Nombre y apellido:.. Curso Z2041

E1.- Dada

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Identifique y grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) Analice la continuidad y la existencia de derivadas parciales de f en $(0,0)$.
¿Es f diferenciable en $(0,0)$? ¿Y en $(-1,1)$? Justifique su respuesta en cada caso.

E2.- Encuentre la curva que pasa por $(1,-1)$ y pertenece a la familia ortogonal a las parábolas $F: x + ky^2 = 0$. Grafique la parábola y la curva ortogonal que pasan por dicho punto.

E3.- *a*) Pruebe que, cerca del punto $(1,1,1)$, la ecuación $z + cos(z-x) + xy = 3$ define, implícitamente, $z = f(x,y)$.

b) Encuentre la dirección de derivada máxima de la función $h(x,y) = x^3 + yf(x,y)$ en el punto $(1,1)$. Justifique todos sus cálculos.

E4.- *a*) Determine si en el punto $Q = (0,4,2)$, la superficie parametrizada por la función $\overrightarrow{\Gamma}(u,v) = (u-2v, u^2, 2v))$, con $(u,v) \in [1,3] \times [0,2]$, tiene plano tangente horizontal.

b) Analice si la curva C, definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $z+x=2$ y $y=z^2$, corta ortogonalmente a la superficie del inciso anterior.

T1.- *a*) Enuncie la "Regla de la Cadena"para la composición h de dos funciones $f: \mathbb{R}^2 \to R$ y $\overrightarrow{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en un punto (u_0, v_0). Indique las hipótesis que se deben establecer.

b) Halle las direcciones de derivada nula de la composición de las funciones $f(x,y) = x^3y - x^2$ y $\overrightarrow{g}(u,v) = (e^{u.v}, u.v)$ en el punto $(0,1)$. Justifique sus procedimientos y afirmaciones.

T2.- *a*) ¿Qué significa, geométrica y analíticamente, que un campo $f(x,y)$ sea derivable en un punto (a,b) de su dominio, en cierta dirección $\check{v} = (v_1, v_2)$?

b) Pruebe que el campo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

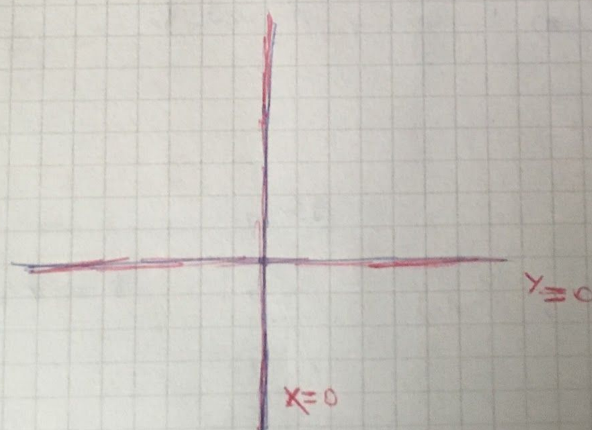
es derivable en $(0,0)$ sólo para cuatro versores $\check{v} = (v_1, v_2)$.

