptos previos</b>	<b>1</b>
<b>1. Red Neuronal</b>	<b>3</b>
1.1. El problema de clasificar una imagen.	3
1.2. Clasificadores Lineales	4
1.3. El modelo de una neurona	6
1.4. La red completa	7
<b>2. Teoremas de Aproximación Universal</b>	<b>9</b>
2.1. Anchura indeterminada	9
2.1.1. Geoge Cybenko, 1989	9
2.1.2. Kurt Hornik, 1989 y 1991	10
2.2. Profundidad indeterminada	10
2.2.1. Zhou Lu, Hongmin Pu, Feicheng Wang, Zhiquang Hu y Liwei Wang, 2017	10
2.2.2. Patrick Kidger y Terry Lyons, 2019	11
<b>3. Redes Neuronales Convolucionadas (CNN)</b>	<b>13</b>
3.1. Capas Convolucionadas o Convolutionals	13
3.2. Capas de Agrupación o Pooling	14
3.3. Ejemplos	14
<b>4. Operador no local</b>	<b>15</b>
4.1. Conceptos previos	16
4.2. Consistencia de un operador no local	17
<b>5. Paradigmas de detección</b>	<b>19</b>
5.1. Dos pasos o basados en RCNN	20
5.2. Un paso o basados en YOLO	21
5.3. Non-local Neural Networks	22
5.3.1. Non-local block	22

*Índice general*

<b>A. Primer apéndice</b>	<b>23</b>
<b>Glosario</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>



## Índice de figuras

1.1. Cómo un ordenador ve una imagen . . . . .	3
1.2. Comparación entre una neurona biológica (izquierda) y el modelo matemático (derecha) . . . . .	7
1.3. Ejemplos de redes totalmente conectadas ( <i>fully-connected</i> ) . . . . .	8
3.1. Capa de Convolución. La zona grisácea corresponde al resultado de un filtro. . . . .	14
5.1. Detección, clasificación y segmentación. [WSH19] . . . . .	19
5.2. Comparativa de algunos modelos de la familia R-CNN. [WSH19] . . . . .	20



## Índice de tablas



# Agradecimientos

Agradecimientos del libro (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).



## Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex





## Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex



## Parte I.

### Conceptos previos

A continuación, explicaremos de forma concisa lo que es una *Red Neuronal* y una *Red Neuronal Convolucionada* para, seguidamente, hablar sobre los últimos avances en la localización de regiones de interés en imágenes.



# 1. Red Neuronal

## 1.1. El problema de clasificar una imagen.

Cuando observamos una imagen, podemos localizar varios elementos a partir de los cuáles esta se encuentra compuesta con tan sólo un vistazo. Sin embargo, para un ordenador no se trata de algo tan sencillo puesto que sólo es capaz de ver un gran conjunto de números que no tienen por qué tener relación alguna entre sí.

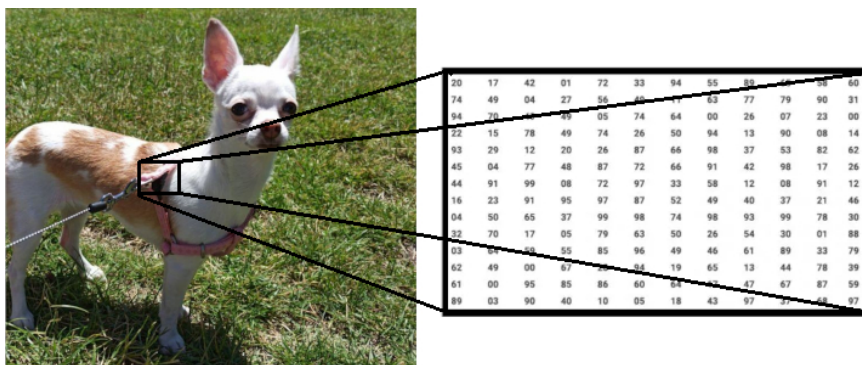


Figura 1.1.: Cómo un ordenador ve una imagen

Idealmente, en esta imagen desearíamos que fuera capaz de identificar que se trata de un perro, en concreto de un chiguagua, de pelaje blanco y manchas color café que se encuentra sobre un césped. Estos poquitos datos que para nosotros parecen tan triviales necesitan de horas y horas de computación para ser obtenidos a partir de una imagen cualquiera.

Dejamos todos estos detalles, a los cuales esperamos poder llegar en un futuro no muy lejano, y simplificamos el problema a tener un conjunto de etiquetas y buscar con cuál de todas ellas tiene mayor relación nuestra imagen.

Una primera idea, sería utilizar utilizar *k-Nearest Neighbor Classifier*, en adelante *k-NN*. Este clasificador consiste en que para cada etiqueta se correspondan *k* imágenes y consideraremos como etiqueta idónea para nuestra clasificación aquella cuya distancia, siendo Manhattan y Euclídea las más comunes, entre los píxeles con nuestra imagen sea menor. Nos encontramos con que el tiempo de entrenamiento de nuestro clasificador sería ínfimo en comparación con el tiempo de clasificación, si bien se pueden hacer diversas mejoras que cambien estos hechos.

De esta sencilla propuesta, surgen diversos problemas. Al darle mayor importancia al valor concreto de los píxeles, en lugar de a las formas que de las que está compuesta la figura, nos encontramos con que valores como los colores de fondo pueden influir más en la clasificación que los propios píxeles de la figura que queremos clasificar. En el ejemplo de la

## 1. Red Neuronal

imagen del chiguagua, si considerásemos las etiquetas verde y perro, tendríamos que por lo general como respuesta el color verde, pese a que estamos más interesados por la mascota en sí. Otro gran problema, sería la baja escalabilidad que nos proporciona esta solución, al incrementarse enormemente el costo computacional de clasificación conforme aumenta el número de etiquetas.

El siguiente paso, es buscar una forma de “memorizar” los datos de entrenamiento de forma que no tengamos que estar comparándolos con todos ellos cuando queramos clasificar una imagen. Lo que buscamos es poder valorar de alguna forma la imagen completa y a partir de esta “puntuación” conocer qué etiqueta le corresponde mejor a nuestra imagen. De esta forma, veríamos drásticamente reducido el tiempo de clasificación, sacrificando para ello el tiempo de entrenamiento, y podríamos ampliar en varias unidades la cantidad de datos de entrenamiento utilizados, aumentando así la precisión de nuestro clasificador.

### 1.2. Clasificadores Lineales

Antes de nada, vamos a comenzar contextualizando matemáticamente el entorno en el que nos encontramos. Una vez realizado esto podremos hablar correctamente de los clasificadores lineales y así poder extenderlos naturalmente a los conceptos de Red Neuronal y de Red Neuronal Convolucionada.

Sea  $D \in \mathbb{N}$  la dimensión de nuestras imágenes, por lo general el número de píxeles que estas poseen, y  $K \in \mathbb{N}$  la cantidad de etiquetas o categorías bajo las cuales pueden ser clasificadas. Siendo  $N \in \mathbb{N}$  el número de ejemplos que utilizaremos para entrenar nuestro clasificador, tendremos que para cada dato de entrenamiento  $x_i \in \mathbb{R}^D$   $i = 1, \dots, N$  le corresponde una etiqueta  $y_i \in 1, \dots, K$  tal que juntos conforman el par  $(x_i, y_i)$  de imagen y categoría a la que pertenece.

