3. Límite y Continuidad

01) Analice la existencia de los siguiente límites de funciones escalares de una variable.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|x|}$. c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \sqrt{x}$. d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x\ge 0 \\ x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$.

02) ¿Por qué existe el $\displaystyle \lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{|u|}, u\ln(u)\right)$ pero no existe el $\displaystyle \lim_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{|u|}, u\right)$?.

03) Analice la existencia del $\displaystyle \lim_{u\to 0}\left(\frac{1-\cos(u)}{u^2}, 1+2u, \frac{\operatorname{sen}(u^2)}{u^3+u^2}\right)$.

04) Represente el conjunto imagen de las siguientes funciones vectoriales de una variable e indique en qué casos dicho conjunto es una curva.

a) $\bar{g}:\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(t)=(t,\,2t)$

b) $\bar{g}:[-1,2]\subset\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(u)=(u,|u|)$

c) $\bar{g}:[0,\pi]\subset\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(\varphi)=(\cos(\varphi),\operatorname{sen}(\varphi))$

d) $\bar{g}:\Re\to\Re^3 \,/\, \bar{g}(t)=(t,\,2t,1-t)$

e) $\bar{g}:D\subset\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(x)=(x,\,x^2)$ con $D=\{x\in\Re \,/\, |x|>1\}$

f) $\bar{g}(u)=\begin{cases} u^2+1 & \text{si } u\ge 0 \\ u^2 & \text{si } u<0 \end{cases}$

05) Analice la existencia de los siguientes límites de campos escalares.

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3y-xy^3}{x^4-y^4}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

g) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

h) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$

i) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

j) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

k) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y^2}$

l) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{-y/x^2}$

m) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (y^3+1)\cos\!\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

n) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}(1/x)\cos(1/y)$

o) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y)=\begin{cases} x^3/(x^2-y^2) & \text{si } x^2-y^2\ne 0 \\ 0 & \text{si } x^2-y^2=0 \end{cases}$

p) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y) = \begin{cases} x\,y & \text{si } y \geq x \\ x\,\text{sen}(\frac{1}{y}) & \text{si } y < x \end{cases}$

q) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)/(x^2+x\,y+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

06) *Optativo*: Sea $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}(x\,y)}{\ln(1-x^2)}$

a) Halle el dominio natural D de f y grafíquelo.

b) Analice si existe el $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ para puntos $(a,b)\in\partial D$ (frontera de D).

07) Analice la existencia de los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y-z}{x+y+z}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x-y}$

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\text{sen}(4-xy)}{16-x^2y^2}$

d) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy\,z}{x^3+y^3+z^3}$

e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \, , \, \frac{e^{xy}-1}{xy} \right)$

f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\,\text{sen}(1/y) \, , \, \frac{1-\cos(x)}{x^2} \right)$

08) Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$, halle la ecuación de una curva $C \subset S$ que pase por el punto $(1,2,5)$. Verifique por definición que realmente se trata de una curva.

09) Sea C la curva de ecuación $\overline{X} = (t\,,\, t^2,\, 2t^2)$ con $t \in \Re$.

a) Exprese C como intersección de dos superficies.

b) Demuestre que C es una curva plana.

c) Dada la superficie de ecuación $\overline{X} = (u+v,\, u-v,\, u^2+u+v^2-v+2\,u\,v\,)$ con $(u,v)\in\Re^2$ demuestre que C está incluida en ella.

