Resolución Parcial 3-6-2022 Tema 1

E_1) Considere el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

¿Es f continua en $(0,0)$? ¿Existen las derivadas parciales de f en ese punto? ¿Qué puede decir con respecto a la diferenciabilidad de f en el origen? ¿Y en el punto $(1,1)$? Justifique todas sus respuestas.

- f **no es continua** en $(0,0)$ ya que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

En efecto:

Uno de los límites iterados es $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{y}] = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$.

El otro límite iterado no da información pues $\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3}{y}$ no es una función de x, pero

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ sobre\ y=x^3}} \frac{x^3}{y} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0$$

de modo que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pues encontramos dos caminos para acercarnos al origen sobre los cuales $f(x,y)$ se aproxima a distintos valores.

- $f_x'(0,0) \overset{si\ existe}{\cong} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$

$$f_y'(0,0) \overset{si\ existe}{\cong} \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,0)+h(0,1)\big)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^3}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

de modo que **existen ambas derivadas parciales en $(0,0)$ y son nulas**.

- f **no es diferenciable** en $(0,0)$ por no ser continua en ese punto.
- Para todo punto (x,y) con $y \neq 0$ son $f_x'(x,y) = \frac{3x^2}{y}$ y $f_y'(x,y) = -\frac{x^3}{y^2}$, ambas funciones continuas en su dominio $(y \neq 0)$ por lo tanto f **es C^1 y por consiguiente diferenciable en todo punto (x,y) con $y \neq 0$, en particular en $(1,1)$.**

E_2) Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en $(2,1)$ de cierto campo escalar $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ es $P(u,v) = 1 - u - v + u^2 - 2v^2$. Si $\overrightarrow{f}(x,y) = (x+y, e^{x+3y})$, halle una ecuacón para el plano tangente a la gráfica de $h(x,y) = (g \circ \overrightarrow{f})(x,y)$ en $(3,-1,h(3,-1))$. Justifique todos sus cálculos.

Como $P(u,v)$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $(2,1)$, se verifican:

$$g(2,1) = P(2,1) = 1 - 2 - 1 + 2^2 - 2.1^2 = 0$$

$$g_u'(2,1) = P_u'(2,1) = -1 + 2u|_{(2,1)} = -1 + 2.2 = 3$$

$$g_v'(2,1) = P_v'(2,1) = -1 - 4u|_{(2,1)} = -1 + 4.1 = -5$$

Además,

$$D_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{x+3y} & 3e^{x+3y} \end{pmatrix}$$

cuyas componentes son todas continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y como $g \in C^3(\mathbb{R}^2) \subset C^1(\mathbb{R}^2)$, la composición $h = g \circ \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y puede aplicarse la Regla de la Cadena en todo punto:

$$D_h(x,y) = D_g(\vec{f}(x,y))D_{\vec{f}}(x,y)$$

En particular,

$$D_h(3,-1) = D_g(\vec{f}(3,-1))D_{\vec{f}}(3,-1)$$

$$D_h(3,-1) = D_g(2,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h'_x(3,-1) & h'_y(3,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_u(2,1) & g'_v(2,1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h'_x(3,-1) & h'_y(3,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h'_x(3,-1) & h'_y(3,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \end{pmatrix}$$

por lo que el plano tangente a la gráfica de h en $(3,-1,h(3,-1))$ tiene ecuación

$$z = \underbrace{h(3,-1)}_{g(2,1)=0} + \underbrace{h'_x(3,-1)}_{-2}(x-3) + \underbrace{h'_y(3,-1)}_{-12}(y+1)$$

$$z = -2(x-3) - 12(y+1)$$

$$\mathbf{2x + 12y + z + 6 = 0}$$

E_3) Considere la curva C, definida por la intersección de la superficie de nivel de $F(x,y,z) = x^2 + zy$ que pasa por el punto $(-1,1,2)$ y la superficie imagen de $\vec{\Gamma}(u,v) = (u+v^2, u^2, -2u+v)$, con $(u,v) \in [-2,2] \times [-1,1]$. Analice si la recta tangente a C en el punto $(-1,1,2)$ corta al plano $x=0$.

