Puntos y Conjuntos

Distancia

Dados dos puntos $\vec{a} = (a_x, a_y) \in \Re^2$ y $\vec{b} = (b_x, b_y) \in \Re^2$

se define la distancia entre ambos puntos como

$$d\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

1) Calcular la distancia entre los puntos $\vec{a} = (1,3)$ y $\vec{b} = (-2,-1)$

Aplicando la definición: $d\left((1,3),(-2,-1)\right) = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16}$

$d\left((1,3),(-2,-1)\right) = 5$

2) Hallar la distancia entre un punto $\vec{r} = (x, y) \in \Re^2$ y el eje "*X*"

Dado que los puntos del eje "*X*" tienen coordenadas (*x*,0), aplicando la definición de distancia

$d\left((x,y),(x,0)\right) = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{y^2}$

$d\left((x,y),(x,0)\right) = |y|$

3) Definir distancia en $\Re^3$

Dados dos puntos $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \in \Re^3$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \Re^3$

se define la distancia entre ambos puntos como

$d\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$

4) Hallar la distancia entre un punto $\vec{r} = (x, y, z) \in \Re^3$ y el eje "*Z*"

Los puntos pertenecientes al eje Z tienen coordenadas (0,0,*z*), por lo tanto

$d\left((x,y,z),(0,0,z)\right) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2}$

$d\left((x,y,z),(0,0,z)\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$

5) Definir distancia en $\Re^n$

Dados dos puntos $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \in \Re^3$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \Re^3$

se define la distancia entre ambos puntos como

$$d\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

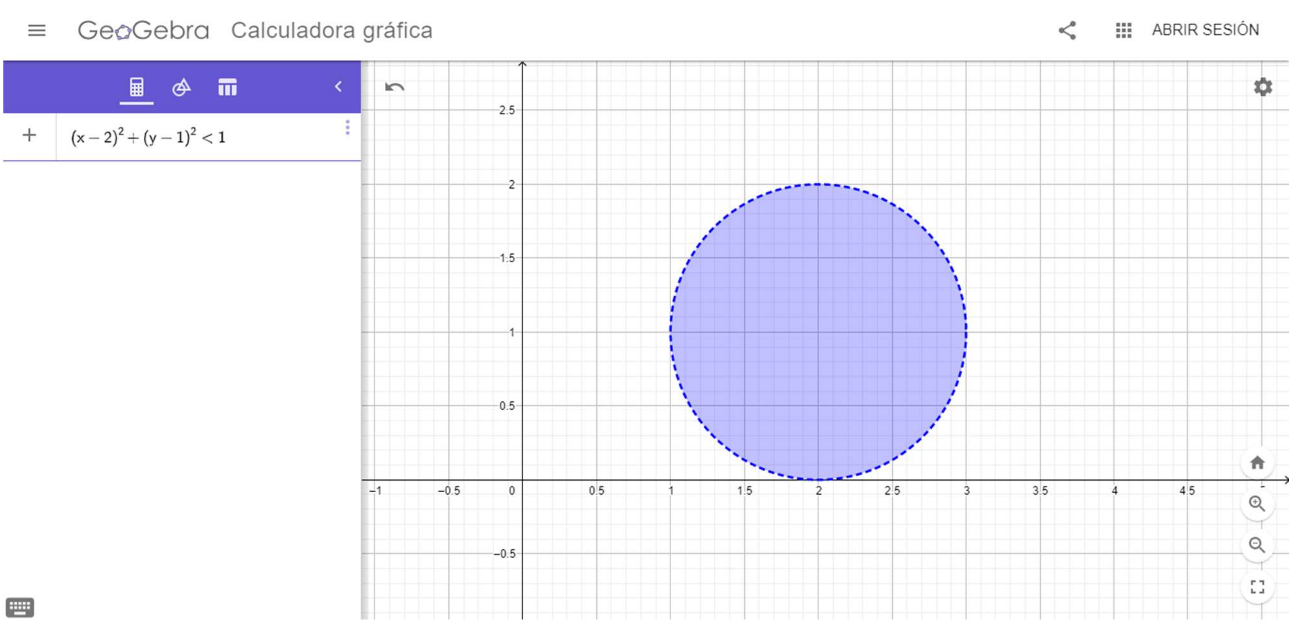
Entorno radial

Dados $\vec{a} = (a_x, a_y) \in \Re^2$ y $\delta \in \Re^+$

se define al entorno radial de centro $\vec{a} = (a_x, a_y)$ y radio δ al conjunto

$$E\left(\vec{a}, \delta\right) = \left\{(x, y) \in \Re^2 \,/\, d\left((x, y), (a_x, a_y)\right) < \delta\right\}$$

6) Graficar el entorno radial de centro (2, 1) y radio 1



Punto interior

Dados un conjunto $A \subseteq \Re^2$ y un punto $\vec{a} = (a_x, a_y) \in \Re^2$

se dice que $\vec{a} = (a_x, a_y)$ es punto interior de A si

$$\exists \delta \in \Re^+ \,/\, E\left(\vec{a}, \delta\right) \subset A$$

Al conjunto de todos los puntos interiores de A se lo denomina interior de A o sea $Int(A)$

Funciones escalares

Punto frontera

Dados un conjunto $A \subseteq \Re^2$ y un punto $\vec{a} = (a_x, a_y) \in \Re^2$

se dice que $\vec{a} = (a_x, a_y)$ es punto frontera de A si

$$\forall \delta \in \Re^+ : \left[E(\vec{a}, \delta) \cap A \neq \varnothing \wedge E(\vec{a}, \delta) \cap A^C \neq \varnothing \right]$$

Al conjunto de todos los puntos frontera de A se lo denomina frontera de A o sea $Fro(A)$

Punto de acumulación

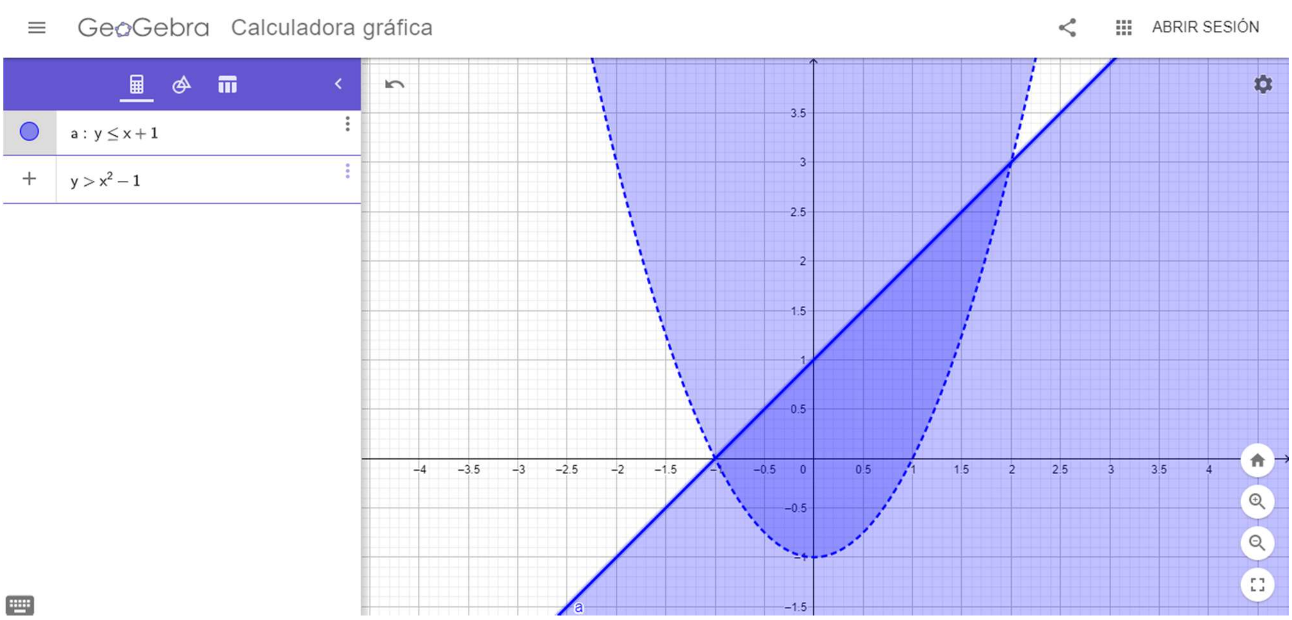
Dados un conjunto $A \subseteq \Re^2$ y un punto $\vec{a} = (a_x, a_y) \in \Re^2$

se dice que $\vec{a} = (a_x, a_y)$ es punto de acumulación de A si

$$\forall \delta \in \Re^+ : \left[E(\vec{a}, \delta) - \{\vec{a}\} \cap A \neq \varnothing \right]$$

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A se lo denomina derivado de A o sea $Der(A)$

7) Siendo $A = \left\{ (x, y) \in \Re^2 / x^2 - 1 < y \leq x + 1 \right\}$ hallar y graficar el $Int(A)$, $Fro(A)$ y $Der(A)$



$$Int(A) = \left\{ (x, y) \in \Re^2 / x^2 - 1 < y < x + 1 \right\}$$

$$Fro(A) = \left\{ (x, y) \in \Re^2 / (y = x^2 - 1 \vee y = x + 1) \wedge -1 \leq x \leq 2 \right\}$$

$$Der(A) = \left\{ (x, y) \in \Re^2 / x^2 - 1 \leq y \leq x + 1 \right\}$$

Funciones escalares

Conjunto abierto

Dado un conjunto $A \subseteq \Re^2$

se dice que A es abierto si

$A = Int(A)$

Conjunto cerrado

Dado un conjunto $A \subseteq \Re^2$

se dice que A es cerrado si

$Fro(A) \subset A$

Conjunto acotado

Dado un conjunto $A \subset \Re^2$

se dice que A es acotado si

para todo $(x, y) \in A$, existe $\delta \in \Re^+$ tal que $\|(x, y)\| < \delta$

Un conjunto cerrado y acotado se denomina compacto

8) Indicar si el conjunto del punto anterior es abierto, cerrado y/o acotado.

El conjunto A no es abierto ya que $A \neq Int(A)$. Observar que A contiene puntos frontera.

El conjunto A no es cerrado ya que $Fro(A) \not\subset A$. Observar que algunos puntos de la $Fro(A)$ no pertenecen al conjunto A.

El conjunto A es acotado ya que para $\delta = 4$, se verifica que $\|(x, y)\| \leq 4 \quad \forall (x, y) \in A$. Observar que el punto de A más alejado del origen es (3,4), de modo que $\|(2,3)\| \simeq 3.6 < 4$

Funciones escalares

Función escalar de dos variables

Siendo $A \subseteq \Re^2$ y $B \subseteq \Re$ dos conjuntos no vacíos

se llama función escalar de dos variables a la relación $z = f(x, y)$ tal que

a cada elemento $(x, y) \in A$ le corresponde un y solo un elemento $z \in B$

o sea

$$f\colon A \subseteq \Re^2 \to B \subseteq \Re \ / \ z = f(x, y)$$

siendo

A el dominio y B el codominio de la función.

Cuando sólo se conoce la ecuación que define a una función, se considera que su dominio corresponde al conjunto de todas las variables independientes para las que la ecuación está definida. A este conjunto se lo denomina dominio natural de la función (D_f).

Se llama conjunto imagen o recorrido de la función al conjunto

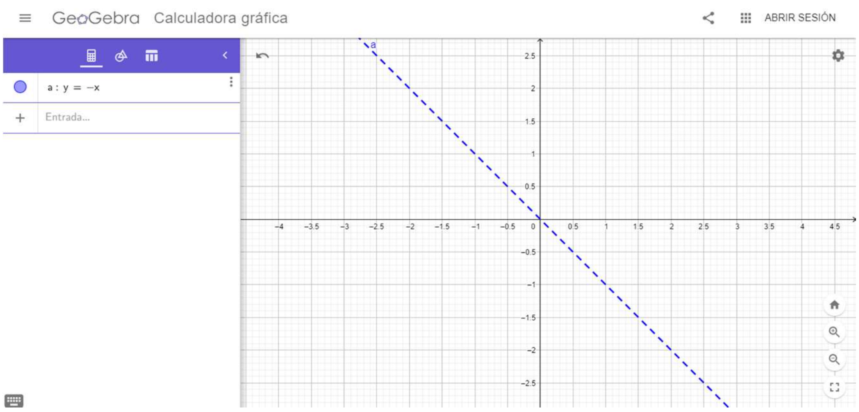
$$I_f = \{ z \in \Re \ / \ (x, y) \in A \quad \wedge \quad z = f(x, y) \}$$

1) Hallar el dominio natural y el conjunto imagen de:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 2xy + y^2}$

$$x^2 + 2xy + y^2 \neq 0 \quad \to \quad (x+y)^2 \neq 0 \quad \to \quad x + y \neq 0$$

$$D_f = \{ (x, y) \in \Re^2 / x + y \neq 0 \}$$



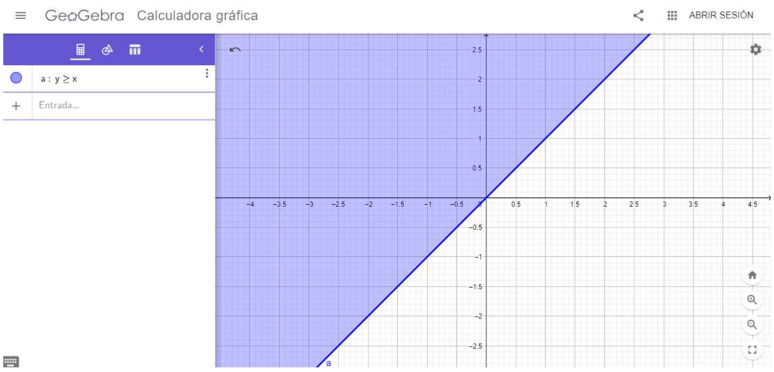
$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 0 \quad \to \quad \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} > 0$$

$$I_f = \{ z \in \Re / z > 0 \}$$

b) $g(x,y)=\sqrt{y-x}$

$y-x\geq 0$

$D_g=\{(x,y)\in\Re^2\,/\,y\geq x\}$



$I_g=\Re_0^+$

2) Definir función escalar de tres variables

Siendo $A\subseteq\Re^3$ y $B\subseteq\Re$ dos conjuntos no vacíos

se llama función escalar de tres variables a la relación $u=f(x,y,z)$ tal que

a cada elemento $(x,y,z)\in A$ le corresponde un y solo un elemento $u\in B$

o sea

$f\!: A\subseteq\Re^3\rightarrow B\subseteq\Re\ /\ u=f(x,y,z)$

3) Hallar el dominio natural y el conjunto imagen de:

$$h(x,y,z)=\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$x^2+y^2+z^2\neq 0$

$D_h=\Re^3-\{(0,0,0)\}$

$I_h=\Re$

4) Definir función escalar de "n" variables

Siendo $A\subseteq\Re^n$ y $B\subseteq\Re$ dos conjuntos no vacíos

se llama función escalar de "n" variables a la relación $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(\vec{x})$ tal que

a cada elemento $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in A$ le corresponde un y solo un elemento $y\in B$, o sea

$f\!: A\subseteq\Re^n\rightarrow B\subseteq\Re\ /\ y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(\vec{x})$

