PREGUNTAS TEORICAS

Se han transcripto todas las preguntas teóricas tomadas desde el 2013 a marzo del 2018
Los enunciados correspondientes a preguntas teóricas de Flujo, Circulación y Función potencial no se encuentran en este apartado, pero si las respuestas de ellas (de la página 21 a la 25).

ECUACIÓN DIFERENCIAL

* Defina solución general (SG) y solución particular (SP) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n.

22/02/16 T2. * Halle la expresión de la ecuación diferencial cuya SG es $y = 2 + C_1 . x + C_2 . e^x$

12/07/16 T1. *. Dada $y'' + y = x$; halle la SP tal que $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

06/12/16 T2. *. Halle la ecuación diferencial ordinaria cuya solución general es $y = C_1 \, x . e^{-x} + C_2 . e^{-x} + 2x$.

14/02/17 T1. *. Halle la SG de la ecuación diferencial $y'' + x^{-1} y' = x^{-1} \ln(x)$, sabiendo que $u' + x^{-1} . u = x^{-1} \ln(x)$ tiene como solución general $u = C x^{-1} - 1 + \ln(x)$.

05/12/17 T2. *. Dada la ecuación diferencial ordinaria $y' + y = f(x)$, analice cual debe ser $f(x)$ para que $y = x . e^x$ sea solución de la ecuación diferencial; indique si es una SG o una SP.

27/02/18 T2. *. Dada la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$, analice si $y = C . x . e^x$ es solución, en caso afirmativo indique si es la solución general.

30/07/13 T2. *. Siendo $y = C_1 + C_2 . e^{2x}$ la solución general, halle la ecuación diferencial ordinaria y la SP que en $(0, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 6x + 2$.

17/12/13 T1. *. Dada la ecuación diferencial $y'' + k y' = 4 + 8x$ con k constante. Sabiendo que $y = 2x^2$ es una SP determine el valor de k y halle la SG.

29/07/14 T2. *. Si $xy^2 + Cy = 1$ es la SG de una ecuación diferencial, halle la expresión de la ecuación diferencial y la de su solución particular que pasa por $(2, 1)$.

02/12/14 T2. *. Dada la ecuación diferencial $y'' + 4y = 8$, halle la SP que pasa por $(0, 2)$ con pendiente $y'(0) = 4$.

ECUACIÓN DIFERENCIAL

02/03/15 T2. * Dada $y'' - y' = 0$. Halle la SP que en el punto $(0, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 2$.

01/10/15 T2. * Dada la ecuación diferencial ordinaria $y'' + y = f(x)$, halle la SG sabiendo que $y = 2x^2$ es una SP.

24/02/14 E4. La solución general de la ecuación diferencial $y'' + by' + cy = 4x$ es $y = C_1 e^{-2x} + C_2\, x e^{-2x} + x - 1$, halle la solución particular de $y'' + by' + cy = 4x + 4$ que cumple con $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$.

26/05/15 E4. Dada la ecuación diferencial $y'' + 4y = 8$, halle la solución particular que en el punto $(0, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 4x + 2$.

29/02/16 E4. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 4y' = 8$ que en $(0, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 6x - 1$.

07/02/17 E4. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y'' + y' = 5$ tal que en $(0, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $5x - y + 3 = 0$

19/12/17 E4. Halle la solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 12$ que en el punto $(0, 5)$ tiene recta tangente horizontal (paralela al eje x).

22/02/16 T2.

Solución general de una ecuación diferencial ordinaria de orden n:

Es una relación entre variables que contiene "n" constantes independientes que satisface identicamente a la ecuación diferencial.

Solución particular

Es una solución que se deduce de la general a partir de asignarle valores a las constantes, "depende de las condiciones de borde".

CONTINUIDAD

04/03/13 **T1.** Defina continuidad de un campo en un punto $\bar{A}$. Dada $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, analice si puede definirse $f(0,0)$ para que f resulte continua en el origen.

10/12/13 **T1.** Defina continuidad de un campo f en un punto $\bar{A}$. Dado $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ para $(x,y) = (0,0)$ analice la continuidad de f en $(0,0)$ sabiendo que $f(0,0) = \frac{1}{2}$.