El conjunto de nivel de F que pasa por $(-1,1,2)$ es

$$x^2 + zy = F(-1,1,2) = (-1)^2 + 2.1 = 3$$

esto es

$$S_1 \colon x^2 + zy = 3$$

Como F es un polinomio, es diferenciable, por lo que $\nabla F(-1,1,2)$ resulta normal a la superficie S_1 en cada uno de sus puntos, ya que S_1 es un conjunto de nivel de F. En particular, en $(-1,1,2)$,

$$\vec{N}_1 = \nabla F(-1,1,2) = (2x, z, y)|_{(-1,1,2)} = (-2,2,1)$$

Por otra parte, en el mismo punto $(-1,1,2)$:

$$\begin{cases} u_0 + v_0^2 = -1 \quad (1) \\ u_0^2 = 1 \quad (2) \\ -2u_0 + v_0 = 2 \quad (3) \end{cases}$$

De (3): $u_0 = \pm 1$. Si $u_0 = 1$, en (1) resulta $v_0^2 = -2 < 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $u_0 = -1$ y tanto de (1) como de (3) es $v_0 = 0$.

Por lo tanto, $\vec{\Gamma}(-1{,}0) = (-1{,}1{,}2)$ y, puesto de S_2 es la imagen de $\vec{\Gamma}(u,v)$, su normal en ese punto es

$$\vec{N}_2 = \vec{\Gamma}'_u(-1{,}0) \times \vec{\Gamma}'_v(-1{,}0) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 2u & -2 \\ 2v & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(-1,0)} = (-2,-1{,}0)$$

Como $C = S_1 \cap S_2$, un vector tangente a C en $(-1{,}1{,}2)$ es

$$\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-2,6)$$

y una ecuación para la recta tangente a C en $(-1{,}1{,}2)$ es

$$t: (x,y,z) = (-1{,}1{,}2) + \lambda(1,-2{,}6), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta recta corta al plano $x = 0$ si y sólo si

$$-1 + \lambda = 0,$$

$$\lambda = 1,$$

vale decir, **la recta tangente a la curva C corta al plano $x = 0$ en el punto** $(x,y,z) = (-1{,}1{,}2) + 1(1,-2{,}6) = (\mathbf{0},-\mathbf{1},\mathbf{8})$.

E_4) Considere la ecuación diferencial $y' = 2\frac{y}{x-2}$.

a) ¿Cuál es su solución general (SG)?

b) Halle la curva de la familia ortogonal a SG que pasa por $(1,1)$ y compruebe que las rectas tangentes a las curva de la familia SG y de la familia $SG^{\perp}$ que pasan por $(1,1)$ resultan perpendiculares en ese punto.

a) $$y' = 2\frac{y}{x-2}$$

$y \equiv 0, x \neq 2$ es solución pues en ese caso se verifica que $0 = 2\frac{0}{x-2}$

Si $y \neq 0,\ x \neq 2$:

$$\frac{y'}{y} = 2\frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = 2\int \frac{dx}{x-2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2ln|x-2| + C$$

$$ln|y| = ln(x-2)^2 + C$$

$$e^{ln|y|} = e^{ln(x-2)^2+C}$$

$$|y| = (x-2)^2 e^C$$

$$y = \pm e^C (x-2)^2$$

de manera que la solución general es

$$SG: \boldsymbol{y = K(x-2)^2, K \in \mathbb{R}, x \neq 2}$$

(incluyendo la solución $y \equiv 0, x \neq 2$)

La SP que pasa por (1,1) verifica $1 = K(1-2)^2$ de modo que $K = 1$ y la SP por ese punto es $y = (x-2)^2, x \neq 2$.

