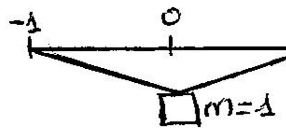
Relación de Ejercicios. Cálculo Variacional y Derivadas Débiles.

Laura Gómez Garrido

1: Sea $F: H_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $F[y] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y'(x)^2 dx + y(0)$.
Encontrar el mínimo de F en H_0^1.

Nos encontramos en un caso particular del modelo de cuerdas en donde colgamos una masa en un punto de la cuerda, en nuestro caso en el 0. Además, consideramos que la densidad de la cuerda es despreciable.
Un buen esquema de nuestro funcional sería:



Su forma bilineal asociada sería: $A(y,y) = \int_{-1}^{1} y'(x)^2 dx$ donde por estar trabajando en $H_0^1(-1,1)$, $\|y\| = \int_{-1}^{1} y'(x)^2 dx$ luego A es coerciva puesto que $A(y,y) = \|y\|$.
Como la aplicación $R(y) = -y(0)$ $\forall y \in H_0^1(-1,1) \subseteq C(-1,1)$ es lineal y tiene sentido considerar su representante continuo, sabemos que $F[y] = \frac{1}{2}A(y,y) - R(y)$ $\forall y \in H_0^1(-1,1)$ tiene un único mínimo absoluto en $H_0^1(-1,1)$ por el Teorema de Lax-Milgram.
Por la condición de punto crítico, tenemos que este mínimo verifica que:

$$A(\phi,y) - R(\phi) = 0 \ \forall \phi \in H(-1,1) \rightarrow \int_{-1}^{1} y'(x)\phi(x)dx + \phi(0) = 0 \ \forall \phi \in H(-1,$$

A continuación distinguimos dos casos: $\phi \in \mathcal{D}(-1,0)$ y $\phi \in \mathcal{D}(0,1)$.

- $\phi \in \mathcal{D}(-1,0)$ tenemos que $\int_{-1}^{1} y'(x)\phi'(x)\,dx = \phi(0) \underset{\substack{\uparrow \\ 0\notin(-1,0)}}{=} 0 = \int_{-1}^{1} 0\cdot\phi(x)\,dx$

luego $z \in H_0^1(-1,0) \subseteq \mathcal{C}(-1,0)$ con $z = y'$ ~~puesto~~ que hemos probado que tiene derivada débil 0.

- $\phi \in \mathcal{D}(0,1)$ luego $\int_{-1}^{1} y'(x)\phi'(x)\,dx = \phi(0) \underset{\substack{\uparrow \\ 0\in(0,1)}}{=} 0 = \int_{-1}^{1} 0\cdot\phi(x)\,dx$.

Nuevamente, hemos probado que $z \in H_0^1(0,1) \subseteq \mathcal{C}(0,1)$ con $z = y'$.

Así, $z \in \mathcal{C}(-1,0) \cap \mathcal{C}(0,1)$ y existen los límites laterales en el 0:

$$z(0^-) = \lim_{x\to 0^-} z(x) \qquad z(0^+) = \lim_{x\to 0^+} z(x)$$

De esta forma podemos decir que:

$$\int_{-1}^{1} z(x)\phi'(x)\,dx = \int_{-1}^{0} z(x)\phi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} z(x)\phi'(x)\,dx = -\phi(0)$$

Y derivando por partes !! cada término término tenemos que:

- $\int_{-1}^{0} z(x)\phi'(x)\,dx = z(x)\phi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} z'(x)\phi(x)\,dx = z(0^-)\phi(0) - \cancel{\int_{-1}^{0} z'(x)\phi(x)\,dx} = z(0^-)\phi(0)$ $\quad z'=0$

- $\int_{0}^{1} z(x)\phi'(x)\,dx = z(x)\phi(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} z'(x)\phi(x)\,dx = -z(0^+)\phi(0) - \cancel{\int_{0}^{1} z'(x)\phi(x)\,dx} = -z(0^+)\phi(0)$ $\quad z'=0$

Es decir:

$$\big(z(0^-) - z(0^+)\big)\phi(0) = -\phi(0) \Rightarrow z(0^+) - z(0^-) = 1 \Rightarrow y'(0^+) - y'(0^-) = 1.$$

Luego el cambio de pendiente se da entre 0^- y 0^+ y es igual a 1.

Como $z' = y' = 0$ tanto en el intervalo $(-1,0)$ como $(0,1)$ tenemos que:

$$y(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1 & x \in [-1,0] \\ a_2 x + b_2 & x \in [0,1] \\ a_2 - a_1 = 1. \end{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ y(-1)=0 \\ y(1)=0 \\ a_1\cdot 0 + b_1 = a_2\cdot 0 + b_2}}{\Longrightarrow} y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x \in [-1,0] \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x \in [0,1] \end{cases}$$

es nuestro mínimo.