Para que no sea más fácil de entender este contexto, tomaremos como ejemplo el conjunto de datos CIFAR-10 que consiste en 60000 imágenes RGB de dimensión 32x32 y 10 categorías. De esta forma, tendríamos que  $D = 32 \cdot 32 \cdot 3 = 3072$ ,  $K = 10$  y  $N = 60000$ .

**Definición 1.1.** Definiremos *función de puntuación* o *score function* como una función  $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^K$  que asigna los píxeles de la imagen sin procesar una serie de puntuaciones para cada etiqueta.

Una función de puntuación nos revela la probabilidad que tiene cada imagen de pertenecer a cada una de la distintas etiquetas de las que disponemos. Podemos definir un *clasificador lineal* o *linear classifier* como aquel que utiliza una función de puntuación lineal, es decir, de la forma:

$$f(x) = W \cdot x + b \quad W \in M_{K,D}(\mathbb{R}) \quad b \in \mathbb{R}^K \quad \forall x \in \mathbb{R}^D$$

Dicho esto, existen diferentes tipos de clasificadores lineales y la principal diferencia entre ellos reside en la función de pérdida que utilicen a la hora de entrenar la red.

**Definición 1.2.** Una *función de pérdida* o *loss function* es aquella que durante el entrenamiento de un clasificador se encarga de penalizar las etiquetas incorrectas.

FIXME: ¿Hablar de SVM, SoftMax y Cross-Entropy?

Llegados a este punto, debemos de explicar cómo funcionan los clasificadores lineales, es decir, cómo estos son entrenados y para qué se emplean las funciones de puntuación y de pérdida. Dado poseemos un conjunto de ejemplos con su correspondiente etiqueta pero desconocemos el valor de los parámetros  $W$  y  $b$ , nuestro objetivo es utilizar dichos datos de entrenamiento para estimar estos valores.

Para ello, comenzamos haciendo una conjetura sobre un posible valor para nuestros parámetros, evaluamos nuestra función de puntuación con todos nuestros datos de entrenamiento y seguidamente utilizamos la función de pérdida para estimar cómo de bien funciona nuestra conjetura. Analizamos los resultados y hacemos una nueva conjetura que los mejore, repitiendo el proceso un número lo suficientemente grande de veces.

Seguidamente, debemos preguntarnos cómo realizamos la nueva conjetura de forma que nos aseguremos tener unos resultados mejores. Hacerlo de forma totalmente aleatoria, repitiéndolo hasta obtener una pérdida lo suficientemente pequeña, no parece una buena idea puesto que es difícil saber cuándo encontraremos una buena respuesta. Entre las distintas técnicas, nos encontramos con las basadas en la *búsqueda aleatoria local* y las que se basan en el *Gradiente Descendiente*, entre otras muchas. Como ejemplo, tomaremos el algoritmo del gradiente descendiente y minimizaremos la función de pérdida para llegar a aquellos pesos que menor error nos den.

FIXME: Enlazar pdfs que expliquen bien cómo funciona el gradiente descendiente y la búsqueda aleatoria local

```
while condicion_de_parada :
    weight_grad=evaluate_grad(loss_fun , x , y)
    weight = -step_size*weight_grad
```

El código mostrado más arriba se trata de una versión muy simplificada de cómo funcionaría de cómo podríamos implementar el algoritmo, teniendo en cuenta que nosotros mismos podremos modificar la condición de parada de acuerdo a nuestras necesidades y que el valor *step\_size* es algo que podremos fijar de la misma forma, sabiendo que este nos indica cuánto queremos avanzar en la dirección que nos indica el gradiente. FIXME: Enlazar pdfs que expliquen la importancia de estos valores y cómo fijarlos.

FIXME: Añadir implementación en Tensorflow de un clasificador lineal.

**Ejemplo 1.1.** Fijemos una etiqueta,  $y = 0$  por lo que  $K = 1$ . Tendríamos que nuestra función de puntuación sería  $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $W = (w_1, \dots, w_D) \in \mathbb{R}^D$  y  $b \in \mathbb{R}$  luego

$$f(x) = W \cdot x + b = \sum_{j=1}^D w_j x_j + b.$$

Así mismo, tomamos como función de pérdida

$$L(x, f) = -\ln \frac{1}{\sum_{j=1}^D e^{f_j}} = -\ln \frac{1}{\sum_{j=1}^D e^{w_j x_j + b}} = \ln \sum_{j=1}^D e^{w_j x_j + b}$$

## 1. Red Neuronal

que es un caso particular de *Entropía Cruzada* o *Cross-entropy*.

Este clasificador recibe el nombre de *Binary Softmax classifier* o *Binary Logistic Regression classifier*. De esta forma, si consideramos la función probabilística *sigmoide* tendríamos que el minimizar la función de pérdida estaríamos aumentando la probabilidad clasificar correctamente nuestros datos puesto que:

$$P(y = 0|x; W) = \sigma(f(x)) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}.$$

*Observación 1.1.* Estamos calculando la probabilidad de coincidir o no con una determinada etiqueta, recibe el nombre de binario porque también podríamos considerar que tenemos dos etiquetas y que si no perteneces a una forzosamente perteneces a la otra. Este modelo puede por tanto construirse también utilizando ambas etiquetas y con mejores resultados a la hora de clasificar puesto que durante el entrenamiento la función de pérdida es ligeramente modificada para tener en cuenta la otra etiqueta. En cualquier caso, ambas construcciones siguen la misma interpretación probabilística y, además, tenemos que  $P(y = 1|x; W) = 1 - P(y = 0|x; W)$ .

**Ejemplo 1.2.** Tomamos como función de pérdida  $L(x, f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq y_i} \max(0, f_j - f_{y_i} + \Delta)$  donde  $\Delta \in \mathbb{R}$  es un parámetro que se suele ajustar utilizando una técnica llamada *validación cruzada* o *cross validation*. Esta función suele recibir el nombre de *hinge loss* y el clasificador lineal es conocido como *Multiclass Support Vector Machine (SVM)*. Este clasificador "quiere" que la etiqueta correcta para cada imagen tenga una puntuación mayor que las incorrectas por un margen fijo  $\Delta$ .

### 1.3. El modelo de una neurona

Cuando comenzamos planteando nuestro problema buscábamos conseguir clasificar una imagen con una probabilidad de acertar similar o superior a cómo lo haríamos nosotros mismos. Teníamos el problema de que un ordenador no era capaz de pensar o razonar de la misma forma que un ser humano y buscábamos una forma de clasificar esta información a pesar de ello. Es aquí donde nacen los modelos de redes neuronales, en un intento por ser capaces de simular cómo funciona nuestro propio cerebro en nuestros clasificadores y que estos sean capaces de aprender cómo reconocer los distintos elementos de la misma forma que nosotros lo hemos ido haciendo a lo largo de nuestra vida.

