Vol esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad C = \pi r^2$

HOJA

FECHA

Integral curvilinea - Funcion Potencial

$\bar{g}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ continua en $A = [a;b]$

- Curva cerrada $\iff \bar{g}(a) = \bar{g}(b)$
- Curva simple $\iff \bar{g}$ inyectiva en $(a;b]$
- Curva suave $\iff \bar{g}'(t)$ continua $\wedge\ \bar{g}'(t) \neq 0\ \forall t \in [a;b]$

- Longitud de arco de curva $S = \int_a^b \|\bar{g}'(t)\|\, dt$
- Trayectoria campo escalar $\int_C h(x,y,z)\, ds = \int_a^b h(\bar{g}(t)) . \|\bar{g}'(t)\|\, dt$
- Circulacion campo vectorial $\int_C \bar{f}\, d\bar{s} = \int_a^b h(\bar{g}(t)) . \bar{g}'(t)\, dt$

$\bar{f}(x,y,z) = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)) \Rightarrow \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

Funcion potencial $U(\bar{x}) / \bar{\nabla} U = F \Rightarrow \int_C \bar{F}\, d\bar{s} = U(B) - U(A)$

Condicion necesaria y suficiente

Region de simplemente conexa y en $\mathbb{R}^2 \iff P'_y = Q'_x$

$\mathbb{R}^3 \iff P'_y = Q'_x \wedge P'_z = R'_x \wedge Q'_z = R'_y$

Integrales Multiples - Cambio de coordenadas

- Dobles. Puede ser:

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases} \qquad \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$D: \begin{cases} a \leq y \leq b \\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \end{cases} \qquad \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

NOTA

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad |Df| = r$$

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{r,\theta}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Coordenadas elípticas

$$\begin{cases} x = a r\cos\theta \\ y = b r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad |Df| = abr$$

Integrales Triples

$$V = \begin{cases} a \le x \le b \\ m_1(x) \le y \le m_2(x) \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{cases} \quad \iiint_V f(x,y)\,dV = \int_a^b \int_{m_1}^{m_2} \int_{g_1}^{g_2} f(x,y)\,dz\,dy\,dx$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} r \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z \end{matrix} \quad |Df| = r$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\,\text{sen}\,\omega \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\omega \\ z = r\cos\omega \end{cases} \quad \begin{matrix} r \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \omega \le \pi \end{matrix} \quad |Df| = r^2\,\text{sen}\,\omega$$

APLICACIÓN FÍSICA	$\Re^2$	$\Re^3$
MASA (Ma)	$\iint_D \delta(x,y)dxdy$	$\iiint_V \delta(x,y,z)dxdydz$
MOMENTO ESTÁTICO (Me)	$Me\|_x = \iint_D y\delta(x,y)dxdy$ $Me\|_y = \iint_D x\delta(x,y)dxdy$ $x_G = \frac{Me\|_y}{Ma} \quad y_G = \frac{Me\|_x}{Ma}$	$Me\|_{xy} = \iiint_V z\delta(x,y,z)dxdydz$ $Me\|_{xz} = \iiint_V y\delta(x,y,z)dxdydz$ $Me\|_{yz} = \iiint_V x\delta(x,y,z)dxdydz$
MOMENTO DE INERCIA (I)	$I\|_x = \iint_D y^2\delta(x,y)dxdy$ $I\|_y = \iint_D x^2\delta(x,y)dxdy$ $I\|_{(0,0)} = \iint_D (x^2+y^2)\delta(x,y)dxdy$	$I\|_x = \iiint_V (y^2+z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$ $I\|_y = \iiint_V (x^2+z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$ $I\|_z = \iiint_V (y^2+x^2)\delta(x,y,z)dxdydz$

NOTA

HOJA

FECHA

Integral de superficie - flujo

Superficie parametrizada por $\bar{h}(u,v) = (x(u,v); y(u,v); z(u,v))$ (1)

$$A(D) = \iint_{D_{xy}} \| h'_u \times h'_v \| \, du \, dv$$

Superficie de forma $z = f(x,y)$ (2)

$$A(D) = \iint_{D_{xy}} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx \, dy$$