2. Demostrar que el problema de contorno tiene una única solución: $-y''+3xy=2x \quad y(0)=y(1)=0$.

Nos encontramos en el caso del puente sujeto por cuerdas con $-y''(x)+k(x)y(x)+q(x)=0$ como ecuación de Euler-Lagrange donde $k(x)=3x$ y $q(x)=-2x$. En clase vimos la existencia de puntos críticos a través del teorema de Riesz-Fisher.

Para probar la unicidad, recordemos que esta ecuación estaba asociada al funcional:

$$L[y]=\frac{1}{2}\int_0^1 y'(x)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1 k(x)y(x)^2dx+\int_0^1 q(x)y(x)dx$$

Si tomamos $A(u,v)=\int_0^1 u'(x)v'(x)dx+\int_0^1 k(x)u(x)v(x)dx \quad \forall u,v\in H^1(0,1)$ forma bilineal, continua y simétrica que es coerciva puesto que $A(u,u)\geq(1+k_0)\|u\|^2_{H^1}$ $(k(x)\geq k_0\geq 0)$.

También tomamos $R(u)=-\int_0^1 q(x)u(x)dx \quad \forall u\in H^1(0,1)$ aplicación lineal y continua.

Por el teorema de Lax-Milgram tenemos la existencia y unicidad de un mínimo absoluto.

3.- Sea

$$p(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x\in(-3,0)\\ 1 & \text{si } x\in(0,2)\end{cases}$$

y consideramos

$$L: H_0^1(-3,2)\longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$L[y]=\frac{1}{2}\int_{-3}^{2}p(x)\,y'(x)^2dx-\int_{-3}^{2}y(x)dx$$

a) Demuestra la existencia de mínimo.

Para probar la existencia de mínimo utilizaremos el teorema de Lax-Milgram. Para ello tomamos: $A(u,v)=\int_{-3}^{2}p(x)u'(x)v'(x)dx$ forma bilineal, continua y simétrica que, además, es coerciva con $A(u,u)\geq \frac{1}{3}\|u\|^2_{H_0^1}$. También tomamos $R(u)=\int_{-3}^{2}u(x)dx$ aplicación lineal y continua. Luego, por Lax-Milgram, $L[y]=\frac{1}{2}A(y,y)-R(y)$ hemos probado la existencia y unicidad del mínimo absoluto.

b) Encuentra la expresión en casi todo punto de la función minimizante.

Nota: $z(x) = p(x)\,y'(x)$ admite una extensión continua.

Solución:

Por la caracterización del mínimo, sabemos que:

$$A(y,\phi) = R(\phi)\ \forall \phi \in H^1(-3,2) \Longleftrightarrow \int_{-3}^{2} p(x)y'(x)\phi'(x)\,dx = \int_{-3}^{2} \phi(x)\,dx$$

Gracias a la nota del ejercicio, sabemos que $z = py'$ tiene derivada débil -1. Por tanto tenemos que $z' = py'' = -1$ luego $y'' = \frac{-1}{p}$ y está bien definido porque $p(x) \neq 0\ \forall x \in (-3,2)$.

Utilizando el método de tiro para las condiciones iniciales, tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{-1}{p(x)} \\ y(-3) = 0 \quad y'(-3) = a \\ y(2) = 0 \quad y'(2) = b. \end{cases}$$

Dividimos el problema en dos casos:

$\boxed{x \in (-3,0)}$ Aquí, $y''(x) = \frac{-1}{3} \in C(-3,0)$ y resolvemos.

$$y'(x) = \int \frac{-1}{3}\,dx = -\frac{x}{3} + c \underset{y'(-3)=a}{\longrightarrow} 1 + c = a \rightarrow y'(x) = \frac{-x}{3} + a - 1$$

$$y(x) = \int \frac{-x}{3} + a - 1\,dx = \frac{-x^2}{6} + ax - x + d \underset{y(-3)=0}{\longrightarrow} \frac{-3}{2} - 3a + 3 + d = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y(x) = -\frac{x^2}{6} + ax - x - \frac{3}{2} + 3a$$

$\boxed{x \in (0,2)}$ $y''(x) = \frac{-1}{1} = -1 \in C(0,2)$, resolvemos:

$$y'(x) = \int -1\,dx = -x + c \underset{y'(2)=b}{\longrightarrow} -2 + c = b \rightarrow y'(x) = -x + b + 2$$

$$y(x) = \int -x + b + 2\,dx = -\frac{x^2}{2} + bx + 2x + d \underset{y(2)=0}{\longrightarrow} -2 + 2b + 4 + d = 0$$

$$\rightarrow y(x) = -\frac{x^2}{2} + bx + 2x - 2b - 2$$

Para poder decir que $y \in C[-3,2]$, necesitamos que $y'(0^-)=y'(0^+)$ y que $y(0^-)=y(0^+)$. De esta forma:

