PRIMER PARCIAL (T1) ANÁLISIS MATEMÁTICO II Agosto 15 de 2019

Tiempo máximo para la realización de la evaluación: 2hs.

P1) **Hallar** la familia de curvas ortogonales a $x \cdot y^2 = C$. De la familia de curvas hallada, **indicar** la ecuación de la curva que pasa por el punto de coordenadas (1,2)

P2) **Indicar** la dirección correspondiente a la derivada direccional nula de $h = g \circ \vec{f}$ en el punto (1,1), siendo $\vec{f}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$ y $g(u, v)$ se encuentra definida por $z - u^2 + v^2 + \ln(v + z) = 0$

P3) a)**Hallar** la ecuación del plano normal a la curva intersección de $x = \sqrt{25 - y^2} \quad \wedge$ $y^2 + z^2 = 25$ en el punto (3,4,3). b) **Determinar** el plano en el que se encuentra incluida la curva.

P4) **Analizar** la existencia de extremos locales de $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 + y$

T1) **Definir** solución general y solución particular de una ecuación diferencial de orden "n".
Resolver la ecuación $x \cdot y' - y - x^3 = 0$

T2) **Definir** derivada direccional de una función escalar de $\Re^2$

Calcular (si existen) las derivadas direccionales de $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ en (0,0)

PRIMER PARCIAL | ANALISIS MATEMATICO II | HOJA N° | FECHA 15-8-19

1 P1) $x \cdot y^2 = C$

$$y^2 + x\,2y\,y' = 0 \xrightarrow[\ ]{y = z \quad y' = -\frac{1}{z'}} z^2 + x\,2z\left(-\frac{1}{z'}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x\,\frac{dx}{dz} = z \rightarrow \int 2x\,dx = \int z\,dz \rightarrow \boxed{x^2 = \frac{z^2}{2} + k} \rightarrow$$

$$1 = \frac{z^2}{2} + k \rightarrow k = 1 - 2 = -1 \rightarrow \boxed{x^2 = \frac{z^2}{2} - 1}$$

2 P2) $h = g \circ \bar{f}$

$$\underbrace{z - u^2 + v^2 + \ln(v+z)}_{h(u,v,z)} = 0 \rightarrow u = 1,\ v = 0$$

$$z - 1 + \ln(z) = 0 \rightarrow z = 1$$

$$\bar{f}(x,y) = (xy^2,\ y - x^2)$$

$$D\bar{f}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -2x & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z'_{u\,(1,0)} = -\frac{h'_u}{h'_z}\Bigg|_{(1,0,1)} = -\frac{-2u}{1 + \frac{1}{v+z}} = \frac{2 \cdot 1}{1 + \frac{1}{1}} = 1$$

$$z'_{v\,(1,0)} = -\frac{h'_v}{h'_z}\Bigg|_{(1,0,1)} = -\frac{2v + \frac{1}{v+z}}{1 + \frac{1}{v+z}} = -\frac{1}{2}$$

$$Dh_{(1,1)} = Dg_{(1,0)} \cdot Df_{(1,1)} = \left(1 \ \ -\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(1+1 \ \ 2-\tfrac{1}{2}\right) = \left(2 \ \ \tfrac{3}{2}\right)$$

$$h'_{\check{v}\,(1,1)} = 0 \quad \text{si} \quad \boxed{\check{v}_1 = \frac{\left(\frac{3}{2},\ 2\right)}{\sqrt{4 + \frac{9}{4}}}} \quad \text{o} \quad \boxed{\check{v}_2 = \frac{\left(\frac{3}{2},\ -2\right)}{\sqrt{4 + \frac{9}{4}}}} \quad \pm\left(\tfrac{3}{5},\ -\tfrac{4}{5}\right)$$

P3) $\begin{cases} x = \sqrt{25 - y^2} \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 25 - x^2 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$$\bar{\lambda}(t) = (5\cos t,\ 5\,\text{sen}\,t,\ 5\cos t) \rightarrow \bar{\lambda}(t_0) = (3, 4, 3)$$

$$\bar{\lambda}'(t) = (-5\,\text{sen}\,t,\ 5\cos t,\ -5\,\text{sen}\,t) \qquad \bar{\lambda}'(t_0) = (-4,\ 3,\ -4)$$

$$\boxed{-4(x-3) + 3(y-4) - 4(z-3) = 0}$$

$$\boxed{x = z}$$

NOTA

3 P4) $f(x,y) = x^2 - xy - y^2 + y$

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y = 0 \\ f'_y = -x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x - 4x = -1 \rightarrow \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = \frac{2}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{array}$$ pto. críticos

$f''_{xx} = 2 \qquad f''_{xy} = -1$

$f''_{yx} = -1 \qquad f''_{yy} = -2$

$\det(Hf) = -4 - 1 = -5 < 0$

$$\boxed{\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \text{ punto silla}}$$

4 T1) Solución gral. de una ec. dif. de orden "n"

Solución particular

$\cancel{x}y' - \frac{y}{x} = \frac{x^3}{x} \rightarrow y = u \cdot v \wedge y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2 \rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2$

$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|v| = \ln|x| + \ln|C_1| \rightarrow v = C_1 x$

$\frac{du}{dx} C_1 x = x^2 \rightarrow \int du = \int \frac{x}{C_1} dx \rightarrow u = \frac{x^2}{2C_1} + C_2$

k=1 con y(2)=6

$y = \left(\frac{x^2}{2C_1} + C_2\right) C_1 x \rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{2} + kx}$

T2) Derivada direccional

$\check{v} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f'_{\check{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$

$\check{v} = (v_x, v_y) \Rightarrow f'_{\check{v}(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t v_y}{t v_x} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{v_y}{t v_x} = \begin{cases} = 0 & \text{si } v_y = 0 \\ \nexists & \text{si } v_y \neq 0 \end{cases}$

$v_x \neq 0$

o sea
$$\boxed{\begin{array}{lll} f'_{\check{v}}(0,0) = 0 & \text{si} & \check{v} = (\pm 1, 0) \text{ ó } \check{v} = (0, \pm 1) \\ \nexists\ f'_{v}(0,0) & \text{si} & \check{v} \neq (\pm 1, 0) \end{array}}$$

NOTA