Segundo parcial - Tema 2

16 de julio de 2018

E1

Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = yx^2 - y$ en el círculo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solución

$\nabla f(x, y) = (2yx, x^2 - 1)$
Busco puntos críticos
$2yx = 0$ (1)
$x^2 - 1 = 0$ (2)
de (2) $x = \pm 1$, en (1) $y = 0$.

Los puntos $(\pm 1, 0)$, ambos interiores a D, son críticos. También los son los puntos frontera de D.

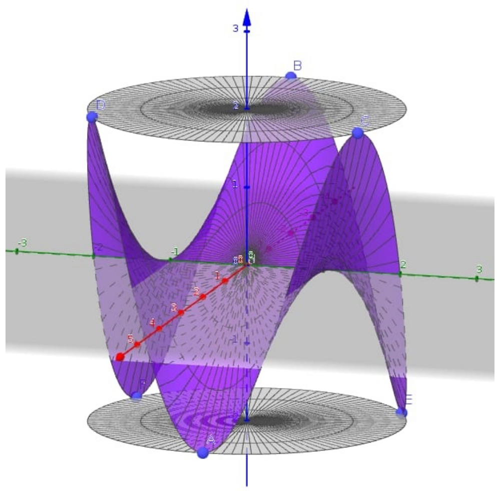
$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$

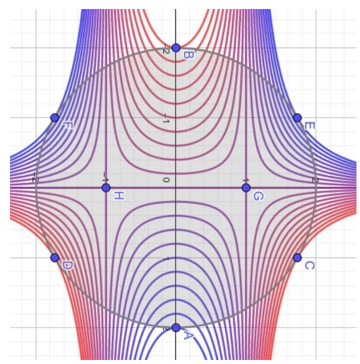
$Hf(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det Hf(0, \pm 1) = -4 < 0$, luego ambos puntos críticos producen punto silla.

Sobre la frontera es $x^2 = 4 - y^2$, para $y \in [-2, 2]$.
Reemplazando en la función se obtiene $g(y) = y(4 - y^2) - y = 3y - y^3$ para $y \in [-2, 2]$.
Es $g'(y) = 3 - 3y^2 = 0$ si y sólo si $y = 1$ ó $y = -1$. Es $g''(y) = -6y$ de modo que para $y = 1$ se producirá un máximo de valor $g(1) = 2$ (por ser $g''(1) < 0$) y para $y = -1$ un mínimo de valor $g(-1) = -2$.
Sobre la curva borde, si $y = 1$, es $x = \sqrt{3}$ o bien $x = -\sqrt{3}$, y lo mismo ocurre

si $y = -1$.
Pero además hay que analizar los extremos del intervalo de y: $y \in [-2, 2]$;
$g(-2) = 2$ y $g(2) = -2$, y para esos valores de y el valor de x es 0.
Entonces: el máximo absoluto es $\boxed{2}$ y se produce en los puntos $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$ y $(0, -2)$, y el mínimo absoluto es $\boxed{-2}$ y se produce en los puntos $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$ y $(0, 2)$.





E2

Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, z + 3)$ a través de la superficie definida por la ecuación $z = 3x^2 + 3y^2 - 3$, con $z \leq 0$. Oriente la normal hacia las z positivas.

Solución

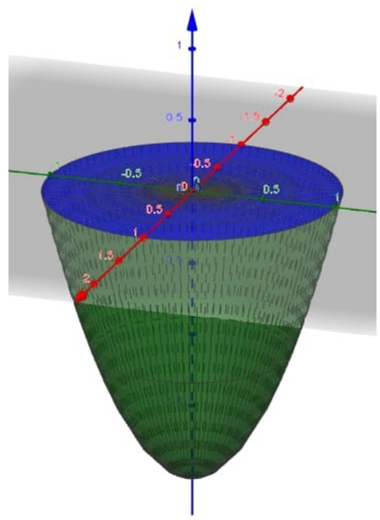
$div(f) = 0 + 0 + 1 = 1$
Integro sobre el sólido que encierra agregarle la tapa circular plana $z = 0$
$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho \int_{3\rho^2-3}^0 dz = \frac{3}{2}\pi$
Integro sobre la tapa plana orientada hacia z^+
$3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho = 3\pi$
Por el teorema de la divergencia
$\frac{3}{2}\pi = 3\pi + \iint_\Sigma f \cdot ds$
de donde

$\iint_\Sigma f \cdot ds = \frac{3}{2}\pi - 3\pi = -\frac{3}{2}\pi$

pero eso sería orientado hacia z^- (para que resulte saliente del sólido).

