7. Polinomio de Taylor – Extremos

01) Sea $p(x,y)=x^2-xy+y^3-3$ el polinomio de Taylor de 3° orden del campo escalar f en un entorno del punto (1,2).
   a) Expréselo en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.
   b) ¿Cuál es el valor de f en (1,2)?, ¿se puede calcular con el polinomio dado sin obtener la forma pedida en "a"?.

02) Dadas las superficies de ecuación $z=f(x,y)$ y $z=p(x,y)$, donde p es la función polinómica que resulta de desarrollar f en un entorno de (x_0, y_0) hasta el orden n, verifique que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.(*)

03) Desarrolle los siguientes campos por Taylor hasta 2° orden en un entorno de $\overline{A}$.
   a) $f(x,y)=x-y\sqrt{6-x}$, $\overline{A}=(2,3)$.
   b) $f(x,y)=y\ln(x)+x\ln(y-x)$, $\overline{A}=(1,2)$.
   c) $f(x,y,z)=e^{xz}-(z+1)\sqrt{y-x}$, $\overline{A}=(1,2,0)$.
   d) $f(x,y,z)=\cos(x+y)\,e^{z-x}$, $\overline{A}=(0,0,0)$.

04) Calcule en forma aproximada: a) $0.98^{2.01}$, b) $\sqrt{3.99}+\sqrt[3]{8.06}$, c) $8.97 / 3.02$.

05) Dada $f(x,y)=y\,g(x)$ con g derivable, halle $g(x)$ tal que en un entorno del punto (x_o,y_o) con $y_o\neq 0$ resulte $f(x,y)\cong g(x_o)(x+y-x_o)$.

06) Dada $f:\Re^2\to\Re$, analice en cada caso si $f(0,0)$ es extremo local; en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.
   a) $f(x,y)=2+\sqrt{|xy|}$. b) $f(x,y)=x^3+xy^2$. c) $f(x,y)=(y-x^3)(x-y^2)$.

07) Siendo $f(x,y)=(x+y)^4$, demuestre que $f(-a,a)$ $\forall a\in\Re$ es extremo local en sentido amplio.

08) Estudie la existencia de extremos relativos (locales) y de extremos absolutos en sus dominios naturales de:
   a) $f(x,y)=x^2+y^2+xy^2$.
   b) $f(x,y)=x^3-x^2+xy$.
   c) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$.
   d) $f(x,y)=\ln(y-x)$.
   e) $f(x,y)=\sqrt{10-(x-4)^2-(y-2)^2}$.
   f) $f(x,y,z)=x^2+y^4+z^3$.

09) Analice la existencia de extremos absolutos de $f(x,y)=x/(x^2+y^2+1)$ en la región $D=\{(x,y)\in\Re^2 \;/\; x^2+y^2\le 2x\}$, identifíquelos e indique en qué puntos se producen.

10) Demuestre que la gráfica de $f(x,y)=6+x^3$ tiene infinitos puntos con plano tangente horizontal, pero en ninguno de ellos el valor de f es un extremo.

11) Una chapa circular plana $S=\{(x,y)\in\Re^2 / x^2+y^2\le 4\}$ tiene una densidad de carga electrostática $\sigma(x,y)=2xy^2-x^2$ en μCoul/cm^2. Halle los puntos de máxima y mínima densidad de carga; no olvide analizar en puntos de la frontera.

12) Aplicando Taylor resulta $f(x,y)\cong 7x+y+xy-y^2-4x^2$ en un entorno de $\overline{A}=(1,1)$; analice si $f(\overline{A})$ es extremo local, en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

(*) En general, en (x_0, y_0) coinciden los valores de f y p y los de todas sus derivadas hasta el orden n inclusive.

13) Conectando en paralelo n resistores con resistencias eléctricas R_1, ..., R_n se obtiene una resistencia eléctrica equivalente R_{EQ} tal que $(R_{EQ})^{-1} = (R_1)^{-1} + \cdots + (R_n)^{-1}$. Sabiendo que R_1, ..., R_n son positivas, demuestre que R_{EQ} es menor que cada una de ellas (con lo cual es menor que la menor).

14) Dada $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $F(x,y,z) = 0$, suponga $F \in C^2$ y el punto $\bar{A} = (x_0, y_0, z_0) \,/\, F(\bar{A}) = 0 \wedge F'_z(\bar{A}) \neq 0$.

Demuestre que si (x_0, y_0) <u>es punto estacionario</u> de f entonces:

$$f''_{xx}(x_0,y_0) = -\frac{F''_{xx}(\bar{A})}{F'_z(\bar{A})} \quad , \quad f''_{xy}(x_0,y_0) = -\frac{F''_{xy}(\bar{A})}{F'_z(\bar{A})} \quad , \quad f''_{yy}(x_0,y_0) = -\frac{F''_{yy}(\bar{A})}{F'_z(\bar{A})} \;.$$

15) Aplicando el teorema de existencia de las funciones definidas implícitamente, demuestre que $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ define dos funciones φ_1 y φ_2 de las variables x e y que producen extremos relativos en (0,0); uno es máximo y el otro es mínimo. Halle las funciones correspondientes e interprete geométricamente.

16) Dada la superficie S de ecuación $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. Suponiendo una representación del tipo $z = \varphi(x,y)$, ¿en qué puntos φ produce extremos locales?, ¿es una única función φ?.

17) Analice la existencia de extremos relativos, clasifíquelos y calcule sus valores.
   a) $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 + 12x^{-1} + 12y^{-1}$.
   b) $f(x,y) = x - y^2 - x^3 + 2xy$.
   c) $f(x,y) = (2 - 4x + 3y)^4$. Ejemplo con infinitos puntos de mínimo.
   d) $f(x,y)$ definida implícitamente por $xy - z\cos(yz) + 1 = 0$.
   e) $f(x,y,z) = xy + xz$ en puntos de la superficie de ec. $\bar{X} = (u, u-v, v^2)$ con $(u,v) \in \Re^2$.
   f) $f(x,y,z) = z^2(x+9) - 6y$ en puntos de la recta de ec. $\bar{X} = (2t, 4t, t)$ con $t \in \Re$.

18) Determine los puntos de la curva de ecuación $4y^2 - 18x + 9x^2 - 16y = 11$ más próximo y más alejado del punto (1,7).

19) Un cuerpo tiene forma de cilindro circular recto de volumen V, siendo A el área de su superficie frontera. Determine las dimensiones del cuerpo (diámetro y altura) si se desea ...
   a) ... volumen máximo para área A dada.
   b) ... área mínima para volumen V dado.

20) Se desea construir un camino de la menor longitud posible (recto) que permita unir dos rutas cuyas trazas locales tienen ecuaciones $4x + 4y = 5$ e $y = -x^2$, halle los puntos de ambas rutas a interconectar por dicho camino.

Cuestionario

a) La función del ítem 17a genera máximo local y mínimo local, observe que el máximo es menor que el mínimo. ¿Por qué pueden ocurrir estas situaciones?.

b) Proponga f tal que $f(x_0,y_0)$ sea mínimo local y el Hessiano sea nulo en (x_0,y_0).

c) Dada f diferenciable, si $f(x_0,y_0)$ es extremo local, demuestre que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es paralelo al plano xy.

d) Proponga una función de dos variables que produzca extremo local en un punto donde no es derivable.