Nombre y apellido:... Curso Z2545

E1.- Dada

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2-x^2}{y-x} & \text{si } \ y \neq x \\ 1 & \text{si } \ y = x \end{cases}$$

a) Analice la continuidad de $f(x,y)$ en *todo* su dominio.

b) Estudie la existencia de derivadas direccionales de f en el origen. ¿Qué puede decir acerca de la existencia de plano tangente en el punto $(0,0,1)$? Justifique.

E2.- Se sabe que la intersección entre el conjunto de nivel 3 de $F(x,y,z) = x^2+2y-3z^2$ y la imagen de $\overrightarrow{\Sigma}(u,v) = (u, v-u, v^2)$, con $(u,v) \in [-2,2] \times [-2,2]$, define una curva C en cercanías del punto $P = (-1,1,0)$. Demuestre que el plano normal a C en P es paralelo al plano $x+y=2$.

E3.- *a*) Demuestre que la ecuación $e^{x+y} - x^2 - 2yx = 2$ define una curva en el plano, en un entorno del punto $Q = (1,-1)$.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto Q. Justifique sus cálculos.

E4.- Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$. Estudie, justificando apropiadamente, los extremos de f en el círculo $x^2+y^2 \leq 1$.

E5.- Halle la curva que pasa por $(1,1)$ y es solución de la ecuación diferencial $xy\prime - 2x^2y = y$.

T1.- *a*) ¿Qué es una *ecuación diferencial lineal de primer orden*?

b) Halle la solución de la EDO $y' - xy = x$ que en $x=0$ tiene a $y=-1$ por recta tangente.

T2.- *a*) ¿Qué significa, geométrica y analíticamente, que un campo $f(x,y)$ sea diferenciable en un punto (a,b) de su dominio?

b) Analice si el campo

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y^2 & \text{si } \ y \leq 0 \\ x+y & \text{si } \ y > 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $(-1,0)$. Justifique.

1) a) Para $x \neq y$:

$$f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{y - x} = \frac{\cancel{(y-x)}(y+x)}{\cancel{y-x}} = y + x$$

$\therefore$ Para $x \neq y$, $f(x,y)$ es continua porque es un polinomio ($f(x,y) = y + x$)

Para los puntos $(x,y) = (a,a)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a) \\ \text{con } x \neq y}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} (y+x) = 2a$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a) \\ \text{con } x = y}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} 1 = 1$$

$\therefore$ En los puntos de la forma (a,a) la función sólo es continua si $2a = 1$ o sea si $a = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Dominio de continuidad de f:

$$\left(\mathbb{R}^2 - \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \} \right) \cup \{ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \}$$

b) Para $\vec{v} = (v_1, v_2)$ con $v_1 \neq v_2$:

$$f'((0,0), \vec{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + hv_1, 0 + hv_2) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 v_2^2 - h^2 v_1^2}{hv_2 - hv_1} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h v_2 + h v_1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(v_2 + v_1 - \frac{1}{h} \right)$$

NO existe

Para $\check{v} = (v_1, v_2)$ con $v_1 = v_2$:

$$f'((0,0), \check{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h v_1, 0 + h v_1) - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

$\therefore$ $f'((0,0), \check{v})$ sólo existe para

$$\check{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \wedge \check{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Como f no es continua en $(0,0)$, f no es diferenciable en ese punto

$\therefore$ no existe el plano tangente a la gráfica en $(0,0,1)$

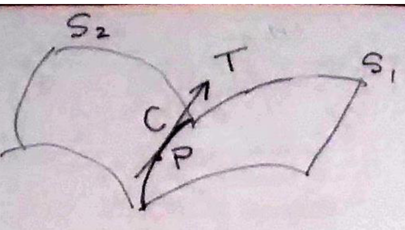
2) S_1: $x^2 + 2y - 3z^2 = 3$

En P:
$u = -1$
$v = 0$

S_2: $\vec{\Sigma}(u, v) = (u, v - u, v^2)$

$$N_1 = \nabla F(-1,1,0) = (2x, 2, -6z)\Big|_P = (-2, 2, 0)$$

$$N_2 = \vec{\Sigma}'_u \times \vec{\Sigma}'_v \Big|_P = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix}_P = (0, 0, 1)$$



$T = N_1 \times N_2 =$

$= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,2,0)$

$\therefore$ plano normal a C en P:

$$[(x,y,z)-(-1,1,0)]\cdot(2,2,0)=0$$

$$2x+2y=0$$

que es paralelo al plano $x+y=2$
pues ambos tienen normales paralelas

3) a) $e^{x+y} - x^2 - 2yx = 2$ define $y = y(x)$

cerca de $Q=(1,-1)$ pues:

I) $F(x,y) = e^{x+y} - x^2 - 2yx$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ ya que

$$F'_x = e^{x+y} - 2x - 2y$$

$$F'_y = e^{x+y} - 2x$$

son continuas

II) $F(1,-1) = e^{1-1} - 1^2 - 2\cdot(-1)\cdot 1 = 2$

III) $F'_y(1,-1) = e^{1-1} - 2.1 = -1 \neq 0$

b) $y'(1) = -\dfrac{F'_x(1,-1)}{F'_y(1,-1)} = -\dfrac{2}{-1} = 2$

$\therefore$ recta tangente: $y-(-1) = 2(x-1)$

o sea $y = 2x-3$

4) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x \\ f'_y = -2y \end{array}\right\} \text{ continuas en } \mathbb{R}^2 \quad \therefore \quad f \in C^1$$

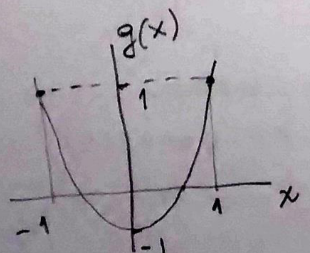
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ Único punto estacionario: $(0,0)$

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$ ∴ en $(0,0)$ hay un punto silla

∴ los extremos se producen en el borde del círculo, $x^2 + y^2 = 1$; con $x \in [-1, 1]$:

$$f\Big|_C = x^2 - y^2 \Big|_{x^2+y^2=1} = x^2 - (1 - x^2) =$$

$$= 2x^2 - 1 = g(x)$$



$g(x)$ tiene dos máximos en $x = \pm 1$ y un mínimo en $x = 0$. Para $x = \pm 1$, $y = 0$ ∧ para $x = 0$, $y = \pm 1$.

∴ f tiene en $x^2 + y^2 \leq 1$ dos máximos de valor 1 en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ y dos mínimos de valor -1 en $(0, 1)$ y $(0, -1)$

5) $$xy' - 2x^2 y = y$$

$$xy' = y(1+2x^2)$$

$y \equiv 0$ o $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1+2x^2}{x} = \frac{1}{x} + 2x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + x^2 + C$$

SG: $y = K x e^{x^2}$

Pasa por $(1,1)$:

$$1 = K \cdot 1\, e^1$$

$$\therefore K = \frac{1}{e}$$

$\therefore$ SP: $y = \frac{1}{e} x e^{x^2}$