Funciones escalares

Conjunto de nivel

Siendo $A \subseteq \Re^2 \to B \subseteq \Re \; / \; z = f(x,y)$ una función escalar

se llama nivel "k" de f al conjunto

$N_k f = \{ (x,y) \in A \; / \; f(x,y) = k \}$

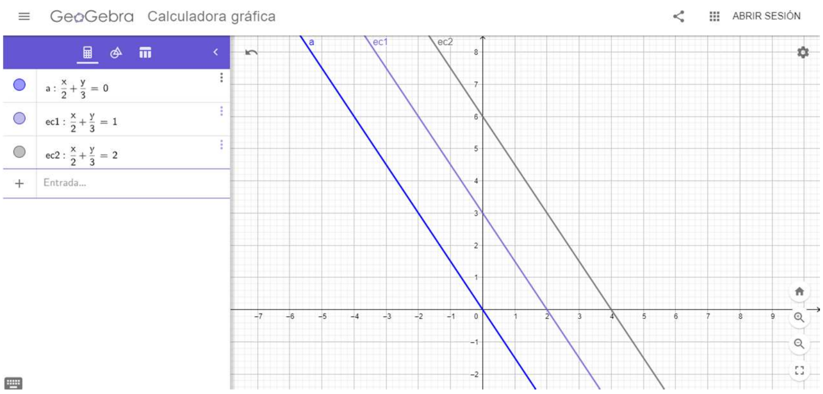
5) Hallar y graficar algunos conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

$$N_0 f = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \right\}$$

$$N_1 f = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \right\}$$

$$N_2 f = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \right\}$$

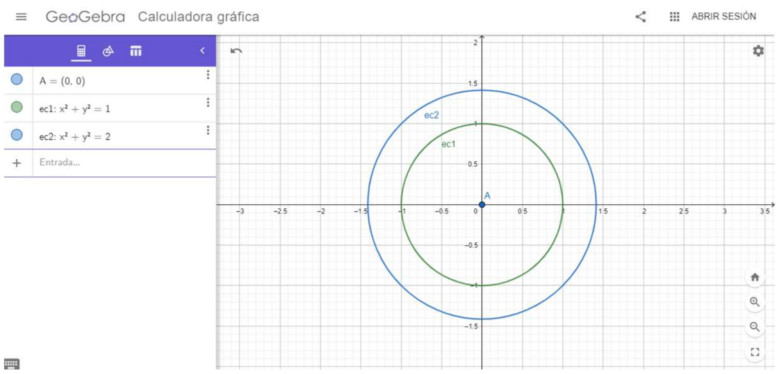


b) $g(x,y) = x^2 + y^2$

$$N_0 g = \{(0,0)\}$$

$$N_1 g = \{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$N_2 g = \{ (x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 = 2 \}$$



Funciones escalares

6) Definir conjunto de nivel de una función escalar de tres variables

Siendo $A \subseteq \Re^3 \rightarrow B \subseteq \Re \ / \ u = f(x,y,z)$ una función escalar

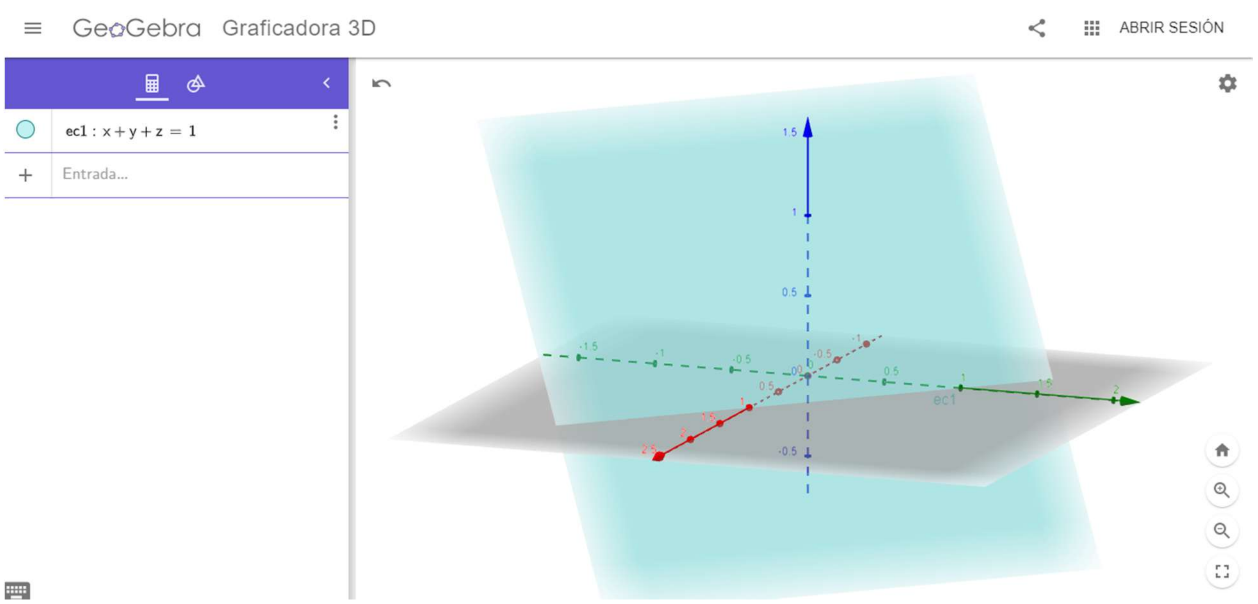
se llama nivel "k" de f al conjunto

$N_k f = \{ (x,y,z) \in A \ / \ f(x,y,z) = k \}$

7) Hallar y graficar algunos conjuntos de nivel de la siguiente función:

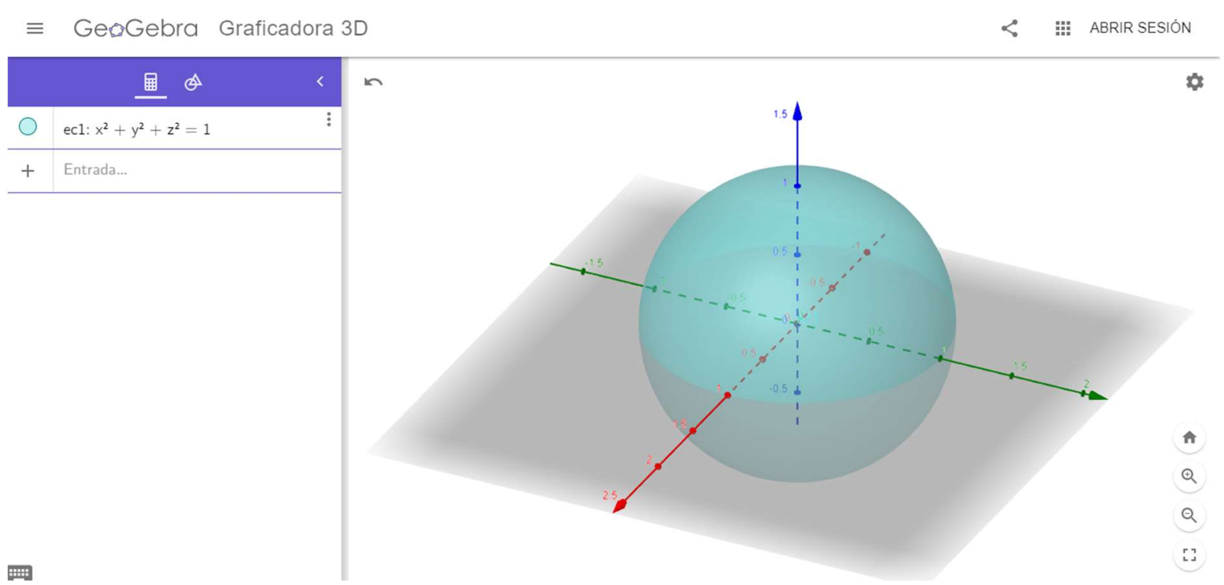
a) $f(x,y,z) = 1 - x - y - z$

$N_0 f = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x + y + z = 1\}$



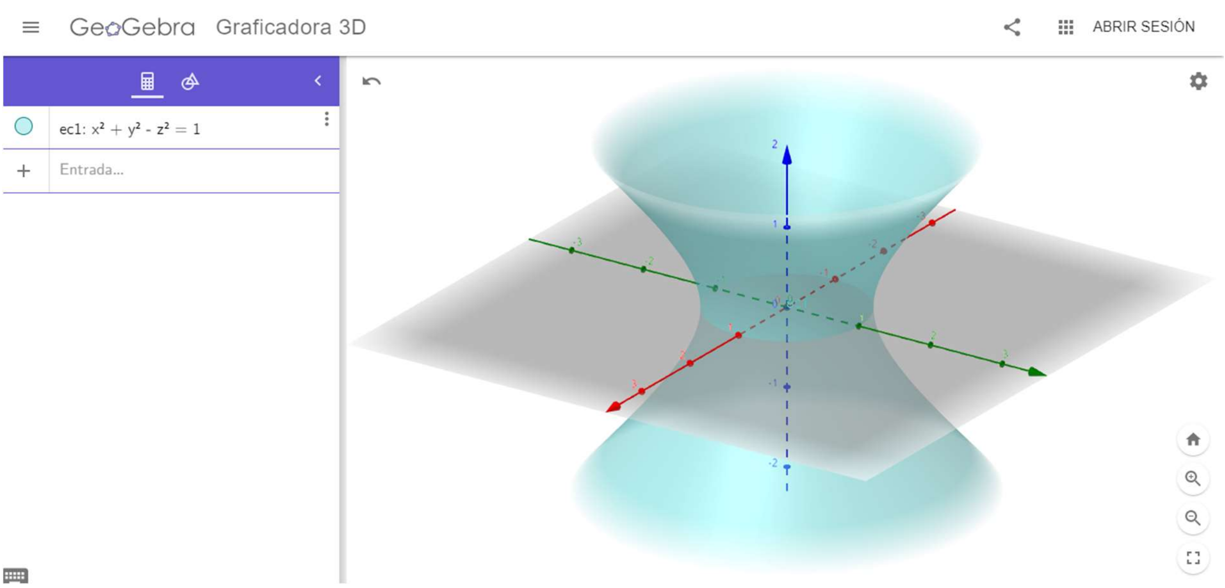
b) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$N_1 g = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



c) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$N_1 h = \left\{ (x,y,z) \in \Re^3 \,/\, x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\}$$



<u>Gráfica</u>

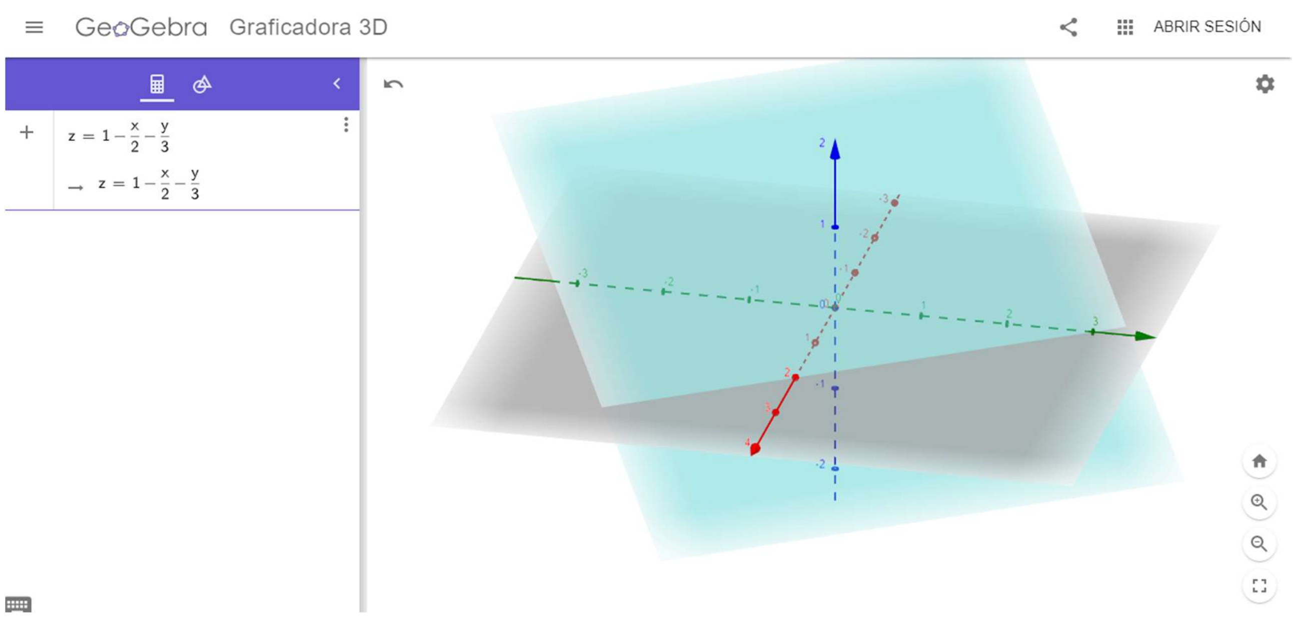
Siendo $A \subseteq \Re^2 \to B \subseteq \Re \,/\, z = f(x,y)$ una función escalar

se llama gráfica de f al conjunto

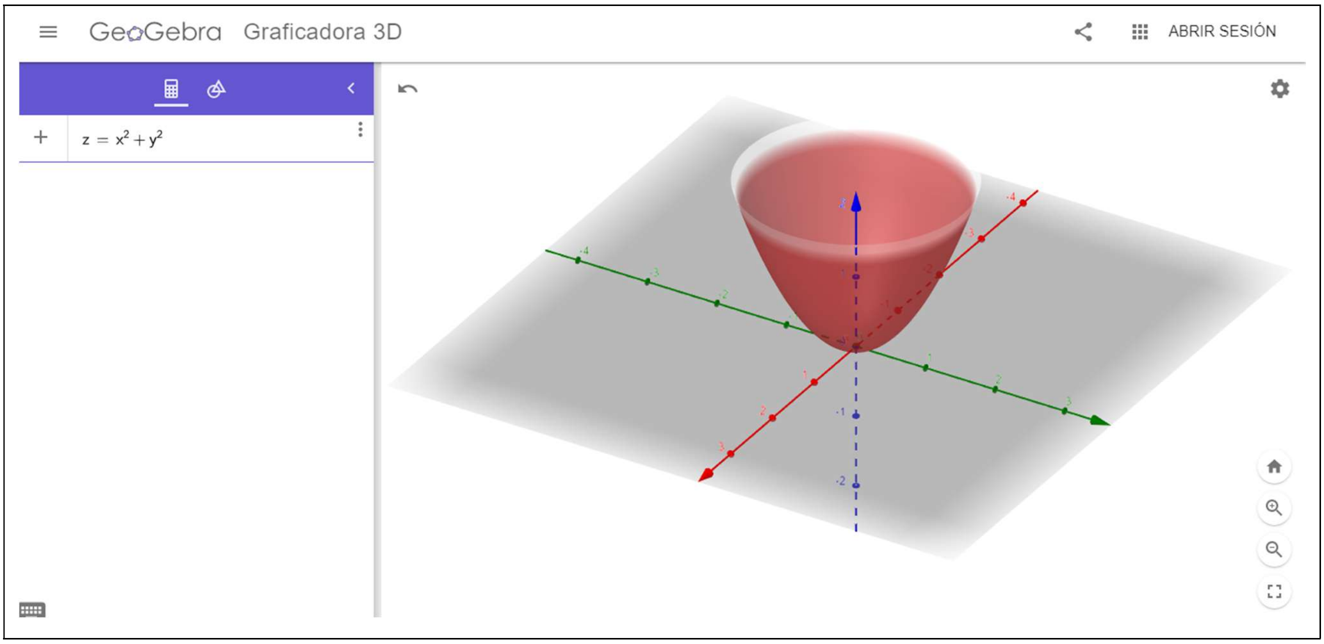
gráf (f) = $\{ (x,y,z) \in \Re^3 \,/\, z = f(x,y) \quad \wedge \quad (x,y) \in A \}$

