FRBA - UTN

Análisis Matemático II

Rec 1 1° Parcial - 17/7/18

Nombre y apellido:.. Curso Z2041

E1.- Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ 0 & \text{si } x=y,\end{cases}$$

analice la existencia de derivadas direccionales en $(0,0)$.

¿Admite el gráfico de f plano tangente en el origen? Justifique su respuesta.

Analicemos la existencia de $f'((0,0);(a,b))$ para un versor (a,b) cualquiera.

$$f'\big((0,0);(a,b)\big) \overset{si\ existe}{\cong} \lim_{h\to 0}\frac{f\big((0,0)+h(a,b)\big)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-0}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}$$

Si $a\neq b$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{hahb}{ha-hb}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2ab}{h^2(a-b)}=\lim_{h\to 0}\frac{ab}{a-b}=\frac{ab}{a-b}$$

Si $a=b$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,ha)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Entonces la función es derivable en toda dirección en el punto (0,0).

Como la derivada direccional para $a\neq b$ es $\frac{ab}{a-b}$ que no es de la forma $A.a+B.b$, la función no es diferenciable en el origen y entonces no existe plano tengente a la gráfica de la función en (0,0,0).

E2.- Halle la solución general de la ecuación $y'+2xy=2x$.

Grafique algunas curvas de esa familia y determine la solución particular que pasa por $(1,1)$.

La ecuación $y' + 2xy = 2x$ se puede escribir $y' = 2x(1 - y)$, que es de variables separables.

Una solución es $y \equiv 1$ pues en ese caso $y' = 0$ y $2x(1 - 1) = 0$.

Si y no es idénticamente igual a 1:

$$y' = 2x(1 - y)$$

$$\frac{y'}{1 - y} = 2x$$

$$\frac{y'}{y - 1} = -2x$$

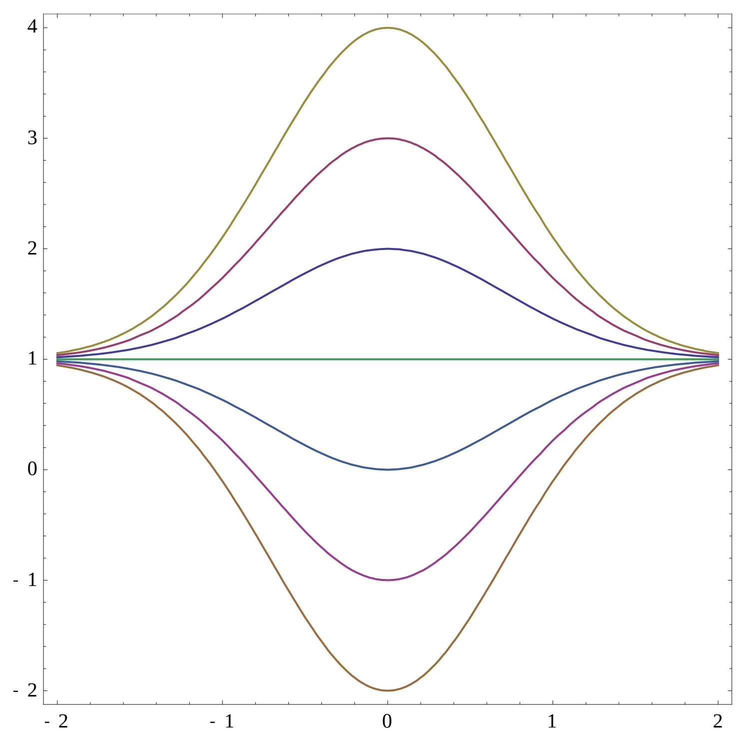
$$\int \frac{dy}{y - 1} = -\int 2x dx$$

$$\ln|y - 1| = -x^2 + C$$

$$y - 1 = Ke^{-x^2}$$

$$S.G.: y = 1 + Ke^{-x^2}$$

La solución particular que pasa por (1,1) es, justamente, $y \equiv 1$.



