5. Diferenciabilidad – Plano tangente y recta normal

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Dada $f : \Re^n \to \Re^m \;/\; f(X) = (\,f_1(x),\ \cdots,\ f_m(x))$, cuando f es derivable(*) en A, queda definida la matriz jacobiana de f en A que denotamos como $Df(A)$.

$$Df(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}.$$

- Siendo f un campo escalar derivable en $\bar{A}$, el vector cuyas componentes son los elementos de $Df(\bar{A})$ se denomina gradiente de f en $\bar{A}$ y lo denotamos $\nabla f(\bar{A}) \equiv \operatorname{grad} f(\bar{A})$.

$$\nabla f(\bar{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{A}),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{A}) \right).$$

- La expresión "f con matriz jacobiana continua en W" es equivalente a "$f \in C^1(W)$". Para funciones de una variable significa que la función f' es continua en W; para las de varias variables significa que todas las derivadas parciales de 1° orden son funciones continuas en W.

01) Exprese $Df(X)$ y halle el conjunto W tal que Df sea continua en W.

a) $\bar{f}(t) = (t^3 - 2\,,\ \frac{t^2-1}{t+1}\,,\ \frac{\cos(t)}{2t-\pi})$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

c) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2+y\,,\ z\ln(x^2+z^2))$

d) $\bar{f}(\bar{X}) = \dfrac{k\breve{r}}{r^2}$ con $\begin{cases} \bar{r} = \bar{X} = (x,y,z) \\ r = \|\bar{r}\| \end{cases}$, k = cte.

e) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0{,}0)$, $f(0{,}0) = 0$.

f) $f(x,y) = (x^2y^3,\ (y-x)^2)$

02) Siendo $f(x,y) = \sqrt{xy}$ si $xy \geq 0$ y $f(x,y) = x$ si $xy < 0$, calcule $f'((0{,}0),(2,-1))$ aplicando la definición. Observe que en este caso $f'((0{,}0),(2,-1)) \neq \nabla f(0{,}0)\cdot(2,-1)$. ¿Existe la derivada pedida?; si existe, ¿cuál es su valor?.

03) Sea $f(x,y) = x^2/y$ si $(x,y) \neq (x,0)$ con $f(x,0) = 0$. Demuestre que f es derivable en toda dirección en $(0{,}0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

04) En los siguientes casos analice la derivabilidad en distintas direcciones y la diferenciabilidad de la función en el origen de coordenadas.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$, observe que f no es continua en (0,0).

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$

Verifique que en (0,0) la función tiene dos direcciones de derivada direccional máxima y cuatro direcciones para las cuales la derivada resulta nula (cada dirección se especifica mediante el versor correspondiente).

(*) Derivadas parciales existentes para el caso de función de varias variables.

05) Analice si la gráfica de f del ítem "01e" admite plano tangente en (0,0,0).

06) Dada la superficie de ecuación $z = e^{(x-1)^2+y^2}$, determine en qué puntos tiene plano tangente horizontal y obtenga la ecuación de esos planos.

07) *Optativo*: Siendo $f(x,y) = (x^3 - xy^2)/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$, demuestre que f es continua y derivable en toda dirección en (0,0) pero <u>no es</u> diferenciable en (0,0).

08) Calcule mediante aproximación lineal y compare el resultado con el obtenido con calculadora.

a) $f(1.96, 0.96)$ cuando $f(x,y) = \sqrt{25-2x^2-y^2}$.

b) $f(0.99, 1.98, 1.02)$ cuando $f(x,y,z) = xy + \text{sen}(\text{Exp}(2x-y+3z-3)-1)$.

09) Demuestre que en un entorno del origen $e^{x/(y+1)} + \ln(y+1) \cong x+y+1$.

10) Sea S la superficie de ecuación $\overline{X} = (u - v^2, v^2/u, u/v)$ con $(u,v) \in \Re^2 /\ uv \neq 0$, verifique que $\overline{A} = (-2,2,1)$ es un punto regular de *S*. Determine y exprese en forma cartesiana el plano tangente y la recta normal a S en $\overline{A}$.

11) Dada la superficie de ecuación $z = x^2 - xy^3 + x$, demuestre que todos sus puntos son regulares y halle aquellos puntos en los que el plano tangente es "horizontal" (paralelo al *xy*).

12) Sea r_0 la recta normal a la superficie de ecuación $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ en $(1, 2, z_0)$, analice si existe algún punto en el que r_0 interseca a la superficie cilíndrica de ecuación $z = x^2$.

13) Halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de las siguientes funciones en el punto $\overline{A}$:

a) $f(x,y) = x^2 - xy^2$, $\overline{A} = (1,3)$. b) $f(x,y,z) = x^2 - yz^3$, $\overline{A} = (5,2,0)$.