8) Graficar las siguientes funciones:

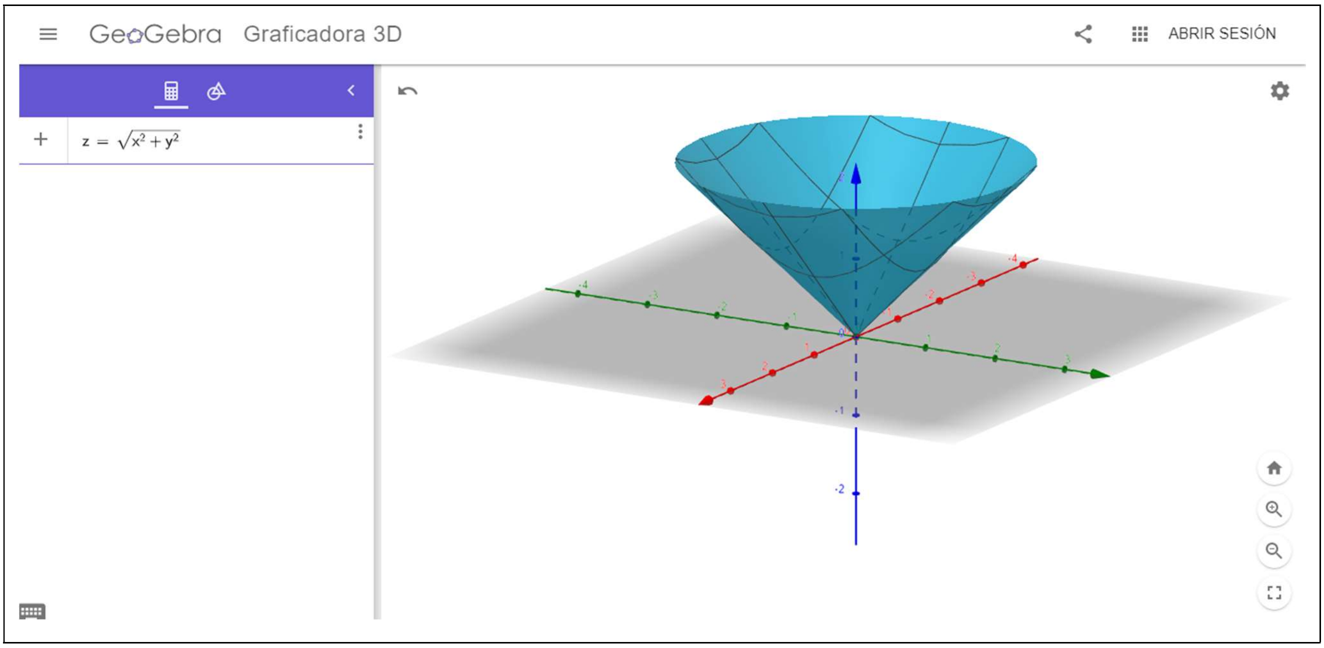
a) $f(x,y) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$



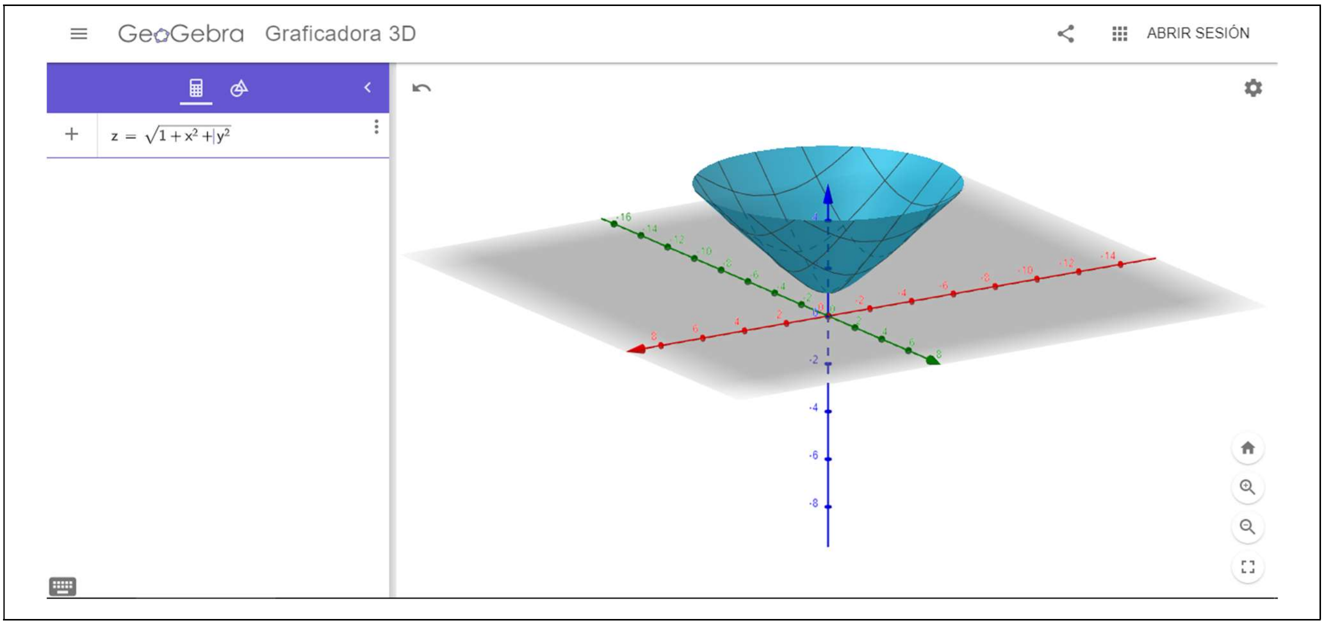
b) $g(x,y)=x^2+y^2$



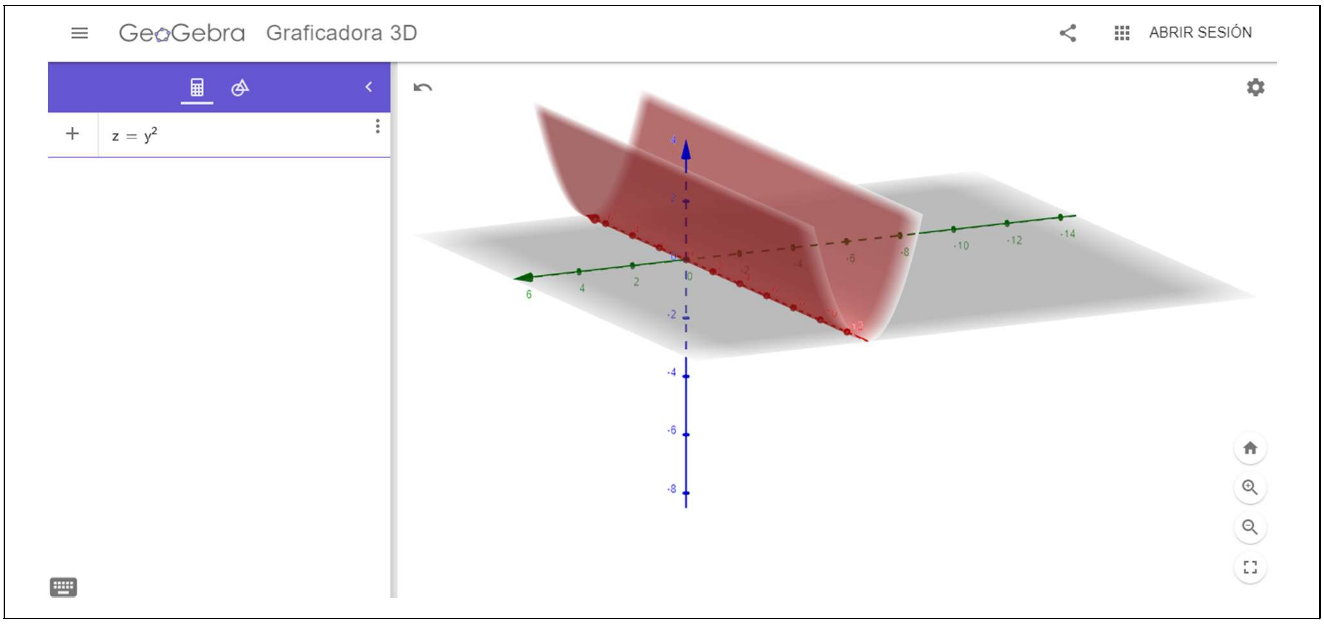
c) $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



d) $m(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$



f) $n(x,y)=y^2$



<u>Operaciones</u>

Sean f, g: $A \subseteq \Re^2 \to \Re$ dos funciones escalares y $k \in \Re$, se define

el producto de k por f a la función kf: $A \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, kf(x,y)=k\cdot f(x,y)$

la suma (resta) de f y g a la función $f \pm g$: $A \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, (f\pm g)(x,y)=f(x,y)\pm g(x,y)$

el producto de f y g a la función $f \cdot g$: $A \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, (f\cdot g)(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$

el cociente entre f y g a la función f/g: $A^* \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, (f/g)(x,y)=f(x,y)/g(x,y)$

donde $A^* = A - \{\,(x,y)\in A \,/\, g(x,y)=0\,\}$

Límite

Límite

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de dos variables

(a_x, a_y) un punto de acumulación de A

$l \in \Re$

se dice que el límite de *f* es igual a *l* cuanto (x, y) tiende a (a_x, a_y), o sea

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x, y) = l$$

si y solo si

$$\forall \varepsilon \in \Re^+, \exists \delta \in \Re^+ / \forall (x, y) \in A : \left[(x, y) \in E\left((a_x, a_y), \delta\right) - \left\{(a_x, a_y)\right\} \Rightarrow f(x, y) \in E\left(l, \varepsilon\right) \right]$$

1) Definir límite de una función escalar de *n* variables

Siendo $f: A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función de *n* variables

$\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ un punto de acumulación de A

$l \in \Re$

se dice que el límite de *f* es igual a *l* cuanto $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ tiende a $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$, o sea

$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = l$

si y solo si

$\forall \varepsilon \in \Re^+, \exists \delta \in \Re^+ / \forall \vec{x} \in A : \left[\vec{x} \in E\left(\vec{a}, \delta\right) - \left\{\vec{a}\right\} \Rightarrow f(\vec{x}) \in E\left(l, \varepsilon\right) \right]$

2) Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} k \cdot x = k \cdot a_x$

Siendo $f(x, y) = k \cdot x$ se verifica que $D_f = \Re^2$, por lo tanto $(a_x, a_y) \in \Re^2$ es punto de acumulación de D_f

Adoptando un valor $\varepsilon \in \Re^+$ se verifica que $\left|f(x, y) - l\right| = \left|kx - ka_x\right| = |k| \cdot \left|x - a_x\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow$

$\left|x - a_x\right| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$

O sea que $\left\|(x, y) - (a_x, a_y)\right\| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x - a_x)^2} = \left|x - a_x\right| < \delta$

Por lo tanto $\forall \varepsilon \in \Re^+, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|} \in \Re^+ / \forall (x, y) \in \Re^2 : \left[\left\|(x, y) - (a_x, a_y)\right\| < \delta \Rightarrow \left|f(x, y) - l\right| < \varepsilon \right]$

Funciones escalares

Teorema 1

Siendo $\lim\limits_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x,y) = l$

$\lim\limits_{x\to a_x} y(x) = y(a_x) = a_y$ (y es continua en a_x) y

Si existe $\lim\limits_{x\to a_x} f(x, y(x))$

entonces

$$\lim_{x\to a_x} f(x, y(x)) = l$$

3) Verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe

Dada la función $y(x) = m\cdot x$ tal que $m \in \Re$, continua en $x=0$ tal que $y(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, m\cdot x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot m\cdot x}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Dado que el límite es función de *m*, se observa que no es único.

Por lo tanto se puede afirmar que no existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

4) Verificar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y}$ no existe

Dada la función $y(x) = m\cdot x$ tal que $m \in \Re - \{0\}$, continua en $x=0$ tal que $y(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, m\cdot x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{m} = 0$$ (si el límite existiese debería ser igual a 0)

Dada la función $y(x) = a\cdot x^2$ tal que $a \in \Re - \{0\}$, continua en $x=0$ tal que $y(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, a\cdot x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{a\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

Dado que el límite es función de *a* , se observa que no es único.

Por lo tanto se puede afirmar que no existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y}$

Teorema 2

Siendo $\lim\limits_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x,y) = l_1$

$\lim\limits_{(x,y)\to(a_x,a_y)} g(x,y) = l_2$

$k \in \Re$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} k \cdot f(x,y) = k \cdot l_1$$

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} (f \pm g)(x,y) = l_1 \pm l_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} (f \cdot g)(x,y) = l_1 \cdot l_2$$

si $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a_x,a_y)} (f / g)(x,y) = l_1 / l_2$

5) Factorear y resolver $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y)(x-y)}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+y) = 2}$$

Teorema 3

Siendo $\lim\limits_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x,y) = 0$ (f infinitésimo en (a_x, a_y))

$\left\| g(x,y) \right\| \leq k \quad \forall (x,y) \in \Re^2$ (g acotada)

$k \in \Re$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$$

6) Demostrar que a) $-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ y b) resolver $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) $x^2 \leq x^2+y^2 \quad \to \quad \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad \to \quad -\sqrt{x^2+y^2} \leq x \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad \to$

$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ya que resulta el producto de un infinitésimo por una función acotada

Continuidad

Continuidad

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de dos variables

se dice que *f* es continua en $(a_x, a_y) \in A$ si

$$\lim_{(x,y)\to(a_x,a_y)} f(x,y) = f(a_x,a_y)$$

Si *f* es continua en cada punto de *A*, se dice que *f* es continua en *A*

1) Definir continuidad de una función escalar de *n* variables

Siendo $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función de *n* variables

se dice que *f* es continua en $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in A$ si

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

Teorema 1

Sean $f, g : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ dos funciones continuas en $(a_x, a_y) \in A$

$k \in \Re$

entonces

$k \cdot f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es continua en (a_x, a_y)

$f \pm g : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es continua en (a_x, a_y)

$f \cdot g : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es continua en (a_x, a_y)

si $g(a_x, a_y) \neq 0$, $f / g : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es continua en (a_x, a_y)

Teorema 2

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función continua en (a_x, a_y) tal que $f(a_x, a_y) = k$

$g : B \subseteq \Re \to \Re$ una función continua en $k \in B$

entonces

$g \circ f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es continua en (a_x, a_y)

Teorema 3

Siendo $g : A \subseteq \Re \to \Re$ una función continua en $a_x \in A$ tal que $g(a_x) = a_y$

$f : B \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función continua en $(a_x, a_y) \in B$ tal que $f(a_x, a_y) = k$

entonces

$h(x) = f(x, g(x))$ es continua en a_x

2) Estudiar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ en (0, 0)

Para puntos que se encuentran sobre la recta $y = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$

Para puntos tales que $y \neq 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \sin(1/y) = 0$ ya que es el producto de un infinitésimo por una función acotada

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0 \quad \wedge \quad -1 \leq \sin(1/y) \leq 1$

Se puede concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ o sea que la *f* es continua en (0, 0)

3) Estudiar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$ en (0, 0)

Dada la función $y(x) = a \cdot x^2$ tal que $a \in \Re$, continua en $x = 0$ tal que $y(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, a \cdot x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot ax^2}{x^4 + (ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2}$$

Dado que el límite es función de *a*, se observa que no es único.