E3.- Halle una buena aproximación lineal para $h(x,y) = x^2y + g(x,y)$ en el punto $(0{,}01; 0{,}98)$ si $z = g(x,y)$ queda definida implícitamente por la ecuación $xsen(xz) + y^2cos(yz) + z = 1$ en un entorno del punto $(0,1,0)$. Justifique todos sus cálculos.

Sea $F(x,y,z) = xsen(xz) + y^2cos(yz) + z - 1$.

Resultan

$$F'_x = sen(xz) + zxcos(xz)$$

$$F'_y = 2ycos(yz) - y^2zsen(yz)$$

$$F'_z = x^2cos(xz) - y^3sen(yz) + 1$$

que son continuas en todo el espacio, entonces $F \in C^1(R^3)$. Además, $F(0{,}1{,}0) = 0$ y $F'_z(0{,}1{,}0) = 0^2cos(0.0) - 1^3sen(1.0) + 1 = 1 \neq 0$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita y entonces $g(x,y)$ resulta C^1 en un entorno de $(0{,}1)$ y además

$$g'_x(0{,}1) = -\frac{F'_x(0{,}1{,}0)}{F'_z(0{,}1{,}0)} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$g'_y(0{,}1) = -\frac{F'_y(0{,}1{,}0)}{F'_z(0{,}1{,}0)} = -\frac{2}{1} = -2$$

Como $g(x,y)$ es C^1 en un entorno de $(0{,}1)$ y $h(x,y) = \underbrace{x^2y}_{polinomio} + g(x,y)$, la función $h(x,y)$ resulta también C^1 en un entorno de $(0{,}1)$ y, por lo tanto,

$$h(x,y) \cong h(0{,}1) + h'_x(0{,}1)(x-0) + h'_y(0{,}1)(y-1)$$

Es $h(0{,}1) = 0^2.1 + g(0{,}1) = 0$. Además, $h'_x(x,y) = 2xy + g'_x(x,y)$, por lo que $h'_x(0{,}1) = 2.0.1 + 0 = 0$, y $h'_y(x,y) = x^2 + g'_y(x,y)$, por lo que $h'_y(0{,}1) = 0^2 - 2 = -2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} h(0{,}01; 0{,}98) &\cong h(0{,}1) + h'_x(0{,}1)(0{,}01 - 0) + h'_y(0{,}1)(0{,}98 - 1) \\ &= 0 + 0.0{,}01 - 2.(-0{,}02) = 0{,}04 \end{aligned}$$

E4.- Una curva C queda determinada por la intersección de las superficies S_1, imagen de la función $\overrightarrow{T}(u,v) = (u^2, v^2, 2u - v))$ con $(u,v) \in [-3,2] \times [0,2]$, y S_2, definida por la ecuación implícita $x^2 + xy + z^3 = 3$. Analice si C corta ortogonalmente al plano $x + y - z = 1$ en el punto $P = (1,1,1)$. Justifique sus cálculos.

$S_1: \vec{\Gamma}(u,v) = (u^2, v^2, 2u - v)$. En $(1{,}1{,}1)$: $\begin{cases} u^2 = 1 \to u = \pm 1 \\ v^2 = 1 \to v = \pm 1 \\ \quad 2u - v = 1 \end{cases}$. El único par de valores que verifica la tercera ecuación es $u = v = 1$. Entonces $P = \vec{\Gamma}(1{,}1) \in S_1$.