Nuestro cerebro está formado por múltiples neuronas interconectadas entre sí que están constantemente transmitiéndose información y aprendiendo a través de todos los datos que reciben. Si nos fijamos en 1.2 podemos ver que una neurona real esta formada por dentritas que son quienes, a través del proceso de sinapsis, reciben la entrada de información, que es asimilada y transformada por su núcleo antes de ser transmitida a la siguientes neuronas a través de las divisiones de su axón en caso de que supere un cierto umbral y se active.

De esta forma, si consideramos que tenemos  $D$  dentritas y que por la  $i$ -dentrita recibimos la información  $x_i$  con un peso o fuerza de sinapsis  $w_i$ , tendríamos que nuestro núcleo trabaja con el vector de información  $(w_1x_1, \dots, w_Dx_D)$  que podemos condensar utilizando la norma  $\|\cdot\|_1$  como  $\sum_i w_ix_i$  y sumarle una determinada constante  $b$  propia de la neurona.



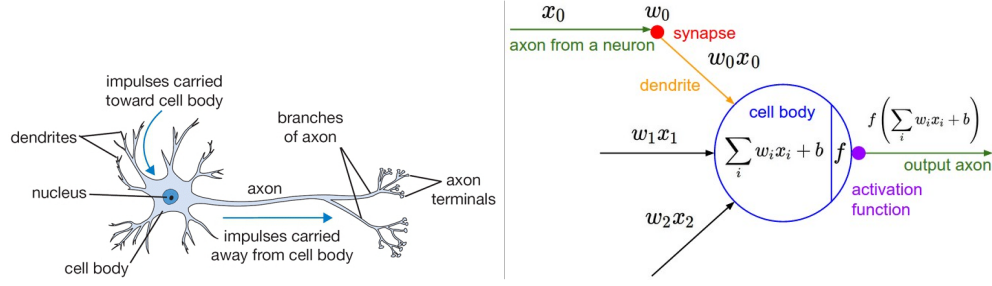


Figura 1.2.: Comparación entre una neurona biológica (izquierda) y el modelo matemático (derecha)

El umbral de activación y la señal enviada al resto de neuronas la representaremos con la *función de activación* que será una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

A continuación, mencionaremos los ejemplos más representativos utilizados como funciones de activación, enlazándolos con lo ya visto anteriormente:

- *Función sigmoide*  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida como  $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ . En este caso, nos encontramos con el ejemplo 1.1 transformado en una neurona cuya función de pérdida utilizada durante el entrenamiento suele ser la misma que en el ejemplo mencionado. Se suele utilizar en la última capa de nuestra red, cuando nuestras imágenes pueden pertenecer a varias clases o etiquetas al mismo tiempo.
- *Función Softmax* utilizada normalmente en la última capa donde hay tantas neuronas como etiquetas y en el problema de clasificación donde una imagen puede pertenecer únicamente a una sola etiqueta o caso. Se trata de una modificación de función la sigmoide que regulariza la salida para obtener la probabilidad de pertenecer a cada clase como sucesos independientes obteniendo así que la suma de todas las salidas de esta capa sería 1. Aquí, la  $i$ -neurona tendría función de activación  $\sigma_i(x) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^K e^{x_j}}$  y utilizaría  $L(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N -\ln \frac{e^{f_{y_i}}}{\sum_{j=1}^D e^{f_j}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (-f_{y_i} + \ln \sum_{j=1}^D e^{f_j})$  como función de pérdida para el entrenamiento.
- *Función ReLU*, cuyo nombre completo sería *Rectified Lineal Unit*. Se suele utilizar en las capas intermedias de nuestra red y utiliza como función de activación  $f(x) = \max(0, x)$  que nos recuerda al ejemplo 1.2.
- *Función Tanh* se trata de de una centralización de la función sigmoide.  $\tanh(x) = 2\sigma(x) - 1$ .

## 1.4. La red completa

Una red neuronal es un conjunto de neuronas divididas en varias *capas* de forma que las neuronas de una capa pueden estar unidas o no con las neuronas de la capa anterior y de la siguiente formando así un grafo acíclico.

## 1. Red Neuronal

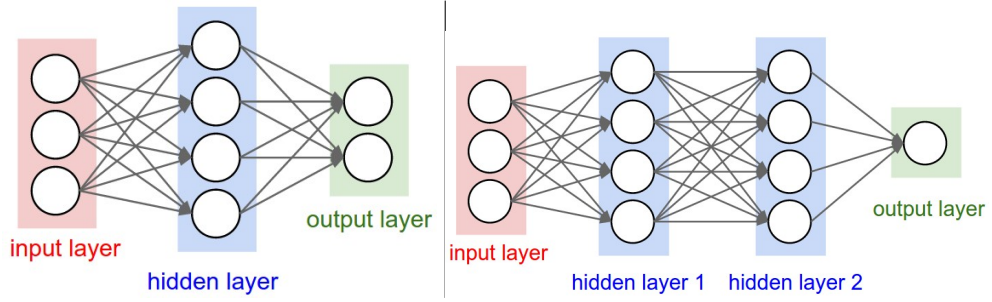


Figura 1.3.: Ejemplos de redes totalmente conectadas (*fully-connected*)

La primera capa recibe el nombre de *capa de entrada* que posee  $D$  neuronas, es decir, tantas como la dimensión de nuestros datos. Por otro lado tenemos la *capa de salida* con  $K$  neuronas, tantas como etiquetas o clases de clasificación tengamos. El resto de neuronas se distribuyen dentro las *capas ocultas* cuya distribución y conexiones dependen del modelo en concreto que queramos desarrollar, quedando a nuestro criterio.

De esta forma, podemos afirmar que una red neuronal es la aplicación sucesiva de funciones de la forma

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma(w_i^T x + b_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $w_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_i, b_i \in \mathbb{R}$  serán fijas una vez entrenada la red y  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función de activación elegida en cada capa.

A continuación toca hablar del entrenamiento de la red completa, a los conceptos que ya conocíamos del clasificador lineal 1.2 se añade el concepto de *Backpropagation* o *Propagación hacia atrás de errores* que hace uso de la *regla de la cadena* para, a través de los cálculos locales realizados por cada neurona, obtener la función completa de clasificación. Así, buscamos que las neuronas se auto organicen para ser capaces de localizar patrones similares de forma que sepan cómo reaccionar ante la presencia de ruido o datos incompletos. Esto hace a través de la comunicación de sus valores locales y gradientes entre las distintas neuronas, comenzando por la capa de salida y avanzando hacia atrás. **FIXME:** Mencionar importancia del Subgradiente para el cálculo del gradiente, al no estar definido para cualquier función.

**FIXME:** Definir epoch y la validación cruzada

## 2. Teoremas de Aproximación Universal

Hasta ahora se ha definido una estructura con una serie de parámetros con la esperanza de poder llegar a resolver el problema planteado. Sin embargo, en ningún momento hemos utilizado ningún resultado que nos asegure que dicha estructura puede llegar a resolver el problema que deseamos. A continuación, mostraremos diversos resultados, con diversos niveles de generalidad, que muestran cómo esta estructura puede llegar a cumplir con lo deseado. Estos resultados se dividen en dos grandes categorías *anchura indeterminada* y *profundidad indeterminada*.

