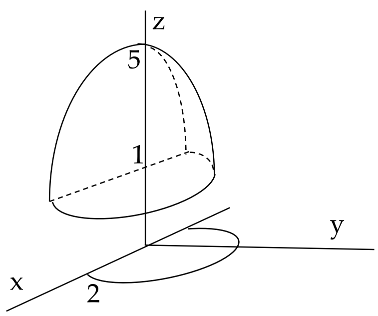
1	2	3	4	5	T1a	T1b	T2a	T2b

1.- Calcule la masa del cuerpo definido por $1 \le z \le 5 - x^2 - y^2$, con $y \ge 0$, sabiendo que la densidad del material es, en cada punto, $\delta(x, y, z) = x^2$.

El cuerpo tiene la siguiente forma aproximada:



Se trata de medio parabolide cuya proyección en el plano xy es un semicírculo de radio 2.

La masa es

$$\iiint_V \delta dxdydz = \iint_{P_{xy}} dxdy \int_1^{5-x^2-y^2} x^2 dz$$

que en coordenadas cilíndricas es

$$\iint_{P_{xy}} rdrd\theta \int_1^{5-r^2} r^2 \cos^2(\theta)\, dz = \left(\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3\, [5 - r^2 - 1] dr\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} [r^4 - \frac{r^6}{6}]\bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\pi$$

2.- Recurra al Teorema del Rotor para calcular la circulación del campo vectorial $\vec{f}(x, y, z) = (z + ycos(xy), xcos(xy), x + y)$ sobre la curva definida por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1 \ \wedge x + z = 1$. Indique en un gráfico aproximado el sentido en que ha elegido recorrer la curva.

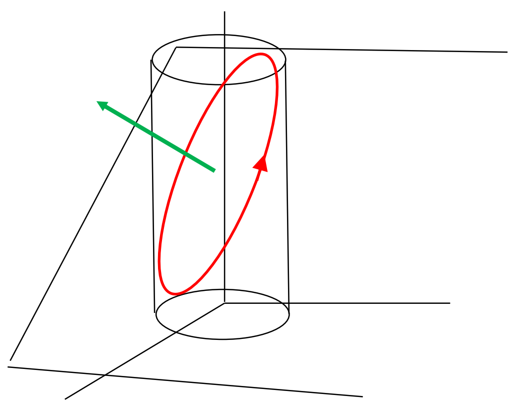
La curva es una elipse (curva cerrada) en el plano $x + z = 1$. La normal de este plano es (1,0,1). Por el Teorema del Rotor, esta circulación es igual al flujo del rotor del campo a través de la superficie S que encierra la elipse.

$$rot(\vec{f}) = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + ycos(xy) & xcos(xy) & x + y \end{vmatrix} =$$

$$= (1, 1 - 1, cos(xy) - xysen(xy) - cos(xy) + xysen(xy) = (1,0,0)$$

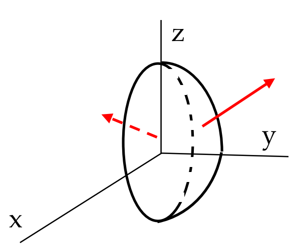
La proyección en el plano xy de la superficie S que encierra la elipse es el círculo delimitado por $x^2 + y^2 = 1$ por lo que el flujo del rotor es

$$\iint_S rot(\vec{f}).d\vec{\sigma} = \iint_{P_{xy}} (1,0,0).(1,0,1)dxdy = \iint_{P_{xy}} 1dxdy = \underbrace{\pi}_{\substack{\acute{A}rea \\ del \\ c\acute{\imath}rculo}}$$



3.- Evalúe el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (z + y, x + y, 2z)$ a través de la superficie definida por $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$. Indique en un gráfico el sentido considerado para la normal.

La superficie es media esfera abierta.



Si la cerramos con una tapa de ecuación $y = 0$ con $x^2 + z^2 \leq 4$ podemos usar el Teorema de la Divergencia.

La divergencia del campo es 0+1+2=3. El flujo saliente es, entonces, 3 veces el volumen de media esfera de radio 2 o sea $3.\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 2^3 = 16\pi$

Ahora hay que restar el flujo sobre la tapa, que es un círculo de radio 2 en el plano xz con normal (0,-1,0) para que sea saliente:

$$\iint_T \vec{f}\big|_T.d\vec{\sigma} = \int_{x^2+z^2\leq 4} \vec{f}(x,0,z).(0,-1,0)dxdz = \int_{x^2+z^2\leq 4} (z,x,2z).(0,-1,0)dxdz =$$

$$= \int_{x^2+z^2\leq 4} (-x)dxdz = \int_0^2 rdr \int_0^{2\pi} -rcos(\theta)d\theta = (\int_0^2 r^2 dr)(\int_0^{2\pi} cos(\theta)d\theta) = 0$$

por lo que el flujo buscado es $16\pi - 0 = 16\pi$.

4.- Halle la solución del problema $\begin{cases} y'' - y = 2xe^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

La ecuación característica es $\alpha^2 - 1 = 0$ por lo que las raíces son $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$.

Una base de soluciones para la ecuación homogénea es $\{e^x, e^{-x}\}$ y la solución general homogénea es $y_H = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Para $\underbrace{2x}_{\substack{polinomio \\ de\ grado\ 1}} \underbrace{e^x}_{\substack{solución \\ repetida}}$ proponemos $y_P = (Ax + B)xe^x$.

Reemplazando en la ecuación:

$$y_P = (Ax + B)xe^x$$

$$y_P' = Axe^x + (Ax + B)e^x + (Ax + B)xe^x$$

$$y_P'' = Ae^x + Axe^x + Ae^x + (Ax + B)e^x + Axe^x + (Ax + B)e^x + (Ax + B)xe^x$$

$$y_P'' - y_P = Ae^x + Axe^x + Ae^x + (Ax + B)e^x + Axe^x + (Ax + B)e^x \underbrace{=}_{debe\ ser} 2xe^x$$

entonces debe ser

$$\left.\begin{matrix} 4Axe^x = 2xe^x \\ (2A + 2B)e^x = 0 \end{matrix}\right\} \to A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

y la solución general de la no homogénea es $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}(x-1)xe^x$ y sólo falta aplicar las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$ para obtener C_1, C_2.