5/5/17

E1) a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

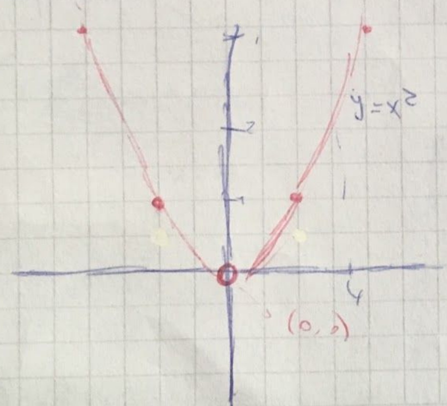
Conjunto ~~0~~ $\boxed{f(x,y) = 0}$

$\frac{y}{x^2} = 0$ cuando $y = 0$ y ~~excepto~~ unido a $x = 0$



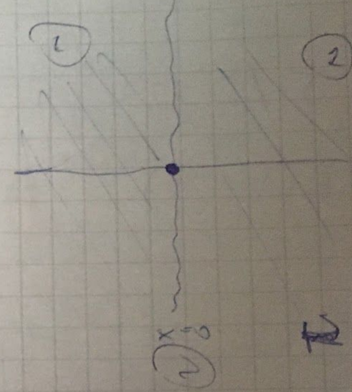
$\boxed{f(x,y) = 1}$ $\frac{y}{x^2} = 1 \rightarrow y = x^2$ excluyendo $x = 0$ ~~unido a~~

es del conjunto 0



continuidad

b) i) $f(0,0) = 0$



ii) (2) $\rightarrow \lim\limits_{xy \to 0\,0} 0 = 0$

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x^2}$

$\boxed{\text{por } y = mx}$

$\lim\limits_{(x)\to(0,0)} \dfrac{mx}{x^2} \Rightarrow$ Diverge, No existe L

$\lim\limits_{(x)\to(0,0)} \dfrac{mx}{x^2} \Rightarrow$ Diverge, No existe L

Derivadas parciales)

$a^2 + b^2 = 1$, (a,b) Casos: $a = 0 \rightarrow$ (2) ; * $a \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f[(0,0) + h(a,b)] - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha, hb)}{h}$$

$\boxed{a = 0}$ → Rama ②

Caso $f'_y(0,1)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$\boxed{a \neq 0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{hb}{\frac{h^2 a^2}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{b}{h^2 a^2}$$

$\boxed{\text{si } b = 0}$

Caso $f'_x(1,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2 a^2} = 0$$

$\boxed{\text{si } b \neq 0}$

apartado (para diferenciabilidad)

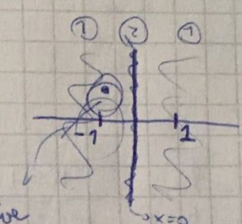
$\lim_{h\to 0} \frac{b}{h^2 a^2}$ → Diverge, ∄ der parcial si $b \neq 0$, $a \neq 0$

∴ Las derivadas parciales existen

Def ⇒ La fc no es ~~cont~~ diferenciable en (0,0) porque no es continua

E1) Cont.

$\boxed{\text{En } (-1,1)}$



f

SOLAMENTE en ①

⇒ uso solo rama 1 | es C^1?

$$\left\{ f'_x(x,y) = \frac{-2y}{x^3} \qquad f'_y(x,y) = \frac{1}{x^2} \right\} \text{ continuas con } x \neq 0$$

⇒ son continuas en $(-1,1)$

⇒ f es diferenciable en $(-1,1)$

F2) $\cdot$ F: $x + ky^2 = 0$

despejo k

$$k = \frac{-x}{y^2} \longrightarrow k = y'$$

$$y' = \frac{-x}{y^2}$$

→ despejo

$$y^2 y' = -x$$

→ reemplazo por $-\frac{1}{y'}$ (ortogonal)

$$\frac{\cancel{-}y^2}{y'} = \cancel{-}x \longrightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{-1}{y} = \ln|x| + C$$

por (1,-1)