10/02/14 **T1.** Defina continuidad de un campo f en un punto $\bar{A}$. Sabiendo que $f(x,y) = \dfrac{x \cdot \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, analice y calcule si es posible definir $f(0,0)$ de manera que el campo resulte continuo en el origen.

28/07/15 **T2.** Defina campo f continuo en el punto $\bar{A}$. Dado $f(x,y) = \dfrac{x^3 \cdot \operatorname{sen}(y)}{x^4+y^4}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, analice si puede definirse $f(0,0)$ de manera que la función resulte continua en $(0,0)$.

14/12/15 **T1.** Defina continuidad de una función en un punto A. Dada $\bar{g}(u,v) = (u^2, u+v)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y sabiendo que la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación $x + 2y - z = 2$ en el punto $(1, 2, z_0)$, calcule

$$\lim_{(u,v)\to(1,1)} f(\bar{g}(u,v)).$$

22/02/16 **T1.** Defina continuidad de una función en un punto. Dada $f(x,y)$, analice su continuidad en los distintos puntos de su dominio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

06/12/16 **T1.** Defina continuidad de una función f en un punto. Dada $f(x,y) = \dfrac{y^2 \cdot \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, analice si puede definirse $f(0,0)$ de manera que f resulte continua en el origen.

12/12/17 **T2.** Defina función f continua en un punto. Dada $f(x,y) = \dfrac{9xy}{2x^2+3y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, analice si puede definirse $f(0,0)$, para que f resulte continua en $(0,0)$.

04/03/13

T1.

Defina continuidad de un campo en un punto A.

Dada $f(x,y): D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) punto perteneciente al dominio

$f(x,y)$ es continua en $(x_0, y_0) \iff$

a) $\exists\ f(x_0, y_0)$

b) $\exists \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

c) $f(x_0, y_0) = \ell$

REGLA DE LA CADENA

$*$ Enuncie el teorema de derivación de la composición de funciones (regla de la cadena).

26/07/16 **T2.** $*$. Siendo f una función con matriz jacobiana $Df(u;v) = (u \quad v+1)$ y $\bar{g}(x;y) = (xy, x)$; analice si existe algún punto del tipo (x_0, y_0, z_0) en el cual la superficie de ecuación $z = f(g(x;y))$ tiene plano tangente paralelo al plano xy. Nota: no se requiere el cálculo de z_0.

13/12/16 **T2.** $*$. Siendo $h(x,y) = f(x,y,z)$, suponiendo que puede aplicar el teorema, calcule $\nabla h(1,2)$ sabiendo que $\nabla f(2,1) = (3,4)$.

07/02/17 **T1.** $*$. Siendo $z = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$ con $(x,y) \,/\, xy \neq 0$, suponiendo que se puede aplicar el teorema, analice si se cumple que $x z'_x + y z'_y = 0$

19/12/17 **T1.** $*$. Si $h(x,y) = f(g(x,y))$ con $f(u,v) = u^2 v + vu$

Calcule la derivada direccional de h en $(2,3)$ según $\bar{r} = (5;\ 12)$ siendo la matriz jacobiana de $\bar{g}$ la $D\bar{g}(x,y)$ que se indica a la derecha y $\bar{g}(2,3) = (1,3)$

$$D\bar{g}(x;y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

26/09/13 **T1.** Enuncie el teorema de derivación de la composición de funciones en forma matricial (regla de la cadena). Dada $h(x,y) = f(\bar{g}(x,y))$ con $\nabla f(u,v) = (2uv;\ u^2 + 3v^2)$. Calcule $\nabla h(a,b)$ sabiendo que $g(a,b) = (2,1)$, $g'_x(a,b) = (3,5)$; $g'_y(a,b) = (1,4)$.

02/03/15 **T1.** $*$. Siendo $h(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, suponiendo que se puede aplicar el teorema, analice si $x.h'_x + y.h'_y = 0$.

01/10/15 **T1.** $*$. Dada la matriz jacobiana $Df(u,v)$ y $g(x,y) = (xy^2;\ x^2+y)$, aplique el teorema para calcular $P'_y(1,2)$ sabiendo que $(P(x;y);\ Q(x,y)) = \bar{f}(\bar{g}(x,y))$.

$$D\bar{f}(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2+3\,^2 \\ 2u & -2 \end{pmatrix}$$

NOTA

26/07/16 T2.

