8. Curvas – Integrales de línea – Función potencial

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Se denomina ***trayectoria*** o ***camino continuo*** a toda función $\bar{g}:[a,b]\subset\Re\to\Re^n$ $(n>1)$ continua en el $[a,b]$. El conjunto imagen $C\subset\Re^n$ es una ***curva***(*) con ecuación vectorial $\bar{X}=\bar{g}(t)\ \wedge\ t\in[a,b]$.
- La ecuación vectorial de una curva C impone una forma de recorrerla; la ***orientación***, o ***sentido de los arcos crecientes***, es aquella según la cual se desplaza $\bar{g}(t)$ sobre la curva cuando el parámetro *t* crece.
- Según la representación dada por $\bar{g}$, la curva C es ***regular*** cuando existe $\bar{g}'$ y $\bar{g}'(t)\neq\bar{0}$ en todo el $[a,b]$(**); si además $\bar{g}'$ es continua, la curva es ***suave***. Cuando C es suave, el versor tangente ($T=\bar{g}'/\|\bar{g}'\|$) se "desplaza" con continuidad sobre la curva.
  La curva es ***suave a trozos*** cuando el intervalo $[a,b]$ puede ser dividido en cantidad finita de intervalos cerrados en cada uno de los cuales $\bar{g}'$ es continua y no nula.
- $\int_C f\,ds$ simboliza la ***integral de línea*** del campo escalar f a lo largo de la curva *C*, siendo $ds=\|\bar{g}'(t)\|dt$ el *diferencial de arco de curva*.
- $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}\equiv\int_C \bar{f}\cdot d\bar{g}$ simboliza la ***integral de línea*** o ***circulación***(#) del campo vectorial $\bar{f}$ a lo largo de la curva *C*, siendo $d\bar{s}\equiv d\bar{g}\doteq T\,ds=\bar{g}'(t)\,dt$.

Observación:
Si *C* es suave y simple según dos representaciones $\bar{g}_1$ y $\bar{g}_2$, la $\int_C f\,ds$ tiene el mismo resultado usando cualquiera de ellas, mientras que se observará un cambio de signo en el resultado de $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}$ cuando $\bar{g}_1$ y $\bar{g}_2$ orienten a C en sentidos opuestos.

01) Dados los siguientes arcos de curva, halle dos parametrizaciones que los orienten en sentido opuesto y plantee el cálculo de su longitud verificando que el resultado no depende de la orientación.

a) Arco de parábola de ecuación $y=x^2$ entre los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$.
b) Circunferencia de radio 2 con centro en (2,1).
c) Elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ con $a,b\in\Re^+$.
d) Segmento $\overline{AB}$, con $\bar{A}=(2,3,-1)$ y $\bar{B}=(3,2,1)$.
e) $C\subset\Re^3$, intersección de $y=x^2$ con $x+z=2$ en el 1° octante.
f) $C\subset\Re^3$, intersección de $x^2+y^2+z^2=8$ con $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
g) C: línea coordenada de $u=3$, correspondiente a la superficie de ecuación $\bar{X}=(u^2v\,,\,u-v\,,\,v+u)$ con $(u,v)\in\Re^2$ entre los puntos (9,2,4) y (18,1,5).

02) Calcule la longitud de la frontera de la región plana definida por: $x^2+y^2\le 4,\ y\ge x,\ x\ge 0$.

(*) A veces llamado *arco de curva* por estar definido en intervalo [*a*,*b*] cerrado y acotado.
(**) La derivabilidad en los puntos frontera del intervalo cerrado se cumple cuando existen las derivadas laterales (límite del cociente incremental por derecha para a y por izquierda para *b*).
(#) Algunos autores sólo llaman circulación al caso de *C* cerrada.

03) Calcule la longitud de la trayectoria de una partícula que se mueve sobre la superficie de ecuación $z = x^2 - 4y^2$ desde el punto $(1,2,-15)$ hasta el (3,1,5), si la proyección de su recorrido sobre el plano *xy* es el segmento de puntos extremos (1,2,0) y (3,1,0).

04) Entre los puntos (0,0,0) y (1,1,1), en la intersección del plano $y = x$ con la superficie de ecuación $z = 2y - x^2$ con $z \geq 0$, se ha formado un hilo conductor eléctrico con resistividad lineal (Ω/m) que en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano $x = 1$. Calcule la resistencia eléctrica de dicho hilo conductor.

05) Halle las coordenadas del centro de masa de un alambre filiforme cuya densidad lineal en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z, si la forma del alambre queda determinada por la intersección de $x + y + z = 4$ con $y = 2x$ en el 1° octante.

06) Demuestre que si $\bar{h}: \Re \to \Re^n \ (n > 1)$ es derivable y $\|\bar{h}\|$ es constante, $\bar{h} \perp \bar{h}'$.

07) Sea $C \subset \Re^3$ una curva suave de ecuación $\bar{X} = \bar{g}(t)$ con $t \in I$ (intervalo real).