### 2.1. Anchura indeterminada

#### 2.1.1. George Cybenko, 1989

Cybenko, en [Cyb89], demostró la capacidad de aproximación en el caso de anchura indeterminada y profundidad fijada para funciones de activación sigmoideas Def. 2.1. A partir de esta versión clásica, se logró considerar otras funciones de activación, e incluso, demostrar que era gracias a la arquitectura en sí misma, y no a la función de activación, que las redes neuronales eran aproximadores universales. Aquí mencionaremos la versión del teorema para funciones continuas, pero debemos mencionar que en el mismo artículo se mencionan también versiones para otros espacios de funciones.

**Definición 2.1.** Una función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es *sigmoideal* si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma(t) = 0$$

En adelante, utilizaremos  $I_n$  para referirnos al cubo unidad  $n$ -dimensional,  $[0, 1]^n$  y para el espacio de las medidas finitas con signo regulares de Borel sobre  $I_n$  utilizaremos  $M(I_n)$ . Además,  $C(I_n)$  denotará el espacio de funciones continuas en  $I_n$ .

**Definición 2.2.** Una función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es *discriminatoria* si para una medida  $\mu \in M(I_n)$  con

$$\int_{I_n} \sigma(w^T x + b) d\mu(x) = 0$$

para todo  $w \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$  implique que  $\mu = 0$ .

**Lema 2.1.** *Cualquier función sigmoideal medible y acotada es discriminatoria. En particular, las funciones sigmoideas continuas son discriminatorias.*

**Teorema 2.1.** *Sea  $\sigma$  una función discriminatoria continua. Entonces, las sumas finitas de la forma*

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma(w_i^T x + b)$$

*son densas en  $C(I_n)$ . En otras palabras, dados  $f \in C(I_n)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe una suma,  $G(x)$ , de la forma anterior, para la cual*

$$|G(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_n.$$

## 2. Teoremas de Aproximación Universal

*Demostración.* □

**Teorema 2.2.** Sea  $\sigma$  una función sigmoideal continua. Entonces, las sumas finitas de la forma

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma(w_i^T x + b)$$

son densas en  $C(I_n)$ . En otras palabras, dados  $f \in C(I_n)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe una suma,  $G(x)$ , de la forma anterior, para la cual

$$|G(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_n.$$

*Demostración.* Para esta demostración, se combina **Lema 2.1** y **Teorema 2.1**, notando que las funciones sigmoideales continuas satisfacen las condiciones de este lema. □

### 2.1.2. Kurt Hornik, 1989 y 1991

En 1988 [HSW89], Hornik demostró que una red neuronal con una capa oculta que utiliza funciones de aplastamiento arbitrarias son capaces de aproximar cualquier función de medida Borel de un espacio finito unidimensional con cualquier grado deseado de precisión.

Más tarde, en 1991 [KH91], extendió los teoremas de Cybenko mostrando que no necesariamente tenía que utilizar funciones de activación sigmoideales para los espacios de funciones considerados. A continuación enunciamos el teorema para el espacio de funciones continuas.

**Teorema 2.3.** Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, acotada y no constante. Entonces, las sumas finitas de la forma

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma(w_i^T x - b)$$

son densas en  $C(X)$  para todos los subconjuntos compactos  $X$  de  $\mathbb{R}^m$ .

## 2.2. Profundidad indeterminada

### 2.2.1. Zhou Lu, Hongmin Pu, Feicheng Wang, Zhiquang Hu y Liwei Wang, 2017

Estos autores demostraron [LPW<sup>+</sup>17] el caso de profundidad indeterminada para funciones Lebesgue-integrables y una función de activación ReLU. Este teorema fue presentado como una versión dual de las demostraciones para anchura indeterminada y abre el camino para nuevas demostraciones en el caso de anchura indeterminada.

**Teorema 2.4.** Para cualquier función Lebesgue-integrable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $A$  una red totalmente conectada con función de activación ReLU y una anchura  $d_m \leq n + 4$ , tal que la función  $F_A$  representada por esta red satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - F_A(x)| dx < \varepsilon.$$

### 2.2.2. Patrick Kidger y Terry Lyons, 2019

Una de las variantes más recientes [KL19], fue presentada para el caso de una función de activación no afín, que sea continuamente diferenciable y con derivada no nula en al menos un punto. Destaca porque con sus consideraciones abarca las funciones de activación utilizadas en la práctica, incluyendo las funciones de activación polinómicas. En el paper, se consideran otras extensiones o variaciones al teorema que enunciaremos.

**Definición 2.3.** Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $n, m, k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $NN_{n,m,k}^\sigma$  representa la clase de funciones  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  descritas por una red neuronal hacia adelante con  $n$  neuronas en la capa de entrada,  $m$  neuronas en la capa de salida, y un número arbitrario de capas ocultas, para las cuales  $k$  neuronas tienen como función de activación la función  $\sigma$ . Cada neurona de la capa de salida tiene la función de activación identidad.

**Teorema 2.5.** Sea  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de activación no afín que es continuamente diferenciable en al menos un punto, con derivada no nula en dicho punto. Sea  $K \subset \mathbb{R}$  un compacto. Entonces  $NN_{n,m,n+m+2}^\sigma$  es denso en  $C(K; \mathbb{R}^m)$  con respecto a la norma del supremo.



### 3. Redes Neuronales Convolucionadas (CNN)

Hasta ahora, todo lo que hemos hablado es válido para casi cualquier contexto puesto que no hemos hecho ninguna presunción en cuanto a la estructura de los datos o sobre las peculiaridades que estos presentan, para nosotros todos los datos eran un vector con  $D$  componentes a los que les correspondía una etiqueta y no le dábamos importancia a la estructura interna que estos pudieran llegar presentar. Esto cambia con el uso de las *Redes Neuronales Convolucionadas* al ser un tipo de red exclusivo para imágenes en las cuáles no sólo podremos utilizar todos lo válido en el caso general sino que también utilizaremos una serie de bondades conocidas por el simple hecho de estar tratando con imágenes.

Anteriormente, comentábamos el ejemplo del conjunto de datos CIFAR-10 donde teníamos que  $D = 3072$  y mostrábamos cómo obteníamos ese valor. Para ello, utilizábamos la dimensión de la imagen de *ancho*  $\times$  *alto* y la dimensión del *espacio de color* que estábamos utilizando. De esta forma, si en lugar de trasladar estos valores a  $\mathbb{R}^D$  como vectores nos quedamos en  $M_{\text{ancho}, \text{alto}, \text{dim color}}(\mathbb{R})$  estaremos trabajando en un espacio de matrices tridimensionales. De esta forma, siendo  $a$  el ancho,  $h$  la altura y  $c$  la dimensión del espacio de color, para cada matriz  $m \in M_{a,h,c}(\mathbb{R})$  tendremos que dado un píxel conocemos de forma inmediata sus píxeles más próximos sin necesidad de hacer ningún cálculo complejo. Nos aprovecharemos de esto para definir las *capas convolucionadas* o *convolutionals* y las *capas de agrupación* o *pooling*.

