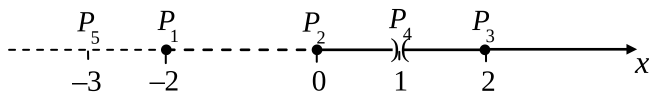
2 . Nociones de Topología – Funciones

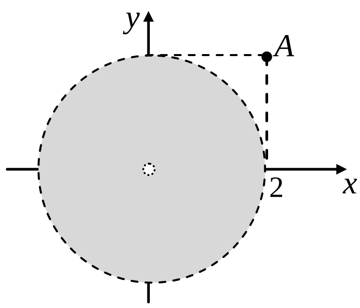
01) Sea $f\ : D \subset \Re \to \Re\ /\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x\,(x+2)^4}}{x-1}$ donde D es el dominio natural de f .

En el siguiente gráfico se indican los puntos $P_1, P_2, P_3 \in D$ y $P_4, P_5 \notin D$. Para cada uno de esos puntos indique si es punto interior, exterior o frontera de D; también indique si es punto aislado de D y si es punto de acumulación de D.



Nota: Observe que $D = \{\, x \in \Re\ /\ x = -2\ \vee\ 0 \le x < 1\ \vee\ x > 1 \}$.

02) Sea $S = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 0 < x^2 + y^2 < 4\ \vee (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0\ \}$ el conjunto que se representa sombreado en la figura de la derecha. Observe que el punto $(0,0) \notin S$, mientras que $A = (2,2)$ es un punto aislado de S .



a) Halle la frontera (∂S) de S .

b) Halle el conjunto $\overset{\circ}{S}$ de puntos interiores de S .

c) Halle el conjunto S' de los puntos de acumulación de S , denominado *conjunto derivado* de S .

d) Analice si S es cerrado, abierto, acotado.

e) Halle el conjunto $Cl(S) = S \cup S'$ que se denomina *clausura* o *adherencia* de S .

03) Represente geométricamente los siguientes conjuntos de puntos. En cada caso indique cuáles son sus puntos interiores, frontera y exteriores, analice si el conjunto es cerrado, abierto, acotado, compacto, conexo.

a) $\{(x,y) \in \Re^2 /\ x^2 + y^2 - 4 \le 0,\ x + y \ge 1\}$.

b) $\{(x,y) \in \Re^2 /\ 4x^2 + 7y^2 \le 2,\ x \ge 0\}$.

c) $\{(x,y) \in \Re^2 /\ x^2 - y^2 \le 3,\ x + y \ge 2\}$.

d) $\{(x,y,z) \in \Re^3 /\ x^2 + y^2 = a^2\ \wedge\ x^2 + z^2 = a^2\ \wedge\ a > 0\ \wedge\ x, y, z \in \Re_0^+\}$.

e) $\{(x,y,z) \in \Re^3 /\ x^2 + y^2 < z^2\ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 < 9\ \}$.

04) Verifique que $S = \{(x,y) \in \Re^2\ /\ x\,y \le 4\}$ es cerrado y conexo, pero no es convexo.

05) En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural D de la función.

a) $f(x,y) = \ln(\,(x+1)\,(y-2x)\,)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (\sqrt{1-x}\,, (x+1)^{-1/2}, \ln(y-x))$.

c) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{\ln(z-x-y)}$.

e) $f(x,y) = \ln(x\,y)/\sqrt{2-x-y}$.

f) $\bar{f}(x,y) = (x^{-2}, (x+y)^{-2}\sqrt{y}\ )$.

g) $f(x,y,z) = (x\,y+z)/\sqrt{1-y}$.

h) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-x)/(2x-x^2-y^2)}$.

i) $f(x,y) = \int_x^y (1+t^2)^{-1}\,dt$.

j) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(\,x/(x+y)\,)$.

06) Represente geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

a) $f(x,y) = x\,y - 2$.

b) $f(x,y) = e^{x\,y}$.

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

d) $f(x,y) = |x| + y$.

e) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

f) $f(x,y) = x/(x^2 + y^2)$.

g) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|z|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,z) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

07) Para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en su dominio natural:

- determine el conjunto imagen,
- halle el conjunto de positividad,
- represente la gráfica en el espacio xyz y analice las intersecciones con los planos coordenados.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

d) $f(x,y) = 2 - x - y$.

e) $f(x,y) = 2 - x^2$.

f) $f(x,z) = x^2 - 2x + z^2$.

08) Proponga un campo cuyo dominio natural $D \subset \mathbb{R}^2$ cumpla con:

a) $x^2 + y^2 > 1$. b) $x^2 + y^2 \leq 8 - 2x$. c) $-1 \leq x + y < 3$. d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$.

09) Dibuje los siguientes conjuntos de puntos e indique si tienen algún nombre en especial:

a) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = x^2 - 2y^2\}$.

b) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z^2 - x^2 - 4y^2 = 1\}$.

c) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1\}$.

d) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = |x|\}$.

e) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x + y = 4\}$.

f) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = \operatorname{sen}(y)\}$.