Teorema de derivación de la composición de funciones

Regla de la cadena:

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x)) = f \circ g\,(x)$$

Condición de existencia $Im\ g \subseteq Dom\ f$

$g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ y = g(x)$

$f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ z = f(y)$

$y' = f'(g(x)) = (f \circ g)'(x)$

$\boxed{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$

En su forma matricial

$G : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ / \ y = G(x)$ es diferenciable en x_0

$F : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \ / \ z = \vec{F}(y)$ es diferenciable en x_0

Entonces existe $H \ / \ H = F \circ G$

$H = F \circ G$ es diferenciable en x_0

Condición necesaria:

$Im\ \bar{G} \subseteq Dom\ F \implies \exists\ H = F \circ G : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p / [F \circ G](x) = F(G(x))$

$\boxed{D(F \circ G)(x_0) = DF(G(x_0)) \cdot DG(x_0)}$

$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$

CAMBIO DE VARIABLE

30/07/13 **T1.** Enuncie el teorema de cambio de variables en integrales dobles. Dada $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ donde D queda definida por $x^2+y^2 \leqslant 9$, $-x \leqslant y \leqslant x$, exprese la integral en coordenadas polares (indique el panteo completo pasado a polares, incluyendo los correspondientes límites de integración).

10/02/14 **T2.** Enuncie el teorema de cambio de variables para integrales dobles. Dado el cambio de variables definido por $(x,y) = (2u+v\,;\,4u-v)$, calcule $\iint_{D_{uv}} u\,du\,dv$ sabiendo que $\iint_{D_{xy}} (x+y)\,dx\,dy = 8$

09/12/14 **T1.** Enuncie el teorema de cambio de variables para una integral doble. Siendo área $(D_{xy}) = 35$, calcule el área de D_{uv} sabiendo que el cambio de variable definido por $(x,y) = (2u+v\,;\,u-3v)$ hace corresponder la región D_{xy} del plano xy con la región D_{uv} del plano uv.

15/02/16 **T2.** A través del cambio de variables definido por $(x,y) = (u+2v\,;\,2u+v)$, la región D del plano xy se transforma en la región D^* del plano uv. Calcule área (D^*) sabiendo que área $(D) = 12$.

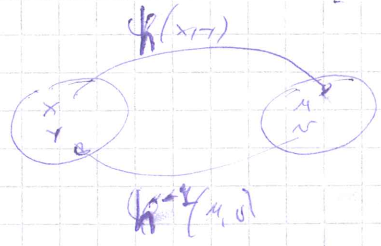
HOJA Nº

FECHA

Teorema de cambio de variable

continua y derivadas parciales continuas

Tenemos una función vectorial biyectiva que transforma los puntos (u, v) de R en (x, y) de D.



Siendo (x, y): variables viejas

(u, v): variables nuevas

$$* \quad \bar{h}(u, v) = \left(X(u, v) ; Y(u, v)\right)$$

Jacobiano: determinante de Dh (El jacobiano debe ser distinto de $\emptyset$)

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f\left(X(u, v) ; Y(u, v)\right) \cdot |J|\, du\, dv$$

$$f(\bar{h}(u, v)) : f \circ \bar{h}$$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$h : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \bar{h} \in C^1$ biyectiva

Sea $\bar{h}(u,v) = (x(u,v); y(u;v))$ función vectorial y biyectiva (uno a uno)

puntos $(u,v) \in D$ en puntos $(x,y) \in \mathbb{R}$

f es un campo escalar de dos varibles definido en $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Si $x(u,v)$; $y(u,v)$, $x'_u(u,v)$; $x'_v(u,v)$; $y'_u(u,v)$; $y'_v(u,v)$ son continuos en D.