#### 3.1. Capas Convolucionadas o Convolutionals

Internamente, cada neurona de una capa convolucional posee un *kernel* o *filtro*  $W \in M_{r,s,c}(\mathbb{R})$  donde  $r$ ,  $s$  y  $c$  son parámetros prefijados y una variable  $b \in \mathbb{R}$  bias. Para cada entrada  $X \in M_{a,h,c}(\mathbb{R})$  tomamos una sección  $x^{RS} \subset X$  donde  $x^{RS} = (x_{ijk}^{RS})_{ijk}$   $i = R, \dots, R+r$ ,  $j = S, \dots, S+s$  y  $k = 1, \dots, c$  con  $R = 1, \dots, a-r$  y  $S = 1, \dots, h-s$ . Así, cada neurona realiza una *convolución matricial* y suma la variable  $b$  bias:

$$f(x^{RS}) = \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s w_{i,j,k} \cdot x_{i+R,j+S,k}^{RS} + b$$

Siendo esta su función de puntuación de las neuronas correspondientes a dicho kernel. A este filtro le corresponderán tantas neuronas como sean necesarias para cubrir todos los datos de entrada. Una capa de convolución, podrá tener tantos filtros como se quieran y cada uno de ellos tendrá tantas neuronas como sean necesarias para cubrir toda la imagen. Visualmente, se transforma un ortoedro en otro.

En esta [demo](#) del [Curso de Stanford sobre Convolutional Neural Networks for Visual Recognition](#) podemos ver el funcionamiento de dos filtros  $3 \times 3$  ( $r = 3, s = 3$ ) a una entrada  $x \in M_{7,7,3}$ . Nótese, que el filtro no es aplicado en todas las submatrices sino que avanza dos

### 3. Redes Neuronales Convolucionadas (CNN)



Figura 3.1.: Capa de Convolución. La zona grisácea corresponde al resultado de un filtro.

posiciones tanto vertical como horizontalmente, es decir, la capa posee un *paso* o *stride* de 2. En la formulación anterior, se ha supuesto que el paso es de tamaño 1. Además, en la demo se ha completado la matriz  $x$  con 0 hasta tener una dimensión de  $9 \times 9 \times 3$  para asegurarnos de que recorreremos todas las posiciones de  $x$  con el filtro. Tanto el paso como si la matriz es completada con algún otro número o no son parámetros que se prefijan al crear la capa, comunes a todos los filtros y controlan la dimensión de salida de la capa.

## 3.2. Capas de Agrupación o Pooling

FIXME: Same convoluciones

## 3.3. Ejemplos

FIXME: ¿Apéndices o distribuido en el pdf? Cosas a mencionar:

- Cómo se ven tras cada neurona y/o capa (cómo pooling y convolution modifican la imagen)
- Cómo los filtros modifican una imagen visualmente



## 4. Operador no local

En la sección anterior se ha visto que una operación de convolución posee un kernel que limita la cantidad de posiciones que son observadas de forma que la cantidad de parámetros de la capa de convolución es dependiente al tamaño de este núcleo. Esto tiene como desventaja que, para cada posición de nuestra entrada de datos, las posiciones que influyen al resultado de la convolución están restringidas a un subconjunto de tamaño fijo de los datos de entrada por lo que se suele decir que es una operación *local*. Si quisiéramos utilizar todos los datos de entrada para cada posición de la imagen, tendríamos un aumento considerable de parámetros a utilizar, con los consecuentes problemas de memoria y entrenamiento.

El objetivo de esta sección es definir un tipo de operación que sea capaz de extraer características de nuestros datos de entrada utilizando toda su dimensión y sin tener un aumento drástico del número de parámetros a entrenar, será a lo que llamaremos un operador no local. La necesidad de este tipo de operación nace del hecho de que, por lo general, las imágenes a estudiar no suelen ser un conjunto de collage sin relación entre sí, sino que el entorno de nuestra imagen puede llegar a ser de utilidad a la hora de distinguir qué objetos estamos clasificando.

Para simplificar la definición, nos restringiremos al contexto de espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales.

**Definición 4.1.** Sea  $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$  una señal de entrada,  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un producto escalar,  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función real evaluada y  $C_x \in \mathbb{R}$  una constante. Se define una operación no local genérica o *generic non-local operation*  $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$  con  $f(x) = (f(x_1), \dots, f(x_D))$  aquella donde:

$$f(x_i) = \frac{1}{C_x} \sum_{j=1}^D u(x_i, x_j) v(x_j) \quad \forall i = 1, \dots, D$$

En este contexto,  $v(x_j)$  será una representación de la señal de  $x$  entrada en la posición  $j$ ,  $u$  representará una relación, por ejemplo la afinidad, entre las posiciones  $i$  y  $j$ .

Proseguiremos enunciando varios ejemplos de funciones que pertenezcan a dicha definición para mostrar la diversidad que podemos elegir a la hora de implementar un modelo que siga esta estructura. Por simplicidad, consideraremos que  $v(x_j) = W_v x_j$  donde  $W_v$  es una matriz de pesos que tiene que ser aprendida, siendo esta fácilmente implementable como una convolución de núcleo de tamaño 1.

1. *Gaussiana*  $u(x_i, x_j) = e^{x_i^T x_j}$  y  $C(x) = \sum_{j=1}^D u(x_i, x_j)$ .
2. *Embedded Gaussian*  $u(x_i, x_j) = e^{\phi(x_i)^T \theta(x_j)}$  donde  $\phi(x_i) = W_\phi x_i$  y  $\theta(x_j) = W_\theta x_j$  son dos inmersiones y  $C(x) = \sum_{j=1}^D u(x_i, x_j)$ . Nótese que el módulo *self-attention* es un caso particular de este ejemplo.

#### 4. Operador no local

3. *Dot-product similarity*  $u(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \theta(x_j)$  donde  $\phi(x_i) = W_\phi x_i$  y  $\theta(x_j) = W_\theta x_j$  son dos inmersiones y  $C(x) = D$ .
4. *Non-local means* [BCM05]

Para poder afirmar que un operador no local cumple con lo que buscamos, primero se debe de demostrar que las operaciones de este tipo nos dan el resultado deseado. Para ello, primero deberemos de enunciar una serie de conceptos.

### 4.1. Conceptos previos

En adelante, el conjunto  $\Omega$  será un espacio muestral y  $\mathcal{A}$  será una  $\sigma$ -álgebra sobre dicho  $\Omega$ . Además,  $P$  será una probabilidad aplicada a los elementos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Esto será representado como  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  siendo un espacio probabilístico y será donde trabajemos.

**Definición 4.2** (Proceso estocástico). Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  en  $T$ , donde  $T$  es un conjunto ordenado arbitrario y cada variable aleatoria está definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

A partir de ahora, siempre que nos refiramos a un proceso nos estaremos refiriendo a un proceso estocástico bajo la definición anterior.