Su recta tangente en (1,1) tendrá pendiente $y'(1) = 2(1-2) = -2$.

b) Para $x \neq 2$:
$$-\frac{1}{y'} = 2\frac{y}{x-2}$$

$$-(x-2) = 2yy'$$

$$-\int (x-2)dx = \int 2yy'dx$$

$$-\frac{(x-2)^2}{2} = \int 2ydy$$

$$-\frac{(x-2)^2}{2} + C = y^2$$

$$SG^{\perp}: \frac{(x-2)^2}{2} + y^2 = C$$

La SP que pasa por el punto (1,1) verifica $\frac{(1-2)^2}{2} + 1^2 = C$ de modo que $C = \frac{3}{2}$ y la SP es : $\frac{(x-2)^2}{2} + y^2 = \frac{3}{2}, x \neq 2$ o bien

$$\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}}, x \neq 2}$$

Su recta tangente en (1,1) tendrá pendiente $y'(1) = \frac{-(1-2)}{2\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{(1-2)^2}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Las pendientes de las rectas tangentes a las soluciones por $(1,1)$ en ese mismo punto son, respectivamente, -2 y $\frac{1}{2}$, vale decir que se trata de curvas ortogonales en ese punto, como se deseaba verificar.

T_1) a) Indique condiciones suficientes para que una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$ defina implícitamente a alguna de las variables (x, y ó z) en función de las otras dos, en un entorno de cierto punto (x_0, y_0, z_0) del dominio de F.

b) Analice si la ecuación $2z^2 + y - \cos(x+y) + x = 0$ define $y = g(x,z)$ en un entorno de $(1, -1, 0)$.

a) Condiciones suficientes para que la ecuación $F(x,y,z)=0$ defina implícitamente a alguna de las variables en función de las otras dos, en un entorno de cierto punto $(x_0,y_0,z_0)\in(Dom(F))^\circ$, son:

- que $F(x,y,z)$ sea C^1 en un entorno de (x_0,y_0,z_0);
- que $F(x_0,y_0,z_0)=0$ y
- que alguna de las tres derivadas parciales de $F(x,y,z)$ sea no nula en (x_0,y_0,z_0).

b) Llamando $F(x,y,z)=2z^2+y-\cos(x+y)+x$ se tiene que $F(1,-1,0)=2.0^2+(-1)-\cos(1-1)+1=-1\neq 0$ de modo que **no puede decirse que $2z^2+y-\cos(x+y)+x=0$ defina $y=g(x,z)$ en un entorno de $(1,-1,0)$** pues el punto no verifica la ecuación.

T_2) *a*) ¿Qué significa, gráficamente, que un campo $f(x,y)$ sea derivable en un punto (x_0,y_0) del interior de su dominio, en cierta dirección $\check{v}=(v_1,v_2)$?

b) ¿V o F? Justifique. "El campo escalar

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es derivable, en $(0,0)$, únicamente en las direcciones de los versores $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$".

a) Que $f(x,y)$ sea derivable en un punto (x_0,y_0) del interior de su dominio, en cierta dirección $\check{v}=(v_1,v_2)$, significa que **la curva que se obtiene cortando el gráfico de f con un plano vertical cuya traza en el plano xy es la recta $(x,y,0)=(x_0,y_0,0)+\lambda(v_1,v_2,0),\lambda\in\mathbb{R}$, admite recta tangente en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$** (cuya pendiente es el valor de dicha derivada).

b) $f'((0,0),(v_1,v_2))=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(v_1,v_2))-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{3(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h^3\;[3(v_1)^2v_2]}{h^2[(v_1)^2+(v_2)^2]}}{h}=3(v_1)^2v_2$ de modo que la derivada direccional existe en (0,0) en toda dirección y la afirmación es **falsa.**

Resolución Parcial 3-6-2022 Tema 2

E_1) Considere el campo escalar

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$$

¿Es f continua en $(0,0)$? ¿Existen las derivadas parciales de f en ese punto? ¿Qué puede decir con respecto a la diferenciabilidad de f en el origen? ¿Y en el punto $(-1,1)$? Justifique todas sus respuestas.