Si $f[x(u,v); y(u;v)]$ es acotada e integrable en D y si $\forall (u,v) \in D$

$$J \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Teorema de Cambio de variable

Dada $f: H \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; f continua

$\bar{g}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to H \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\bar{g} \in C^1$ biyectiva.

tal que $\det(D\bar{g}) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D$

Entonces $$\iint_H f(x,y) \underbrace{dx\,dy}_{dA} = \iint_D f(\bar{g}(u,v)) \cdot \underbrace{|\det\ D(\bar{g})|\ du\,dv}_{dA}$$

COORDENADAS POLARES CILINDRICAS

14/07/15 **T2.** Defina coordenadas cilíndricas. Dada $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2} d\rho \int_0^{4-\rho^2} \rho^2 \, dz$ planteada en coordenadas cilíndricas, represente la región de integración en el espacio xyz y plantee la integral en coordenadas cartesianas.

14/12/15 **T2.** Defina coordenadas polares. Dada $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\sqrt{3/\cos\varphi}} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho$ planteada en coordenadas polares, grafique la región correspondiente en el plano xy, plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

21/02/17 **T2.** Defina coordenadas polares. Dada $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} x \, dy$ planteada en coordenadas cartesianas, grafique la región D de integración y resuelva la integral mediante un cambio de variables a coordenadas polares.

26/09/17 **T1.** Defina coordenadas polares. Resuelva en coordenadas polares la integral doble de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en la región D definida por $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ con $x \geq 0$.

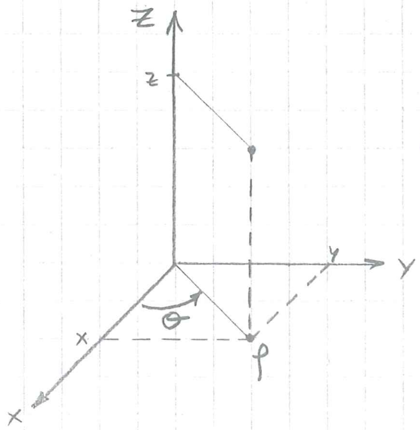
12/12/17 **T1.** Defina coordenadas cilíndricas. Dada $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2} d\rho \int_{-2}^{1} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \, dz$ planteada en coordenadas cilíndricas, grafique la región de integración en el espacio xyz y plantee la integral con los límites de integración expresados en coordenadas cartesianas.

27/02/18 **T1.** Defina coordenadas polares. Sea $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\operatorname{sen}\varphi} \rho^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi \, d\rho$ planteada en coordenadas polares, dibuje la región de integración en el plano xy y plantee la integral indicando los límites de integración en coordenadas cartesianas.

Defina coordenadas cilíndricas

Transforma las coordenadas (x, y, z) en (z, ρ, θ).

$$\iiint f(\bar{x})\, dx\, dy\, dz = \iiint f(h(\bar{x}))\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{JACOBIANO}}}{\rho}\, dz\, d\rho\, d\theta$$

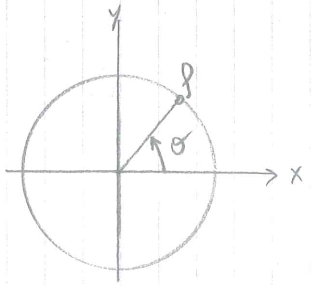


$$h: \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

Coordenadas polares

Tomando como coordenadas originales las cartecianas x, y mediante la transformación obtenemos las coordedadas que son ρ y θ



$$h: \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\rho \geq 0$$

$$|J| = \rho \qquad J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix}$$

$$\iint f(\bar{x})\, dx\, dy = \iint f(h(\bar{x})) \cdot \rho \cdot d\rho\, d\theta$$

DERIVADA DIRECCIONAL

HOJA N°

FECHA

21/05/13 **T1.** Defina conjunto de nivel de un campo escalar. Dado $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, si $x^2 y^3 = 9x - 1$ es la ecuación de L_4 (conjunto de nivel 4 de f), halle las direcciones de derivada direccional nula de f en $\bar{A} = (1; y_0) \in L_4$.

02/12/14 **T1.** Defina derivada direccional de una función en un punto $\bar{A}$. Dada $f \in C^1$, sabiendo que las derivadas direccionales $f'(\bar{A}; (0{,}6, 0{,}8)) = 3$ y $f'(\bar{A}, (0{,}8, 0{,}6)) = 11$, calcule $f'(\bar{A}, (-0.8, 0.6))$. Indique para qué se utiliza el hecho que f tenga derivadas parciales continuas.