- $y'(0^-)=-\frac{0}{3}+a-1=-0+b+2=y(0^+)\to a=b+3$
- $y(0^-)=-\frac{0^2}{6}+a0+0-\frac{3}{2}+3a=-\frac{0^2}{2}+b0+20-2b-2\to$

$\to 6a-\frac{3}{2}=-2b-2\to 6a=-2b-\frac{1}{2}\to 6a=-4b-1\Rightarrow$

Así:

$$\begin{cases} a=b+3\to a=-\frac{19}{10}+3=\frac{-19+30}{10}=+\frac{11}{10} \\ 6a=-4b-1\Leftrightarrow 6b+18=-4b-1\Leftrightarrow 10b=-19\to b=-\frac{19}{10} \end{cases}$$

Finalmente, concluimos que la función minimizante es:

$$y(x)=\begin{cases} -\frac{x^2}{6}+\frac{1}{10}x+\frac{9}{5} & x\in[-3,0] \\ -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{10}x+\frac{9}{5} & x\in[0,2) \end{cases}$$

4.- Usa lo anterior para minimizar el siguiente problema:

$$E=\{u\in H^1(0,1):\ \begin{matrix} u(0)=0 \\ u(1)=1 \end{matrix}\}$$

$$L[u]=\int_0^1 u'(x)^2\,dx+\int_0^1 u(x)\,dx$$

$$\min_{u\in E} L[u].$$

Solución:

La teoría anterior nos dice que dados $p,q,r\in E$ $\vec{pq}+\vec{qr}=\vec{pr}$ y que dados $p\in E$ y $v\in V$ $\exists!\,p_v\in E$ tal que $\vec{pp_v}=v$.

Nótese, que si $p,q\in E$ entonces $\vec{pq}\in H_0^1(0,1)$ ya que $\vec{pq}(0)=q(0)-p(0)=0-0=0$ y $\vec{pq}(1)=q(1)-p(1)=1-1=0$.

Nuevamente, la teoría anterior nos dice que, sea $\tilde{u}\in E$:

$$\min_{u\in E} L[u]=\min_{v\in V} L[\tilde{u}_v]=\min_{v\in V} L[\tilde{u}+v].$$

Nuestro objetivo ahora es minimizar $v\in V$ y para ello nos da igual el valor de $\tilde{u}\in E$ puesto que la teoría es válida para cualquier valor fijo que tomemos de $\tilde{u}\in E$. Para simplificar los cálculos, consideramos $\tilde{u}(x)=x$. Así nuestro funcional será:

$$L[x+v]=\int_0^1\left(\frac{d}{dx}(x+v(x))\right)^2dx+\int_0^1 x+v(x)\,dx=\int_0^1(1+v'(x))^2+x+v(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 1+(v'(x))^2+2v'(x)+x+v(x)\,dx$$

A continuación, sacamos la ecuación de Euler-Lagrange asociada. Para ello, sabemos que en nuestro caso $F(x,y,p)=p^2+2p+y+x+1$ que es derivable y con derivada continua respecto a y y p.

Así:

$$F_y=1 \qquad F_p=2p+2$$

Luego:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_p=0 \Longleftrightarrow 1-2y''(x)=0 \Longleftrightarrow y''(x)=\frac{1}{2}.$$

Volviendo a nuestras variables y utilizando el método del tiro tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v''(x)=\frac{1}{2} \\ v(0)=v(1)=0 \\ v'(0)=a \end{cases}$$

Luego:

- $v'(x)=\frac{x}{2}+b \xrightarrow[v'(0)=a]{} b=a \rightarrow v'(x)=\frac{x}{2}+a \quad \forall x\in(0,1)$
- $v(x)=\frac{x^2}{4}+ax+c \xrightarrow[v(0)=0]{} c=0 \rightarrow v(x)=\frac{x^2}{4}+ax \quad \forall x\in(0,1)$

Usando que $v(1)=0$ tenemos que $a=-\frac{1}{4}$ luego $v(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}$ $\forall x\in(0,1)$ es el mínimo en V.

Finalmente, para sacar el $\min\limits_{u\in E} L[u]$ usamos que este es igual al $\min\limits_{v\in V} L[x+v]$ luego:

$$\min_{u\in E} L[u]=\min_{v\in V} L[x+v]=x+v(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}+x=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x\in E.$$

5. Sea E un espacio afín embebido en H espacio de Hilbert. Supongamos que L es un funcional cuadrático coercivo y que E es cerrado. Demostrar que el problema

$$\min_{u \in E} L[u]$$

tiene una única solución.