14) Siendo $g(x,y) = 3x^4 - xy + y^3$, calcule la derivada direccional de g en el punto $(1,2)$ según la dirección que forma con x^+ un ángulo –en sentido trigonométrico– de $\pi/3$.

15) Sea $f(x,y) = ax^2y^3 + bx^4 + 4xy$, determine a y b de manera que la derivada direccional de f en el punto $(1,-2)$ tenga el valor máximo en una dirección paralela al eje y.

16) La temperatura en ºC en cada punto (x,y,z) de un cuerpo es $T(x,y,z) = e^{2x+y+3z}$, ¿en qué dirección desde el origen se produce el mayor incremento de temperatura?.

17) Sea $f \in C^1$, si $f'(\overline{A},(3,4)) = 4$ y $f'(\overline{A},(2,7)) = -6$.

a) Calcule $f'(\overline{A},(5,9))$.

b) Determine el valor de la derivada direccional máxima de f en $\overline{A}$.

c) Sabiendo que $f(\overline{A}) = 3$, calcule en forma aproximada $f(\overline{A} + (0.01, -0.02))$.

18) La recta determinada por la intersección de las superficies de ecuaciones $y^2 = x^2 - z^2$ y $z = x$ es normal a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,0,1)$, calcule aproximadamente $f(0.98, 0.01)$.

19) Dada la superficie Σ de ecuación $z\,e^{y-2x} - 5 = 0$, halle una ecuación cartesiana para el plano tangente a Σ en $(1,2,z_0)$; con esta última calcule aproximadamente z_1 sabiendo que $(1.01, 1.97, z_1) \in \Sigma$.

20) Se sabe que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2,z_0)$ es $2x+3y+4z=1$. Con esta información, ¿es posible calcular la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ en la dirección que va hacia el punto $(3,4)$?.

21) El resultado de la medición de una magnitud escalar w es del tipo $w_0 \pm \varepsilon_w$, donde w_0 es el valor medido y $\varepsilon_w = |\Delta w|_{\text{máx}}$ es la ***cota de error absoluto*** de la medición. Cuando $w = f(x_1,\cdots,x_n)$ y se miden los x_i para calcular w a través de f, una forma acostumbrada de evaluar ε_w es:

$$\varepsilon_w = \sum_{i=1}^{n} |\, f'_{x_i}(A)|\ \varepsilon_{x_i}\ ,\ \text{donde } A = (a_1,\cdots,a_n),\ a_i \text{ es el valor medido para cada } x_i .$$

a) Sea $I = 0.50$ mA la intensidad de corriente eléctrica a través de un resistor y $V = 0.44$ Volt la diferencia de potencial entre sus terminales. Sabiendo que $R = V / I$ es la resistencia eléctrica del resistor, determine $R \pm \varepsilon_R$ considerando que Volt/mA = kΩ(*) y que ambos instrumentos tienen un error máximo de ± 1 en el dígito menos significativo (típico en instrumentos digitales).

b) Un recipiente tiene forma de cilindro circular recto, sus dimensiones internas son: diámetro 3.1±0.05 cm y altura 5.2 ± 0.05 cm. Calcule su capacidad $V \pm \varepsilon_V$.

c) Determine la cota de error relativo de z en función de los errores relativos de x e y en los siguientes casos: $z = xy$, $z = x/y$, $z = x^2 y^3$. <u>Nota</u>: para $w \neq 0$, $\varepsilon_{\text{rel}_w} \doteq \varepsilon_w / |w|$.

d) Dados dos resistores con resistencia nominal $R_1 = R_2 = 39$ kΩ al 5% ($\varepsilon_{\text{relativo}}$ en % o *tolerancia*), calcule $R_{EQ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (resistencia equivalente de dos resistores en paralelo); no olvide indicar la cota de error relativo de R_{EQ} en %.

Cuestionario

a) Demuestre que todo campo diferenciable es continuo y derivable en toda dirección.

b) Demuestre que $Df(A)$ es la matriz asociada a la transformación lineal que figura en la definición de diferenciabilidad de f en A.

c) Proponga un ejemplo de función de varias variables que resulte derivable pero no sea diferenciable en un punto interior a su dominio.

d) Determine los casos en los que $\Delta w = dw$.

e) *Optativo*: Sea $f(x,y) = x^{1/3}\sqrt{x^2+y^2}$, demuestre que f es diferenciable en (0,0) pero f'_x no es continua en (0,0).

(*) kΩ "se lee" kiloOhm, $1\,\text{k}\Omega = 1000\,\Omega$. mA "se lee" miliAmpere, 1 mA = 0.001 Ampere.