30/11/15 **T2.** Defina derivada direccional de un campo en un punto $\bar{A}$. Dada $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ halle las direcciones (versores) de derivada nula en $(0,0)$.

06/10/16 **T1.** Defina derivada direccional de f en un punto A según $\check{r}$. Analice si el campo escalar f es derivable en $(0,0)$, según el versor $\check{r} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

25/07/17 **T1.** Defina derivada direccional de f en un punto $\bar{A}$ según $\check{r}$. Dado $f(x,y,z) = xy^2 + xyz$, calcule el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto $\bar{A} = (1,1,1)$ y determine la correspondiente dirección de $(\check{r})$ de derivada máxima.

NOTA

Defina derivada direccional de f en un punto $\bar{A}$ según $\check{r}$.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^m$

$\bar{A}$ es un punto de D y $\check{r}$ es un versor de $\mathbb{R}^m$

La derivada direccional de f en $\bar{A}$ con respecto al versor $\check{r}$ esta dada por el siguiente límite.

$$f'(\bar{A}, \check{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A} + h.\check{r}) - f(A)}{h}$$

PUNTO REGULAR

* Defina punto regular de una superficie

26/09/17 T2. *. Dada la superficie Σ de ecuación $\bar{X} = (2u^2 + v, u - v, 3u + 2v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, analice si la recta normal a Σ en $\bar{A} = (4; -1; 7)$ tiene algún punto en común con el plano de ecuación $x + y + z = 16$.

19/12/17 T2. Defina punto regular de una curva. Dada la curva de $\bar{X} = (u^2, 3u^2 - 8, u^2 - u)$ con $u \in \mathbb{R}$, analice si $\bar{A} = (4, 4, 2)$ en un punto regular de la misma.

17/02/14 T1. Defina punto regular de una curva. Dada la curva C intersección de las superficies $z = x + y^2$ e $y = x + 2$, Halle una ecuación paramétrica vectorial para C y analice si el punto $(1, 3, 10)$ es regular para esta representación.

14/07/15 T1. *. Dada la superficie Σ de ecuación $\bar{X} = (u + v; v - u^2; uv)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, analice si $\bar{A} = (6, 0, 8)$ en un punto regular de Σ; en caso afirmativo, dado que también es punto simple de Σ, halle una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $\bar{A}$.

Defina punto regular de una superficie.

*

Sea $\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \bar{f}$ continua en D dado por

$\bar{f}(u, v) = (x(u,v) ; y(u,v) ; z(u,v))$

Sea $\bar{P}_o \in S / \bar{P}_o = \bar{f}(u_o, v_o)$

Decimos que $\bar{P}_o \in S$ es un punto regular de la superficie según la representación parametrica dada por $\bar{f}$ en D. si se cumple que

$\bar{f}$ es diferenciable en $\bar{A} = (u_o, v_o)$ interior a D y el producto vectorial $\bar{f}'_u(u_o, v_o) \times \bar{f}'_v(u_o, v_o) \neq 0$

* un punto es regular en una superficie si en el existe plano tangente.

MÁXIMOS y MÍNIMOS

06/08/13 **T1.** Dado $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; defina máximo y mínimo local (o relativo) de los valores de f. Para el caso particular de $f(x,y) = x^4 + y^6 + 3$ definido en $\mathbb{R}^2$, analice si f produce extremo local en algún punto; en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

01/10/14 **T1.** Defina extremo local (máximo y mínimo) de un campo escalar. Dado $f(x,y) = 4 + x^4 + y^8$, analice si f produce un extremo local en $(0,0)$; en caso afirmativo clasifíquelo.

26/05/15 **T2.** Defina extremo (máximo y mínimo) local de un campo escalar. Dado $f(x,y) = x^2 y + 4xy + y^2$, analice si f produce algún extremo local; en caso afirmativo, clasifíquelo.

15/02/16 **T1.** Condición suficiente de existencia de extremo local de un campo escalar en un punto: Hipótesis y método de análisis mediante el Hessiano.
Dado $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 4xy$, analice y clasifique extremos locales de los valores de f.