Dado $b \in I$, $\boxed{s = \lambda(t) \doteq \int_b^t \|\bar{g}'(t)\|\, dt}$ es la ***abscisa curvilínea*** del punto $\bar{g}(t) \in C$, donde $s_b = \lambda(b) = 0$ es el origen de dicha abscisa.

Siendo $s' = \lambda'(t) = \|\bar{g}'(t)\| > 0 \ \Rightarrow\ \lambda$ estrictamente creciente $\Rightarrow\ \exists\ \lambda^{-1}$ tal que $t = \lambda^{-1}(s)$, componiendo con $\bar{g}$ resulta: $\boxed{\bar{X} = \underbrace{\bar{g}(\lambda^{-1}(s))}_{\bar{G}(s)} \text{ con } s \in I_s}$ que es la ecuación ***normal*** de C, donde I_s es la imagen de I a través de λ.

Se define el ***versor tangente principal*** $T \doteq d\bar{G}/ds$; aplicando la regla de la cadena y la regla de derivación de función inversa resulta:

$$T = \frac{d\bar{g}}{dt}\frac{dt}{ds} = \bar{g}'\,\frac{1}{s'} = \frac{\bar{g}'}{\|\bar{g}'\|} \tag{1}$$

versor orientado según $\bar{g}'$ (sentido de los arcos crecientes). Suponiendo existente y no nula la dT/ds, esta derivada es ortogonal a T ($\|T\|$ constante) y quedan definidos

el ***versor normal principal*** $N \doteq \dfrac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ y el ***versor binormal*** $B \doteq T \wedge N$.

Así como (1) permite hallar T sin obtener una ecuación normal de la curva, denotando:

$s_o = \lambda(t_o)$ y suponiendo existentes $\bar{g}'_o = \bar{g}'(t_o)$, $\bar{g}''_o = \bar{g}''(t_o)$, $\bar{g}'''_o \doteq \bar{g}'''(t_o)$

es posible demostrar que en todo $\bar{X}_o = \bar{g}(t_o) \in C$, si $\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o \neq \bar{0}$ resultan:

$$\boxed{T_o = \frac{\bar{g}'_o}{\|\bar{g}'_o\|}\ ,\ B_o = \frac{\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o}{\|\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o\|}\ ,\ N_o = B_o \wedge T_o}\ .$$

El ***triedro intrínseco*** de C en $\bar{X}_o$ está formado por los planos ***normal***, ***osculador*** y ***rectificante*** que son perpendiculares en dicho punto a T_o, B_o y N_o respectivamente.

La ***curvatura de flexión*** de C en $\bar{X}_o$ es:

$$\boxed{cf_o \doteq \left\|\frac{dT}{ds}(s_o)\right\| = \frac{\|\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o\|}{\|\bar{g}'_o\|^3}}$$

La ***curvatura de torsión*** de C en $\bar{X}_o$ es:

$$\boxed{ct_o \doteq \left\|\frac{dB}{ds}(s_o)\right\| = -\frac{(\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o)\cdot \bar{g}'''_o}{\|\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o\|^2}}$$

a) Halle la ecuación normal de la curva de ecuación $\bar{X} = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, definiendo como origen de abscisa curvilínea el punto $(0,2,2\pi)$.

b) Halle la ecuación cartesiana del plano osculador de la curva C intersección del cilindro parabólico de ecuación $z = x^2$ con el plano de ecuación $z + x = 2$ en el punto (1,1,1); y calcule las curvaturas de flexión y de torsión de C en dicho punto.

c) Demuestre que toda recta, tiene curvatura de flexión nula en todos sus puntos.

d) Demuestre que la circunferencia tiene igual curvatura de flexión en todos sus puntos.

e) Determine la posición del centro de curvatura de flexión correspondiente al punto (4,1,12) de la curva de ecuación $\overline{X} = (2t, t-1, t^3+4)$ con $t \geq 1$.

f) Sean $\overline{X} = \overline{g}(t)$, $\overline{v} = \overline{g}'$ y $\overline{a} = \overline{v}'$ la posición, velocidad y aceleración de un punto que se desplaza por el espacio, donde t es el tiempo. Demuestre que la velocidad es siempre tangencial; y la aceleración: es nula si el movimiento es rectilíneo uniforme ($\overline{v}$ constante), es tangencial si es rectilíneo no uniforme, y yace en el plano osculador si no es rectilíneo (es expresable como combinación lineal de T y N).

08) En $\Re^2$, si $\bar{f} = (P, Q)$, interprete la igualdad $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ e indique como se expresaría en $\Re^3$.

09) Sea $\overline{F}$ constante en todo punto del segmento $\overline{AB}$, verifique que $\int_{\overline{AB}} \overline{F} \cdot d\bar{s} = \overline{F} \cdot (\overline{B} - \overline{A})$. Relacione este resultado con la conocida expresión del trabajo de una fuerza contante a lo largo de un camino recto.

