1er Parcial AMII (1)

E1) Sea $z=f(u,v)$ la función definida implícitamente por la ecuación $2v+ue^{z}+z=-1$ en un entorno del punto $(1;-1;z_0)$

a) Hallar la derivada direccional máxima de f en $(1;-1)$

b) Con la misma $z=f(u,v)$ del punto anterior sean $u=x^2-y+1$ y $v=x+y^2-3$ queda definida una función $w(x,y)=w(u(x,y);v(x,y))$. Calcular en forma aproximada $w(x,y)=w(0,98;1,01)$

primeramente veremos el valor de z_0:

$$2\cdot(-1)+1e^{z_0}+z_0=-1 \Rightarrow \boxed{z_0=0}$$

$$F(u,v,z)=2v+ue^{z}+z+1=0$$

$F'_u=e^{z} \Rightarrow F'_u(1;-1;0)=1$

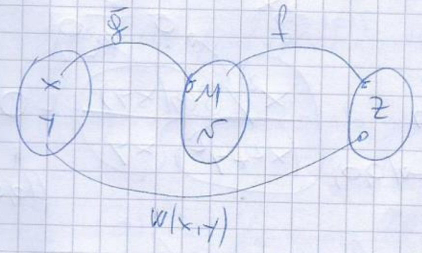
$F'_v=2 \Rightarrow F'_v(1;-1;0)=2$

$F'_z=ue^{z}+1 \Rightarrow F'_z(1;-1;0)=2$

$$f'_u=-\frac{F'_u}{F'_z}=-\frac{1}{2}=-1/2$$

$$f'_v=-\frac{F'_v}{F'_z}=-\frac{2}{2}=-1$$

a) $f'_{max}=\|\nabla f(1;-1)\|=\|(-1/2;-1)\|=\sqrt{1/4+1}=\sqrt{5}/2$



$z=w(x,y)$ compuesto

necesito el ∇w

$$\nabla w=\bar{\nabla} f\cdot D\bar{g}$$

$$w=f\circ\bar{g}$$

$$Dg = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

los puntos son: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

$$Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla w(1,1) = (-1/2 ; -1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-2 ; -3/2)$$

$$\Rightarrow w(0{,}98 ; 1{,}01) = \underbrace{w(1,1)}_{f(1,-1) = z_0 = 0} + w'_x(1,1)(0{,}98-1) + w'_y(1,1)(1{,}01-1) \Rightarrow$$

$$w(0{,}98 ; 1{,}01) = 0 - 2(-0{,}02) - 3/2(0{,}01) = 0{,}04 - 0{,}015 = 0{,}025$$

E2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Estudiar continuidad en el origen

b) Analizar existencia de derivadas direccionales en (0,0)

c) La gráfica de f ¿admite plano tangente en el punto (0,0, f(0,0))

Continuidad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 0 = f(0,0)$$

acotado · 0 · 0

justificación $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow u \to 0$ $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = \lim \frac{\operatorname{sen}(xy)}{(xy)} = 1$

$x^2 \leq x^2+y^2 \rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ $\boxed{\text{LA FUNCION ES CONTINUA EN } \bar{O}}$

NOTA

HOJA N°

FECHA ③

derivadas direccionales

$$f'(\bar{0};\bar{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{0}+h\bar{v})-f(\bar{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1;hv_2)-0}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{hv_1 \operatorname{sen}(h^2v_1v_2)}{h^2(v_1^2+v_2^2)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}v_1 \operatorname{sen}(h^2v_1v_2)}{\cancel{h}h^2 \underbrace{(v_1^2+v_2^2)}_{1}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{v_1^2 v_2 \overbrace{\operatorname{sen}(h^2v_1v_2)}^{\to 1}}{(h^2v_1v_2)} = v_1^2 v_2 \quad \text{es derivable en toda dirección}$$

direcciones de derivada nula: $(1;0)$ $(-1;0)$ $(0;1)$ $(0;-1)$

4 direcc de derivada nula $\longrightarrow$ "no es diferenciable"