12/07/16 **T2.** Defina máximo y mínimo local. Analice si $f(x,y) = x^4 + x^8 + 4$ tiene algún extremo local, en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

13/12/16 **T1.** Defina extremos locales (máximo y mínimo). Siendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 4 + x^4 + y^4$, analice si f produce algún extremo local, en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

06/02/18 **T1.** Defina extremo local (máximo y mínimo). Dada $f(x,y) = 4 + \sqrt{x^2 + y^2}$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, analice si f produce algún extremo local, en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

06/08/13 T1.

Defina extremo local (o relativo) máximo y mínimo de un campo escalar.

El extremo relativo es un número, es la imagen del campo escalar que resulta mayor o menor que las imagenes que estan alrededor.

MÁXIMO RELATIVO Dado un campo escalar $f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0)

Se dice que $f(x_0,y_0)$ es un máximo local, si se verifica que:

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0$$

Dentro de un entorno de (x_0,y_0) en $E(x_0)$

MÍNIMO RELATIVO

Dado un campo escalar $f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0)

Se dice que $f(x_0,y_0)$ es un mínimo relativo si se verifica que:

$f(x,y) > f(x_0,y_0)$ en el entorno de (x_0,y_0) $E(\bar{x}_0)$

$f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0$

Si hablaramos de un extremo absoluto

Para todo $(x,y) \subseteq Df$ se verifica que:

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \qquad f(x,y)\ \forall (x,y) \subseteq Df$$

Extremos relativos o Locales

Dado $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in D$.

Se dice que $f(x_0,y_0)$ es un máximo local de f si:

$$f(x_0,y_0) > f(x,y) \quad \forall (x,y) \in E'(x_0,y_0)$$

Absoluto $\forall (x,y) \in D$

15/02/16 T1.

Condición necesaria

Para que $Z=f(x,y)$ alcance un extremo relativo en $P_0=(x_0,y_0)\subseteq Df$ debe verificarse

$$f'_x(x_0,y_0)=0 \quad y \quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

Es decir, si existe el gradiente que este sea cero.

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0);\ f'_y(x_0,y_0)\right)=0$$

Condición suficiente

Dado $H(x_0,y_0)$ el Hessiano de un campo escalar en el punto (x_0,y_0) tal que

$$H(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

$H<0$	$H=0$	$H>0$
No hay extremo	Caso dudoso	Hay extremo

$H>0$ ↓

$f''_{xx}>0$ mínimo relativo

$f''_{xx}<0$ maximo relativo

Defina función potencial

20/02/18 T2.

Si un campo vectorial $\bar{f}(x)$ es el gradiente de un campo escalar $\phi(\bar{x})$ es decir $\exists\ \phi(\bar{x}) \,/\, \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\nabla}\phi(x)$.

Entonces se dice que $\phi(\bar{x})$ es la función potencial de $\bar{f}$ o el potencial de $\bar{f}$.

Sea $\bar{f}(\bar{x}) : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Sea $\phi(\bar{x}) : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Corolario: Si $\bar{f}$ el gradiente de un campo escalar (o conservativo) entonces $\int_A^B \bar{f}\cdot d\bar{l}$ es independiente del camino elegido entre A y B.

$$\text{circulación} = \int_A^B \bar{f}\cdot d\bar{l} = \int_A^B \bar{\nabla}\phi\cdot d\bar{l} = \phi(B) - \phi(A)$$

$\phi(x,y,z) = 3x^2 + yz + 2$ función potencial de f

$\mathcal{C}: \bar{g}(t) = (2t-2;\ t^2;\ 4-t)$

en el primer octante

$$\begin{aligned} 2t-2 &\geq 0 & t &\geq 1 \\ t^2 &\geq 0 & t &\geq 0 \\ 4-t &\geq 0 & t &\leq 4 \end{aligned}$$