- f **no es continua** en (0,0) ya que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

En efecto:

Uno de los límites iterados es $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5}{y}]=\lim\limits_{y\to 0}0=0.$

El otro límite iterado no da información pues $\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^5}{y}$ no es una función de x, pero

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ sobre\ y=x^5}}\frac{x^5}{y}=\lim_{x\to 0}1=1\neq 0$$

de modo que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pues encontramos dos caminos para acercarnos al origen sobre los cuales $f(x,y)$ se aproxima a distintos valores.

- $f'_x(0,0)\overset{si\ existe}{\cong}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

$$f'_y(0,0)\overset{si\ existe}{\cong}\lim_{h\to 0}\frac{f\big((0,0)+h(0,1)\big)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^5}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

de modo que **existen ambas derivadas parciales en $(0,0)$ y son nulas**.

- f **no es diferenciable** en (0,0) por no ser continua en ese punto.
- Para todo punto (x,y) con $y\neq 0$ son $f'_x(x,y)=\frac{5x^4}{y}$ y $f'_y(x,y)=-\frac{x^5}{y^2}$, ambas funciones continuas en su dominio $(y\neq 0)$ por lo tanto **f es C^1 y por consiguiente diferenciable en todo punto (x,y) con $y\neq 0$, en particular en $(-1,1)$.**

E_2) Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (1,2) de cierto campo escalar $g\in C^3(\mathbb{R}^2)$ es $P(u,v)=1-u-v-2u^2+v^2$. Si $\vec{f}(x,y)=(e^{3x+y},x+y)$, halle una ecuacón para el plano tangente a la gráfica de $h(x,y)=(g\circ\vec{f})(x,y)$ en $(-1,3,h(-1,3))$. Justifique todos sus cálculos.

Como $P(u,v)$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en (1,2), se verifican:

$$g(1,2)=P(1,2)=1-1-2-2.1^2+2^2=0$$

$$g'_u(1,2)=P'_u(1,2)=-1-4u|_{(1,2)}=-1-4.1=-5$$

$$g'_v(1,2)=P'_v(1,2)=-1+2v|_{(1,2)}=-1+2.2=3$$

Además,

$$D_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} 3e^{3x+y} & e^{3x+y} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyas componentes son todas continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y como $g \in C^3(\mathbb{R}^2) \subset C^1(\mathbb{R}^2)$, la composición $h = g \circ \vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y puede aplicarse la Regla de la Cadena en todo punto:

$$D_h(x,y) = D_g(\vec{f}(x,y))D_{\vec{f}}(x,y)$$

En particular,

$$D_h(-1{,}3) = D_g(\vec{f}(-1{,}3))D_{\vec{f}}(-1{,}3)$$

$$D_h(-1{,}3) = D_g(1{,}2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(h'_x(-1{,}3) \quad h'_y(-1{,}3)) = (g'_u(1{,}2) \quad g'_v(1{,}2))\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(h'_x(-1{,}3) \quad h'_y(-1{,}3)) = (-5 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(h'_x(-1{,}3) \quad h'_y(-1{,}3)) = (-12 \quad -2)$$

por lo que el plano tangente a la gráfica de h en $(-1{,}3, h(-1{,}3))$ tiene ecuación

$$z = \underbrace{h(-1{,}3)}_{g(1,2)=0} + \underbrace{h'_x(-1{,}3)}_{-12}(x+1) + \underbrace{h'_y(-1{,}3)}_{-2}(y-3)$$

$$z = -12(x+1) - 2(y-3)$$

$$\mathbf{12x + 2y + z + 6 = 0}$$

E_3) Considere la curva C, definida por la intersección de la superficie de nivel de $F(x,y,z) = y^2 + zx$ que pasa por el punto $(1,-1,2)$ y la superficie imagen de $\vec{\Gamma}(u,v) = (v^2, v+u^2, -2v+u)$, con $(u,v) \in [-1,1] \times [-2,2]$. Analice si la recta tangente a C en el punto $(1,-1,2)$ corta al plano $y = 0$.