Se puede concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y por lo tanto la función no es continua en (0, 0)

Derivabilidad

Derivadas parciales

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

se define la derivada parcial de la función *f* respecto a la variable *x* en $(a_x, a_y) \in A$ al escalar

$$f'_x(a_x, a_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_x + t, a_y) - f(a_x, a_y)}{t}$$

se define la derivada parcial de la función *f* respecto a la variable *y* en $(a_x, a_y) \in A$ al escalar

$$f'_y(a_x, a_y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_x, a_y + t) - f(a_x, a_y)}{t}$$

1) Siendo $f(x, y) = x^2 y$, hallar $f'_x(1,2)$ y $f'_y(1,2)$

$$f'_x(1,2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1+t,2) - f(1,2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^2 \cdot 2 - 1^2 \cdot 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2 + 4t + 2t^2 - 2}{t} = \lim_{t \to 0} 4 + 2t = 4$$

$$f'_y(1,2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1,2+t) - f(1,2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1^2 \cdot (2+t) - 1^2 \cdot 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2 + t - 2}{t} = \lim_{t \to 0} 1 = 1$$

Observar que $f'_x(x, y) = 2xy$ y $f'_x(1,2) = 4$ dado que *y* se mantiene constante.

Análogamente $f'_y(x, y) = x^2$ y $f'_y(1,2) = 1$ dado que *x* se mantiene constante.

Derivada o Gradiente

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

se llama gradiente de *f* al vector

$$\vec{\nabla} f = \left(f'_x, f'_y \right)$$

2) Calcular el gradiente de $f(x, y) = x^2 y$ en (1, 2)

$$\vec{\nabla} f(1,2) = \left(f'_x(1,2), f'_y(1,2) \right) = (4,1)$$

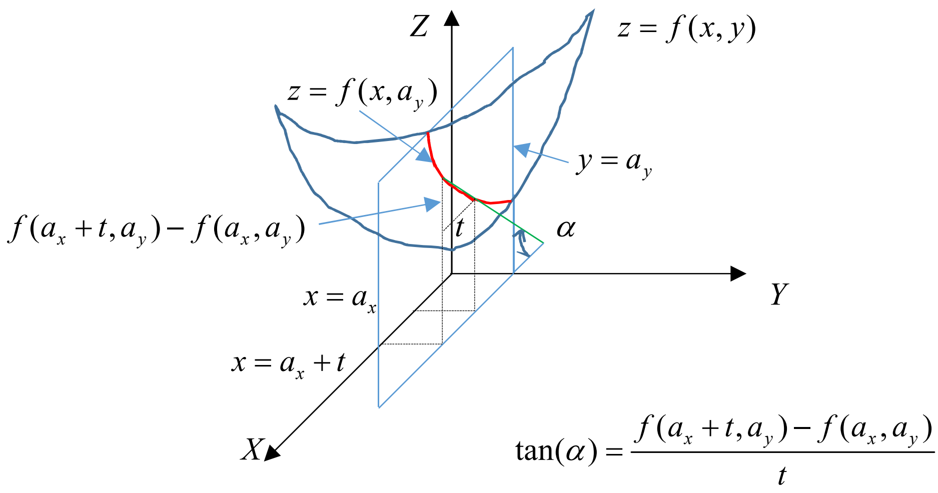
3) Hallar las derivadas parciales de $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si(x,y)=(0,0) \end{cases}$ en (0, 0)

$$f'_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}-0}{t}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot t}{0^2+t^2}-0}{t}=0$$

En el ejercicio anterior se puede observar que, a pesar de ser la función discontinua en un punto de su dominio, las derivadas parciales pueden existir en ese punto.

Observación



La derivada parcial de *f* en (a_x,a_y) respecto a la variable *x* es igual a la pendiente de la recta contenida en el plano $y=a_y$ y tangente a la gráfica de la función en el punto $(a_x,a_y,f(a_x,a_y))$

Derivadas direccionales

Siendo $f:A\subseteq\Re^2\to\Re$ una función definida en un conjunto abierto A

$\breve{v}=(v_x,v_y)\in\Re^2$ un versor tal que $v_x^2+v_y^2=1$

se define la derivada direccional de la función *f* respecto al versor $\breve{v}$ en $(a_x,a_y)\in A$ al escalar

$$f'_{\breve{v}}(a_x,a_y)=f'\big((a_x,a_y),(v_x,v_y)\big)=\frac{\partial f}{\partial\breve{v}}(a_x,a_y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_x+t\cdot v_x,a_y+t\cdot v_y)-f(a_x,a_y)}{t}$$

4) Siendo $f(x,y)=x^2y$,hallar $f'\left((1,2),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\right)$

$$f'\left((1,2),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t\cdot 1/\sqrt{2},2+t\cdot 1/\sqrt{2})-f(1,2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t/\sqrt{2})^2(2+t/\sqrt{2})-2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t/\sqrt{2}+t^2/2)\cdot(2+t/\sqrt{2})-2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2+t/\sqrt{2}+4t/\sqrt{2}+t^2+t^2+t^3/2\sqrt{2}-2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1/\sqrt{2}+4/\sqrt{2}+2t+t^2/2\sqrt{2}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

Las derivadas parciales de una función son casos particulares de las derivadas direccionales.

5) Estudiar la derivabilidad de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} & si(x,y)\neq(x,0)\\ 0 & si(x,y)=(x,0)\end{cases}$ en (0, 0)

$$f'\left((0,0),(v_x,v_y)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cdot v_x,0+t\cdot v_y)-f(0,0)}{t}$$

Para evaluar la función en $(0+t\cdot v_x,0+t\cdot v_y)$ se presentan dos posibilidades $v_y=0 \vee v_y\neq 0$

Si $v_y=0$ $\quad f'\left((0,0),(\pm 1,0)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\pm t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$

Si $v_y\neq 0$ $\quad f'\left((0,0),(v_x,v_y)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cdot v_x,0+t\cdot v_y)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2\cdot v_x^2}{t\cdot v_y}-0}{t}=\frac{v_x^2}{v_y}$

Por lo tanto se puede concluir que $f'\left((0,0),(v_x,v_y)\right)=\begin{cases}0 & si\ \ v_y=0\\ \dfrac{v_x^2}{v_y} & si\ \ v_y\neq 0\end{cases}$

En este último problema se puede observar que la existencia de derivadas direccionales de una función en toda dirección no implica su continuidad.

6) Definir a) derivada parcial y b) derivada direccional para $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$

a) Siendo $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

$\breve{e}_i \in \Re^n$ un versor cuya *i-ésima* componente es igual a 1

se define la derivada parcial de la función f respecto a la variable x_i en $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ al escalar

$$f'_{x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t \cdot \breve{e}_i) - f(\vec{a})}{t}$$

b) Siendo $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

$\breve{v} \in \Re^n$ un versor tal que $\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$

se define la derivada direccional de la función f respecto al versor $\breve{v}$ en $\vec{a} \in A$ al escalar

$$f'_{\breve{v}}(\vec{a}) = f'\left(\vec{a}, \breve{v}\right) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t \cdot \breve{v}) - f(\vec{a})}{t}$$

7) Definir gradiente de una función escalar de "n" variables.

Siendo $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

se llama gradiente de f al vector

$$\vec{\nabla} f = \left(f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n} \right)$$

Derivadas respecto a vectores

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

$\vec{v} = (v_x, v_y) \in \Re^2 - \{(0,0)\}$

se define la derivada de la función f respecto al vector $\vec{v}$ en $(a_x, a_y) \in A$ al escalar

$$f'_{\vec{v}}(a_x, a_y) = f'\left((a_x, a_y), (v_x, v_y)\right) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_x + t \cdot v_x, a_y + t \cdot v_y) - f(a_x, a_y)}{t}$$

8) Siendo $f(x,y) = x^2 y$,hallar $f'\left((1,2),(1,1)\right)$

$$f'\left((1,2),(1,1)\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + t \cdot 1, 2 + t \cdot 1) - f(1,2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^2 (2+t) - 2}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + 2t + t^2) \cdot (2 + t) - 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2 + t + 4t + 2t^2 + 2t^2 + t^3 - 2}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(5 + 4t + t^2\right) = 5$$

Funciones escalares

Teorema 1 (Homogeneidad de la derivada)

Sea $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función derivable en toda dirección en $(a_x, a_y) \in A$ y

$\vec{v} = (v_x, v_y) \in \Re^2 - \{(0,0)\}$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_x, a_y) = \|\vec{v}\| \cdot \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(a_x, a_y)$$

9) Verificar el Teorema 1 con los resultados de los puntos 3 y 6

Del punto 6) $f'\big((1,2),(1,1)\big) = 5$

Del punto 3) $\|(1,1)\| \cdot f'\Big((1,2),(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\Big) = \sqrt{2} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

10) Demostrar el Teorema 1

Por definición $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$

Dado que $\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \breve{v}$

Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + t \cdot \|\vec{v}\| \cdot \breve{v}) - f(\vec{a})}{t}$

Llamando $s = t \cdot \|\vec{v}\|$ tal que $s \to 0$ cuando $t \to 0$

Resulta $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + s \cdot \breve{v}) - f(\vec{a})}{s / \|\vec{v}\|} = \|\vec{v}\| \cdot \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + s \cdot \breve{v}) - f(\vec{a})}{s} = \|\vec{v}\| \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \breve{v}}(\vec{a})$

Derivabilidad de orden superior a uno

Derivadas parciales de segundo orden

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A tal que existen las derivadas parciales $f'_x: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ y $f'_y: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ se llaman derivadas parciales de segundo orden de *f* en $(a_x, a_y) \in A$ a:

$$f''_{xx}(a_x, a_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f'_x(a_x + t, a_y) - f'_x(a_x, a_y)}{t}$$

$$f''_{xy}(a_x, a_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f'_x(a_x, a_y + t) - f'_x(a_x, a_y)}{t}$$

$$f''_{yx}(a_x, a_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f'_y(a_x + t, a_y) - f'_y(a_x, a_y)}{t}$$

$$f''_{yy}(a_x, a_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_x, a_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f'_y(a_x, a_y + t) - f'_y(a_x, a_y)}{t}$$

1) Calcular las derivadas parciales de segundo orden de de $f(x, y) = x^2 y$ en (1, 2)

Derivadas parciales de primer orden: $f'_x(x, y) = 2xy$ y $f'_y(x, y) = x^2$

Derivadas parciales de segundo orden: $f''_{xx}(x, y) = 2y$, $f''_{xy}(x, y) = 2x$, $f''_{yx}(x, y) = 2x$ y $f''_{yy}(x, y) = 0$

En el punto (1,2): $f''_{xx}(1,2) = 4$, $f''_{xy}(1,2) = 2$, $f''_{yx}(1,2) = 2$ y $f''_{yy}(1,2) = 0$

2) Verificar que la función $u(x,t) = (x - at)^2 + (x + at)^3$ satisface la ecuación (del calor)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Primero se calculan las derivadas parciales requeridas

$u'_x(x,t) = 2(x - at) + 3(x + at)^2$ $\quad$ $u'_t(x,t) = -2a \cdot (x - at) + 3a \cdot (x + at)^2$

$u''_{xx}(x,t) = 2 + 6(x + at)$ $\quad$ $u''_{tt}(x,t) = 2a^2 + 6a^2 \cdot (x + at)$

Reemplazando en el miembro izquierdo de la ecuación diferencial

$u''_{tt}(x,t) = 2a^2 + 6a^2 \cdot (x + at)$

Reemplazando en el miembro derecho de la ED

$a^2 \cdot u''_{xx}(x,t) = 2a^2 + 6a^2 \cdot (x + at)$

Se observa que ambos miembros son iguales.

Matriz Hessiana

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

se llama matriz Hessiana de f a

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

3) Expresar la matriz Hessiana de $f(x, y) = x^2 y$ en (1, 2)

$$\boxed{Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Funciones de clase C^1

Se dice que la función $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ definida en el conjunto abierto A

es de clase C^1 o $f \in C^1$ si

$f'_x : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ y $f'_y : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ son funciones continuas en A

Funciones de clase C^k

Se dice que la función $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es de clase C^k o $f \in C^k$ si todas las derivadas parciales de k-ésimo orden de f son continuas en A

Funciones de clase C^∞

Se dice que la función $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es de clase C^∞ o $f \in C^\infty$ si todas las derivadas parciales de todo lo orden de f son continuas en A

Funciones de clase C^0

Se dice que la función $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ es de clase C^0 o $f \in C^0$ si f es continua en A

Los polinomios son funciones de C^∞ ya que las derivadas parciales de un polinomio son otros polinomios y estos siempre son continuos.

Teorema 1 (Schwarz)

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función tal que $f \in C^2$ en $(a_x, a_y) \in A$

entonces

$$f''_{xy}(a_x, a_y) = f''_{yx}(a_x, a_y)$$

4) Verificar que la función $f(x, y) = x^2 y$ satisface el Teorema 1 en (1, 2)

$f \in C^2$ ya que es una función polinómica

$f''_{xy}(1,2) = 2$, $f''_{yx}(1,2) = 2$

5) Definir derivada parcial de segundo orden de una función escalar de "n" variables.

Siendo $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

$\breve{e}_i \in \Re^n$ un versor cuya *i-ésima* componente es igual a 1

se define la derivada parcial de segundo orden de la función *f* respecto a las variable x_i , x_j en $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in A$ al escalar

$$f''_{x_i x_j}(\vec{a}) = \left(f'_{x_i}\right)'_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f'_{x_i}(\vec{a} + t \cdot \breve{e}_j) - f'_{x_i}(\vec{a})}{t}$$

6) Definir matriz Hessiana de una función escalar de "n" variables.

Siendo $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$ una función definida en un conjunto abierto A

se llama matriz Hessiana de *f* a

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & & f''_{x_2x_n} \\ \cdots & & & \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Diferenciabilidad

Diferencial

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A

$(a_x, a_y) \in A$

se denomina diferencial de f en (a_x, a_y) a la función

$$df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y)) = f'_x(a_x, a_y) \cdot \Delta x + f'_y(a_x, a_y) \cdot \Delta y = \vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot (\Delta x, \Delta y)$$

1) Calcular el diferencial de $f(x, y) = x^2 y$ en (1,2)

$$f'_x(x, y) = 2xy \quad \to \quad f'_x(1,2) = 4$$

$$f'_y(x, y) = x^2 \quad \to \quad f'_y(1,2) = 1$$

$$df((1,2), (\Delta x, \Delta y)) = (4,1) \cdot (\Delta x, \Delta y) = 4\Delta x + \Delta y$$

Diferenciabilidad

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A

se dice que f es diferenciable en $(a_x, a_y) \in A$ si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y))}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Si una función es diferenciable en todos los puntos de su dominio entonces se dice diferenciable.

2) Verificar que $f(x, y) = x^2 y$ es diferenciable en (1,2)

$$f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) = (1 + 2\Delta x + \Delta x^2) \cdot (2 + \Delta y) = 2 + 4\Delta x + 2\Delta x^2 + \Delta y + 2\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y$$

$$f(1,2) = 2$$

$$df((1,2), (\Delta x, \Delta y)) = 4\Delta x + \Delta y$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2 + 4\Delta x + 2\Delta x^2 + \Delta y + 2\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y - 2 - 4\Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2\Delta x^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Funciones escalares

Teorema 1

Sea $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de clase C^1 en el conjunto abierto A

$(a_x, a_y) \in A$

entonces

f es diferenciable en (a_x, a_y)

Las funciones polinómicas son diferenciables ya que tienen derivadas parciales continuas.

