12. Ecuaciones diferenciales – 2° parte

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- S.G. simboliza ***solución general***, S.P. ***solución particular***, S.S. ***solución singular***.
- Dada la ecuación diferencial ordinaria $F(y^{(n)},\cdots,y',y,x)=0$ de orden *n*, sus soluciones, de existir, no siempre admiten que se las exprese en forma explícita. Las soluciones son relaciones entre las variables que satisfacen a la ecuación diferencial; en especial, la S.G. debe contener *n* constantes arbitrarias esenciales.

01) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales homogéneas de 1° orden.

a) $y' = \dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$ con $y(1)=1$.

b) $(x^2+y^2)\,dx-2\,xy\,dy = 0$.

c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x\cos^2(y/x)}{x}$ con $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

d) $y'=y/(x-y)$.

02) Halle la familia de curvas ortogonales a $x^2+y^2=2\,a\,x$.

03) Resuelva $y'=(x-y-1)/(x+y+3)$ aplicando la transformación $(x,y)=(u-1,v-2)$.

04) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo.

a) $2\,xy\,dx+(x^2+\cos y)\,dy=0$.

b) $y'=\dfrac{x\,y^2-1}{1-x^2y}$ con $y(-1)=1$.

c) $(6\,xy-y^3)\,dx+(4y+3\,x^2-3\,xy^2)\,dy=0$.

d) $(y^2-y)\,dx+x\,dy = 0$. (*)

e) $(x+y^2)\,dx-2\,y\,x\,dy = 0$.

f) $y^2\cos x\,dx+(4+5y\,\mathrm{sen}\,x)\,dy=0$.

05) Resuelva la ecuación $x^2y'=y+x\,e^{-1/x}$ mediante el reemplazo $y=x^2q(x)$.

06) Halle la S.G. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y''+8y'+25y = 0$.

b) $y'''-5y''+8y'-4y=2$.

c) $y''-3y'+2y = x\,e^x+2x$.

d) $y''+y=\sec(x)$.

e) $y''-2y'+y = x^{-1}e^x$.

f) $y''+y' = 2\,\mathrm{sen}(x)$.

07) Halle g de manera que $\bar{f}(x,y) = (yg'(x),\ x^2-g'(x))$ admita función potencial.

08) Halle la solución particular (S.P.).

a) S.P. de $y''-y'-2y = 4x^2$ tal que $y(0)=1,\ y'(0)=4$.

b) S.P. de $y''-y'-2y = e^{3x}$ con recta tangente de ecuación $y=2x+1$ en $(0,y_0)$.

c) S.P. de $y''+2y'+2y = \mathrm{sen}(2x)+\cos(2x)$ tal que $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

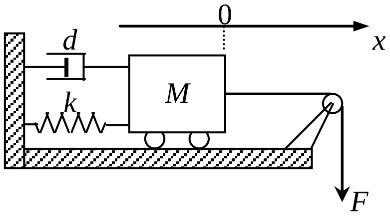
d) S.P. de $y'''-3y''+2y'=x^2-x$ tal que $y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=2$.

e) S.P. de $y''-y = 2x-1$ con recta normal de ecuación $x+3y=6$ en $(0,y_0)$.

09) Dada $y''+y=f(x)$, halle su S.G. sabiendo que $y=2\,x^2$ es una S.P.

(*) También es de variables separables, verifique que el método de resolución no cambia el tipo de solución obtenida.

10) El cuerpo de masa M puede desplazarse horizontalmente con rozamiento despreciable y está acoplado a la pared vertical mediante un resorte de constante k y un amortiguador de constante d. En tiempo $t=0$ está en reposo en la posición $x=0$ y se le aplica una fuerza F constante que lo lleva hacia x^+ partiendo con velocidad $x'(0)=0$.



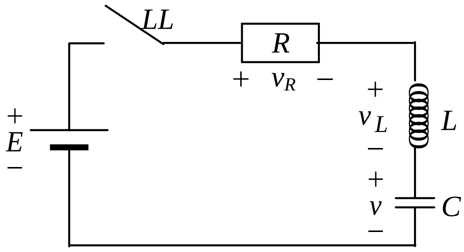
Siendo: $\overbrace{F - \underbrace{k\,x}_{resorte} - \underbrace{d\,x'}_{amortig.}}^{fuerza\ total} = \overbrace{M}^{masa} \cdot \overbrace{x''}^{aceleración}$ resulta $\boxed{M x'' + d x' + k\,x = F}$

a) Con $F=4.35$, $M=3$, $k=87$ halle y grafique $x(t)$ para: a1) $d=12$, a2) $d=38$.

b) Indique las unidades de medida de x', x'', M, k, d cuando el tiempo se mide en segundos ($[t]=\mathrm{s}$), $[F]=\mathrm{Newton(N)}=\mathrm{kgm/s^2}$ y $[x]=\mathrm{m}$.

