SEGUNDO PARCIAL　　ANÁLISIS MATEMÁTICO II　　Noviembre 25 de 2016

P1) Calcular el volumen de la región definida por las siguientes inecuaciones: $z+x^2 \leq 6$ , $y \leq x$ , $x \leq z$ , $x \geq 0$ , $y \geq 0$

P2) Dado el campo $\bar{f}(x,y,z)=(xy,y^2,xz)$, calcular la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva $C$ definida por la intersección de $z=x+y$ con $x=y^2$ desde el punto (0,0,0) hasta (4,2,6).

P3) Demostrar que el campo $\bar{f}(x,y)=(2x,2y)$ es conservativo. Calcular su función potencial $\phi$ tal que $\phi(0,0)=1$

P4) Hallar la solución general de la ecuación $y''+2y'=4x$

T1) Enunciar la condición necesaria para la existencia de función potencial de un campo vectorial. Indicar hipótesis. Demostrar dicha condición.

T2) Enunciar el Teorema de la divergencia. Suponiendo que se puede aplicar el teorema y sabiendo que para $\bar{f}(x,y,z)=(x,2y,x-z)$ el flujo a través de $\partial S$ es saliente e igual a $18\pi$, calcular el volumen del cuerpo $S$

P1) $z + x^2 \leq 6$ , $y \leq x$, $x \leq z$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

$\underline{0 \leq y \leq x}$ $\quad z + x^2 \leq 6 \longrightarrow z \leq 6 - x^2$

$\underline{x \leq z \leq 6 - x^2}$ $\quad x \leq 6 - x^2 \longrightarrow x^2 + x - 6 \leq 0$

$(x-2)(x+3) \leq 0$

$\underline{-3 \leq x \leq 2}$

$x \leq 2 \wedge x \geq -3$

$\vee$

$\underbrace{x \geq 2 \wedge x \leq -3}_{\varnothing}$

$$\mathrm{VOL}(E) = \iiint dx\,dy\,dz = \int_{-3}^{2} \int_{0}^{x} \int_{x}^{6-x^2} dz\,dy\,dx =$$

$$\int_{-3}^{2} \int_{0}^{x} (6 - x^2 - x)\,dy\,dx = \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\,x\,dx = \int_{-3}^{2} (6x - x^3 - x^2)\,dx =$$

$$\left[ \overset{3}{\cancel{6}} \frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{2} = \underbrace{\left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right)}_{\frac{16}{3}} - \underbrace{\left(27 - \frac{81}{4} - 9\right)}_{-\frac{9}{4}} = \boxed{\frac{91}{12}}$$

P2) $\overline{F}(x,y,z) = (xy, y^2, xz)$ $\quad \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$

$$C \begin{cases} z = x+y \\ x = y^2 \end{cases} \longrightarrow \overline{\lambda}(t) = (t^2, t, t^2+t) \quad t \in [0,2]$$

$$\overline{\lambda}'(t) = (2t, 1, 2t+1)$$

$\overline{A} = (0,0,0)$ $\qquad\qquad$ $\overline{B} = (4,2,6)$

$x = 0 \rightarrow t^2 = 0$ ✓ $\qquad$ $x = 4 = t^2 = 2^2 = 4$ ✓

$y = 0 \rightarrow \underline{t = 0}$ $\qquad$ $y = 2 = t \rightarrow \underline{t_1 = 2}$

$z = 0 \rightarrow t + t = 0$ ✓ $\qquad$ $z = 6 = t^2 + t = 2^2 + 2 = 6$ ✓

$$\int_C \overline{F}\, d\overline{\lambda} = \int_a^b \overline{F}(\overline{\lambda}(t)) \cdot \overline{\lambda}'(t)\, dt = \int_0^2 (t^3, t^2, \overbrace{t^2(t^2+t)}^{t^4+t^3})(2t, 1, 2t+1)\, dt$$

$$\int_0^2 (\underline{2t^4} + t^2 + 2t^5 + \underline{t^4} + \underline{2t^4} + t^3)\, dt = \int_0^2 (2t^5 + 5t^4 + t^3 + t^2)\, dt$$

$$\left[ \frac{\cancel{2}^{1} t^6}{\cancel{6}_{3}} + \frac{\cancel{5} t^5}{\cancel{5}} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{64}{3} + 32 + \frac{16}{4} + \frac{8}{3} = \boxed{60}$$

$$\overset{f_1}{} \overset{f_2}{}$$

P3) $\bar{f}(x,y) = (\underbrace{2x}_{f_1}, \underbrace{2y}_{f_2})$

COND. NEC:
$f'_{2x} = f'_{1y} \rightarrow 0 = 0$ ✓
Dom $\bar{f}$: $\mathbb{R}^2$
$\therefore$ conjunto simpl. conexo