0 1 4

$$\int_1^4 \bar{f}\cdot d\bar{l} = \phi(4) - \phi(1) \qquad 1 \leq t \leq 4$$

$g(t) = (2t-2;\ t^2;\ 4-t)$

$g(1) = (0;1;3) \to \phi(0,1,3) = 0+3+2 = 5$

$g(4) = (6;16;0) \to \phi(6;16;0) = 3.6^2 + 0 + 2 = 120$

$$\int_1^4 \bar{f}\cdot d\bar{l} = \phi(4) - \phi(1) = 120 - 5$$

$$\boxed{\int_1^4 \bar{f}\cdot d\bar{l} = 5}$$

HOJA N°

FECHA

17/12/13
24/02/14

T2. Condición necesaria para la existencia de la función potencial

Definición

Si $\bar{f} \in C^1$ es un campo de gradientes con Dominio D abierto y conexo entonces $\text{rot } \bar{f} = 0$

rotor de campo vectorial: sea $\bar{f}(x,y,z) = (P(\bar{x}), Q(\bar{x}), R(\bar{x}))$

$$\text{rot } \bar{f} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z ; P'_z - R'_x ; Q'_x - P'_y)$$

$\text{rot } \bar{f} = 0$ entonces
$$R'_y = Q'_z$$
$$P'_z = R'_x$$
$$Q'_x = P'_y$$

Demostración de la condición necesaria

Si $\bar{f}$ es campo de gradiente $\Rightarrow \exists\, \phi(\bar{x}) / \bar{\nabla}\phi = \bar{f}$

Como $\bar{f} \in C^1 \to \bar{\nabla}\phi(\bar{x}) \in C^1 \Rightarrow \phi \in C^2$

Si $\phi \in C^2$ se cumple el teorema de schwarz, o sea $\phi''_{xy} = \phi''_{yx}$

Como $\bar{f} = \bar{\nabla}\phi \Rightarrow (P, Q, R) = \left(\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{\phi'_x = P} ; \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}}_{\phi'_y = Q} ; \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial z}}_{\phi'_z = R}\right)$

Entonces $\left.\begin{matrix} \phi''_{xy} = P'_y \\ \phi''_{yx} = Q'_x \end{matrix}\right\}$ $P'_y = Q'_x$ es "0" la 3° componente del rotor

Analogamente $\phi''_{yz} = \phi''_{zy}$ entonces $R'_y = Q'_z$

$\phi''_{xz} = \phi''_{zx}$ entonces $P'_z = R'_x$

NOTA

29/02/16 T1.

Teorema de la divergencia (Gauss)

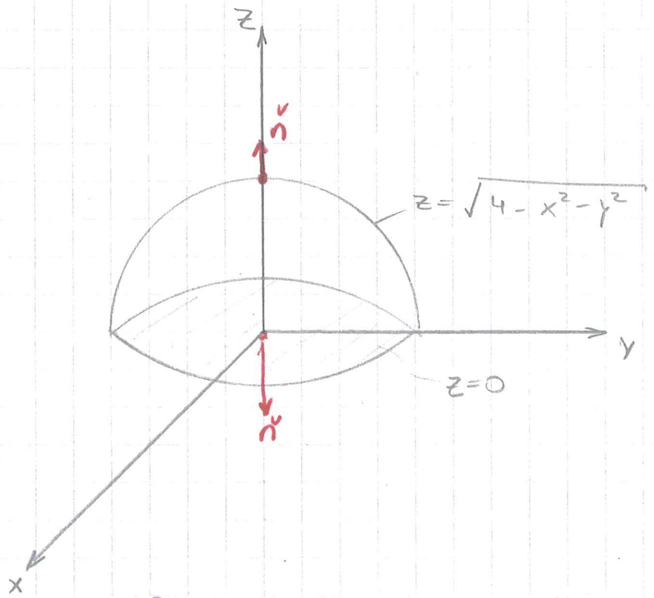
Sea el campo vectorial $\bar{f}(x;y;z) = (P(\bar{x}); Q(\bar{x}); R(\bar{x})) / f \in C^1$ y sea un volumen V cuya frontera es una superficie Σ regular a trozos tal que el volumen V y la superficie Σ estan incluidas en el dominio de $\bar{f}$, entonces el flujo total (ϕ_T) de $\bar{f}$ a través de la superficie cerrada Σ, se calcula como

$$\phi_T = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \bar{f} \cdot \check{n} \cdot d\Sigma = \iiint \operatorname{div} \bar{f} \, dv$$

— o —

$\bar{f}(x,y,z) = (xz ; g(xz) - yz ; g(xy))$

Superficie $z=0$ con $x^2+y^2 \leq 4$ orientada hacia z^+



El flujo a través de

$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ con $x^2+y^2 \leq 4$ $z^+ \uparrow$