El conjunto de nivel de F que pasa por $(1,-1{,}2)$ es

$$y^2 + zx = F(1,-1{,}2) = (-1)^2 + 2.1 = 3$$

esto es

$$S_1: y^2 + zx = 3$$

Como F es un polinomio, es diferenciable, por lo que $\nabla F(1,-1{,}2)$ resulta normal a la superficie S_1 en cada uno de sus puntos, ya que S_1 es un conjunto de nivel de F. En particular, en $(1,-1{,}2)$,

$$\vec{N}_1 = \nabla F(1,-1{,}2) = (z, 2y, x)|_{(1,-1,2)} = (2,-2{,}1)$$

Por otra parte, en el mismo punto $(1,-1{,}2)$:

$$\begin{cases} v_0^2 = 1 \quad (1) \\ v_0 + u_0^2 = -1 \quad (2) \\ -2v_0 + u_0 = 2 \quad (3) \end{cases}$$

De (1): $v_0 = \pm 1$. Si $v_0 = 1$, en (2) resulta $u_0^2 = -2 < 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $v_0 = -1$ y tanto de (2) como de (3) es $u_0 = 0$.

Por lo tanto, $\vec{\Gamma}(0,-1) = (1,-1,2)$ y, puesto de S_2 es la imagen de $\vec{\Gamma}(u,v)$, su normal en ese punto es

$$\vec{N}_2 = \vec{\Gamma}'_u(0,-1) \times \vec{\Gamma}'_v(0,-1) = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 0 & 2u & 1 \\ 2v & 1 & -2 \end{vmatrix}_{(0,-1)} = (-1,-2,0)$$

Como $C = S_1 \cap S_2$, un vector tangente a C en $(1,-1,2)$ es

$$\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,-1,-6)$$

y una ecuación para la recta tangente a C en $(1,-1,2)$ es

$$t: (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(2,-1,-6), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta recta corta al plano $y = 0$ si y sólo si

$$-1 - \lambda = 0,$$

$$\lambda = -1,$$

vale decir, **la recta tangente a la curva C corta al plano $y = 0$ en el punto** $(x,y,z) = (1,-1,2) + (-1)(2,-1,-6) = (\mathbf{-1},\mathbf{0},\mathbf{8})$.

E_4) Considere la ecuación diferencial $y' = 2\frac{y}{x-3}$.

a) ¿Cuál es su solución general (SG)?

b) Halle la curva de la familia ortogonal a SG que pasa por $(2,1)$ y compruebe que las rectas tangentes a las curva de la familia SG y de la familia $SG^{\perp}$ que pasan por $(2,1)$ resultan perpendiculares en ese punto.

a) $$y' = 2\frac{y}{x-3}$$

$y \equiv 0, x \neq 3$ es solución pues en ese caso se verifica que $0 = 2\frac{0}{x-3}$

Si $y \neq 0,\ x \neq 3$:

$$\frac{y'}{y} = 2\frac{1}{x-3}$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = 2\int \frac{dx}{x-3}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2ln|x-3| + C$$

$$ln|y| = ln(x-3)^2 + C$$

$$e^{ln|y|} = e^{ln(x-3)^2+C}$$

$$|y| = (x-3)^2 e^C$$

$$y = \pm e^C (x-3)^2$$

de manera que la solución general es

$$SG: \boldsymbol{y = K(x-3)^2, K \in \mathbb{R}, x \neq 3}$$

(incluyendo la solución $y \equiv 0, x \neq 3$)

La SP que pasa por (2,1) verifica $1 = K(2-3)^2$ de modo que $K = 1$ y la SP por ese punto es $y = (x-3)^2, x \neq 3$.