11) En el circuito se observa una llave *LL*, una fuente de tensión *E* constante, un resistor de resistencia *R*, un inductor con inductancia *L* y un capacitor con capacitancia *C*; se suponen componentes ideales. Se denotan v_R, v_L y v las tensiones entre terminales del resistor, inductor y capacitor respectivamente.

Con LL cerrada se cumple que: $E = v_R + v_L + v$ (1)



Siendo(#) $i = C\,v'$, resultan: $\begin{cases} v_R = R\,i = RC\,v' \\ v_L = L\,i' = LCv'' \end{cases}$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$\boxed{LC\,v'' + RC\,v' + v = E}$$

En tiempo $t=0$, con capacitor descargado ($v(0)=0$) se cierra LL y comienza a circular corriente ($i(0)=0 \Rightarrow v'(0)=0$). Halle y grafique $v(t)$ e $i(t)$ cuando el tiempo se mide en segundos (s), $E=0.05$ Volt, $R/L=4\,\mathrm{s}^{-1}$, $(LC)^{-1}=29\,\mathrm{s}^{-2}$.

<u>Nota</u>: Observe que $v(t)$ permite simular $x(t)$ del ítem anterior para el caso caso "a1)" (equivalente eléctrico del sistema mecánico).

12) Sea $v'' + k\,v' + 9\,v = 0$ con $v(0)=0$, $v'(0)=1$; ¿para qué valores de *k* la solución $v(t)$ presenta oscilaciones amortiguadas?.

13) Halle y grafique la familia de líneas de campo en los siguientes casos, al graficar recuerde orientar la líneas según el campo en cada punto.

a) $\bar f(x,y) = (2y - x,\ x)$.
b) $\bar f(x,y) = (y,\ x)$.
c) $\bar f(x,y) = (x/2\ ,\ y)$.
d) $\bar f(x,y) = (kxy^2, x^2y)$, k constante.
e) $\bar E$ según TP 11 – ítem 16.
f) $\bar E$ según TP 11 – ítem 17.
g) $\bar f(x,y,z) = (y\,,z\,,x)$.
h) $\bar f(x,y,z) = (2,1,3)$, campo constante.

14) Demuestre que si $\bar f : D \subset \Re^2 \to \Re^2$ es un campo de gradientes, sus líneas de campo (que en cada punto tienen la dirección de $\bar f$) son ortogonales a sus líneas equipotenciales. ¿Cómo se enunciaría esta propiedad trabajando en $\Re^3$?.

(#) i es la intensidad de corriente eléctrica en el circuito. Unidades de medida: $[tensión]=$ Volt, $[i]=$ Ampere, $[R]=$ Ohm, $[L]=$ Henry, $[C]=$ Faradio.

15) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de 1° orden.

a) $\begin{cases} x' + y' = e^{-t} + y \\ 2x' + y' = \operatorname{sen}(t) - 2y \end{cases}$ con $x(0) = -2,\ y(0) = 1$.

b) $m(x'', y'', z'') = (0, 0, -mg)$ tiro libre de masa puntual m desde (0,0,0) en el instante $t = 0$ con velocidad inicial $\bar{v}(0) = (v_x, 0, v_z)$; g constante (ac. de la gravedad).

c) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \operatorname{sen}(t) \\ x' + y = \cos(t) \end{cases}$ equivalente a $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

d) $(x', y', z') = (y + z,\ 3x + z,\ 3x + y)$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ con $y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_3(0) = -2$.

f) $(x', y') = (3x - y/2 - 3t^2 - t/2 + 3/2,\ 2y - 2t - 1)$ con $x(0) = 2,\ y(0) = 3$.

Cuestionario

a) Enuncie el teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

b) Defina los tipos de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.

c) Si y_{p_1} e y_{p_2} son soluciones de la ec. diferencial $ay'' + by' + cy = f(x)$, demuestre que $y = y_{p_1} - y_{p_2}$ es solución de la homogénea.

d) Si y_{p_1} e y_{p_2} son respectivamente S.P.

de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x)$

e $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_2(x)$

demuestre que $y = y_{p_1} + y_{p_2}$ es S.P. de

$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x) + f_2(x)$.

e) Halle una transformación que convierta la ecuación $y' = y\,x^{-1} + 1$ a una ecuación del tipo variables separables.