10) Sea C un arco de curva suave y simple, demuestre que si $\overline{H} = k\,T$ con k constante positiva $\int_C \overline{H} \cdot d\bar{s} = H \cdot \text{longitud}(C)$ donde $H = \| \overline{H} \|$. (*)

11) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y) = (y, -x)$ a lo largo de la frontera de la región definida por $x^2 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1$, en sentido positivo. Observe que en este ejemplo la circulación no resulta nula, aún con camino cerrado.

12) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x - y,\ x,\ yz)$ a lo largo de la curva intersección de $z = x - y^2$ con $y = x^2$ desde $(1,1,0)$ hasta $(-1,1,-2)$.

13) Calcule el trabajo de $\bar{f}(x,y,z) = 3x\,\breve{\imath} - xz\,\breve{\jmath} + yz\,\breve{k}$ a lo largo de la curva de ecuación $\overline{X} = (t-1, t^2, 2t)$ con $t \in [1,3]$. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?, ¿puede asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?.

14) Verifique si los siguientes campos admiten función potencial; de existir, determínela.

a) $\bar{f}(x,y) = (y - 2xy + 1, x + 1 - x^2)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (x - y^2, y - x^2)$.

c) $\bar{f}(x,y,z) = (z\cos(xz), z, y + x\cos(xz))$.

d) $\bar{f}(x,y,z) = (2x + y + 1, x + z, y + 2z)$.

15) Siendo $\bar{f} = \nabla\phi$ un campo de fuerzas y C un arco de curva recorrido desde $\overline{A}$ hasta $\overline{B}$ el trabajo realizado por el campo es $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = \phi(\overline{B}) - \phi(\overline{A})$. Para calcular $-\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ que es el trabajo en contra del campo, se acostumbra denominar función potencial a $U = -\phi$; demuestre que en este caso resultan: $\bar{f} = -\nabla U$ y $-\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = U(\overline{B}) - U(\overline{A})$.

(*) T versor tangente principal, $\overline{H}$ de módulo constante y orientado según T en cada punto.

16) Sea $\bar{f}:\Re^2-\{\bar{0}\}\to\Re^2 \;/\; \bar{f}(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$, demuestre que $\bar{f}$ tiene matriz jacobiana continua y simétrica en su dominio. Por otra parte, verifique que su circulación a lo largo de una circunferencia con centro en el origen no resulta nula.
En este caso, ¿puede asegurar que $\bar{f}$ admite función potencial en su dominio?.

17) Sean $\bar{f}$ un campo de gradientes con matriz jacobiana $D\bar{f}(x,y)=\begin{pmatrix}2y-6x & 2x\\ 2x & 0\end{pmatrix}$ y C una curva abierta cualquiera con puntos extremos $\overline{A}$ perteneciente al eje y y $\overline{B}$ perteneciente a la curva de ecuación $y=x-x^{-1}$. Demuestre que $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0$, sabiendo que la gráfica de su función potencial pasa por (1,1,3) con plano tangente de ecuación $z=y+2$.

18) Sea $\bar{f}\in C^1 / \bar{f}(x,y)=(x\,y^2\,,\,y\,g(x))$, determine g de manera que $\bar{f}$ admita función potencial; suponga que $\bar{f}(2,1)=(2,6)$.

19) Siendo $\bar{f}(x,y,z)=(2\,x\,y+z^2,\,x^2,\,2\,x\,z)$, **verifique** que admite función potencial en $\Re^3$ y **calcule** $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}$ a lo largo de la curva C de ecuación $\overline{X}=(2t+e^{t^3-t}\,,\,t^2-t\,,\,3t)$ con $0\le t\le 1$ orientada en el sentido que impone la parametrización que se indica.

20) Sea $\overline{X}=\bar{g}(t)$ la “posición” y $\overline{X}'=\bar{g}'(t)$ la “velocidad” (t es el tiempo). Demuestre que toda fuerza proporcional a la velocidad es disipativa (no conservativa).

21) Dada $\bar{f}(x,y)=(a\,x,\,y-a\,x)$ y la curva C de ecuación $\overline{X}=(\cos(t),b\,\mathrm{sen}(t))\wedge t\in[0,2\pi]$, determine a y b de manera que $a+b=6$ y la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de C sea mínima.

Demuestre las siguientes propiedades; cuando corresponda suponga *C* suave.

a) C arco simple $\Rightarrow \int_C T\cdot d\bar{s}=\text{longitud}(C)$.

b) $\bar{f}=\nabla\phi\in C^1 \Rightarrow D\bar{f}$ simétrica.

c) $\bar{f}=\nabla\phi\in C^1 \wedge \int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0 \Rightarrow$ puntos extremos de C con igual potencial.

d) $\oint_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0\ \forall C \Rightarrow \int_{C_1}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{C_2}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ donde C_1 y C_2 son curvas abiertas recorridas desde $\overline{A}$ hasta $\overline{B}$.

e) $f\in C^1\Rightarrow \int_{AB} f'(\overline{X},\breve{r})ds=f(\overline{B})-f(\overline{A})$ con $\breve{r}$ orientado de $\overline{A}$ a $\overline{B}$.