Teorema 2

Sea $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en $(a_x, a_y) \in A$

entonces

f es continua en (a_x, a_y)

3) Demostrar el Teorema 2

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en $(a_x, a_y) \in A$

Por definición $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y))}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$

Dado que el denominador es un infinitésimo, el numerador es un infinitésimo de orden superior

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - f'_x(a_x, a_y) \cdot \Delta x - f'_y(a_x, a_y) \cdot \Delta y \right] = 0$$

Distribuyendo el límite

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(a_x, a_y) - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f'_x(a_x, a_y) \cdot \Delta x - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f'_y(a_x, a_y) \cdot \Delta y = 0$$

Resolviendo los límites $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) = f(a_x, a_y)$

Llamando $x = a_x + \Delta x$ e $y = a_y + \Delta y$

$\lim\limits_{(x,y) \to (a_x, a_y)} f(x, y) = f(a_x, a_y)$ o sea f es continua en (a_x, a_y)

4) Estudiar la diferenciabilidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & si(x,y) \neq (x,0) \\ 0 & si(x,y) = (x,0) \end{cases}$ en (0,0)

Dado que la función f no es continua en (0,0) entonces no es diferenciable en dicho punto.

Teorema 3

Sea $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en $(a_x, a_y) \in A$

entonces

f es derivable en (a_x, a_y) en toda dirección y

$$f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = \vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot \breve{v}$$

5) Demostrar el Teorema 3

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en $(a_x, a_y) \in A$

Por definición $$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y))}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Distribuyendo el límite

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot (\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$$

Siendo $\vec{v} = (\Delta x, \Delta y)$ y $\breve{v} = \dfrac{(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f((a_x, a_y) + \|(\Delta x, \Delta y)\| \cdot \breve{v}) - f(a_x, a_y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot \breve{v}$$

Además $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ si y solo si $\|(\Delta x, \Delta y)\| = t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((a_x, a_y) + t \cdot \breve{v}) - f(a_x, a_y)}{t} = \vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot \breve{v}$$

$$f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = \vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot \breve{v}$$

6) Siendo $f(x, y) = x^2 y$, hallar $f'\left((1,2), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\right)$

La función $f \in C^1$ por lo tanto $f'\left((1,2), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\right) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$$f'_x(x, y) = 2xy$$

$$f'_y(x, y) = x^2$$

$$f'\left((1,2), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\right) = (4,1) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = 5/\sqrt{2}$$

7) Verificar que $f'_{\breve{v}}(0,0) \neq \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \breve{v}$ en la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & si(x,y) \neq (x,0) \\ 0 & si(x,y) = (x,0) \end{cases}$

Del punto 5) del capítulo Derivabilidad $f'\left((0,0),(v_x,v_y)\right) = \begin{cases} 0 & si\ \ v_y = 0 \\ \dfrac{v_x^2}{v_y} & si\ \ v_y \neq 0 \end{cases}$

$\vec{\nabla} f(0,0) \cdot (v_x, v_y) = (0,0) \cdot (v_x, v_y) = 0$

Por lo tanto si $v_x \neq 0$ y $v_y \neq 0$ se verifica que $f'_{\breve{v}}(0,0) \neq \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \breve{v}$

O sea que *f* no es diferenciable en (0,0)

Teorema 4

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en $(a_x, a_y) \in A$

entonces

la derivada direccional máxima en (a_x, a_y) es igual a $\left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\|$ y corresponde al versor $\breve{v} = \dfrac{\vec{\nabla} f(a_x, a_y)}{\left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\|}$

la derivada direccional mínima en (a_x, a_y) es igual a $-\left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\|$ y corresponde al versor $\breve{v} = -\dfrac{\vec{\nabla} f(a_x, a_y)}{\left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\|}$

la derivada direccional es nula en las direcciones ortogonales al gradiente.

8) Demostrar el Teorema 4

$f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = \vec{\nabla} f(a_x, a_y) \cdot \breve{v} = \left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\| \cdot \left\|\breve{v}\right\| \cdot \cos(\alpha)$ siendo α el ángulo entre ambos vectores

$f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = \left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\| \cdot \cos(\alpha)$

Por lo tanto

max $f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = \left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\|$ cuando $\cos(\alpha) = 1$ o sea cuando $\alpha = 0$

min $f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = -\left\|\vec{\nabla} f(a_x, a_y)\right\|$ cuando $\cos(\alpha) = -1$ o sea cuando $\alpha = \pi$

$f'_{\breve{v}}(a_x, a_y) = 0$ cuando $\cos(\alpha) = 0$ o sea cuando $\alpha = \pi/2$ ó $\alpha = -\pi/2$

9) Siendo $f(x,y)=x^2y$, hallar en (1, 2) la derivada direccional máxima, la mínima y las respectivas direcciones. Luego determinar las direcciones en que las derivadas se anulan en ese mismo punto.

La función $f\in C^1$ por lo tanto

$$\max f'_{\breve{v}}(1,2)=\left\|\vec{\nabla}f(1,2)\right\|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17} \quad \text{siendo} \quad \breve{v}=\frac{\vec{\nabla}f(1,2)}{\left\|\vec{\nabla}f(1,2)\right\|}=\frac{(4,1)}{\sqrt{17}}=\left(\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\min f'_{\breve{v}}(1,2)=-\left\|\vec{\nabla}f(1,2)\right\|=-\sqrt{17} \quad \text{siendo} \quad \breve{v}=-\frac{\vec{\nabla}f(1,2)}{\left\|\vec{\nabla}f(1,2)\right\|}=-\frac{(4,1)}{\sqrt{17}}=\left(-\frac{4}{\sqrt{17}},-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

$$f'_{\breve{v}}(1,2)=0 \quad \text{si} \quad \breve{v}=\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \quad \text{ó} \quad \breve{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

Aproximación lineal

Observación

Si $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en el conjunto abierto A

$(a_x, a_y) \in A$

entonces

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y))}{\left\|(\Delta x, \Delta y)\right\|} = 0$$

En forma equivalente

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\left\|(\Delta x, \Delta y)\right\|} = 0$$

Siendo

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - f'_x(a_x, a_y) \cdot \Delta x - f'_y(a_x, a_y) \cdot \Delta y$$

O sea

$$f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) = f(a_x, a_y) + f'_x(a_x, a_y) \cdot \Delta x + f'_y(a_x, a_y) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

Cuando Δx y Δy son pequeños

$$f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) \simeq f(a_x, a_y) + f'_x(a_x, a_y) \cdot \Delta x + f'_y(a_x, a_y) \cdot \Delta y$$

y

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) < \left\|(\Delta x, \Delta y)\right\|$$

Funciones escalares

1) Calcular el área de un rectángulo de base 6.01 y altura 5.02 en forma exacta y luego en forma aproximada haciendo uso del diferencial de la función. Evaluar el error o término complementario y compararlo con la norma del incremento de las variables.

El área de un rectángulo de lados x e y es $a(x,y)=x\cdot y$ tal que $x\in\Re^{+}$, $y\in\Re^{+}$

$$a(6.01,5.02)=6.01\cdot 5.02=30.1702$$

$$a(6+0.01,5+0.02)=a(6,5)+a'_x(6,5)\cdot 0.01+a'_y(6,5)\cdot 0.02+\varepsilon(0.01,0.02)$$

$$a(6,5)=6\cdot 5=30$$

$$a'_x(x,y)=y \quad\rightarrow\quad a'_x(6,5)=5$$

$$a'_y(x,y)=x \quad\rightarrow\quad a'_y(6,5)=6$$

$$a(6+0.01,5+0.02)\simeq 30+5\cdot 0.01+6\cdot 0.02=30+0.05+0.12=30.17$$

Para pequeños variaciones de las variables independientes

$$\varepsilon(0.01,0.02)=30.1702-30.17=0.0002$$

Observar que siendo

$$\|(0.01,0.02)\|=\sqrt{0.01^2+0.02^2}=0.0223...$$

Se verifica que

$$\varepsilon(0.01,0.02)<\|(0.01,0.02)\|$$

2) Calcular el volumen de material requerido para construir un vaso cilíndrico de radio interior r, altura interior h y espesor e en forma exacta y mediante una aproximación lineal. Comparar los resultados.

$$vol(r,h)=\pi r^2 h$$

$$vol(r+e,h+e)=\pi\cdot(r+e)^2\cdot(h+e)=\pi\cdot(r^2h+2reh+e^2h+r^2e+2re^2+e^3)$$

$$vol_{mat}=\Delta vol=vol(r+e,h+e)-vol(r,h)$$

$$\Delta vol=\pi e\cdot(2rh+eh+r^2+2re+e^2)$$

$$vol'_r(r,h)=2\pi rh$$

$$vol'_h(r,h)=\pi r^2$$

$$dvol(r,h)=2\pi rh\cdot e+\pi r^2\cdot e=\pi e\cdot(2rh+r^2)$$

$$\varepsilon=\Delta vol-dvol=\pi e^2\cdot(h+2r+e)$$

Observación

Si $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable en el conjunto abierto A

$(a_x, a_y) \in A$

entonces

$$f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) = f(a_x, a_y) + f_x'(a_x, a_y) \cdot \Delta x + f_y'(a_x, a_y) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Llamando

$x = a_x + \Delta x$ tal que $\Delta x = x - a_x$

$y = a_y + \Delta y$ tal que $\Delta y = y - a_y$

Resulta

$$f(x, y) = f(a_x, a_y) + f_x'(a_x, a_y) \cdot (x - a_x) + f_y'(a_x, a_y) \cdot (y - a_y) + \varepsilon\left((x - a_x, y - a_y)\right)$$

$$\lim_{(x,y) \to (a_x, a_y)} \frac{\varepsilon\left((x - a_x, y - a_y)\right)}{\|(x - a_x, y - a_y)\|} = 0$$

<u>Plano tangente, vector normal y recta normal a la gráfica de una función</u>

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función tal que $f \in C^1$ en $(a_x, a_y) \in A$

se define como plano tangente a la gráfica de *f* en $(a_x, a_y, f(a_x, a_y))$ a

$$z = f(a_x, a_y) + f_x'(a_x, a_y) \cdot (x - a_x) + f_y'(a_x, a_y) \cdot (y - a_y)$$

se define como vector normal a la gráfica de *f* en $(a_x, a_y, f(a_x, a_y))$ a

$$\vec{n}(a_x, a_y, f(a_x, a_y)) = \left(-f_x'(a_x, a_y), -f_y'(a_x, a_y), 1\right)$$

se define como recta normal a la gráfica de *f* en $(a_x, a_y, f(a_x, a_y))$ a

$$(x, y, z) = (a_x, a_y, f(a_x, a_y)) + t \cdot \left(-f_x'(a_x, a_y), -f_y'(a_x, a_y), 1\right) \quad t \in \Re$$

3) Hallar el planto tangente, vector normal y la recta normal a la gráfica de $f(x,y)=x^2+y^2$ en $(1,2,f(1,2))$. Graficar.

$f(1,2)=1^2+2^2=5$

$f'_x(x,y)=2x \quad \rightarrow \quad f'_x(1,2)=2$

$f'_y(x,y)=2y \quad \rightarrow \quad f'_y(1,2)=4$

$z=f(1,2)+f'_x(1,2)\cdot(x-1)+f'_y(1,2)\cdot(y-2)$

$z=5+2\cdot(x-1)+4\cdot(y-2)$ (plano tangente)

$\vec{n}(1,2,f(1,2))=\left(-f'_x(1,2),-f'_y(1,2),1\right)$

$\vec{n}(1,2,5)=\left(-2,-4,1\right)$ (vector normal)

$(x,y,z)=(1,2,f(1,2))+t\cdot\left(-f'_x(1,2),-f'_y(1,2),1\right) \quad t\in\Re$

$(x,y,z)=(1,2,5)+t\cdot\left(-2,-4,1\right) \quad t\in\Re$ (recta normal)

Funciones compuestas

1) Siendo $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u \cdot \cos(v)$ y $y = u \cdot \sin(v)$

Calcular el gradiente de $z = h(u,v)$

$$x^2 + y^2 = u^2 \cdot \cos^2(v) + u^2 \cdot \sin^2(v) = u^2$$

$$z = \ln(u^2)$$

$$z'_u = \frac{2}{u} \quad \text{y} \quad z'_v = 0$$

$$\vec{\nabla} h = \left(\frac{2}{u}, 0 \right)$$

Teorema 1

Siendo $z = z(x,y)$, $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ funciones de clase C^1

entonces

$z = z\left[x(u,v), y(u,v)\right] = h(u,v)$ es una función de clase C^1 y

$$h'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u$$

$$h'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v$$

2) Siendo $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u \cdot \cos(v)$ y $y = u \cdot \sin(v)$

Calcular el gradiente de $z = h(u,v)$ haciendo uso del Teorema 1

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2u \cdot \cos(v)}{u^2} \quad \text{y} \quad z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2u \cdot \sin(v)}{u^2}$$

$$x'_u = \cos(v) \quad , \quad x'_v = -u \cdot \sin(v) \quad , \quad y'_u = \sin(v) \quad \text{e} \quad y'_v = u \cdot \cos(v)$$

$$h'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = \frac{2 \cdot \cos(v)}{u} \cdot \cos(v) + \frac{2 \cdot \sin(v)}{u} \cdot \sin(v) = \frac{2}{u}$$

$$h'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = \frac{2 \cdot \cos(v)}{u} \cdot \left(-u \cdot \sin(v)\right) + \frac{2 \cdot \sin(v)}{u} \cdot u \cdot \cos(v) = 0$$

$$\vec{\nabla} h = \left(\frac{2}{u}, 0 \right)$$

Funciones escalares

3) Siendo $z = f(xy)$ tal que $f \in C^1$

Calcular el gradiente de $z = z(x, y)$

Siendo $u(x, y) = xy$ entonces $u'_x = y$ y $u'_y = x$

$z'_x = f' \cdot u'_x = f'(xy) \cdot y$ y $z'_y = f' \cdot u'_y = f'(xy) \cdot x$

$\vec{\nabla} z = \left(f'(xy) \cdot y, f'(xy) \cdot x \right)$

4) Siendo $z = f(x - y, y - x)$ tal que $f \in C^1$

Verificar que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv 0$

Siendo $u(x, y) = x - y$ y $v(x, y) = y - x$

Entonces $u'_x = 1$, $u'_y = -1$, $v'_x = -1$ y $v'_y = 1$

$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u(u, v) - f'_v(u, v)$

$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -f'_u(u, v) + f'_v(u, v)$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv 0$

<u>Coordenadas polares en el plano</u>

Denominaremos coordenadas polares de un punto $(x, y) \in \Re^2$

al par $(\rho, \varphi) \in \Re_0^+ \times \left[0, 2\pi\right)$ tal que

$$(x, y) = (\rho \cdot \cos(\varphi), \rho \cdot \mathrm{sen}(\varphi))$$

5) Expresar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en coordenadas polares y calcular su respectivo gradiente.

