10. Integrales de superficie, flujo

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Una superficie S de ecuación $\overline{X}=\overline{F}(u,v)$ con $(u,v)\in D$ es ***suave*** según esta representación, si $\overline{F}\in C^1(D)$ y el producto vectorial $\overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \neq \overline{0}\ \forall(u,v)\in D$.

  En este caso queda definido el versor normal $\breve{n} \doteq \dfrac{\overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v}{\| \overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \|}$ que varía con continuidad sobre S; a su vez, si la superficie es orientable queda orientada mediante este versor.

  La superficie es ***suave a trozos*** cuando D puede ser dividido en cantidad finita de partes en cada una de las cuales (o en abierto que las contenga) $\overline{F}\in C^1$ y $\overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \neq \overline{0}$.

- $\iint_S f\, d\sigma$ simboliza la integral de superficie del campo escalar f sobre S, donde $d\sigma = \| \overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \|\, du dv$ es el ***diferencial de área de superficie***.

- $\iint_S \bar{f}\cdot d\overline{\sigma} \equiv \iint_S \bar{f}\cdot \breve{n}\, d\sigma$ simboliza el ***flujo*** o integral de superficie del campo vectorial $\bar{f}$ a través de S, donde $d\overline{\sigma} \doteq \breve{n}\, d\sigma$.

Observación: Si S es suave y <u>simple</u> según dos representaciones $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$, la $\iint_S f\, d\sigma$ tiene el mismo resultado usando cualquiera de ellas; mientras que se observará un cambio de signo en el resultado de $\iint_S \bar{f}\cdot\breve{n}\, d\sigma$ cuando $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ orienten a S en sentidos opuestos.

01) Una ***superficie cilíndrica*** es aquella generada por rectas paralelas que pasan por puntos de una curva $C\subset\Re^3$, la curva es la ***directriz*** y la rectas las ***generatrices*** de la superficie. Determine ecuaciones paramétricas y cartesianas para las siguientes superficies cilíndricas:

a) directriz $y=x^2$ con $z=0$, generatrices paralelas al eje z.

b) directriz $y=x^2$ con $z=0$, generatrices dirigidas por el vector (1,1,1).

c) directriz $x^2+y^2=4$ con $z=0$, generatrices paralelas al eje z.

d) directriz $\overline{X}=(u,2u,u^2)$ con $u\in\Re$, generatrices dirigidas por (2,1,0).

02) Una ***superficie cónica*** es aquella generada por rectas determinadas por los puntos de una curva $C\subset\Re^3$ y un punto fijo $\overline{V}\notin C$, la curva es la ***directriz*** y el punto $\overline{V}$ el ***vértice*** de la superficie. Determine ecuaciones paramétricas y cartesianas para las siguientes superficies cónicas:

	a)	b)	c)	d)
directriz:	$y=x^2,\ z=0$	$y=x^2,\ z=0$	$x^2+y^2=4,\ z=0$	$\overline{X}=(u,2u,u^2)\wedge u\in\Re$
vértice:	(0,0,1)	(1,4,0)	(0,0,2)	(0,0,1)

03) Parametrice las siguientes superficies:

a) $x^2+y^2+z^2=4$.

b) $x^2+4y^2=4$.

c) $x^2+4y^2+9z^2=36$.

d) $z=x^2+y^2$.

04) Sea S una superficie uniforme respecto del plano *xy*, definida implícitamente mediante la ecuación $G(x,y,z)=0$. Imponga hipótesis para G de manera que S sea suave; en ese caso, si la ecuación en forma explícita fuera $z=g(x,y)$ con $(x,y)\in D_{xy}$ (x,y), demuestre que:

Para campo escalar: $\iint_S f\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[f\,\dfrac{\|\nabla G\|}{|G'_z|} \right]_{z=g(x,y)} dxdy$.

Para campo vectorial: $\iint_S \bar f\cdot d\bar\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\dfrac{\bar f\cdot\nabla G}{|G'_z|} \right]_{z=g(x,y)} dxdy$.

Donde, en ambos casos, D_{xy} se obtiene proyectando S sobre el plano *xy*.

05) Calcule el área de las siguientes superficies:

a) Trozo de superficie cilíndrica $z=2x^2$ con $y\le x$, $z\le 6$, 1° octante.

b) Trozo de superficie cónica $z=\sqrt{2x^2+2y^2}$ interior a la esfera de radio 12 con centro en el origen de coordenadas.

c) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+z^2=4$ con $-x\le y\le x$, $z\ge 0$.

d) Superficie esférica de radio *R*.

e) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+y^2=2x$ con $x^2+y^2+z^2\le 4$ en el 1° octante.

f) Superficie frontera del cuerpo definido por $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$.

g) Superficie de ecuación $z=x^2-y$ con $|y|<x$, $x<1$.

h) Trozo de plano tangente a $z=x+\ln(xy)$ en $(1,1,z_0)$ con $x^2+y^2\le 9$.