} COND. SUF ✓
$\therefore$ el campo es conservativo

$$\phi(x,y) = \int_0^1 \bar{f}(t_x, t_y)(x,y)\,dt + k = \int_0^1 (2tx, 2ty)(x,y)\,dt + k$$

$$= \int_0^1 (2tx^2 + 2ty^2)\,dt + k = 2(x^2+y^2)\int_0^1 t\,dt + k$$

$$= \cancel{2}(x^2+y^2)\frac{1}{\cancel{2}} + k = \underline{(x^2+y^2)+k} \circledast$$

$$\phi(0,0) = \underline{1 = k}$$

$$\therefore \boxed{\phi(x,y) = (x^2+y^2)+1}$$

$\circledast$ Verificación:

$\bar{f}(x,y) = \bar{\nabla}\phi = (2x, 2y)$ ✓

P4) $y'' + 2y' = 4x$

$y'' + 2y' = 0 \rightarrow m^2 + 2m = 0 \rightarrow m(m+2) = 0$

$\underline{m=0}$ v $m+2=0$

$y_c = C_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + C_2 e^{-2x}$ $\qquad \underline{m=-2}$

$\underline{y_c = C_1 + C_2 . e^{-2x}}$

$y_p = (ax+b)x = ax^2 + bx$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$\longrightarrow 2a + 2(2ax+b) = 4x$

$2a + 4ax + 2b = 4x$

$4a = 4 \longrightarrow \underline{a=1}$

$2a + 2b = 0 \longrightarrow 2 + 2b = 0 \longrightarrow \underline{b=-1}$

$\underline{y_p = x^2 - x}$

$y(x) = y_c + y_p \rightarrow \boxed{y(x) = C_1 + C_2 . e^{-2x} + x^2 - x}$

T1) Hecho en parcial (5|7|17)

T2) Teorema de la Divergencia (T. de GAUSS)

HIPÓTESIS: $\overline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial clase $C^1$

$E \subset A$ región simple en $\mathbb{R}^3$

TESIS: $$\underbrace{\oiint_{\partial E^+}}_{\text{FRONTERA de E ORIENTADA POSITIVAMENTE (SALIENTE)}} \overline{f}\, d\overline{\sigma} = \iiint_E \underbrace{\operatorname{div} \overline{f}}_{\overline{\nabla} \cdot \overline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}\, dx\,dy\,dz$$

$\overline{f}(x,y,z) = (x, 2y, x-z)$, FLUJO $= 18\pi$, ¿VOL (S)?

$\operatorname{div} = \overline{\nabla} \cdot \overline{f} = 1+2-1 = \underline{2}$

$$\text{FLUJO} = \oiint_{\partial S^+} \overline{f}\, d\overline{\sigma} = \iiint_S \underbrace{\operatorname{div}}_{2}\, dx\,dy\,dz = 2 \underbrace{\iiint_S dx\,dy\,dz}_{\text{VOL}(S)}$$

$\rightarrow 18\pi = 2 \cdot \text{VOL}(S) \Longrightarrow \boxed{\text{VOL}(S) = 9\pi}$

## COND. NEC. CONSERVATIVO

Siendo $\overline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \overline{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ un campo conservativo ($\overline{f} = \nabla\phi$) de clase $C^1$ entonces:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

**Dem:** $\overline{f}$ conservativo $\longrightarrow \overline{\nabla\phi} = \overline{f}$

$$\overline{\nabla\phi} = (\phi'_x, \phi'_y) = (f_1, f_2)$$

$$\phi'_x = f_1 \longrightarrow \phi''_{xy} = f'_{1y}$$

$$\phi'_y = f_2 \longrightarrow \phi''_{yx} = f'_{2x}$$

$$\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}}$$

$$\overline{f} \in C^1 \longrightarrow \overline{f}' = \phi \in C^2 \Longrightarrow f'_{1y} = f'_{2x}$$

Hip. T Scharz

$(\phi''_{xy} = \phi''_{yx})$

Si es conservativo $\longrightarrow$ Admite función potencial