Siendo $x = \rho \cdot \cos(\varphi)$ e $y = \rho \cdot \mathrm{sen}(\varphi)$

$h(\rho, \varphi) = f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) = \rho^2 \cdot \cos^2(\varphi) + \rho^2 \cdot \sin^2(\varphi) = \rho^2 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} h(\rho, \varphi) = (2\rho, 0)$

Observar que $f'_x(x, y) = 2x$ y $f'_y(x, y) = 2y$

$x'_\rho = \cos(\varphi)$, $x'_\varphi = -\rho \cdot \sin(\varphi)$, $y'_\rho = \mathrm{sen}(\varphi)$ e $y'_\varphi = \rho \cdot \cos(\varphi)$

$h'_\rho = f'_x \cdot x'_\rho + f'_y \cdot y'_\rho = 2 \cdot \rho \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + 2 \cdot \rho \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = 2\rho$

$h'_\varphi = f'_x \cdot x'_\varphi + f'_y \cdot y'_\varphi = -2 \cdot \rho^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + 2 \cdot \rho^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \equiv 0$

Coordenadas polares en el espacio o coordenadas esféricas

Denominaremos coordenadas esféricas de un punto $(x, y, z) \in \Re^3$

a la terna $(\rho, \theta, \varphi) \in \Re_0^+ \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$ tal que

$$(x, y, z) = (\rho \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi), \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\varphi), \rho \cdot \text{sen}(\theta))$$

6) Expresar la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en coordenadas esféricas y calcular su respectivo gradiente.

Siendo $x = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)$, $y = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\varphi)$ y $z = \rho \cdot \text{sen}(\theta)$

$$h(\rho,\theta,\varphi) = f(x(\rho,\theta,\varphi), y(\rho,\theta,\varphi), z(\rho,\theta,\varphi)) = \rho^2 \cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\theta)$$

$$h(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2$$

Además $f'_x(x, y, z) = 2x$, $f'_y(x, y, z) = 2y$ y $f'_z(x, y, z) = 2z$

$$x'_\rho = \cos(\theta)\cos(\varphi) \quad , \quad x'_\theta = -\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \quad , \quad x'_\varphi = -\rho\cos(\theta)\sin(\varphi)$$

$$y'_\rho = \cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi) \quad , \quad y'_\theta = -\rho\sin(\theta)\,\text{sen}(\varphi) \quad , \quad y'_\varphi = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi)$$

$$z'_\rho = \text{sen}(\theta) \quad , \quad z'_\theta = \rho\cos(\theta) \quad , \quad z'_\varphi = 0$$

$$h'_\rho = f'_x \cdot x'_\rho + f'_y \cdot y'_\rho + f'_z \cdot z'_\rho$$

$$h'_\rho = 2\rho\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + 2\rho\cos^2(\theta)\,\text{sen}^2(\varphi) + 2\rho\,\text{sen}^2(\theta) = 2\rho$$

$$h'_\theta = f'_x \cdot x'_\theta + f'_y \cdot y'_\theta + f'_z \cdot z'_\theta$$

$$h'_\theta = -2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) - 2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,\text{sen}^2(\varphi) + 2\rho^2\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = 0$$

$$h'_\varphi = f'_x \cdot x'_\varphi + f'_y \cdot y'_\varphi + f'_z \cdot z'_\varphi$$

$$h'_\varphi = -2\rho^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + 2\rho^2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + 2\rho\sin(\varphi) \cdot 0 = 0$$

$$\vec{\nabla} h(\rho,\theta,\varphi) = (2\rho, 0, 0)$$

Coordenadas cilíndricas

Denominaremos coordenadas cilíndricas de un punto $(x, y, z) \in \Re^3$

a la terna $(\rho, \varphi, z) \in \Re_0^+ \times [0, 2\pi) \times \Re$ tal que

$$(x, y, z) = (\rho \cdot \cos(\varphi), \rho \cdot \text{sen}(\varphi), z)$$

Funciones definidas en forma implícita

Función de una variable definida en forma implícita

Siendo $y : A \subseteq \Re \to \Re \,/\, A$ es abierto

$g : B \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, B$ es abierto y

$$g(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in A$$

se dice que la ecuación $g(x, y) = 0$ define en forma implícita a la función $y(x)$ en A

1) Verificar que la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define implícitamente a la función $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $(-2, 2)$

Reemplazando $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$

O sea $x^2 + \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 - 4 = x^2 + 4 - x^2 - 4 \equiv 0 \quad \forall x \in (-2, 2)$

Teorema 1 (de la función implícita I)

Sea $g : B \subseteq \Re^2 \to \Re$ tal que

$$g \in C^1$$

$$g(a_x, a_y) = 0$$

$$g'_y(a_x, a_y) \neq 0$$

entonces

la ecuación $g(x, y) = 0$ define implícitamente a una función $y(x)$ en un conjunto abierto A tal que

$$a_x \in A \quad , \quad y \in C^1 \quad \text{e} \quad y'(a_x) = -\frac{g'_x(a_x, a_y)}{g'_y(a_x, a_y)}$$

2) Hallar la ecuación de la recta tangente a $x^2 + y^2 = 2$ en el punto (1,1)

Siendo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ tal que $g \in C^1$, $g(1,1) = 0$

$g'_y(x,y) = 2y \quad \rightarrow \quad g'_y(1,1) = 2 \neq 0$

Por lo tanto, la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ define implícitamente a una función $y(x)$ en un conjunto abierto A tal que $1 \in A$, $y \in C^1$ e $y'(1) = -\dfrac{g'_x(1,1)}{g'_y(1,1)} = -\left.\dfrac{2x}{2y}\right|_{(1,1)} = -1$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en (1,1) es

$y = y'(1)\cdot(x-1) + y(1) \quad \rightarrow \quad y = -1\cdot(x-1)+1 \quad \rightarrow \quad y = -x+2$

Función de dos variables definida en forma implícita

Siendo $z : A \subseteq \Re^2 \rightarrow \Re \,/\, A$ es abierto

$g : B \subseteq \Re^3 \rightarrow \Re \,/\, B$ es abierto y

$$g(x,y,z(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in A$$

se dice que la ecuación $g(x,y,z) = 0$ define en forma implícita a la función $z(x,y)$ en A

Teorema 4 (de la función implícita II)

Sea $g : B \subseteq \Re^3 \rightarrow \Re$ tal que

$$g \in C^1$$

$$g(a_x, a_y, a_z) = 0$$

$$g'_z(a_x, a_y, a_z) \neq 0$$

entonces

la ecuación $g(x,y,z) = 0$ define implícitamente a una función $z(x,y)$ en un conjunto abierto A tal que

$(a_x, a_y) \in A$, $z \in C^1$,

$$z_x{}'(a_x,a_y) = -\frac{g'_x(a_x,a_y,a_z)}{g'_z(a_x,a_y,a_z)} \quad \text{y} \quad z_y{}'(a_x,a_y) = -\frac{g'_y(a_x,a_y,a_z)}{g'_z(a_x,a_y,a_z)}$$

3) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Siendo $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ tal que $g\in C^1$, $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$

$g'_z(x,y,z)=2z \quad\rightarrow\quad g'_z\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\neq 0$

Por lo tanto, la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ define implícitamente a una función $z(x,y)$ en un conjunto abierto A tal que $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\in A$, $z\in C^1$ y

$$z_x'(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=-\frac{g'_x(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})}{g'_z(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})}=-\left.\frac{2x}{2z}\right|_{(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})}=-\frac{2/\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}}=-1$$

$$z_y'(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=-\frac{g'_y(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})}{g'_z(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})}=-\left.\frac{2y}{2z}\right|_{(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})}=-\frac{2/\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}}=-1$$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de una función $z(x,y)$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$z=z(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})+z'_x(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\cdot(x-1/\sqrt{3})+z'_y(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\cdot(y-1/\sqrt{3})$$

Resulta $z=1/\sqrt{3}-1\cdot(x-1/\sqrt{3})-1\cdot(y-1/\sqrt{3})$

4) Demostrar que $x^2 \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = \frac{1}{z}$ siendo $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$

$$g(x,y,z) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2} \equiv 0$$

$$g'_x(x,y,z) = -\frac{2}{x^2} \quad , \quad g'_y(x,y,z) = -\frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}} \quad , \quad g'_z(x,y,z) = 2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}$$

Resulta

$$z'_x = -\frac{g'_x}{g'_z} = \frac{2/x^2}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} \quad , \quad z'_y = -\frac{g'_y}{g'_z} = \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$x^2 \cdot z'_x + \frac{1}{y} \cdot z'_y = x^2 \frac{2/x^2}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} + \frac{1}{y} \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} = \frac{2}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{y^2 - z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} =$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{y^2 - z^2}}}{2 + \frac{1}{\sqrt{y^2 - z^2}}} \equiv \frac{1}{z}$$

5) Siendo $\dfrac{z}{x} = f\left(\dfrac{y}{z}\right)$ y $f \in C^1$, verificar que $z = x \cdot z'_x + y \cdot z'_y$

$$g(x,y,z) = \frac{z}{x} - f\left(\frac{y}{z}\right) \equiv 0$$

$$g'_x = -\frac{z}{x^2} \quad , \quad g'_y = -f'\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\frac{1}{z} \quad , \quad g'_z = \frac{1}{x} - f'\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)$$

$$z'_x = -\frac{g'_x}{g'_z} = \frac{\dfrac{z}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{z^2}\right)} \quad , \quad z'_y = -\frac{g'_y}{g'_z} = \frac{f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\dfrac{1}{z}}{\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{z^2}\right)}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = x \cdot \frac{\dfrac{z}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{z^2}\right)} + y \cdot \frac{f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\dfrac{1}{z}}{\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{z^2}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{z}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\dfrac{y}{z}}{\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{z^2}\right)} = \frac{z \cdot \left[\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\dfrac{y}{z^2}\right]}{\dfrac{1}{x} + f'\left(\dfrac{y}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{z^2}\right)} \equiv z$$

<u>Vector normal, plano tangente y recta normal a la superficie de nivel de una función</u>

Siendo $g : B \subseteq \Re^3 \to \Re$ una función tal que

$g \in C^1$

$g(a_x, a_y, a_z) = k$

$\vec{\nabla} g(a_x, a_y, a_z) \neq \vec{0}$

se define como vector normal al conjunto de nivel "*k*" de g en (a_x, a_y, a_z) al vector

$$\vec{n}(a_x, a_y, a_z) = \vec{\nabla} g(a_x, a_y, a_z)$$

se define como plano tangente al conjunto de nivel "*k*" de g en (a_x, a_y, a_z)

$$g'_x(a_x, a_y, a_z)\cdot(x - a_x) + g'_y(a_x, a_y, a_z)\cdot(y - a_y) + g'_z(a_x, a_y, a_z)\cdot(z - a_z) = 0$$

se define como recta normal al conjunto de nivel "*k*" de g en (a_x, a_y, a_z)

$$(x, y, z) = (a_x, a_y, a_z) + t \cdot \vec{\nabla} g(a_x, a_y, a_z) \quad t \in \Re$$

6) Hallar el vector normal, el plano tangente y la recta normal al elipsoide de ecuación $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ en $(\frac{1}{2},1,\frac{3}{\sqrt{2}})$. Graficar.

$g(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}$ tal que $g\in C^1$ y $g(1/2,1,3/\sqrt{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$

$g'_x=2x \quad , \quad g'_y=\frac{y}{2} \quad , \quad g'_z=\frac{2z}{9}$

$\vec{\nabla}g(x,y,z)=\left(2x,\frac{y}{2},\frac{2z}{9}\right) \rightarrow \vec{\nabla}g(1/2,1,3/\sqrt{2})=\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\neq(0,0,0)$

El vector normal al elipsoide en $(1/2,1,3/\sqrt{2})$ es $\vec{n}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

El plano tangente al elipsoide en $(1/2,1,3/\sqrt{2})$ es $(x-1/2)+\frac{1}{2}\cdot(y-1)+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot(z-\frac{3}{\sqrt{2}})=0$

La recta normal al elipsoide en $(1/2,1,3/\sqrt{2})$ es $(x,y,z)=(1/2,1,\frac{3}{\sqrt{2}})+t\cdot\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \quad t\in\Re$

Diferenciabilidad de orden superior a uno

Diferencial de orden "n"

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A se denomina diferencial de orden "n" de f a la función

$$d^n f(\Delta x, \Delta y) = d\left(d^{n-1} f(\Delta x, \Delta y)\right)$$

1) Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A, calcular el diferencial de segundo y tercer orden de f en un punto de su dominio.

Recordando que $df(\Delta x, \Delta y) = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y$

$$d^2 f(\Delta x, \Delta y) = d\left(df(\Delta x, \Delta y)\right) = d\left(f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y\right)$$

$$d^2 f(\Delta x, \Delta y) = \left(f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y\right)'_x \cdot \Delta x + \left(f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y\right)'_y \cdot \Delta y$$

$$d^2 f(\Delta x, \Delta y) = \left(f''_{xx} \cdot \Delta x + f''_{yx} \cdot \Delta y\right) \cdot \Delta x + \left(f''_{xy} \cdot \Delta x + f''_{yy} \cdot \Delta y\right) \cdot \Delta y$$

$$d^2 f(\Delta x, \Delta y) = f''_{xx} \cdot \Delta x^2 + f''_{yx} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot \Delta y^2$$

Si $f \in C^2$

$$d^2 f(\Delta x, \Delta y) = f''_{xx} \cdot \Delta x^2 + 2 f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot \Delta y^2$$

En forma similar

$$d^3 f(\Delta x, \Delta y) = d\left(d^2 f(\Delta x, \Delta y)\right) = d\left(f''_{xx} \cdot \Delta x^2 + f''_{yx} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot \Delta y^2\right)$$

$$d^3 f(\Delta x, \Delta y) = \left(f''_{xx} \cdot \Delta x^2 + f''_{yx} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot \Delta y^2\right)'_x \cdot \Delta x +$$
$$+ \left(f''_{xx} \cdot \Delta x^2 + f''_{yx} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot \Delta y^2\right)'_y \cdot \Delta y$$

$$d^3 f(\Delta x, \Delta y) = f'''_{xxx} \cdot \Delta x^3 + f'''_{yxx} \cdot \Delta x^2 \Delta y + f'''_{xyx} \cdot \Delta x^2 \Delta y + f'''_{yyx} \cdot \Delta x \Delta y^2 +$$
$$+ f'''_{xxy} \cdot \Delta x^2 \Delta y + f'''_{yxy} \cdot \Delta x \Delta y^2 + f'''_{xyy} \cdot \Delta x \Delta y^2 + f'''_{yyy} \cdot \Delta y^3$$

Si $f \in C^3$

$$d^3 f(\Delta x, \Delta y) = f'''_{xxx} \cdot \Delta x^3 + 3 f'''_{xxy} \cdot \Delta x^2 \Delta y + 3 f'''_{xyy} \cdot \Delta x \Delta y^2 + f'''_{yyy} \cdot \Delta y^3$$

2) Siendo $f(x,y)=x^3y^2$, hallar sus diferenciales de 1º, 2º y 3º orden en el punto (1,2)

$f'_x = 3x^2y^2 \quad \to \quad f'_x(1,2)=12$

$f'_y = 2x^3y \quad \to \quad f'_y(1,2)=4$

$df((1,2),(\Delta x,\Delta y)) = f'_x(1,2)\cdot\Delta x + f'_y(1,2)\cdot\Delta y$

$df((1,2),(\Delta x,\Delta y)) = 12\cdot\Delta x + 4\cdot\Delta y$

$f''_{xx} = 6xy^2 \quad \to \quad f''_{xx}(1,2)=24$

$f''_{xy} = f''_{yx} = 6x^2y \quad \to \quad f''_{xy}(1,2)=12$

$f''_{yy} = 2x^3 \quad \to \quad f''_{yy}(1,2)=2$

$d^2f((1,2),(\Delta x,\Delta y)) = f''_{xx}(1,2)\cdot\Delta x^2 + 2f''_{xy}(1,2)\cdot\Delta x\Delta y + f''_{yy}(1,2)\cdot\Delta y^2$

$d^2f((1,2),(\Delta x,\Delta y)) = 24\Delta x^2 + 2\cdot 12\cdot\Delta x\Delta y + 2\cdot\Delta y^2$

$f'''_{xxx} = 6y^2 \quad \to \quad f''_{xx}(1,2)=24$

$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 12xy \quad \to \quad f'''_{xxy}(1,2)=24$

$f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx} = 6x^2 \quad \to \quad f'''_{xyy}(1,2)=6$

$f'''_{yyy} = 0 \quad \to \quad f'''_{yyy}(1,2)=0$

$d^3f((1,2),(\Delta x,\Delta y)) = f'''_{xxx}(1,2)\cdot\Delta x^3 + 3f'''_{xxy}(1,2)\cdot\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xyy}(1,2)\cdot\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}(1,2)\cdot\Delta y^3$

$d^3f((1,2),(\Delta x,\Delta y)) = 24\cdot\Delta x^3 + 72\cdot\Delta x^2\Delta y + 18\cdot\Delta x\Delta y^2$

3) Verificar que $d^2f(\Delta x,\Delta y) = (\Delta x \quad \Delta y)\cdot Hf\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$

$(\Delta x \quad \Delta y)\cdot Hf\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = (\Delta x \quad \Delta y)\cdot\begin{pmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} =$

$= (\Delta x \quad \Delta y)\cdot\begin{pmatrix}f''_{xx}\cdot\Delta x + f''_{xy}\cdot\Delta y\\ f''_{yx}\cdot\Delta x + f''_{yy}\cdot\Delta y\end{pmatrix} =$

$= f''_{xx}\cdot\Delta x^2 + f''_{xy}\cdot\Delta x\Delta y \quad f''_{yx}\cdot\Delta x\Delta y + f''_{yy}\cdot\Delta y^2 = d^2f$

<u>Diferenciabilidad de 2º orden</u>

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A

Se dice que f es diferenciable hasta el orden 2 en $(a_x, a_y) \in A$ si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) - f(a_x, a_y) - df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y)) - \frac{1}{2} d^2 f((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y))}{\|(\Delta x, \Delta y)\|^2} = 0$$

Si una función es diferenciable hasta el orden 2 en todos los puntos de su dominio entonces se dice diferenciable hasta el segundo orden o dos veces diferenciable.