$$y = \frac{-1}{\ln|x| + C}$$

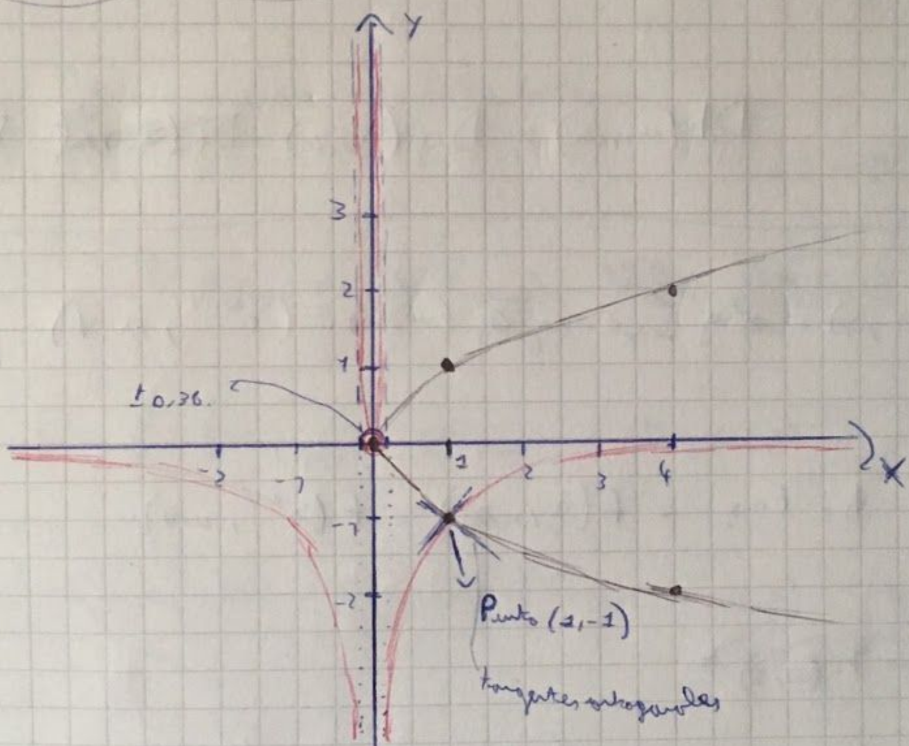
$$-1 = \frac{-1}{(\ln 1) + C} \rightarrow -1 \cdot C = -1 \longrightarrow \boxed{C = 1}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Solución particular:} \quad y = \dfrac{-1}{\ln|x|+1}}$

y la parábola en cuestión es $\longrightarrow$ $1 + k(-1)^2 = 0$

$\boxed{k = -1}$

$\hookrightarrow$ $x = y^2$



* $x = y^2$

$y = \dfrac{-1}{\ln|x|+1}$ $\longrightarrow$ $x \neq 0$

$\longrightarrow$ asíntotas en $x = 0$ y $\underbrace{\ln|x| = -1}_{\pm 0{,}3679\ldots}$

$\hookrightarrow$ $\ln(-x) \longrightarrow x < 0$

• y nunca es 0

• por prueba y error, hay una parábola entre $-0{,}36$ y $+0{,}36$, y un "agujero" en $(0,0)$

E3) a) $Z + \cos(z-x) + xy - 3 = 0$

i) $F'_x = \sin(z-x) + y$ $(1,1,1)$

$F'_y = x$ / es C_1 (derivadas parciales continuas)

$F'_z = 1 - \sin(z-x)$

ii) $\boxed{F(1,1,1) = 1 + \cos(0) + 1 - 3 = 0}$ ✓

iii) $\boxed{F'_z(1,1,1) = 1 - \sin(0) = 1}$ ✓ ∴ Define $Z = f(x,y)$

b) ~~$h(x,y) = x^3 + yf(x,y)$~~

$h'_x(x,y) = 3x^2 + y f'_x(x,y)$

$h'_y(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{=1} + y f'_y(x,y)$

$f'_x(1,1) = -\dfrac{\sin 0 + 1}{1 - \sin 0} = -1$

$h'_x(1,1) = 3 + 1 \cdot -1 = 2$

$h'_y(1,1) = 1 - 1 = 0$

$f'_y(1,1) = \dfrac{-x}{1} = \boxed{-1}$

esto es efuerzo gráfico

$f'_x(x,y) = -\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

$\Rightarrow \nabla h(1,1) = (2 \quad 0)$ ~~$(2, 0, -1)$~~

$f'_y(x,y) = -\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

Buscamos la máxima

$\Rightarrow$ ~~$\|\nabla h\|$~~ $\|\nabla h\|$ direc de derivada.