$\vec{\Gamma}'_u = (2u, 0{,}2), \vec{\Gamma}'_v = (0{,}2v, -1)$. $\vec{\Gamma}'_u(1{,}1) = (2{,}0{,}2), \vec{\Gamma}'_v(1{,}1) = (0{,}2, -1)$ y entonces

$$\vec{N}_{S_1}(P) = \vec{\Gamma}'_u(1{,}1) \times \vec{\Gamma}'_v(1{,}1) = (-4{,}2{,}4)$$

$S_2: \underbrace{x^2 + xy + z^3}_{G(x,y,z)} = 3$, que pasa por el punto $P = (1{,}1{,}1)$. Como es un conjunto de nivel de un polinomio (función diferenciable) será $\vec{N}_{S_2}(P) = \nabla G(1{,}1{,}1) = (2x + y, x, 3z^2)|_{(1,1,1)} = (3{,}1{,}3)$

Entonces, un director de la recta tangente en P a la curva $C = S_1 \cap S_2$ es $\vec{T}(P) = \vec{N}_{S_1}(P) \times \vec{N}_{S_2}(P) = (2{,}24, -10) = 2(1{,}12, -5)$, y la recta tangente a la curva en el punto P es $r: (x, y, z) = (1{,}1{,}1) + \mu(1{,}12, -5), \mu \in R$.

Para que la curva corte ortogonalmente al plano $\pi: x + y - z = 1$ debería verificarse que $P \in \pi$, lo cual es cierto, y $(1{,}12, -5)$ paralelo a $\vec{N}_\pi = (1{,}1, -1)$, lo cual no es cierto.

Entonces la curva corta al plano, pero no lo hace ortogonalmente.

T1.- a) ¿Qué significa, geométrica y analíticamente, que una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ sea continua en un punto $(x_0, y_0) \in D^\circ$?

b) Determine si la función $f(x,y)$ del E1.- es continua en el origen. Justifique su respuesta.

Que f sea continua en un punto $(x_0, y_0) \in D^\circ$ significa que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ y éste es igual a $f(x_0, y_0)$. Geométricamente significa que la gráfica de la función no tiene un "agujero" en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

La función del E1.- no es continua en el origen pues $f(0{,}0) = 0$ pero $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ sobre \\ y=\frac{x}{x+1}}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\frac{x}{x+1}}{x - \frac{x}{x+1}} = 1$ ya que $y = \frac{x}{x+1}$ es la curva de nivel 1, que pasa por el origen (en realidad, el límite en el origen no existe pues $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ sobre \\ y=x}} f(x,y) = 0$)

T2.- *a)* ¿Qué condiciones se deben cumplir para que un punto $P_0 = \overrightarrow{\Gamma}(u_0, v_0)$ resulte "punto regular" de una superficie S, imagen de una función vectorial continua $\overrightarrow{\Gamma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ con $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$?

b) Analice si $(1,-1,0)$ es un punto regular de $S : \overrightarrow{\Gamma}(u,v) = (u+v-1, u-v-1, u^2-v^2)$ con $(u,v) \in [-3,3] \times [-3,3]$.

Para que un punto de una superficie paramétrica sea regular es necesario que en ese punto existan $\vec{\Gamma}'_u$ y $\vec{\Gamma}'_v$ y su producto vectorial no sea nulo.

En el caso de b)

$S: \vec{\Gamma}(u,v) = (u+v-1, u-v-1, u^2-v^2)$. En $(1,-1,0)$: $\begin{cases} u+v-1=1 \\ u-v-1=-1 \\ u^2-v^2=0 \end{cases}$. El único par de valores de $[-3,3] \times [-3,3]$ que verifica las tres ecuaciones es $u = v = 1$. Entonces $P = \vec{\Gamma}(1,1) \in S$.

$\vec{\Gamma}'_u = (1,1,2u)$, $\vec{\Gamma}'_v = (1,-1,-2v)$ que existen en todo punto de $[-3,3] \times [-3,3]$.
$\vec{\Gamma}'_u(1,1) = (1,1,2)$, $\vec{\Gamma}'_v(1,1) = (1,-1,-2)$ y entonces

$$\vec{N}_S(P) = \vec{\Gamma}'_u(1,1) \times \vec{\Gamma}'_v(1,1) = (0,4,-2) \neq (0,0,0)$$

y el punto es regular.