$\phi = 12$

$\phi_T = \phi_{esf} + \phi_{z=0}$

$\phi_T = \iiint \operatorname{div} \bar{f} \, dv$

$\operatorname{div} \bar{f} = P'_x + Q'_y + R'_z = z - \cancel{z} = 0$ $\phi_T = 0$

$\phi_T = \phi_{esF} + \phi_{z0}$ $0 = 12 + \phi_{z0}$ $\phi_{z=0} = -12$ orientada hacia z^-

$\boxed{\phi_{z=0} = 12}$ orientada hacia z^+

Teorema de Green

Sea $\bar{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{F}(x,y) = P(x,y)\,\bar{i} + Q(x,y)\,\bar{j}$ un campo vectorial cuyas componentes $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son campos escalares con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces se cumple que:

La circulación de $\bar{F}$ a lo largo de una curva cerrada es

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \bar{F} \cdot d\bar{l} = \iint_R (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy$$

R y $\mathcal{C} \subseteq D$ Siendo R la región del plano limitado por la curva $\mathcal{C}$ simple horientada en sentido antihorario

—o—

Calculo de áreas planas mediante una circulación

Si aplicamos green con el campo $\bar{F}(x,y) = (0, x)$ la integral nos dará el área del recinto limitado por $\mathcal{C}$.

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \bar{F} \cdot d\bar{l} = \iint_R (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy = \iint_R 1\, dx\, dy$$

Teorema del rotor

Sea una superficie Σ regular a trozos definida por $F(x,y,z)=0$ superficie abierta y orientable, cuyo "borde" es una curva $\mathscr{C}$ cerrada y regular a trozos y sea $\bar{f}(\bar{x}) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial $/ f \in C^1$ $\bar{f}(\bar{x}) = \left(P(\bar{x}) ; Q(\bar{x}) ; R(\bar{x}) \right)$ entonces se cumple:

$$\oint_{\mathscr{C}} \bar{f} \cdot d\bar{l} = \underbrace{\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \bar{f} \cdot \check{n} \cdot d\Sigma}_{\text{flujo del rotor de } \bar{f} \text{ a través de } \Sigma}$$

DIFERENCIABILIDAD y OTROS

03/12/13 T2. Dado el campo f diferenciable en el punto $\bar{A}$, demuestre que f es continuo en dicho punto.

29/02/16 T2. Demuestre que todo campo diferenciable en el punto $\bar{A}$ es continuo en A.

20/12/16 T1. Defina diferenciabilidad de un campo f en el punto $\bar{A}$. Suponiendo f diferenciable calcule aproximadamente $f(1,98\,;\,1.01)$ sabiendo que $\nabla f(2,1) = (3,7)$ y que la grafica de f contiene ~~al~~ punto $(2, 1, 6)$

21/02/17 T1. Enuncie el teorema de existencia y unicidad de la función definida implícitamente por una ecuación. Dada la superficie Σ definida implícitamente por la ecuación $xz + yz + \ln(x+y+z-3) - 4 = 0$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$, analice si la recta normal a Σ en (x_0, y_0, z_0) intersecta en algún punto al plano de ecuación $x + y = 5$.

09/12/14 T2. Defina conjunto de nivel de un campo escalar f. Dado $f(x,y) = 3 + yx^2 + y^2 - y$, calcule el área de la región plana limitada por las curvas del conjunto de nivel 3 de f.

26/09/13 T2. Defina familias de curvas ortogonales (trayectorias ortogonales). Dada la familia de curvas de ecuación $xy = C$, halle la curva de la familia ortogonal que pasa por el punto $(1;2)$.

Defina familias de curvas ortogonales (trayectorias ortogonales)

Dada una familia de curvas solución de una ecuacion diferencial llamamos familias de trayectorias ortogonales a otra familia de curvas que se intersectan punto a punto perpendiculamente con la primer familia.

10/12/13 T2.
09/12/14 T2.
21/05/13 T1.

Defina conjunto de nivel de un campo escalar

Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, y = f(\bar{x})$

Se define al conjunto de nivel k de f como:

$$C_k = \left\{ \bar{x} \in Df \subseteq \mathbb{R}^n \,/\, f(\bar{x}) = k \right\}$$