**Definición 4.3** (Proceso con incrementos independientes). Un proceso estocástico tiene *incrementos independientes* si  $\forall n > 1, \forall t_1 < \dots < t_n \in T$

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ son variables aleatorias independientes.}$$

**Definición 4.4** (Proceso con incrementos estacionarios). Un proceso estocástico tiene *incrementos estacionarios* si  $\forall s < t \in T, \forall h \in T$

$$(X_t - X_s) \sim (X_{t+h} - X_{s+h}).$$

$X \sim Y$  indica que  $X$  sigue la misma distribución que  $Y$ .

**Definición 4.5** (Proceso estacionario). Un proceso estocástico es *estrictamente estacionario* si  $\forall n, \forall t_1 < \dots < t_n \in T, \forall h \in T$

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

A continuación, definiremos el concepto proceso mezclado. En la literatura, los cuatro tipos de mezcla normalmente son referidos como  $\psi$ -mezclado,  $\Phi$ -mezclado (o uniformemente mezclado),  $\rho$ -mezclado (o mezcla basada en la correlación maximal) y  $\alpha$ -mezclado (o fuertemente mezclado). Cambiaremos la notación a  $\Phi_i$ -mezcla  $i = 1, \dots, 4$  respectivamente, de forma que una  $\Phi_i$ -mezcla implique una  $\Phi_{i+1}$ -mezcla con  $i = 1, \dots, 3$ .

Por notación, diremos también que  $\mathcal{A}_m^n$  será la  $\sigma$ -álgebra inducida por las variables aleatorias  $Z_j$  con  $m \leq j \leq n$  en el espacio muestral  $\Omega$ . Entonces:

**Definición 4.6** (Proceso mezclado). La secuencia  $\{Z_j\}_{j \geq 1}$  es conocida  $\Phi_i$ -mezclada con  $i = 1, \dots, 4$  si, para cada  $A \in \mathcal{A}_1^k$  y para cada  $B \in \mathcal{A}_{k+n}^\infty$ , las siguientes desigualdades son satisfechas:

- Para  $\Phi_1$ -mezclada:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \Phi_1(n)P(A)P(B) \text{ con } \Phi_1(n) \downarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

- Para  $\Phi_2$ -mezclada:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \Phi_2(n)P(A) \text{ con } \Phi_2(n) \downarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

- Para  $\Phi_3$ -mezclada:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \Phi_3(n)[P(A)P(B)]^{\frac{1}{2}} \text{ con } \Phi_3(n) \downarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

- Para  $\Phi_4$ -mezclada:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \Phi_4(n) \text{ con } \Phi_4(n) \downarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

## 4.2. Consistencia de un operador no local

La idea es que, bajo supuestos estacionarios, para cada píxel  $i$  una operación no local converge a la expectativa condicional de un píxel  $i$  observado en un vecindario del píxel. En este caso las condiciones de estacionariedad equivalen a decir que, a medida que crece el tamaño de la imagen, podemos encontrar muchas regiones similares para todos los detalles de la imagen. Es decir, conforme aumenta el tamaño de la imagen es más probable que, si encontramos un objeto perteneciente a determinada categoría, encontremos más objetos pertenecientes a dicha categoría.

Sea  $V$  un campo aleatorio (random field) y los datos de entrada  $v$  una realización de  $V$ . Sea  $Z$  una secuencia de variables aleatorias con  $Z_i = \{X_i, Y_i\}$  con  $Y_i = V(i)$  es real valuada y  $X_i = V(I \setminus \{i\}) \mathbb{R}^p$  valuada donde  $I$  representa el conjunto de posiciones. Una operación no local genérica será un estimador de la esperanza condicionada  $E[Y_i | X_i = v(I \setminus \{i\})]$ .

**Teorema 4.1.** Sea  $Z = \{V(N_i \setminus \{i\}), V(i)\}_{i \geq 1}$  un proceso estocástico estrictamente estacionario y mezclado. Sea  $f^n$  una operación no local genérica aplicada a la secuencia  $Z_n = \{V(N_i \setminus \{i\}), V(i)\}_{i \geq 1}^n$ . Entonces,

$$|f^n(j) - [Y_j | X_j = v(I \setminus \{j\})]| \rightarrow 0 \text{ a.s } \forall j \in 1, \dots, n$$

.

En un contexto más general, la demostración se puede encontrar en [BCM05] bajo la suposición de cualquiera de cuatro tipos de procesos mezclados enunciados en Def. 4.6



## 5. Paradigmas de detección

Hasta este momento, hemos tratado un problema de clasificación global. Se suponía que la imagen tenía un único elemento que se quisiera clasificar e idealmente este estaría centrado con respecto al centro de la imagen. En adelante, queremos clasificar múltiples elementos pertenecientes a múltiples etiquetas distintas y queremos saber cuántos elementos hay, sus posiciones relativas a la imagen y la categoría a la que pertenecen cada una de ellas.

La gran mayoría de los paradigmas de detección utilizan una red neuronal pre-entrenada como clasificador dentro de sus estructuras. Suele recibir modificaciones en sus últimas capas ya sea sustituyéndolas, pasando por un proceso de *fine-tuning*, o eliminándolas antes de ser añadidas como un elemento invariante durante el entrenamiento del modelo. Estas redes suelen recibir el nombre de *backbone* y algunos modelos permiten la libre elección de estos clasificadores dependiendo del problema concreto que se desee abordar.

Para indicar las posiciones de los elementos, por lo general se utilizarán *bounding-box* o *bbox* que serán rectángulos que contendrán cada uno de los elementos o *pixel level* que colorea cada uno de los píxeles pertenecientes a determinada categoría, ambos con la mayor precisión posible.

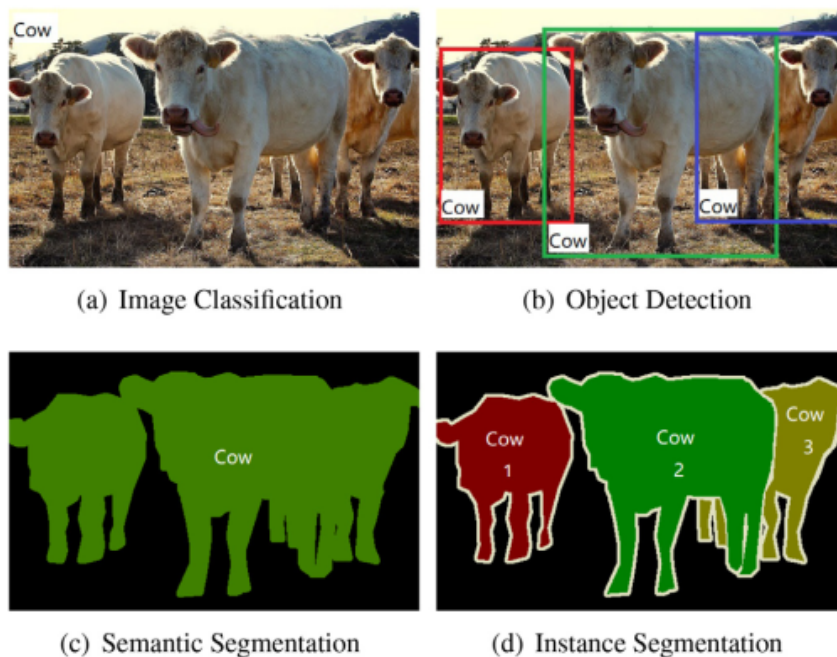


Figura 5.1.: Detección, clasificación y segmentación. [WSH19]

## 5.1. Dos pasos o basados en RCNN

El problema de detección se divide en dos etapas: una generación de propuestas y la realización de predicciones sobre estas propuestas. Como paradigmas de detección, destacan la familia *R-CNN* y los que se encuentran basados en esta.