Resolución de ecuaciones diferenciales con el Mathematica

Se dispone de dos funciones, **DSolve** y **NDSolve**; trabajando con ec. diferenciales ordinarias:
DSolve[eqn, y, x] resuelve la ec.dif. **eqn** para la función **y**, con variable independiente **x**.
DSolve[eqn, y[x], x] resuelve para hallar la expresión formal de la S.G.
DSolve[{eqn,cond}, y[x], x] resuelve para hallar la expresión de la S.P. que cumple con **cond**.
DSolve[{eqn1,eqn2, ...}, {y1[x],y2[x], ...}, x] resuelve un sistema de ec. diferenciales.
NDSolve[eqn, y, {x,xmin,xmax}] encuentra una solución numérica de la ec.dif. **eqn** para la función **y**, con variable independiente **x** en el rango xmin a xmax.
NDSolve[{eqn1,eqn2, ...}, {y1,y2, ...}, {x,xmin,xmax}] es para sistema de ec. diferenciales.
***Ejemplo 1*:** resolvemos el ejercicio del ítem 11a.

DSolve[{y''[x] – y'[x] – 2 y[x] == 4 x^2 , y[0] == 1 , y'[0] == 4} , y[x] , x] (*)

$\{\{y[x] \to e^{-x}(2 - 3e^{x} + 2e^{3x} + 2e^{x}x - 2e^{x}x^2)\}\}$

y[x] /. % Devuelve la expresión de y[x] según (/.) el último resultado (%).

$\{e^{-x}(2 - 3e^{x} + 2e^{3x} + 2e^{x}x - 2e^{x}x^2)\}$ Aparece como lista o vector (de 1 componente).

%[[1]] Devuelve la 1° (única) componente del resultado anterior.

$e^{-x}(2 - 3e^{x} + 2e^{3x} + 2e^{x}x - 2e^{x}x^2)$

f[x_] = Expand[%] Define f[x] expandiendo (prop. distributiva) el resultado anterior.

$-3 + 2e^{-x} + 2e^{2x} + 2x - 2x^2$

(*) Donde dice y'' es con *doble prima*, no es *y"* con comillas.

***Ejemplo 2*:** resolvemos el ítem 12b del TP-1, trayectorias ortogonales a la familia $y = C\,e^{x}$.

fam1 = y[x] == c Exp[x] ;
Eliminate[{ fam1, D[fam1, x] }, c]
y[x] == y′[x]
% /. y'[x] −> – 1/y'[x] (*)

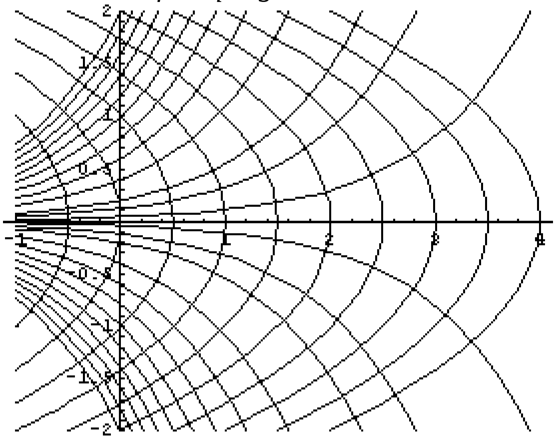
$$\text{y[x]} == -\left(\frac{1}{\text{y}'\text{[x]}}\right)$$

DSolve[y'[x] == –1/y[x], y[x], x]
{ { y[x] −> –Sqrt[–2 x + C[1]] } , { y[x] −> Sqrt[–2 x + C[1]] } }

Vemos que la respuesta es del tipo $y = \pm\sqrt{\;\;}$; es decir, $\boxed{y^2 = 2\,(k - x)}$.

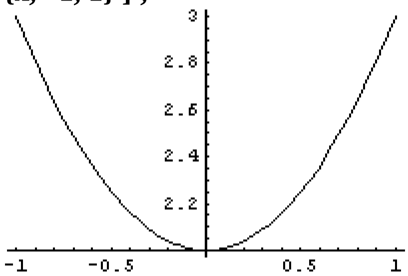
Graficamos algunas curvas de ambas familias
a = Table[Plot[c Exp[x] , {x, –1, 4}, PlotRange −> { All , {–2, 2} }] ,
{c, –2, 2, 0.2}] ;
b = Table[Plot[c Exp[x] , {x, –1, 4}, PlotRange −> { All , {–2, 2} }] ,
{c, – 0.2, 0.2, 0.08}] ;
<< Graphics`ImplicitPlot`
c = Table[ImplicitPlot[y^2 == 2 (k – x) , {x, –1, 4}], {k, –4, 4, 0.5}] ;
Show[a,b,c, AspectRatio −> Automatic];

Gráfico que genera el Show:



***Ejemplo 3*:** una resolución numérica con graficación.

rr = NDSolve[{ y'[x] == 2 x , y[0] == 2 } , y , {x, –1, 1}]
{{ y −> InterpolatingFunction[{–1. , 1. }, <>] }}
Plot[Evaluate[y[x] /. rr], {x, –1, 1}] ;



y[0.5] /. rr En esta línea pedimos el valor numérico de la S.P. para x = 0.5 .
{2.25}

(*) En esta línea se ordena: en el último resultado (%) reemplazar (/.) y'[x] por –1/ y'[x] .