$\vec{v} = \dfrac{\nabla h}{\|\nabla h\|}(1,1)$

$\Rightarrow$ ~~$\sqrt{2^2}$~~ $\|\nabla h(1,1)\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \boxed{2}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dfrac{(2,0)}{2} = (1,0)}$

La dirección de derivada máxima es el vector $(1,0)$

E4) $Q=(0,4,2)$ $\bar{F}(u,v)=(u-2v, u^2, 2v)$, $(u,v)\in[1,3]\times[0,2]$

plano tg horizontal?

al tener una superficie parametrizada, basta con obtener las derivadas parciales y ~~tene~~ calcular el producto vectorial para tener el normal del plano.

- primero obtengamos u y v para Q

$$u-2v=0 \longrightarrow \underbrace{u=2v \rightarrow u=2}$$

$$u^2=4 \longrightarrow \text{confirmo} \checkmark$$

$$2v=2 \longrightarrow v=1$$

$$(u,v)=(2,1)$$

- Derivadas parciales

$$\bar{F}'_u(u,v)=(1,2u,0) \rightarrow \text{en } (2,1) \rightarrow (1,4,0)$$

$$\bar{F}'_v(u,v)=(-2,0,2)$$

$$\Rightarrow (F'_u \times F'_v)_{(2,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (8,-2,8)$$

$$\} (4,-1,4)$$

$$\text{plano tg} \longrightarrow \underbrace{[(x,y,z)-(0,4,2)]}\cdot(4,-1,4)=0$$

$$(x,y-4,z-2)\cdot(4,-1,4)=0$$

$$4x-y+4+4z-8=0$$

$\Rightarrow$ $T: \quad 4x - y + 4z = 4$

$\hookrightarrow$ NO es horizontal, porque no está de la forma:

$z = k$

---

b) $C \begin{cases} z + x = 2 \\ y = z^2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Se puede ver como}}$ curva de nivel $\longrightarrow$ $C: \begin{cases} S_1: \overbrace{z + x - 2}^{F(x,y,z)} = 0 \\ S_2: \underbrace{y - z^2}_{G(x,y,z)} = 0 \end{cases}$

el normal será el producto vectorial de sus gradientes

$\nabla F = (1, 0, 1) \qquad \nabla G = (0, 1, -2z)$

$\downarrow$ en $(0,4,2)$

$(0, 1, -4)$

$(0,4,2)$ pertenece a C

porque $\begin{cases} 0 + 2 = 2 \\ 4 = 2^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ C corta al plano T en ese punto

$(1,0,1) \times (0,1,-4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1, 4, 1)$

$\Rightarrow$ Si se cortan ortogonalmente, ~~$(-1,4,1)$~~ ~~...~~

$\Updownarrow$

$\exists \lambda$ tal que $\quad \lambda(-1,4,1) = (4,-1,4)$

$\begin{cases} -\lambda = 4 \rightarrow \lambda = -4 \\ \lambda 4 = -1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$ se contradicen, $\nexists \lambda$

$\Rightarrow$ NO se cortan ortogonalmente C y T

T1) a) Regla de la cadena $\left(\text{para comp. } h \text{ de } \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ y} \\ \vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \end{array} \text{ en } (u_0, v_0) \right)$

~~Sean f y $\vec{g}$ diferenciables~~

Sea $\vec{g}$ diferenciable en (u_0, v_0), y f diferenciable en $g(u_0, v_0)$,

$\Rightarrow$ la composición $[h(u_0,v_0) = f(g(u_0,v_0)) = f \circ g]$ también será diferenciable en (u_0,v_0)

y adicionalmente

$$Dh(u_0,v_0) = Dg(u_0,v_0) \cdot Df(g(u_0,v_0))$$

---

b) $f(x,y) = x^3 y - x^2$ y $\vec{g}(u,v) = (e^{u \cdot v}, u \cdot v)$, en $(u,v) = (0,1)$.