06) Calcule el momento de inercia respecto del eje z de una chapa con forma de paraboloide $z=x^2+y^2$, con $x\ge 0 \wedge 1\le z\le 4$, si la densidad superficial en cada punto de la chapa es $\delta(x,y,z)=\dfrac{k}{x^2+y^2}$ con k constante.

07) Sea $\bar F=k\,\breve n$ con $k>0$ constante, demuestre que $\iint_S \bar F\cdot\breve n\,d\sigma = F$ área(S) con $F=\|\bar F\|$.(*)

08) Demuestre que el flujo de $\bar F$ <u>constante</u> a través de S <u>plana</u> con normal $\breve n$ es $\bar F\cdot\breve n$ área(S).

09) Sea $\bar f\in C^1$ un campo de gradientes y S un trozo de una de sus superficies equipotenciales (que se supone suave). Demuestre que cuando S está orientada en el sentido de los potenciales crecientes, el flujo de $\bar f$ a través de S es positivo.

10) Calcule el flujo de $\bar f$ a través de S, indicando gráficamente la orientación del versor normal que ha elegido, o bien que se le solicite en cada caso.(&)

a) $\bar f(x,y,z)=(x^2+yz\,,\,xz\,,\,2z^2-2xz)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $1\le z\le 5-x^2-y^2$.

b) $\bar f(x,y,z)=(x,\ y,\ z)$ a través de la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$.

(*) Flujo de campo con módulo constante, con igual orientación que la superficie en cada punto.

(&) Cuando la superficie es cerrada (frontera de un cuerpo *H*), se la orienta (por convención) con versor normal saliente de *H*. Entonces, el flujo positivo es “saliente” de *H* y el negativo es “entrante” a *H*.

c) $\bar{f}(x,y,z) = (xy,\ zx,\ y - xz^2)$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y = x^3$ con $0 \le z \le x + y,\ x + y \le 10$.

d) $\bar{f}(x,y,z) = (y\ ,\ x,\ y) \wedge (x\ ,\ z\ ,\ y)$ a través del trozo de plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 - yx^3$ en el punto $(1, 2, -1)$ con $(x, y) \in [0,2] \times [1,3]$.

e) $\bar{f}(x,y,z) = (xy,\ z,\ y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo limitado por $x^2 + y^2 \le 4,\ \ x + y + z \le 18$, en el 1° octante. Nota: en este caso, como en muchos otros, el cálculo de flujo puede realizarse en forma más sencilla aplicando el teorema de la divergencia (ver T.P. siguiente).

11) Sea $\bar{f}$ continuo tal que $\bar{f}(x,y,z) = (x - y,\ x - z,\ g(x,y,z))$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie de ecuación $x = y^2$ con $0 \le z \le 4$, $0 \le y \le 2 - x^2$.

12) Calcule el flujo del gradiente de $f(x,y,z) = x + y + z\ g(x - y)$ a través de $x + y = 4$ en el 1° octante, con $0 \le z \le 8$. Suponga $g \in C^1$.

13) Sea S un trozo de superficie de ecuación $z = y^2 - x^2$ cuya proyección sobre el plano *xy* es la región D. Sea $g(x,y,z) = z + h(xy)$ con $h \in C^1$, demuestre que el flujo de ∇g a través de *S* es proporcional al área de *D*.

14) Calcule el flujo de $\bar{X} = (x, y, z)$ a través de la frontera del cubo $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ orientada con normal saliente del cubo.

15) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (x, 2y, z)$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través del triángulo con vértices en los puntos $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,1)$. Indique en un gráfico cómo ha decidido orientar la superficie.

16) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 z,\ z^3,\ x^2 z)$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través del trozo de plano Σ de ecuación $z = 2$ con $x^2 + y^2 + z^2 \le 5$. Indique gráficamente cómo decidió orientar a Σ.

17) Sea ∂D la superficie frontera del cuerpo D definido por: $1 \le z \le 5 - x^2 - y^2$. Sabiendo que $\oiint_{\partial D} \bar{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 0$ y que $\bar{f}(x,y,z) = (\text{sen}(y\cos(z)) - 2x,\ \text{sen}(x\cos(z)) - y,\ 3z\ )$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través del trozo de frontera de ecuación $z = 5 - x^2 - y^2$ orientado hacia z^+.