4. Derivabilidad – Recta tangente y plano normal

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Trabajando con funciones de varias variables:
  - $f'(\overline{A},\overline{r}) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \overline{r}}(\overline{A})$ simbolizan la derivada de f respecto de $\overline{r}$ en el punto $\overline{A}$.
  - Siendo $\overline{r} \neq \overline{0}$, su dirección viene dada por $\breve{r} = \overline{r}/\|\overline{r}\|$; las componentes de $\breve{r}$ son los cosenos directores de la dirección. La derivada de f respecto $\breve{r}$ (vector unitario o versor) también se denomina "derivada direccional" o "derivada en la dirección de $\overline{r}$".
  - Las derivadas parciales son derivadas direccionales en la dirección de los versores canónicos; es decir,

$$f'(\overline{A},\breve{e}_k) \equiv f'_{x_k}(\overline{A}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{A})$$

  donde $\breve{e}_k = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{k},0,\cdots,0)$ es el k-ésimo versor canónico.

- Una derivada queda definida cuando el límite correspondiente existe y tiene norma finita, entendiéndose que:
  - para funciones de una variable la derivada $f'(a)$ se estudia suponiendo que a es interior al dominio de f. (*)
  - en el caso de funciones de varias variables, $f'(\overline{A},\breve{r})$ se estudia suponiendo que f está definida en un entorno de $\overline{A}$ sobre la recta que pasa por dicho punto con dirección $\breve{r}$; es decir, no es necesario que $\overline{A}$ sea interior al dominio de la función.

01) Definida la curva C como intersección de dos superficies S_1 y S_2 ($C = S_1 \cap S_2$):
- parametrícela convenientemente y halle una ecuación para la recta tangente a C en $\overline{A}$,
- halle una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial para el plano normal a C en $\overline{A}$,
- analice si C es una curva plana o alabeada.

a) $S_1: y = x^2$ $\quad S_2: y+z = 5$ $\quad \overline{A} = (2,4,1)$.

b) $S_1: z = x^2 - y^2$ $\quad S_2: z = x+y$ $\quad \overline{A} = (2,1,3)$.

c) $S_1: x^2+y^2+z^2 = 8$ $\quad S_2: z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \overline{A} = (0,2,2)$.

02) Dada C de ecuación $\overline{X} = (u^2, u-2, u+3)$ con $u \in \Re$, analice si su recta tangente en el punto $(9,1,6)$ interseca ...

a) ... al eje z.

b) ... a la superficie Σ de ecuación $z = x - 2y^2$.

c) ... a la línea de ecuación $\overline{X} = (v,\ 2v,\ 32v^{-1})$ con $v \neq 0$.

03) Halle la ecuación de un plano que contenga tres puntos no alineados de la curva C de ecuación $\overline{X} = (2\cos(t),\ 2\operatorname{sen}(t),\ t)$ con $t \in [0,2\pi]$. Demuestre que C es alabeada (no es plana).

(*) Las derivadas laterales en puntos frontera las consideraremos más adelante sólo cuando sean necesarias.

04) Halle las funciones derivadas parciales de 1º orden de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=x^4+2xy+xy^3-1$.

b) $f(x,y,z)=y\,e^{2x}+z\,e^{3y}$.

c) $f(x,y)=x\,e^{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(y/x)\ ,\ x\neq 0$.

e) $f(x,y)=\int_x^y e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt$.

f) $f(x,y)=\int_x^{x^2+y^2} e^{t^2}\,dt$.

05) Analice por definición la existencia de las derivadas parciales de f en el punto $\overline{A}$; cuando sea posible verifique aplicando la regla práctica de derivación.

a) $f(x,y)=3x^2+2xy\ ,\ \overline{A}=(1,2)$.

b) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y & \text{si } x\geq 1 \\ 2x-y & \text{si } x<1 \end{cases}\ ,\ \overline{A}=(1,1)$.

c) $f(x,y)=\sqrt{x^4+2y^2}\ ,\ \overline{A}=(0,0)$.

d) $f(x,y)=|x|+|y|\ ,\ \overline{A}=(0,0)$.

06) Dada $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) Pruebe que f no es continua en $(0,0)$.

b) Pruebe que $f'(\overline{0},\breve{r})$ sólo queda definida para $\breve{r}$: $(1,0),(-1,0),(0,1)$ y $(0,-1)$.

07) Dada $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Demuestre que para todo $\breve{r}\in\Re^2$ la función es derivable en el origen, aun cuando g es discontinua en $(0,0)$.

08) Dada $h:\Re^2\to\Re\ /\ h(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$

a) Demuestre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ y que la únicas direcciones para las que existe derivada direccional son $\breve{e}_1,-\breve{e}_1,\breve{e}_2$ y $-\breve{e}_2$.

b) Verifique que h es continua en el origen.

09) Demuestre por definición que $f:\Re^2\to\Re\ /\ f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

10) Dada $f(x,y)=1-x^2+2y^2$, calcule usando la definición la derivada direccional de f en el punto $\overline{A}=(1,-1)$ según la dirección del vector $\overline{v}=(3,4)$.

11) Estudie la derivabilidad en distintas direcciones en el punto $\overline{A}$ que se indica en cada caso.

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-x}{x^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,1) \end{cases}\ ,\quad \overline{A}=(0,1)$.

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } (x,y)\neq(0,y) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,y) \end{cases}\ ,\quad \overline{A}=(0,0)$.

12) Determine los dominios en los que quedan definidas las derivadas parciales de 1° y 2° orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (x\ln(y),\, y/x)$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

d) $f(x,y,z) = xy\ln(yz)$.