Solución:

Sea E un espacio afín embebido en H espacio de Hilbert y cerrado en él. Esto nos dice que E es un espacio de Banach cuya norma es la inducida por H, es decir, $\|x\|_E = \|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $\forall x \in E$ luego E es un espacio de Hilbert.

Como L es un funcional cuadrático coercivo en H luego también lo es en E puesto que comparten norma.

Como E es un espacio de Hilbert, basta con aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener la existencia y unicidad de la solución.

6.1 - Encontrar $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que $f_n'(-1)=1$, $f_n'(1)=1$ y

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_n^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_n'(x)^2\,dx \longrightarrow 0$$

Indicación: Busca primero una subsucesión de $f_n(x)=\frac{1}{n}x^2$.

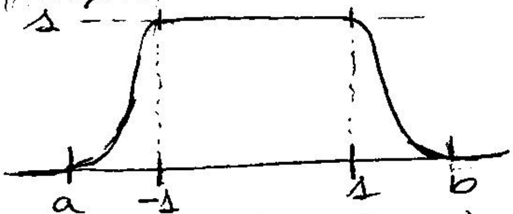
Solución:

Teniendo en cuenta la indicación del ejercicio, consideramos $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aplicación dada por $\tau(n)=2n-1$ de términos impares.

Tomemos entonces $g_n(x)=f_{\tau(n)}(x)=\dfrac{1}{\tau(n)}x^{\tau(n)}=\dfrac{1}{2n-1}x^{2n-1}$

y comencemos probando que $g_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Para ello, consideramos $\phi \in \mathcal{D}$ función meseta, con valor 1 en $[-1,1]$, es decir, de la forma:



Tenemos que $g_n \cdot \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y nos faltaría comprobar el resto de condiciones:

- $$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(g_n(x)\cdot\phi(x))^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(g_n(x)\cdot\phi(x))'\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \phi(x)=1 \\ \forall x\in(-1,1)}}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_n^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(g_n'(x))^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)^2}+\frac{x^{4n-4}}{\cancel{2n-1}}\cdot\cancel{(2n-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)^2}+x^{4n-4}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{4n-1}}{(2n-1)^2(4n-1)}+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)^2(4n-1)}+\frac{1}{4n-3}-\frac{-1}{(2n-1)^2(4n-1)}-\frac{-1}{4n-3}\right]=$$

$$=\frac{1}{(2n-1)^2(4n-1)}+\frac{1}{4n-3}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

• $\left(g_n(-1)\circ\phi(-1)\right)' = g_n'(-1) = (-1)^{2n-2} = 1$

• $\left(g_n(1)\circ\phi(1)\right)' = g_n'(1) = 1^{2n-2} = 1$

Así, la sucesión que nos pedía el enunciado es:

$$g_n(x)\circ\phi(x) = \frac{\phi(x)}{2n-1}x^{2n-1}$$

6.2.- Demostrar que el problema de contorno $-u''+u=0$ $u'(-1)=u'(1)=1$ tiene una única solución.

<u>Solución:</u>

Tenemos una ecuación diferencial homogénea de segundo orden y con coeficientes constantes. De esta forma podemos usar el polinomio característico asociado $p(\lambda)=-\lambda^2+1$ para hallar las soluciones

Sus raíces son: $\lambda=-1$ y $\lambda=1$ luego su solución genérica será $u(x)=ae^{t}+be^{-t}$. Utilizaremos las condiciones de contorno para averiguar el valor de los parámetros a y b.

$$u'(x)=ae^{t}-be^{-t} \rightarrow \begin{cases} u'(-1)=1 \rightarrow ae^{-1}-be^{1}=1 \\ u'(1)=1 \quad ae^{1}-be^{-1}=1 \end{cases}$$

Si resolvemos, obtenemos que $a=\frac{e}{e^2+1}$ y $b=\frac{-e}{e^2+1}$

luego nuestra única solución sería:

$$u(x)=\frac{e}{e^2+1}e^{x}-\frac{e}{e^2+1}e^{-x}=\frac{e}{e^2+1}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

6.3: Estudia y en su caso calcula $\min \{L[u] : u \in E\}$ con $E = \{u \in H^2(-1,1) \,/\, u'(-1) = u'(1) = 1\}$ y

$$L[u] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)^2\,dx$$

Solución:

Por el ejercicio 6.1, sabemos que el $\inf_{u\in E} L[u] = 0$ pero por el ejercicio 6.2 tenemos que la única solución del problema de contorno asociado no alcanza dicho valor al aplicarle el funcional luego el mínimo no existe.