Implícitamente (3)

$$xy = A(D) = \iint_{D_{xy}} \frac{dx\,dy}{|\cos \breve{n}_z|} \qquad \cos \breve{n}_z = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

- Campo escalar

(1) $$\iint_D \bar{g}(x) \, d\sigma = \iint_{D_{uv}} g(x(u,v); y(u,v); z(u,v)) \, \| h'_u \times h'_v \| \, du \, dv$$

(2) $$\iint_D \bar{g}(x) \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} g(x, y, f(x,y)) \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx \, dy$$

(3) $$\iint_D \bar{g}(x) \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} g(x, y, f(x,y)) \frac{dx\,dy}{|\cos \breve{n}_z|}$$

- Campo vectorial (flujo)

(1) $$\Phi = \iint_\Sigma \bar{f} \, \breve{n} \, d\sigma = \iint_{D_{uv}} \bar{f}(h(u,v)) \, (h'_u \times h'_v) \, du \, dv$$

(2) $$\Phi = \iint_\Sigma \bar{f} \, \breve{n} \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \bar{f}(x, y, f(x,y)) \cdot (f'_x; f'_y; -1) \, dx \, dy$$

(3) $$\Phi = \iint_\Sigma \bar{f} \, \breve{m} \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \bar{f}(x, y, f(x,y)) \cdot \frac{\nabla F}{|F'_z|} \, dx \, dy$$

NOTA

Teoremas integrales

- $\mathrm{div}\,\overline{f}(x,y,z) = \nabla\cdot\overline{f} = P'_x + Q'_y + R'_z$ (Traza de la matriz jacobiana)
- Rotor: $\nabla\times\overline{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z;\ P'_z - R'_x;\ Q'_x - P'_y)$

Irrotacional rotor nulo

Selenoidal divergencia nula.

Armonico laplaciano nulo. Laplaciano

$$\nabla^2 f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$$

Teorema de Gauss o de la divergencia

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\overline{f}\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\oiint_\Sigma \overline{f}\,\vec{n}\,d\sigma}_{\text{flujo}}$$

Si es abierto se cierra y se restan los flujos de las caras.

Teorema de Stokes o del Rotor

$$\oint_C \overline{f}\,d\overline{s} = \iint_\Sigma \mathrm{Rot}(F)\cdot\vec{n}\,d\sigma \qquad \vec{n} = \frac{\nabla S}{|S'_z|}$$

Teorema de Green

$$\underbrace{\oint_{C^+} \overline{f}\,d\overline{s}}_{\text{circulación}} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

HOJA

FECHA

• Ecuacion diferencial homogenea (1er orden)

Responde a la ecuación $y' = F(x;y)$ y verifica que

$$F(tx;ty) = F(x;y)$$

Para resolverla se aplica el cambio de variables $y(x) = z(x)x$ para transformar la ED en variables separables

Se deriva y se reemplaza

$$y = zx \qquad y' = z + z'x$$

• ED totales exactas (1er orden)

Responden a la ecuacion $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$P'_y = Q'_x$ si se cumple la SG es la funcion potencial $U(x,y)$ donde

$$\begin{cases} U'_x = P \\ U'_y = Q \end{cases}$$

* Fotocopia al final de Reducibles a totales exactas.

• Coeficientes constantes (2° orden)

Responden a la ecuación $y'' + py' + qy = f(x)$

$y'' + py' + qy = r^2 + pr + q = 0$ Se obtienen las raíces y depende sus valores se prosigue:

Si $r_1 = k_1 \wedge r_2 = k_2 \quad k_1 \neq k_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Si $r = a \pm bi \quad y_h = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx$

Si $r_1 = r_2 = k \quad y_h = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

NOTA

* Busqueda de la solución particular

• Metodo de coeficientes indeterminados

$y'' + py' + qy = f(x)$. Solo sirve si $f(x)$ es polinomico, exponencial o bien de la forma $\cos\alpha x$, $\operatorname{sen}\alpha x$ o CL entre estas funciones.