Esta familia surge en noviembre de 2013 con *R-CNN* [GDDM13] que utiliza Selective Search [?] para generar 2000 bbox de propuestas que son redimensionadas para coincidir con las dimensiones de entrada una CNN pre-entrenada. Esta CNN debe volver a entrenarse, extrayéndole la última capa y añadiéndole una *máquina de vectores de soporte* (SVM) con las categorías originales más una nueva clase llamada "fondo" que engloba a todas las propuestas que no pertenecen a ninguna categoría. Finalmente, las propuestas clasificadas son combinadas a través de un modelo de regresión lineal para así obtener una bbox con mejor ajuste y precisión.

La principal diferencia que introduce *Fast R-CNN* [Gir15] reside en que, en lugar de pasar por la CNN todas las propuestas de Selective Search, nuestra CNN recibe como entrada la imagen completa reduciendo el coste computacional al analizar una única vez las zonas de solapamiento entre propuestas. Además, las propuestas dejan de ser escaladas para coincidir con una determinada dimensión y se introduce en una capa especial llamada *Region of Interest Pooling Layer* (RoI pooling) que extrae un vector de longitud fija que será la entrada de las siguientes ramas. A continuación, el modelo se divide en dos ramas: un clasificador SoftMax y un modelo de regresión que calcula las bbox.

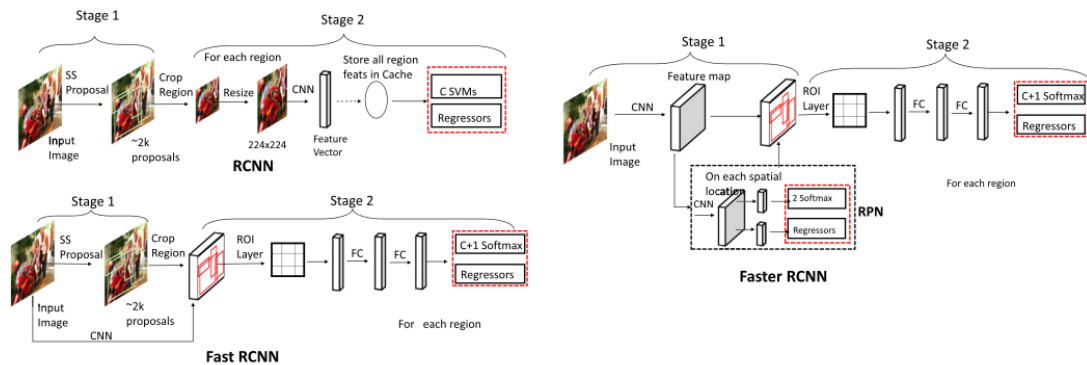


Figura 5.2.: Comparativa de algunos modelos de la familia R-CNN. [WSH19]

En *Faster R-CNN* [RHGS15] se sustituye Selective Search por una red neuronal de generación de propuestas, conocida como *anchor boxes*, que no sólo reduce el tiempo de cómputo de la generación de propuestas sino que aporta un menor número de propuestas con mayor calidad y precisión. Un buen apunte de la red de generación de propuestas, es que esta no es pre-entrenada antes de ser añadido al modelo sino que aprende de forma conjunta con toda la red.

La última mejora de esta familia viene representada por *Mask R-CNN* [HGDG17] que sus-

tituye la capa RoI pooling introducida en el modelo Fast R-CNN por una RoI alignment que retiene más información de las características obtenidas por la CNN compartiendo la misma estructura de entrada y salida de datos con la RoI pooling. Mask R-CNN aprovecha esto para realizar predicciones del tipo pixel level con mayor precisión a través de una interpolación bilineal que se ejecuta paralelamente con las capas totalmente conectadas de los modelos anteriores. Así, en el mismo punto que sus predecesores eran divididos en tres ramas independientes, Mask R-CNN se divide en tres ramas: un clasificador SoftMax, un regresor de bbox y un otro regresor de pixel level.

Mencionar Mesh R-CNN <https://arxiv.org/abs/1906.02739>

Mencionar R-FCN <https://arxiv.org/pdf/1605.06409.pdf>

Libra R-CNN <https://arxiv.org/pdf/1904.02701.pdf>

## 5.2. Un paso o basados en YOLO

Estos modelos destacan por no hacer una separación directa de la generación de propuestas y la predicción de estas. Destaca YOLO y sus sucesivas mejoras, así como los múltiples algoritmos basados en ellas, pero existen muchos más modelos que pueden ser identificados con esta estructura.

En junio de 2015 aparece *You Only Look Once (YOLO)* [RDGF15], un nuevo algoritmo que pretende realizar al mismo tiempo la generación de propuestas y la clasificación de estas, buscando así una mayor eficiencia computacional. Para ello, tras redimensionar la imagen en 448x448 píxeles, el algoritmo divide la imagen en una cuadrícula cuyas celdas se encargan de realizar un número fijo de propuestas indicando en cada una de ellas la probabilidad que tiene de ser un objeto, la bbox en la que se encuentra y la probabilidad de pertenecer a cada una de las clases de objetos de las que disponemos. Finalmente, descarta aquellas propuestas con baja probabilidad de ser un objeto y utiliza un algoritmo de *non-max supression* [BSCD17] que unifica y combina las bbox con las máximas áreas compartidas.

Buscando una mejora de la predicción pero sin perder el enfoque de la velocidad, surge YOLO9000 o YOLOv2 [RF16] que sigue la misma estructura que su predecesor pero sustituyendo algunos fragmentos por otros con mayor rendimiento. YOLOv2 redimensiona la imagen original a 416x416 píxeles y sustituye las capas totalmente conectadas que utilizaba para la generación de propuestas por un modelo de *anchor boxes* [RHGS15] junto con otros cambios menores.

La siguiente versión YOLOv3 [RF18] decide no darle tanta importancia a la velocidad y centrarse en solucionar los problemas de detección presentados por sus antecesores. Mientras que YOLOv2 utiliza una arquitectura con 30 capas, YOLOv3 utiliza 106 capas totalmente convolucionadas e introduce la utilización de *residual blocks*, *skip connections* y *upsampling*. Esta nueva arquitectura, realiza la detección de objetos en tres escalas distintas en diferentes profundidades de la red Darknet-53 y utilizando una estructura piramidal [LDG<sup>+</sup>16] para comunicar la detección entre las diferentes escalas.