$$h = f \circ g = f(g(u,v)) = f(e^{u \cdot v}, u \cdot v)$$

~~$\Rightarrow h(0,1) =$~~

$$\Rightarrow g(0,1) = (e^{0 \cdot 1}, 0 \cdot 1) = (1, 0)$$

y de la composición

x de la composición

$\Rightarrow$ comprobamos que las funciones son diferenciables en esos puntos mediante derivadas parciales

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y) = 3yx^2 - 2x \\ f'_y(x,y) = x^3. \end{array}\right\} \text{continuas en todo } \mathbb{R}^2, \text{ en particular en } (x,y) = (1,0)$$

$$g'_u(u,v) = \left(v\, e^{uv} \; , \; v \right)$$

$$g'_v(u,v) = \left(u\, e^{uv} \; , \; u \right)$$

} continuas en todo $\mathbb{R}^2$, en particular, en $(u,v) = (0,1)$

(Aunque podríamos decir que son C^1 de una, no está de más ~~...~~ sólo derivadas parciales ya que las vamos a usar)

$\Rightarrow$ Podemos usar regla de la cadena

es de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot D g(u,v)$$

$$\Rightarrow \nabla h(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot D g(0,1)$$

$$\Rightarrow \nabla h(1,0) = \begin{pmatrix} f'_x(1,0) & f'_y(1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_{1u} & g'_{1v} \\ g'_{2u} & g'_{2v} \end{pmatrix}_{(0,1)}$$

$f'_x(1,0) = -2$

$f'_y(1,0) = 1$

$$\Rightarrow \nabla h(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$g'_u(0,1) = (1 \; , \; 1)$

$g'_v(0,1) = (0 \; , \; 0)$

$$\nabla h(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Direc de Derivada Nula) en un punto

$$\nabla h_{(x,y)} \cdot \boxed{\breve{v}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2, 1) \cdot (a, b) = 0 & (1) \\ a^2 + b^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$(1) \rightarrow +2a = +b \rightarrow 2a = b$

$\hookrightarrow (2)$

$$a^2 + 4a^2 = 1$$

$$5a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{5} \qquad b = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\Uparrow$ a positiva

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\Downarrow$ a negativa

$$b = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ h tiene 2 direcciones de derivada Nula

$$\breve{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ o } \breve{v}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

T2) a) geométricamente, significa que en ~~...~~ la curva resultante al cortar el gráfico de $f(x,y)$ con un plano vertical, cuyo trazo en el plano xy es la recta $(x,y)=(a,b)+t(v_1,v_2)$, tiene recta tangente en $(a,b,f(a,b))$ y su pendiente será $f'((a,b);(v_1,v_2))$

Analíticamente, significa que $\lim_{h\to 0} \frac{f[(a,b)+h(v_1,v_2)]-f(a,b)}{h}$ existe y da finito

b) $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \quad (1) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \quad (2) \end{cases}$$

$/ \, a^2+b^2=1$

$$f'[(0,0);(a,b)] = \lim_{h\to 0} \frac{f[(0,0)+h(a,b)]-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h}$$

usando (1)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3h^2ab}{h^2(\underbrace{a^2+b^2}_{=1})}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3ab}{h}$$

dividiendo en casos

$\boxed{a=0}$ o $\boxed{b=0}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\cdot 0}{h} = \boxed{0}$$

$\exists$ si $a=0$ o $b=0$

$\boxed{a\neq 0 \text{ y } b\neq 0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3ab}{h} \to \text{Diverge}$$

$\nexists$ si $a\neq 0$ y $b\neq 0$

$\Rightarrow$ Derivadas existen solo cuando $\boxed{a=0}$ o $\boxed{b=0}$

Los versores son $\longrightarrow$ $$\begin{cases} \vec{v}_1=(0,1) \\ \vec{v}_2=(0,-1) \\ \vec{v}_3=(1,0) \\ \vec{v}_4=(-1,0) \end{cases}$$

$\therefore$ ~~...~~ $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ solo es derivable para 4 versores