13) Sea P una partícula que se desplaza en el espacio *xyz* según la trayectoria definida por $\bar{X} = 3t^2\,\breve{\imath} + (2-t)\,\breve{\jmath} + 2t^2\,\breve{k}$ con $t \geq 0$, t: tiempo en segundos. Si $x = y^2 + z$ es la ecuación de una superficie S:

a) calcule el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración de *P* en el instante que la partícula atraviesa a *S*.
b) calcule el tiempo que tardará *P* en llegar desde *S* al plano de ecuación $x - z + 2y = 7$.

14) Sea $L : \Re^n \to \Re$ $(n > 1)$ una transformación lineal, aplicando la definición de derivada direccional demuestre que $L'(\bar{A},\breve{r}) = L(\breve{r})$ $\forall \bar{A},\breve{r} \in \Re^n$.

15) Sea $f(\bar{X}) = \bar{k}\cdot\bar{X}$ con $\bar{k}$ constante; utilice la propiedad demostrada en el ítem anterior para obtener $\bar{k}$ sabiendo que $f'((2,1),(3,4)) = 2$ y $f'((3,5),(-1,1)) = 4$.

16) Dado $\bar{v}(x,y) = (y + x\,g(x),\, y^2)$, halle $g(x)$ para que $\bar{v}'_x \perp \bar{v}'_y$ con $\bar{v}(1,1) = (3,1)$.

17) Dada $f(x,y) = y^2 + g(x)$, halle $g(x)$ para que $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ si $f(\bar{0}) = 0$, $f'_x(\bar{0}) = 1$.

18) Para tiempo $t \geq 0$ dos puntos siguen trayectorias definidas por $\bar{X} = (t+1,\, g(t),\, 1+t^2)$ y $\bar{X} = (2t,\, g'(t),\, 2t^2)$ respectivamente, determine $g(t)$ sabiendo que en todo momento las trayectorias son paralelas y que en $t = 1$ ambos puntos coinciden en el $(2,2,2)$.

19) Verifique que $y = (x - at)^2 + (x + at)^2$ con a constante satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

denominada "ecuación de onda" o "ecuación de la cuerda vibrante", debida a D'Alembert.

20) Demuestre que $z = \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$ satisface la ecuación bidimensional de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

21) Sea $U = f(x,y,z)$ con f campo escalar que en cada punto (x,y,z) tiene un valor inversamente proporcional a la distancia desde el punto al origen de coordenadas; verifique que:

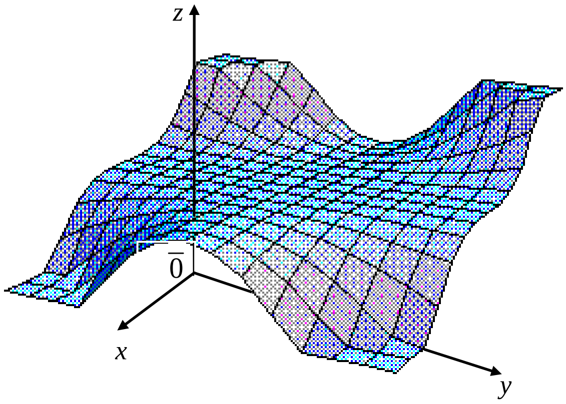
$$U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz} = 0 \text{ en } \Re^3 - \{\bar{0}\}.$$

22) Sea $\bar{f} = (P,Q,R)$ / $\bar{f}(x,y,z) = \dfrac{k\,\bar{r}}{r^3}$ con k constante, $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\bar{r}\|$. Verifique que:

$$P'_x + Q'_y + R'_z = 0 \text{ en } \Re^3 - \{\bar{0}\}.$$

23) Dada $f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$, obtenga $f'_y(1{,}0)$ observando el gráfico de la curva intersección de $z = \sqrt{3-x^2-y^2}$ con $x=1$.

24) En la figura se representa la superficie de ecuación $z = f(x,y)$; opine con fundamento si es posible afirmar que $f''_{xx}(0{,}0)=0$ y $f''_{yy}(0{,}0)\le 0$.



Cuestionario

1. Exprese la definición de $f'''_{xyx}(a,b)$. 2. Siendo $f \in C^3(E(\overline{A}))$, aplicando el teorema de Schwarz demuestre que: $f'''_{xxy}(\overline{A}) = f'''_{yxx}(\overline{A})$ 3. Demuestre la propiedad de homogeneidad.	4. Si existe $f'(\overline{A},\overline{r})$, demuestre que existe $f'(\overline{A},-\overline{r})$ y $f'(\overline{A},-\overline{r}) = -f'(\overline{A},\overline{r})$. 3. Si $f:\Re^n \to \Re$ $(n>1)$ es una transformación lineal, justifique que: $f'(\overline{X},\overline{u}+\overline{v}) = f'(\overline{X},\overline{u}) + f'(\overline{X},\overline{v})$.

Derivando con el Mathematica

Sólo indicamos la forma de trabajar en aquellos casos en que se puede usar regla práctica de derivación. Definimos un campo escalar: f[x_,y_]= x^3 + x y D[f[x,y], x] devuelve 3 x^2 + y D[f[x,y], y] devuelve x D[f[x,y], {x,2}] devuelve 6 x D[f[x,y], x,x,y] devuelve $f'''_{xxy}(x,y)$.	Para funciones de una variable también se puede usar el formato g' , g'' (dos primas); por ejemplo, definiendo g[u_] = { u^2 , Sin[u] } D[g[u],u] o bien g'[u] devuelven {2 u , Cos[u]} Para calcular la derivada de la función f en (2,1) respecto del vector {3,4} debemos hallar h'[0] , donde h[t] = f[2+3 t, 1+4 t]; entonces podemos ordenar: D[f[2+3 t, 1+4 t], t] /. t $\to$0