E_3) Hallar el angulo que forma la normal a la superficie $x^2+y^2+z^2=1$ en el punto $(1/2;1/2;\sqrt{2}/2)$ con la normal a la superficie parametrizada por $\bar{F}(\mu,v)=(\mu\cos v;\mu\cos v;\mu)$ en el mismo punto

Normal a la superficie $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \Rightarrow$

$N_1=\bar{\nabla}F=(2x;2y;2z)$ en el punto $\bar{\nabla}F(1/2;1/2;\sqrt{2}/2)=(1;1;\sqrt{2})=\bar{N_1}$

Superficie parametrizada

$$F(\mu_0;v_0)=(\mu_0\cos v_0;\mu_0\cos v_0;\underline{\underline{\mu_0}})=\left(1/2;1/2;\underline{\sqrt{2}/2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos v_0 = 1/2 \Rightarrow \cos v_0 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{v_0=\pi/4} \quad \boxed{\mu_0=\sqrt{2}/2}$$

$$F'_\mu=(\cos v;\cos v;1) \qquad F'_v=(-\mu \operatorname{sen} v;-\mu\operatorname{sen} v;0)$$

NOTA

$F'_u(\sqrt{2}/2;\pi/4) = (\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;1)$; $F'_v(\sqrt{2}/2;\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$$\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = \left(1/2\ ;\ -1/2\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = (1/2;-1/2;0)$$

Veremos que angulo forman estos dos vectores

$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = \|\bar{N}_1\|\|\bar{N}_2\| \cdot \cos\alpha$

$\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2 = (1;1;\sqrt{2})\cdot(1/2;-1/2;0) = 0 = \cos\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi/2}$

E4) Determine $K \in \mathbb{R}$ de manera que las familias $y^3 = Ax$; $x^2+ky^2 = B^2$ sean ortogonales

ec dif 1er flia: $y^3 = Ax \Rightarrow 3y^2y' = A \Rightarrow y^3 = 3y^2y'x \Rightarrow$

$\boxed{y = 3y_1'x}$

ec dif 2da flia: $x^2+ky^2 = B^2 \Rightarrow 2x+2ky'y = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x+ky_2'y=0} \Rightarrow y_2' = -\frac{x}{ky}$

Se debe cumplir que: $y_1' = -\frac{1}{y_2'} \Rightarrow \frac{y}{3x} = -\frac{1}{-\frac{x}{ky}}$

$\frac{y}{3x} = \frac{ky}{x} \Rightarrow \boxed{K = 1/3}$

NOTA

HOJA N°

FECHA 5

T1) Defina superficie y punto regular de una superficie. Analice si $\bar{A}(2,1,1)$ es punto regular de la superficie de ecuación: $\bar{x}=(u, u-v; v^2)$ con $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ b) Sea r_0 la recta normal en $\bar{A}=(1,2,3)$ a la sup Σ de ecuación $z=y+x^2$ con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; Calcule la longitud del segmento $\overline{AB}\subset r_0$, siendo $\bar{B}$ el punto en que r_0 intersecta al plano xy

a) $\bar{x}\in C^1$; $\bar{x}'_u=(1,1,0)$; $\bar{x}'_v=(0;-1;2v)$

$(u_0; u_0-v_0; v_0^2)=(2,1,1)$ $\quad u_0=2 \quad v_0=1$

$\bar{x}'_u(2,1)=(1,1,0)$; $\bar{x}'_v(2,1)=(0,-1;2)$

$$\bar{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(2;-2;-1)\neq\bar{0}$$; el pto $(2,1,1)$ es REGULAR

b) $F(x,y,z)=x^2+y-z=0 \Rightarrow \bar{N}=\bar{\nabla}F=(2x;1;-1)$

$\bar{\nabla}F(1,2,3)=(2;1;-1)$ recta normal: $\bar{x}=\bar{A}+\lambda\bar{N}\Rightarrow$

$(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(2,1,-1)$

intersecta al plano xy en: $z=0 \Rightarrow 0=3-\lambda \Rightarrow \lambda=3$

el punto de intersección es: $(1,2,3)+3(2,1,-1)=(7;5;0)$

distancia $\overline{AB}=\sqrt{(7-1)^2+(5-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{45}$

NOTA