Mencionar YOLOv4 <https://arxiv.org/pdf/2004.10934.pdf>

Feature Pyramid Networks <https://arxiv.org/pdf/1612.03144.pdf>

### 5.3. Non-local Neural Networks

En [WGGH17] se introduce el concepto de *Non-local Neural Networks* que plantea un modelo de *Feature Pyramid Network* para extraer las características de un clasificador a distintos niveles de profundidad y utilizarlas para segmentar semánticamente la imagen. ??

FIXME: Insertar imagen del modelo genérico

Podemos distinguir tres tipos de componentes principales: clasificador, bloque no local o *non-local block* y bloque de fusión o *fuse up block*. Lo que más destaca de estas estructuras son los non-local block utilizados para extraer las características puesto que, en lugar obtenerlas utilizando de forma recurrente convoluciones en pequeñas áreas, comprueban las relaciones entre los datos con una única operación que, además, comprueba la afinidad con los datos más distantes.

A continuación, nos centraremos en los non-local block, definiendo las clase de funciones que los forman y demostrando algunas de sus propiedades que garantizarán su correcto funcionamiento. Seguidamente, mostraremos algunos ejemplos y cómo podemos configurar nuestra propia red según nuestras necesidades.

#### 5.3.1. Non-local block

Finalmente, el bloque non-local es de la forma:

$$z_i = W_z f(x_i) + x_i$$

, donde multiplicamos la función no local por un peso que será entrenado por la red y le añadimos una conexión residual para evitar perder las características del modelo pre-entrenado en caso de que  $W_z$  comience siendo inicializado como 0.

FIXME: Añadir más ventajas de la conexión residual.



## A. Primer apéndice

Los apéndices son opcionales.

Archivo: `apendices/apendice01.tex`



## Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$  Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$  Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$  Conjunto de números enteros.



## Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [BCM05] Antoni Buades, Bartomeu Coll, and Jean-Michel Morel. A non-local algorithm for image denoising. In *Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05) - Volume 2 - Volume 02*, CVPR '05, pages 60–65, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society. [Citado en págs. 16 and 17]
- [BM12] Joan Bruna and Stéphane Mallat. Invariant Scattering Convolution Networks. *arXiv e-prints*, page arXiv:1203.1513, March 2012. [No citado]
- [BSCD17] Navaneeth Bodla, Bharat Singh, Rama Chellappa, and Larry S. Davis. Soft-NMS – Improving Object Detection With One Line of Code. *arXiv e-prints*, page arXiv:1704.04503, April 2017. [Citado en pág. 21]
- [Cyb89] George Cybenko. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of control, signals and systems*, 2(4):303–314, 1989. [Citado en pág. 9]
- [GDDM13] Ross Girshick, Jeff Donahue, Trevor Darrell, and Jitendra Malik. Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation. *arXiv e-prints*, page arXiv:1311.2524, November 2013. [Citado en pág. 20]
- [Gir15] Ross Girshick. Fast R-CNN. *arXiv e-prints*, page arXiv:1504.08083, April 2015. [Citado en pág. 20]
- [HGDG17] Kaiming He, Georgia Gkioxari, Piotr Dollár, and Ross Girshick. Mask R-CNN. *arXiv e-prints*, page arXiv:1703.06870, March 2017. [Citado en pág. 20]
- [HPC<sup>+</sup>20] Ping Hu, Federico Perazzi, Fabian Caba Heilbron, Oliver Wang, Zhe Lin, Kate Saenko, and Stan Sclaroff. Real-time Semantic Segmentation with Fast Attention. *arXiv e-prints*, page arXiv:2007.03815, July 2020. [No citado]
- [HSW89] K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2(5):359–366, 1989. [Citado en pág. 10]
- [HZRS15] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Deep residual learning for image recognition. *CoRR*, abs/1512.03385, 2015. [No citado]
- [HZXL19] Han Hu, Zheng Zhang, Zhenda Xie, and Stephen Lin. Local relation networks for image recognition. *CoRR*, abs/1904.11491, 2019. [No citado]
- [KH91] Kurt Hornik. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural Networks*, 4(2):251–257, 1991. [Citado en pág. 10]
- [KL19] Patrick Kidger and Terry Lyons. Universal Approximation with Deep Narrow Networks. *arXiv e-prints*, page arXiv:1905.08539, May 2019. [Citado en pág. 11]
- [LDG<sup>+</sup>16] Tsung-Yi Lin, Piotr Dollár, Ross Girshick, Kaiming He, Bharath Hariharan, and Serge Belongie. Feature Pyramid Networks for Object Detection. *arXiv e-prints*, page arXiv:1612.03144, December 2016. [Citado en pág. 21]
- [LPM15] Minh-Thang Luong, Hieu Pham, and Christopher D. Manning. Effective approaches to attention-based neural machine translation. *CoRR*, abs/1508.04025, 2015. [No citado]
- [LPW<sup>+</sup>17] Zhou Lu, Hongming Pu, Feicheng Wang, Zhiqiang Hu, and Liwei Wang. The Expressive Power of Neural Networks: A View from the Width. *arXiv e-prints*, page arXiv:1709.02540, September 2017. [Citado en pág. 10]

## Bibliografía

- [OMS17] Chris Olah, Alexander Mordvintsev, and Ludwig Schubert. Feature visualization. *Distill*, 2017. <https://distill.pub/2017/feature-visualization>. [No citado]
- [RDGF15] Joseph Redmon, Santosh Divvala, Ross Girshick, and Ali Farhadi. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection. *arXiv e-prints*, page arXiv:1506.02640, June 2015. [Citado en pág. 21]
- [RF16] Joseph Redmon and Ali Farhadi. YOLO9000: Better, Faster, Stronger. *arXiv e-prints*, page arXiv:1612.08242, December 2016. [Citado en pág. 21]
- [RF18] Joseph Redmon and Ali Farhadi. YOLOv3: An Incremental Improvement. *arXiv e-prints*, page arXiv:1804.02767, April 2018. [Citado en pág. 21]
- [RHGS15] Shaoqing Ren, Kaiming He, Ross Girshick, and Jian Sun. Faster R-CNN: Towards Real-Time Object Detection with Region Proposal Networks. *arXiv e-prints*, page arXiv:1506.01497, June 2015. [Citado en págs. 20 and 21]
- [VSP<sup>+</sup>17] Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Lukasz Kaiser, and Illia Polosukhin. Attention is all you need. *CoRR*, abs/1706.03762, 2017. [No citado]
- [WGGH17] Xiaolong Wang, Ross B. Girshick, Abhinav Gupta, and Kaiming He. Non-local neural networks. *CoRR*, abs/1711.07971, 2017. [Citado en pág. 22]
- [WSH19] Xiongwei Wu, Doyen Sahoo, and Steven C. H. Hoi. Recent Advances in Deep Learning for Object Detection. *arXiv e-prints*, page arXiv:1908.03673, August 2019. [Citado en págs. 1X, 1X, 19, and 20]