10) Grafique el conjunto imagen de:

a) $\bar{g}(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u))$ con $u \in [0, \pi]$.

b) $\bar{g}(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u), u)$ con $u \in [0, \pi]$.

11) Sea C la línea que resulta de la intersección de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con el plano de ecuación $z = x$ en el 1° octante.

a) Dibújela.
b) Halle una ecuación vectorial.
c) Halle ecuaciones para las líneas resultantes de proyectar C sobre los planos coordenados; analice en forma vectorial y en forma cartesiana.

12) *Optativo*: Dado el conjunto $S = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \ \vee \ (n^{-1}, 0),\ n \in \mathbb{N}\}$, halle sus puntos interiores, sus puntos aislados, su frontera, su conjunto derivado y su clausura.

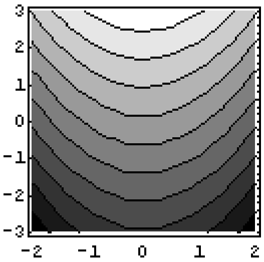
Cuestionario

1. Defina campo escalar y campo vectorial.
2. Defina gráfica y conjunto de nivel.
3. Calcule la longitud de la poligonal de vértices en (1,2,3), (2,4,6), (3,6,7), en ese orden.
4. Analice si $\{(x,y) \in \Re^2 / x\,y < 0\}$ es un $E(\bar{0})$.
5. Demuestre que si $f(x,y) = a$ y $f(x,y) = b$ con $a \neq b$ son dos conjuntos de nivel de f, dichos conjuntos no tienen puntos comunes.

Ejemplos de graficación de conjuntos de nivel en $\mathbb{R}^2$ usando el Mathematica

Para graficar líneas de $f(x,y) = 2y - x^2$ en el intervalo $[-2,2] \times [-3,3]$ podemos ordenar:

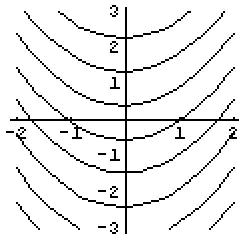
ContourPlot[2 y – x^2, {x, 2,2}, {y, –3,3}**]**;



En este caso –por defecto(*)– dibuja algunas líneas, sombrea y dibuja un marco externo.

Mismo ejemplo especificando opciones:

ContourPlot[2 y – x^2, {x,–2,2}, {y, –3,3}, Contours–>8, ContourShading–>False, Frame–>False, Axes–>True, AxesOrigin–>{0,0}**]**;



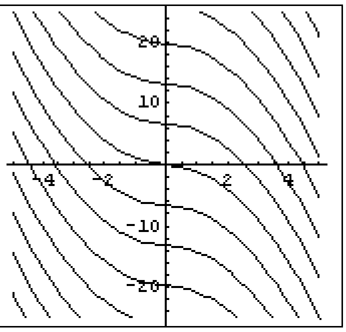
<u>Opciones especificadas</u>: Contours $\to$ 8 (dibuja 8 líneas), ContourShading $\to$ False (no sombrea), Frame $\to$ False (sin marco externo), Axes $\to$ True (con ejes), AxesOrigin $\to$ {0,0} (intersección de ejes en (0,0)).

Para las líneas de nivel de $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 + y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, definimos

f[x_,y_] : = x^2 + y^2 /; x > = 0
f[x_,y_] : = x^2 + y^2 /; x < 0

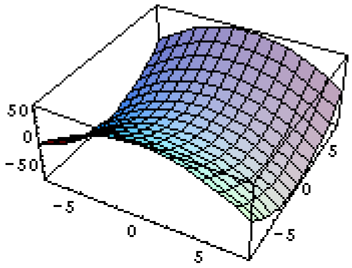
Con la siguiente orden se obtiene el gráfico de la figura:

ContourPlot[f[x,y], {x,–5,5}, {y,–25,25}, Contours–>15, Axes–>True, ContourShading–>False, Frame–>False, AxesOrigin–>{0,0}**]**;

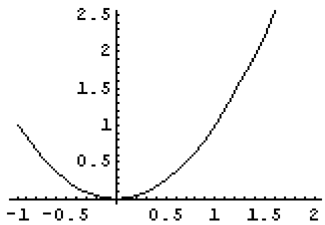


Otros ejemplos de graficación con el Mathematica

Superficie de ec. $z = y^2 - x^2$ en $[-8,8] \times [-8,8]$:
Plot3D[y^2–x^2, {x, –8,8}, {y, –8,8}**]**;



Conjunto imagen de $\bar{g}(t) = (t, t^2)$ con $t \in [-1,2]$:
ParametricPlot[{t , t^2} , {t, –1, 2}**]**;



(*) Las especificaciones "por defecto" son las que aplica el utilitario sin indicación adicional; para modificar estas especificaciones están las opciones seleccionables con el formato Especificación–>Opción elegida.