$f(x)$	y_p
• Polinomio de grado n	• Polinomio grado n completo con coeficientes a determinar
• $K_0 e^{\alpha x}$	$A e^{\alpha x}$
$K_0 \cos\alpha x$ • $K_1 \operatorname{sen}\alpha x$ $K_0 \cos\alpha x + K_1 \operatorname{sen}\alpha x$	• $A\cos\alpha x + B\operatorname{sen}\alpha x$

• Metodo de variacion de parametros

$y_p = u(x)\, y_1 + v(x)\, y_2$ u y v funciones a determinar

Impongo $u' y_1 + v' y_2 = 0$

$y'_p = u y'_1 + v y'_2 \Longrightarrow$ queda el sistema

$$\begin{cases} u' y_1 + v' y_2 = 0 \\ u' y'_1 + v' y'_2 = f(x) \end{cases}$$

Encuentro v' y u' integro y sustituyo en $y_p = u y_1 + v y_2$

y_1 e y_2 se obtienen de la homogenea

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

NOTA

Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Totales Exactas

Factor integrante.

Nos interesa estudiar aquellas ecuaciones diferenciales que no siendo totales exactas pueden transformarse en exactas, multiplicando ambos términos de la educación diferencial por una función conveniente denominada factor integrante, si existe.

Por lo tanto:

Dada la ecuación diferencial:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad (1)$$

tal que no sea exacta, es decir, tal que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

bajo ciertas condiciones es posible encontrar un factor $\mu(x, y)$, no nulo, llamado *factor integrante,* tal que al multiplicar ambos términos de la E.D. por dicho factor, la convierta en ecuación diferencial total exacta.

Es decir, busca $\mu(x, y)$ no nulo tal que

$$\mu(x, y).[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = \mu(x, y).0$$

O bien

$\rightarrow U'_y M + U M'_y = U'_x N + UN$

$$\underbrace{\mu(x, y)M(x, y)dx}_{P} + \underbrace{\mu(x, y)N(x, y)dy}_{Q} = 0 \quad (2) \text{ resulte total exacta}$$

Veamos ahora en qué condiciones, y cómo encontrar ese factor integrante:

La condición para que la ecuación diferencial (2) sea total *exacta* será:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu.\, M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu.\, N)$$

que desarrollado es:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Si ahora agrupando los términos con el factor μ nos queda

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \qquad (3)$$

Nosotros sólo estudiaremos los casos en que el factor integrante dependa de una única variable, el caso contrario nos llevaría a una ED en derivadas parciales que no sabemos resolver.

a) Caso de factor integrante dependiente sólo de x, $\mu(x)$:

En este caso el último término del miembro de la derecha de (3) se anula, y queda:

$$\mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N.\mu'(x)$$ ED.VS. de incognita U = U(x)

y se puede expresar : $$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx \qquad \{3a'\}$$

Lo cual representa una ED de variables separables de incógnita $\mu = \mu(x)$

<u>siempre que la expresión</u>:

$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ *dependa* sólo de la variable x

<u>condición de existencia de $\mu(x)$</u>

En este caso al resolver la ecuación {3a'} obtenemos un factor integrante

$$\boxed{\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}}$$

El cual se sustituye en la ecuación (2) y se resuelve la misma como total exacta . ej. cuaderno

b) Caso de factor integrante dependiente sólo de y, $\mu(y)$:

Este caso, se estudia en forma análoga a la expuesta para el caso anterior ...

La ecuación (3) será de la forma $\mu(y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ = - M. $\mu'(y)$

La cual nos queda:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy$$

El factor integrante será , entonces:

$$\boxed{\mu(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}}$$

<u>siempre que</u>:

$\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ *dependa* sólo de la variable y

<u>Condición de existencia de y= μ(y)</u> ej. cuaderno

El cual se sustituye en la ecuación (2) y se resuelve la misma como total exacta .

si no existe ni U(x) ni U(y), la ec. se puede resolver como homogenea, v.s etc.