Luego el flujo pedido es $\boxed{\dfrac{3}{2}\pi}$.

En el siguiente dibujo se ve la superficie Σ en verde, y la tapa plana en azul.



E3

Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z)$ cuyo rotor es $\nabla \times \vec{f} = (-y, 1, zx)$ a lo largo de la curva borde de la superficie $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \geq 1$. Indique en un gráfico en que sentido orientó la curva. ¿Es $\vec{f}$ conservativo? Fundamente su respuesta.

Solución

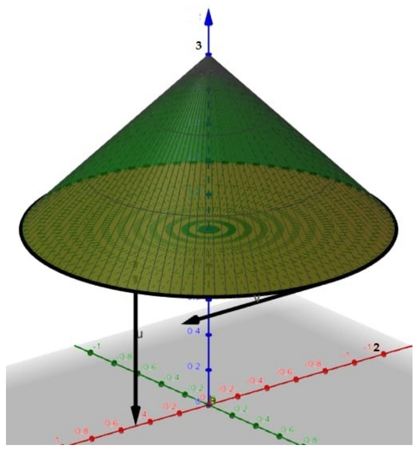
Por empezar f no es conservativo pues tiene rotor no nulo.

Para aplicar el teorema del rotor, elijo como superficie T al plano $z = 1$ con $x^2 + y^2 \leq 4$, y lo oriento hacia los z^-.

Por el teorema del rotor la circulación pedida es

$\iint_T \nabla \times (\overrightarrow{f})|_T . \overrightarrow{d\sigma} = \iint_{P_{xy(T)}} (-y, 1, 1.x).(0, 0, -1) dxdy = -\int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi \int_0^2 \rho^2 d\rho =$ $\boxed{0}$

A pesar de que la circulación sobre esta curva cerrada dió cero, igual el campo no es conservativo, y si buscamos bien tiene que haber una curva cerrada sobre la cual la circulación no vale cero.



E4

Halle la solución de la ecuación $y'' - 9y = 1$ que verifica $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Solución

La ecuación característica es $\alpha^2 - 9 = 0$ cuyas raíces son ± 3, por lo tanto la solución general de la homogénea es

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

Para la SP, propongo $y = B$, $y' = 0$, $y'' = 0$, reemplazo y $0 - 9(B) = 1$, de donde $B = -1/9$.

Por lo tanto la SG es $y = y_h + y_p$, es decir

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{9}$

$y' = 3C_1 e^{3x} - 3C_2 e^{-3x}$

de $y'(0) = 1$ obtengo

$y'(0) = 3C_1 - 3C_2 = 1$

$C_1 - C_2 = 1/3$

de $y(0) = -1$ obtengo

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{9} = -1$

$C_1 + C_2 = -\frac{8}{9}$
sumando las ecuaciones
$2C_1 = -5/9$
$C_1 = -5/18$
de (2)
$C_2 = -8/9 + 5/18$
$C_2 = -11/18$
Por lo tanto, la SP buscada es

$$\boxed{y = -\frac{5}{18}e^{3x} - \frac{11}{18}e^{-3x} - \frac{1}{9}}$$

lo cual concuerda con wolframalpha.

T1

a) Indique como puede usarse el Teorema de Green para calcular áreas planas.

b) Calcule el área de la porción de círculo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y+1)^2 \leq 4, y \geq 0\}$ mediante esta aplicación del teorema.