Si f es diferenciable hasta el orden 2 también se puede expresar

$$f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) = f(a_x, a_y) + df((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y)) + \frac{1}{2} d^2 f((a_x, a_y), (\Delta x, \Delta y)) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|^2} = 0$$

Reemplazando $(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) = (x, y)$ tal que $(\Delta x, \Delta y) = (x - a_x, y - a_y)$ se verifica

$$f(x, y) = f(a_x, a_y) + df(x - a_x, y - a_y) + \frac{1}{2} d^2 f(x - a_x, y - a_y) + \varepsilon\left(x - a_x, y - a_y\right)$$

$$\lim_{(x,y) \to (a_x, a_y)} \frac{\varepsilon\left((x - a_x, y - a_y)\right)}{\|(x - a_x, y - a_y)\|^2} = 0$$

<u>Teorema 1</u>

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de clase C^2

entonces

f es diferenciable hasta el segundo orden

4) Calcular $f(1.01,1.98)$ siendo $f(x,y)=x^3y^2$ mediante una aproximación de segundo orden y comparar con el valor exacto.

$f(1.01,1.98)=f(1+0.01,2-0.02)$

Siendo $(a_x,a_y)=(1,2)$

$(\Delta x,\Delta y)=(0.01,-0.02)$

$$f(1+0.01,2-0.02)\simeq f(1,2)+df((1,2),(0.01,-0.02))+\frac{1}{2}d^2f((1,2),(0.01,-0.02))$$

$f(1,2)=4$

$df((1,2),(0.01,-0.02))=12\cdot 0.01+4\cdot(-0.02)=0.04$

$d^2f((1,2),(0.01,-0.02))=24\cdot 0.01^2+2\cdot 12\cdot 0.01\cdot(-0.02)+2\cdot(-0.02)^2=-0.0016$

$f(1+0.01,2-0.02)\simeq 4+0.04+\frac{1}{2}(-0.0016)=4.0392$

$f(1.01,1.98)=1.01^3\cdot 1.98^2=4.0391920404$ (valor exacto)

Por lo tanto

$\varepsilon(0.01,-0.02)=-0.0000079596$

Observar que $|\varepsilon(0.01,-0.02)|=0.0000079596<\|(0.01,-0.02)\|^2=0.01^2+0.02^2=0.0005$

5) Desarrollar en serie de potencias hasta el segundo orden la función $f(x,y)=x^3y^2$ en torno al punto (1, 2)

$$f(x,y)\simeq f(1,2)+df((1,2),(x-1,y-2))+\frac{1}{2}d^2f((1,2),(x-1,y-2))$$

$$f(x,y)\simeq f(1,2)+f'_x(1,2)\cdot(x-1)+f'_y(1,2)\cdot(y-2)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(1,2)\cdot(x-1)^2+2f''_{xy}(1,2)\cdot(x-1)\cdot(y-2)+f''_{yy}(1,2)\cdot(y-2)^2\right]$$

$$f(x,y)\simeq 4+12\cdot(x-1)+4\cdot(y-2)+12\cdot(x-1)^2+12\cdot(x-1)\cdot(y-2)+(y-2)^2$$

6) Calcular el de volumen de material requerido para construir un vaso cilíndrico de radio interior r, altura interior h y espesor e en forma exacta y mediante una aproximación de segundo orden. Comparar los resultados.

El volumen de material requerido es $vol_{mat} = vol(r+e,h+e) - vol(r,h)$

siendo

$$vol(r,h) = \pi r^2 h$$

$$vol(r+e,h+e) = \pi\cdot(r+e)^2\cdot(h+e) = \pi\cdot(r^2h + 2reh + e^2h + r^2e + 2re^2 + e^3)$$

$$vol_{mat} = \pi e\cdot(2rh + eh + r^2 + 2re + e^2) \quad \text{(valor exacto)}$$

Dado que $vol_{mat} = vol(r+e,h+e) - vol(r,h) = dvol + \frac{1}{2}d^2vol + \varepsilon$

$$vol'_r(r,h) = 2\pi rh$$

$$vol'_h(r,h) = \pi r^2$$

$$dvol(r,h) = 2\pi rh\cdot e + \pi r^2\cdot e = \pi e\cdot(2rh + r^2)$$

$$vol''_{rr}(r,h) = 2\pi h$$

$$vol''_{rh}(r,h) = 2\pi r$$

$$vol''_{hh}(r,h) = 0$$

$$d^2vol(r,h) = 2\pi he^2 + 4\pi re^2 + 0$$

$$vol_{mat} \cong dvol + \frac{1}{2}d^2vol = \pi e\cdot(2rh + r^2) + \frac{1}{2}(2\pi h\cdot e^2 + 4\pi r\cdot e^2) \quad \text{(valor aproximado)}$$

La diferencia entre el valor exacto y el aproximado es

$$\varepsilon = \Delta vol - dvol - \frac{1}{2}d^2vol = \pi e\cdot(2rh + eh + r^2 + 2re + e^2) - \pi e\cdot(2rh + r^2) - \frac{1}{2}(2\pi h\cdot e^2 + 4\pi r\cdot e^2)$$

$$\varepsilon = \pi e^3$$

7) Siendo $z = f(\rho\cdot\cos(\varphi), \rho\cdot\sin(\varphi))$ tal que $f \in C^2$ y $(x,y) = (\rho\cdot\cos(\varphi), \rho\cdot\text{sen}(\varphi))$

Demostrar que $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial\rho}$ (Laplaciando de *f* en coordenadas polares)

$$z'_\rho = f'_x(x,y)\cdot\cos(\varphi) + f'_y(x,y)\cdot\sin(\varphi)$$

$$z''_{\rho\rho} = f''_{xx}(x,y)\cdot\cos^2(\varphi) + f''_{xy}(x,y)\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) + f''_{yx}(x,y)\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) + f''_{yy}(x,y)\cdot\sin^2(\varphi)$$

$$z'_\varphi = -f'_x(x,y)\cdot\rho\sin(\varphi) + f'_y(x,y)\cdot\rho\cos(\varphi)$$

$$z''_{\varphi\varphi} = f''_{xx}(x,y)\cdot\rho^2\sin^2(\varphi) - f''_{xy}(x,y)\cdot\rho^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - f'_x(x,y)\cdot\rho\cos(\varphi)$$
$$-f''_{yx}(x,y)\cdot\rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) + f''_{yy}(x,y)\cdot\rho^2\cos^2(\varphi) - f'_y(x,y)\cdot\rho\sin(\varphi)$$

$$\frac{1}{\rho^2}z''_{\varphi\varphi} + z''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}z'_\rho =$$
$$= \frac{1}{\rho^2}\begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y)\cdot\rho^2\sin^2(\varphi) - 2f''_{xy}(x,y)\cdot\rho^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + f''_{yy}(x,y)\cdot\rho^2\cos^2(\varphi) + \\ -f'_x(x,y)\cdot\rho\cos(\varphi) - f'_y(x,y)\cdot\rho\sin(\varphi) \end{bmatrix} +$$
$$+f''_{xx}(x,y)\cdot\cos^2(\varphi) + 2f''_{xy}(x,y)\cdot\cos(\varphi)\sin(\varphi) + f''_{yy}(x,y)\cdot\sin^2(\varphi) +$$
$$+\frac{1}{\rho}\left[f'_x(x,y)\cdot\cos(\varphi) + f'_y(x,y)\cdot\sin(\varphi)\right]$$

$$\frac{1}{\rho^2}z''_{\varphi\varphi} + z''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}z'_\rho = f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y)$$

Teorema 2 (Taylor)

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de clase C^k en el conjunto abierto A

$(a_x, a_y) \in A$

entonces

$$f(a_x + \Delta x, a_y + \Delta y) = f(a_x, a_y) + \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}d^n f_{(a_x,a_y)}(\Delta x, \Delta y) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|^k} = 0$$

Extremos locales

Extremo local o relativo

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A

se dice que f tiene un mínimo local en el punto $(a_x, a_y) \in A$ si

$$\exists \delta \in \Re^+ / \forall (x,y) \in E\big((a_x, a_y), \delta\big): f(a_x, a_y) \le f(x,y)$$

se dice que f tiene un máximo local en el punto $(a_x, a_y) \in A$ si

$$\exists \delta \in \Re^+ / \forall (x,y) \in E\big((a_x, a_y), \delta\big): f(a_x, a_y) \ge f(x,y)$$

1) Demostrar que $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tienen un mínimo local en (0,0) y vale 0

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \ge 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in E\big((0,0),\delta\big) \wedge \delta \in \Re^+$$

O sea, f tiene un mínimo local en (0,0)

2) Demostrar que $g(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ tiene un máximo local en (0,0) y vale 1

$$g(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \le 1 = g(0,0) \quad \forall (x,y) \in E\big((0,0),\delta\big) \wedge \delta \in \Re^+$$

O sea, g tiene un máximo local en (0,0)

Teorema 1

Sea $f: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de clase C^1 tal que

$(a_x, a_y) \in A$ y

f tiene un extremo local (máximo o mínimo) en $(a_x, a_y) \in A$

entonces

$$f'_x(a_x, a_y) = 0 \quad \text{y} \quad f'_y(a_x, a_y) = 0$$

En una función de clase C^1, la condición necesaria para que la función tenga extremo local en un punto, es que las derivadas parciales se anulen en dicho punto.

3) Verificar que la función $f(x,y)=x^2+y^2$ cumple con la condición necesaria para poseer un extremo local en (0,0)

$f(x,y)=x^2+y^2 \geq 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y)\in E\big((0,0),\delta\big) \wedge \delta \in \Re^+$

O sea, *f* tiene un mínimo local en (0,0)

$f \in C^1$

$f_x'(x,y)=2x \quad \rightarrow \quad f_x'(0,0)=0$

$f_y'(x,y)=2y \quad \rightarrow \quad f_y'(0,0)=0$

<u>Punto crítico</u>

Siendo $f: A \subseteq \Re^2 \rightarrow \Re$ una función definida en el conjunto abierto *A* tal que

$f \notin C^1$ en (a_x, a_y) o

siendo $f \in C^1$, las derivadas parciales son nulas (punto estacionario) en (a_x, a_y)

el punto (a_x, a_y) se denomina punto crítico de *f*

Si una función tiene extremos locales entonces estos se encontrarán en sus puntos críticos.

4) Verificar que (0,0) es punto crítico de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2}-0}{t}=\pm 1 \quad \rightarrow$ No existe $f_x'(0,0) \quad \rightarrow \quad f \notin C^1$ en (0,0) $\rightarrow$

(0,0) es punto crítico de *f*

5) Verificar que la función $g(x,y) = x^2 - y^2$ no tiene extremos locales en su dominio.

$g \in C^1$

$g'_x(x,y) = 2x \quad \to \quad g'_x(0,0) = 0$

$g'_y(x,y) = -2y \quad \to \quad g'_y(0,0) = 0$

(0,0) es el único punto crítico del dominio de la función, por lo tanto es el único punto en donde la función puede tener extremo local.

Dado un punto $(c,0) \in D_g$ se verifica $g(c,0) = c^2 \geq 0 = g(0,0)$ y

Dado otro punto $(0,c) \in D_g$ se verifica $g(0,c) = -c^2 \leq 0 = g(0,0)$

Por lo tanto, *g* no tiene extremo local en (0,0)

<u>Punto de ensilladura o punto silla</u>

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto *A* tal que $f \in C^1$

las derivadas parciales de *f* son nulas en $(a_x, a_y) \in A$ y

f no tiene extremo local en $(a_x, a_y) \in A$

O sea

$$\forall \delta \in \Re^+, \exists (x_1, y_1) \in E\big((a_x, a_y), \delta\big) / f(x_1, y_1) > f(a_x, a_y) \wedge \exists (x_2, y_2) \in E\big((a_x, a_y), \delta\big) / f(x_2, y_2) < f(a_x, a_y)$$

se dice que *f* tiene un punto de ensilladura o punto silla en (a_x, a_y)

La función *g* del punto 5) tiene un punto silla en (0,0)

<u>Teorema 2</u>

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función de clase C^2 definida en el conjunto abierto *A* tal que

(a_x, a_y) es un punto crítico de *f* y

$$\Delta_1 = f''_{xx}(a_x, a_y)$$

$$\Delta_2 = \left. \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \right|_{(a_x, a_y)}$$

entonces

a) si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *f* tiene un mínimo local en (a_x, a_y)

b) si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *f* tiene un máximo local en (a_x, a_y)

c) si $\Delta_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ *f* tiene un punto silla en (a_x, a_y)

6) Estudiar la existencia de extremos de $f(x,y) = c \cdot x^2 + d \cdot y^2$ para distintos valores de "*c*" y "*d*" no nulos.

$f \in C^2$

$f'_x(x,y) = 2c \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$f'_y(x,y) = 2d \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

(0,0) es el único punto crítico del dominio de *f*

$f''_{xx}(x,y) = 2c$

$f''_{yy}(x,y) = 2d$

$f''_{xy}(x,y) = 0$

$f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}\right)^2 = 4cd$

Si $c > 0 \wedge d > 0 \quad \rightarrow$ *f* tiene un mínimo local en (0,0)

Si $c < 0 \wedge d < 0 \quad \rightarrow$ *f* tiene un máximo local en (0,0)

Si $\left(c > 0 \wedge d < 0\right) \vee \left(c < 0 \wedge d > 0\right) \quad \rightarrow$ *f* tiene un punto de ensilladura en (0,0)

<u>Teorema 3</u>

Sea $f : A \subseteq \Re^3 \rightarrow \Re$ una función de clase C^2 tal que

$\vec{a}$ es un punto estacionario de *f*

$$\Delta_1 = f''_{xx}(\vec{a})$$

$$\Delta_2 = \left. \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \right|_{(\vec{a})}$$

$$\Delta_3 = \left. \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} \right|_{(\vec{a})}$$

entonces

a) si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \quad \Rightarrow$ *f* tiene un mínimo local en $\vec{a}$

b) si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \quad \Rightarrow$ *f* tiene un máximo local en $\vec{a}$

c) si $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0$, a) y b) falsas $\quad \Rightarrow$ *f* tiene un punto silla en $\vec{a}$

7) Dada la función $f(x,y,z)=\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)+\cos(xyz)$. Clasificar el punto estacionario $(0,0,0)$

$f \in C^2$

$f_x'(x,y,z)=-\sin(x)-yz\sin(xyz) \quad \rightarrow \quad f_x'(0,0,0)=0$

$f_y'(x,y,z)=-\sin(y)-xz\sin(xyz) \quad \rightarrow \quad f_y'(0,0,0)=0$

$f_z'(x,y,z)=-\sin(z)-xy\sin(xyz) \quad \rightarrow \quad f_z'(0,0,0)=0$

$f_{xx}''(x,y,z)=-\cos(x)-y^2z^2\cos(xyz) \quad \rightarrow \quad f_{xx}''(0,0,0)=-1$

$f_{yy}''(x,y,z)=-\cos(y)-x^2z^2\cos(xyz) \quad \rightarrow \quad f_{yy}''(0,0,0)=-1$

$f_{zz}''(x,y,z)=-\cos(z)-x^2y^2\cos(xyz) \quad \rightarrow \quad f_{zz}''(0,0,0)=-1$

$f_{xy}''(x,y,z)=-z\sin(xyz)-xyz^2\cos(xyz) \quad \rightarrow \quad f_{xy}''(0,0,0)=0$

$f_{xz}''(x,y,z)=-y\sin(xyz)-xy^2z\cos(xyz) \quad \rightarrow \quad f_{xz}''(0,0,0)=0$

$f_{yz}''(x,y,z)=-x\sin(xyz)-x^2yz\cos(xyz) \quad \rightarrow \quad f_{yz}''(0,0,0)=0$

$\Delta_1=f_{xx}''(0,0,0)=-1<0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{xy}'' & f_{yy}'' \end{vmatrix}_{(0,0,0)}=1>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' & f_{xz}'' \\ f_{xy}'' & f_{yy}'' & f_{yz}'' \\ f_{xz}'' & f_{yz}'' & f_{zz}'' \end{vmatrix}_{(0,0,0)}=-1<0$$

$\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0 \quad \rightarrow$ f tiene un máximo local en (0,0,0)

Recta de regresión o recta que mejor se ajusta a una serie de puntos

Dada una serie de "n" puntos del plano (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ;... ; (x_n, y_n)

se define la recta $y = mx + b$ que mejor se ajusta a la serie de puntos a aquella que minimiza la función

$$s_{(m,b)} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (mx_i + b) \right)^2$$

Teorema 4 (Método de los mínimos cuadrados)

Dada la serie de "n" puntos del plano (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; ...; (x_n, y_n) tal que

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

entonces

la recta que mejor se ajusta a la serie de puntos es $y = mx + b$ siendo

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - x_i \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i \overline{x})} \qquad b = \overline{y} - m \cdot \overline{x}$$

8) Verificar las ecuaciones del Teorema 4

$$s_{(m,b)} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (mx_i + b) \right)^2$$

$$s'_{m(m,b)} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - (mx_i + b) \right) \cdot (-x_i) = 2\left(m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) = 0 \qquad (1)$$

$$s'_{b(m,b)} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - (mx_i + b) \right) \cdot (-1) = 2\left(m \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) = 0 \qquad (2)$$

De (2) $\quad b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i - m \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{y} - m\overline{x}$

Reemplazando en (1)

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\overline{y} - m\overline{x}) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - m\overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{y} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - x_i \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i \overline{x})}$$

El problema garantiza que el punto hallado produce un mínimo en la sumatoria ya que máximo no tiene sentido.

9) Hallar la recta que mejor se ajusta a la siguiente sucesión de puntos:

$$\{(10, 14), (20, 11), (30, 7), (40, 1)\}$$

$$\overline{x} = \frac{10+20+30+40}{4} = 25$$

$$\overline{y} = \frac{14+11+7+1}{4} = 8.25$$

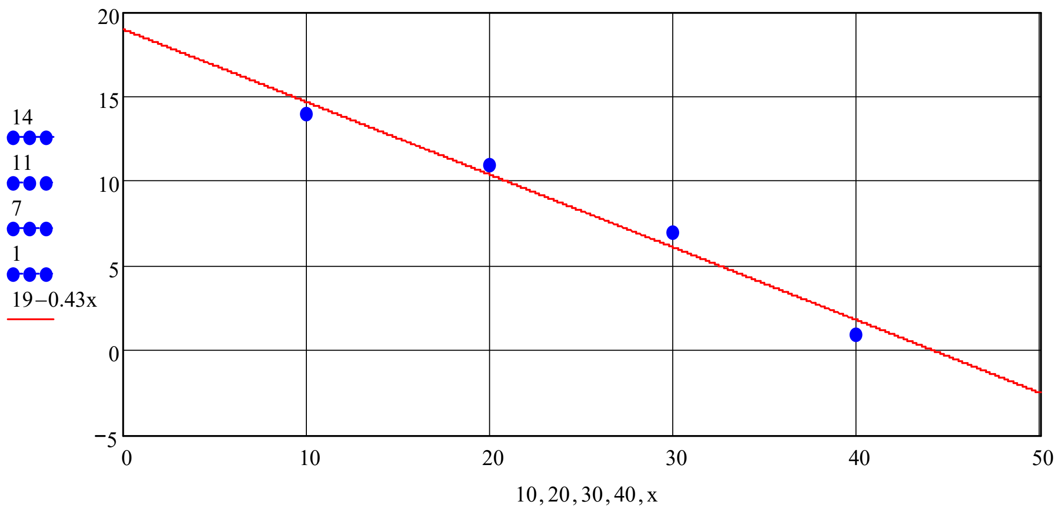
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i \overline{y}) = 10\cdot 14 - 10\cdot 8.25 + 20\cdot 11 - 20\cdot 8.25 + 30\cdot 7 - 30\cdot 8.25 + 40\cdot 1 - 40\cdot 8.25 = -215$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_i \overline{x}) = 10^2 - 10\cdot 25 + 20^2 - 20\cdot 25 + 30^2 - 30\cdot 25 + 40^2 - 40\cdot 25 = 500$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_i \overline{x})} = -\frac{215}{500} = -0.43$$

$$b = \overline{y} - m\cdot\overline{x} = 8.25 - (-0.43)\cdot 25 = 19$$

$$y = 19 - 0.43\cdot x$$



Extremos condicionados

Extremo local o relativo condicionado

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función definida en el conjunto abierto A

$g : B \subseteq \Re^2 \to \Re \ / \ N_0 g \subset A$ define implícitamente a $y = y(x)$ ó $x = x(y)$

se dice que f tiene un máximo relativo condicionado por $N_0 g$ en el punto (a_x, a_y) si

$$\exists \delta \in \Re^+ / \forall (x,y) \in \left[E\left((a_x, a_y), \delta \right) \cap N_0 g \right] : f(a_x, a_y) \geq f(x,y)$$

se dice que f tiene un mínimo relativo condicionado por $N_0 g$ en el punto (a_x, a_y) si

$$\exists \delta \in \Re^+ / \forall (x,y) \in \left[E\left((a_x, a_y), \delta \right) \cap N_0 g \right] : f(a_x, a_y) \leq f(x,y)$$

1) Demostrar que $f(x,y) = x^2 + y^2$ tiene un mínimo local condicionado por $y^2 = x - 1$ en (1,0)

Dado que $x = y^2 + 1 \quad \to \quad x^2 = y^4 + 2y^2 + 1$ en $E\left((1,0), \delta \right)$

$f(x(y), y) = y^4 + 3y^2 + 1 = h(y)$

$h'(y) = 4y^3 + 6y \quad \to \quad h'(0) = 0$

$h''(y) = 12y^2 + 6 \quad \to \quad h''(0) = 6 > 0 \quad \to$ h tiene un mínimo local en $y = 0$

f tiene un mínimo local condicionado por $y^2 = x - 1$ en (1,0)

Teorema 1 (multiplicadores de Lagrange)

Sean $f, g: A \subseteq \Re^2 \to \Re$ dos funciones de clase C^1 tal que

$\vec{\nabla} g(a_x, a_y) \neq (0,0)$

$N_0 g = \{ (x,y) \in A \ / \ g(x,y) = 0 \}$

f tiene un extremo local condicionado por $N_0 g$ en (a_x, a_y)

entonces

existe $\lambda \in \Re$ (multiplicador de Lagrange) tal que $\vec{\nabla} f(a_x, a_y) = \lambda \cdot \vec{\nabla} g(a_x, a_y)$

2) Verificar el Teorema anterior con el punto 1)

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (2x, 2y) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} f(1,0) = (2,0)$$

$$g(x,y) = y^2 - x + 1$$

$$\vec{\nabla} g(x,y) = (-1, 2y) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} g(1,0) = (-1,0)$$

$$\vec{\nabla} f(1,0) = \lambda \cdot \vec{\nabla} g(1,0)$$

$$(2,0) = \lambda \cdot (-1,0) \quad \rightarrow \quad \lambda = -2$$

<u>Teorema 2</u>

Sean $f, g\colon A \subseteq \Re^2 \to \Re$ dos funciones de clase C^2 tal que

$$\vec{\nabla} g(a_x, a_y) \neq (0,0)$$

$$N_0 g = \{ (x,y) \in A \;/\; g(x,y) = 0 \}$$

existe $\lambda \in \Re$ tal que $\vec{\nabla} f(a_x, a_y) = \lambda \cdot \vec{\nabla} g(a_x, a_y)$

entonces

llamando $h\colon A \subseteq \Re^2 \to \Re \;/\; h(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$

f tiene un máximo local condicionado por $N_0 g$ en (a_x, a_y) si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0 \text{ en } (a_x, a_y)$$

f tiene un mínimo local condicionado por $N_0 g$ en (a_x, a_y) si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0 \text{ en } (a_x, a_y)$$

3) Analizar la existencia de extremos locales de $f(x,y)=1-x^2-y^2$ sujeta a la restricción dada por $x^2-2x-3+y^2=0$ haciendo uso de los Teoremas 1 y 2

$f(x,y)=1-x^2-y^2 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y)=(-2x,-2y)$

$g(x,y)=x^2-2x-3+y^2=0 \rightarrow \quad \vec{\nabla} g(x,y)=(2x-2,2y)$

$\vec{\nabla} f(x,y)=\lambda\cdot\vec{\nabla} g(x,y)$

$$\begin{cases} -2x=\lambda\cdot(2x-2) \\ -2y=\lambda\cdot 2y \\ x^2-2x-3+y^2=0 \end{cases}$$

$(x,y)=(3,0)$ punto crítico y $\lambda=-1.5$

$(x,y)=(-1,0)$ punto crítico y $\lambda=-0.5$

Siendo $h(x,y)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)=1-x^2-y^2-\lambda\cdot(x^2-2x-3+y^2)$

$h'_x(x,y)=-2x-\lambda\cdot(2x-2) \qquad h'_y(x,y)=-2y-\lambda\cdot 2y$

$h''_{xx}(x,y)=-2-\lambda\cdot 2 \qquad h''_{xy}(x,y)=0 \qquad h''_{yy}(x,y)=-2-\lambda\cdot 2$

$g'_x(x,y)=2x-2 \qquad g'_y(x,y)=2y$

$$\left|\begin{matrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{matrix}\right|_{(3,0,-1.5)} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4-0)=-16<0 \quad \rightarrow$$

f tiene un mínimo local condicionado por $N_0 g$ en $(3,0)$

$$\left|\begin{matrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{matrix}\right|_{(-1,0,-0.5)} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4\cdot(-4-0)=16>0 \quad \rightarrow$$

f tiene un máximo local condicionado por $N_0 g$ en $(-1,0)$

Extremos absolutos

Mínimo absoluto

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$

se dice que *f* tiene un mínimo absoluto en el punto $(a_x, a_y) \in A$ si

$$f(a_x, a_y) \le f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$$

Máximo absoluto

Siendo $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$

se dice que *f* tiene un máximo absoluto en el punto $(a_x, a_y) \in A$ si

$$f(a_x, a_y) \ge f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$$

1) Demostrar que la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tiene extremos absolutos en su dominio y calcularlos.

$D_f = \left\{(x, y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \le 1\right\}$

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \le 1 = f(0,0) \quad \forall (x, y) \in D_f \quad \to$ *f* tiene un máximo absoluto en (0,0)

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ge 0 = f(a_x, a_y)$ siendo $a_x^2 + a_y^2 = 1 \quad \forall (x, y) \in D_f \quad \to$ *f* tiene un mínimo absoluto en (a_x, a_y)

<u>Teorema 1</u> (Bolzano – Weierstrass)

Sea $f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$ una función continua en un conjunto *A* cerrado y acotado (compacto)

entonces

$\exists (a_x, a_y) \in A / f(a_x, a_y) \le f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$ ($f(a_x, a_y)$ es un mínimo absoluto)

$\exists (b_x, b_y) \in A / f(b_x, b_y) \ge f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$ ($f(b_x, b_y)$ es un máximo absoluto)

$\forall k \in \left[f(a_x, a_y), f(b_x, b_y)\right], \exists (c_x, c_y) \in A / f(c_x, c_y) = k$

El Teorema de Bolzano – Weierstrass garantiza la existencia de extremos absolutos en conjuntos compactos. Por lo tanto, en este tipo de conjuntos los extremos absolutos se encontrarán en el interior o en la frontera. Si los extremos absolutos se encuentran en el interior del dominio, entonces también serán extremos locales. Si los extremos absolutos se encuentran en la frontera del dominio, entonces se los puede hallar haciendo uso del método de los multiplicadores de Lagrange.

2) Dado $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, analizar si *f* tiene extremos absolutos en la región plana defina por $x^2 + y^2 \leq 4$

El dominio de *f* es $A = \left\{(x,y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ (conjunto cerrado y acotado)

f es una función continua por ser polinómica, por lo tanto *f* tiene extremos absolutos en *A*.

I) Analizamos la existencia de extremos locales en $Int(A) = \left\{(x,y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 < 4\right\}$

$f'_x(x,y) = 2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

$f'_y(x,y) = 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

(1,0) punto crítico en *Int*(*A*)

II) Analizamos la existencia de extremos condicionados en $\partial A = \left\{(x,y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 = 4\right\}$

$\vec{\nabla} f(x,y) = (2x - 2, 2y)$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

$g'_x(x,y) = 2x$

$g'_y(x,y) = 2y$

$\vec{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y)$

$\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \cdot \vec{\nabla} g(x,y)$

$$\begin{cases} 2x - 2 = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$(x,y) = (2,0)$ punto crítico y $\lambda = 1$

$(x,y) = (-2,0)$ punto crítico y $\lambda = 1.5$

III) Evaluamos $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ en los puntos críticos

$f(1,0) = -1$ (mínimo absoluto)

$f(2,0) = 0$

$f(-2,0) = 8$ (máximo absoluto)