Su recta tangente en (2,1) tendrá pendiente $y'(2) = 2(2-3) = -2$.

b) Para $x \neq 3$:
$$-\frac{1}{y'} = 2\frac{y}{x-3}$$

$$-(x-3) = 2yy'$$

$$-\int (x-3)dx = \int 2yy'dx$$

$$-\frac{(x-3)^2}{2} = \int 2ydy$$

$$-\frac{(x-3)^2}{2} + C = y^2$$

$$SG^{\perp}: \frac{(x-3)^2}{2} + y^2 = C$$

La SP que pasa por el punto (2,1) verifica $\frac{(2-3)^2}{2} + 1^2 = C$ de modo que $C = \frac{3}{2}$ y la SP es : $\frac{(x-3)^2}{2} + y^2 = \frac{3}{2}, x \neq 3$ o bien

$$\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{(x-3)^2}{2}}, x \neq 3}$$

Su recta tangente en (2,1) tendrá pendiente $y'(2) = \frac{-(2-3)}{2\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{(2-3)^2}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Las pendientes de las rectas tangentes a las soluciones por $(2,1)$ en ese mismo punto son, respectivamente, -2 y $\frac{1}{2}$, vale decir que se trata de curvas ortogonales en ese punto, como se deseaba verificar.

T_1) a) Indique condiciones suficientes para que una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$ defina implícitamente a alguna de las variables (x, y ó z) en función de las otras dos, en un entorno de cierto punto (x_0, y_0, z_0) del dominio de F.

b) Analice si la ecuación $2z^2 + x - \cos(x+y) + y = 0$ define $x = h(y,z)$ en un entorno de $(-1,1,0)$.

a) Condiciones suficientes para que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ defina implícitamente a alguna de las variables en función de las otras dos, en un entorno de cierto punto $(x_0, y_0, z_0) \in (Dom(F))^\circ$, son:

- que $F(x,y,z)$ sea C^1 en un entorno de (x_0, y_0, z_0);
- que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y
- que alguna de las tres derivadas parciales de $F(x,y,z)$ sea no nula en (x_0, y_0, z_0).

b) Llamando $F(x,y,z) = 2z^2 + x - \cos(x+y) + y$ se tiene que $F(-1,1,0) = 2.\,0^2 + (-1) - \cos(-1+1) + 1 = -1 \neq 0$ de modo que **no puede decirse que $2z^2 + x - \cos(x+y) + y = 0$ defina $x = h(y,z)$ en un entorno de $(-1,1,0)$** pues el punto no verifica la ecuación.

$T_2)$ *a)* ¿Qué significa, gráficamente, que un campo $f(x,y)$ sea derivable en un punto (x_0, y_0) del interior de su dominio, en cierta dirección $\breve{v} = (v_1, v_2)$?

b) ¿V o F? Justifique. "El campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es derivable, en $(0,0)$, únicamente en las direcciones de los versores $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$".

a) Que $f(x,y)$ sea derivable en un punto (x_0, y_0) del interior de su dominio, en cierta dirección $\breve{v} = (v_1, v_2)$, significa que **la curva que se obtiene cortando el gráfico de f con un plano vertical cuya traza en el plano xy es la recta $(x,y,0) = (x_0, y_0, 0) + \lambda(v_1, v_2, 0), \lambda \in \mathbb{R}$, admite recta tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$** (cuya pendiente es el valor de dicha derivada).

b) $f'((0,0),(v_1,v_2)) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left((0,0)+h(v_1,v_2)\right) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{2hv_1(hv_2)^2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{h^3\ [2v_1(v_2)^2]}{h^2[(v_1)^2+(v_2)^2]}}{h} = 2v_1(v_2)^2$ de modo que la derivada direccional existe en $(0,0)$ en toda dirección y la afirmación es **falsa.**