10) Analice la continuidad en el origen de los siguientes campos escalares.

a) $f(x,y) = \begin{cases} x^3/(x^2+y) & \text{si } x^2+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \text{sen}(y)\,\text{sen}(1/x) & \text{si } (x,y) \neq (0,y) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2-4x^2}{y-2x} & \text{si } y \neq 2\,x \\ 1-x-y & \text{si } y = 2\,x \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } |\,y\,| \neq |x| \\ 0 & \text{si } |y| = |x| \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2+x^2)\,\text{sen}(y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

11) Analice la posibilidad de redefinir la función extendiendo su dominio por continuidad.

a) $f:\Re^2-\{\bar{0}\}\to\Re \;/\;\; \bar{f}(x,y) = (x^2, x y^2)/(x^2+y^2)$.

b) $f(x,y) = x\,\text{sen}(x y)/y$ si $(x,y)\neq(x,0)$.

c) $\bar{g}:\Re^+\to\Re^3 \;/\;\; \bar{g}(t) = \left(\dfrac{t}{|t|}\,,\; t\,\ln(t)\,,\; \dfrac{1-\cos(t)}{t}\right)$.

d) $\bar{g}(u) = (\sqrt{u^2}/u\,,\,\sqrt{u}\,)$ si $u>0$.

12) Determine el conjunto de puntos del plano para los cuales f es continua y realice la representación geométrica de la gráfica de f.

a) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ si $y\le 0 \;\wedge\; x^2+y^2\le 4$, $\;f(x,y) = 0\;\; \forall \text{otro } (x,y)$.

b) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}(x^2+\text{y}^2)}{\text{x}^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $\;f(x,y)=1$ si $(x,y)=(0,0)$.

13) Sea $f(x,y)=x^3/(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. a) Demuestre que f es continua en el origen. b) ¿Puede analizar el límite acercándose al origen por la línea de nivel 1 de f?.

14) Sean $\bar{f}$ y $\bar{g}$ de $\Re^3$ en $\Re^3$ campos vectoriales continuos, demuestre que también son continuos los campos $h:\Re^3\to\Re \;/\; h=\bar{f}\cdot\bar{g}$ y $\bar{w}:\Re^3\to\Re \;/\; \bar{w}=\bar{f}\wedge\bar{g}$.

Cuestionario

1. Defina límite de un campo cuando $\overline{X}\to\overline{A}$ acercándose por una curva.
2. Indique un ejemplo de campo escalar con una discontinuidad evitable.
3. Indique un ejemplo de campo escalar con una discontinuidad esencial.
4. Demuestre que toda función escalar continua y no nula en un punto, mantiene su signo en un entorno de dicho punto.
5. Indique un ejemplo de campo escalar que tenga límite, aún con límites sucesivos no existentes.
6. ¿Puede hallarse un ejemplo como el anterior pero para límites por curvas?

Ejemplo de graficación con el Mathematica

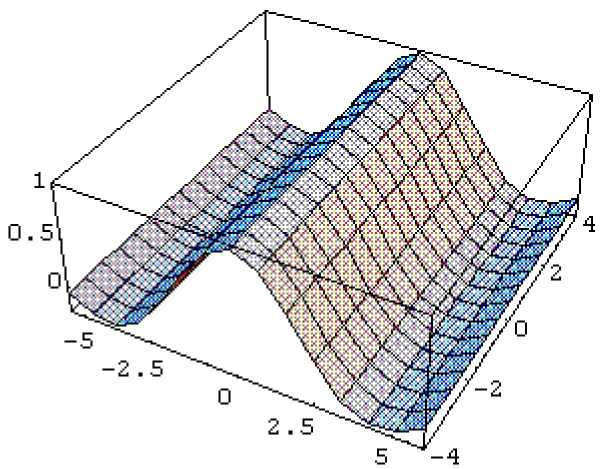
Orden para graficación:

Plot3D[Sin[x]/x, {x, –6,6}, {y, –4,4}**]**;

Comentarios:

Estamos graficando $f(x,y)=\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ en el intervalo [–6,6] x [–4,4].[(*)]

Como en la expresión de la función no figura la variable y, la forma correspondiente a sen(x)/x se "repite" para todo valor de y. Si se considera $f(0,y)$ = 1, este es un ejemplo de superficie cilíndrica.



(*) Si en el gráfico el sistema no incluye puntos del tipo (0, y, f(0,y)), el utilitario no indica errores. Es interesante agregar la opción PlotPoints–>25 y observar el resultado (Plot3D usa 15 por defecto).