Solución

b)
Primero analizo la intersección
$x^2 + (y + 1)^2 = 4$ (1)
$y = 0$ (2)
de (2) en (1)
$x^2 + 1 = 4$
$x^2 = 3$
$x = \pm\sqrt{3}$
Analizo el triángulo de vértices
$(0, -1), (0, 0), (\sqrt{3}, 0)$
Lo traslado una unidad para arriba
$(0, 0), (0, 1), (\sqrt{3}, 1)$
Versorizando $\frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$ vemos que el ángulo varía de $-\frac{7\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{6}$
Luego parametrizo el arco de circunferencia con
$g(t) = (2\cos(t), 2\sin(t) + 1)$ con t desde $-\frac{7\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{6}$

Voy a utilizar el siguiente campo

$f(x,y) = (-(y-1), x)$

$Q'_x - P'_y = 1 + 1 = 2$

Calculo la circulación sobre g

$\int_{-7\pi/6}^{\pi/6} (-2\sin(t), 2\cos(t)) \cdot (-2\sin(t), 2\cos(t)) dt$

$= \int_{-7\pi/6}^{\pi/6} 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) dt$

$= 4\int_{-7\pi/6}^{\pi/6} dt = \boxed{\dfrac{16\pi}{3}}$

Ahora parametrizo el segmento de recta

$w(t) = (t, 0)$ con $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$

Calculo la circulación sobre la recta

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1, t) \cdot (1, 0) dt$

$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dt = \boxed{2\sqrt{3}}$

Por el teorema de Green (observando que la orientación es antihoraria)

$\iint_S Q'_x - P'_y dxdy = \oint_C f ds$

$\iint_S 2dxdy = \int_g f ds + \int_w f ds$

$area(S) = \frac{1}{2}\left(\int_g f ds + \int_w f ds\right)$

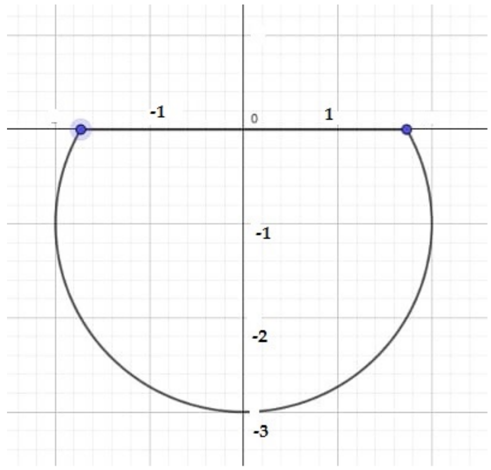
$= \frac{1}{2}\left(\frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$

$= \boxed{\dfrac{8\pi}{3} + \sqrt{3}}$

Verifico con una integral doble

$\int_{-3}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-(y+1)^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}} dx$

$= 2\int_{-3}^{0} \sqrt{4-(y+1)^2} dy = \frac{3\sqrt{3}+8\pi}{3}$



T2

a) Indique una condición necesaria y una suficiente para que un campo $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que sea C^1 en su dominio, resulte conservativo. Defina *función potencial*.

b) Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$ entre los puntos extremos del arco de elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ con $x \geq 1$, orientado en sentido horario.

Solución

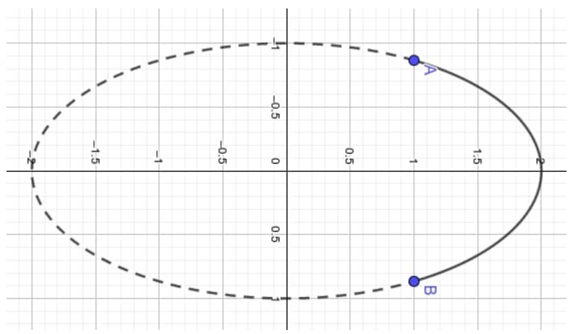
$\phi(x,y) = \ln(x^2+y^2) + C$
$\nabla\phi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(2x, 2y) = f(x,y)$
Por lo tanto f es conservativo y ϕ es una función potencial de f.
Calculo los puntos intersección de
$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (1)
$x = 1$ (2)
de (2) en (1)
$\frac{1}{4} + y^2 = 1$
$y^2 = 3/4$
$x = \pm\sqrt{3}/2$

Luego los puntos son $A = \left(1, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y $B = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Como el arco de elipse es una curva abierta, no tiene sentido hablar de orientado en sentido horario. Así que elijo la orientación que me da la gana que es de A hacia B.

Luego la circulación pedida es

$\int_C f dc = \phi(B) - \phi(A) = \ln\left(1 + \frac{3}{4}\right) + C - \ln\left(1 + \frac{3}{4}\right) - C = \boxed{0}$



... Y finalmente, para compenzar por los puntos teóricos que no hice, les dejo un dibujo de Eevee. Eevee es el único Pokémon que cambia completamente su tipo al evolucionar: