1 . Ecuaciones diferenciales – 1° parte

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- S.G. simboliza *solución general*, S.P. *solución particular*, S.S. *solución singular*.
- Las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de **orden *n*** son relaciones entre las variables que satisfacen a la ecuación diferencial; en especial, la S.G. debe contener ***n*** constantes arbitrarias esenciales.

01) Determine el orden y, si existe, el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias. Reconozca aquellas que son del tipo lineal.

a) $(y'')^2 - y''' = y - (y')^2$ c) $(1+x)(y'')^4 + 3\,y'''' + 5\,x^2 y = 0$ e) $3\,x\,dy - y\,dx = 0$

b) $y''' + x\,(y')^4 = 0$ d) $y'' - 3\,\mathrm{sen}(y') + y = x^3$ f) $x\,y'' - 4\,y' + x - 1 = 0$

02) Verifique que:

a) $y = e^{-x} + x - 1$ es una solución de $y' + y = x$ que cumple con $y(0) = 0$.

b) $y = (2 - \ln(x))\sqrt{x}$ satisface la ecuación diferencial $4x^2 y'' + y = 0 \ \forall x / x > 0$ y tiene recta tangente de ecuación $y = 2$ en el punto $(1, 2)$.

c) $y^2 = C_1 x + C_2$ es S.G. de $y y'^2 + y^2 y'' = 0$. Halle la S.P. que en $(1, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 2x - 1$.

d) $y = x$ es una solución de $y y'^2 + y^2 y'' = x$.

e) $y = C\,x + C^2$ es S.G., $y = -x^2/4$ es S.S. de $y' = x\,y' + (y')^2$. Halle las soluciones que pasan por $(2, -1)$.

f) $x^2 + 4y^2 = C$ es S.G. de $4\,y\,y' = -x$. Halle la S.P. que pasa por $(-2, 1)$.

03) Halle la ecuación diferencial correspondiente a las siguientes familias de curvas:

a) $y^2 = 4\,a\,x$ c) $y = \mathrm{sen}(a\,x + b)$ e) $y = C_1\,x + C_2\,x^{-1} + C_3$

b) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $y = a\,e^x + b\,x\,e^x$ f) $y = b\,a^x$

04) Halle la ecuación diferencial de la familia de ...

a) ... rectas que pasan por $(1, -1)$.

b) ... hipérbolas con focos en el eje *x*, centro en el origen y semiejes a variable y $b = 1$.

c) ... circunferencias que pasan por el origen y tienen su centro en el eje x.

05) Dadas las funciones f, g derivables, se sabe que en general $(f\,g)' \neq f'\,g'$. Para el caso en que $f(x) = e^{x^3 + 2x}$, halle las funciones g para las que se cumple que $(f\,g)' = f'\,g'$.

06) Compruebe que todas las curvas de la familia $y = 1/(C - x)$ con $C \in \Re$, $x \neq C$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$. ¿Existe otra solución?, dibújelas y concluya.

07) Halle, según corresponda, la S.G. o la S.P. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' = (x^2 + 1)/(2 - y)$ con $y(-3) = 4$ d) $x^2 dy = (x^2 + 1)dx/(3y^2 + 1)$ con $y(1) = 2$

b) $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2\,x^2 y$ e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ con $y(4) = 2$

c) $y' = 2\,x\sqrt{y - 1}$ f) $y' = xy + x - 2\,y - 2$ con $y(0) = 2$

08) Halle la familia de curvas tales que en cada punto (x, y) tienen pendiente x / y.

09) Sea $\Im$ la familia de curvas tales que en cada punto tienen pendiente igual al producto de las coordenadas del punto, halle la curva de $\Im$ que pasa por $(0, -2)$.

10) Halle la familia de curvas tales que su recta tangente en cada punto ...
   a) ... pasa por (0,0)
   b) ... es horizontal.
   c) ... tiene ordenada al origen igual a la suma de las coordenadas del punto.
   d) ... tiene abscisa al origen igual al triple de la abscisa del punto.
   e) ... es normal a la recta que pasa por dicho punto y el origen de coordenadas.

11) Sea $\Im$ la familia de curvas tales que su recta normal en cada punto es tangente a la parábola de ecuación $y = k\,x^2$ que pasa por dicho punto. Halle la curva $C \in \Im$ que pasa por (0,1).

12) Halle las curvas que en cada punto tienen recta normal con ordenada al origen igual a 5.

13) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de 1° orden.
   a) $x\,y' - y - x^3 = 0$
   b) $y' + y\,\cos(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$
   c) $(x^2 + 4)\,y' - 3\,xy = x$, halle la S.P. tal que $y(0) = 1$
   d) $\dfrac{dy}{dx} - 2\,\dfrac{y}{x} = x^2\operatorname{sen}(3x)$

14) La ecuación diferencial $y' + 2\,x\,y = 6\,x$ puede resolverse como lineal de 1º orden o bien como de variables separables, verifique que por ambos métodos de resolución se obtiene la misma solución general (o formas equivalentes).

15) Halle la curva integral de $y' + y/(x+1) = \operatorname{sen}(x)$ que pasa por el punto $(\pi/2, 1)$.

16) Resuelva el problema de valor inicial $y' + y = 2\operatorname{sen}(x)$ tal que $y(0) = 1$.

17) Determine la posición x en función del tiempo t de un punto que se desplaza sobre una recta si ...
   a) ... su velocidad $v \doteq x'$ es constante (movimiento rectilíneo uniforme), siendo $x(0) = x_o$.
   b) ... su aceleración $a \doteq v' = x''$ es constante (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado), siendo $x(0) = x_o$ y $x'(0) = v_o$.

18) Sea un cuerpo cuya temperatura T es mayor que la temperatura T_A del ambiente que lo rodea, si T_A se mantiene constante la temperatura del cuerpo disminuye con una velocidad (dT/dt) que es proporcional a la diferencia $T - T_A$. Es decir, $dT/dt = -k(T - T_A)$ donde k es una constante positiva y t es el tiempo.(#)

   Suponga que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura del cuerpo es $T_0 > T_A$, …
   a) … halle la expresión de la temperatura del cuerpo para $t \geq 0$.
   b) … demuestre que a medida que transcurre el tiempo ($t \to \infty$) la temperatura del cuerpo tiende a la del ambiente.
   c) … calcule el valor de k sabiendo que en 30 minutos y con una temperatura ambiente de 0 ºC la temperatura del cuerpo disminuyó a la mitad de su valor inicial.

(#) Ley de enfriamiento de Newton.

19) Verifique que las siguientes familias de curvas son ortogonales.

a) $\begin{cases} x^2+4y^2=C_1 \\ y=C_2\,x^4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-y^2+\ln(\cos(2\,xy))=C_1 \\ x^2-y^2+\ln(\mathrm{sen}(2\,xy))=C_2 \end{cases}$

20) Halle la familia de curvas ortogonal a la dada.

a) $y=2x+C$ c) $y(C\,x+1)=x$ e) $y=C\ \mathrm{sen}(2x)$

b) $y=C\,e^x$ d) $y=\ln(x+C)$ f) $(x+y)^2=k\,x^2,\ k>0$

21) Determine a de manera que las familias $y^3=A\,x$ y $x^2+a\,y^2=B^2$ sean ortogonales.

22) Sea la familia de curvas de ecuación $y=C\,x+C$, calcule la longitud de la curva de la familia ortogonal que pasa por (1,2).

23) Dada $xy''-2y'=0$ halle la S.P./ $y(1)=y'(1)=3$ aplicando la transformación $w=y'$.(#)

24) Halle la S.G. de $y''-2\,y'=x$.

25) Halle la S.G. de $y'''-y''=x$.

26) Si y_p es S.P. que pasa por (2,3) de $x^2y''-2y=f(x)$, verifique que $y=x\,y_p$ es S.P. de la ecuación diferencial $xy''-2y'=f(x)$ que pasa por $(2,y_0)$. Halle y_0.

27) Sea $y=f(x)$ la S.P. de $x(x+y')=y$ que pasa por $(a,0)$ con $a>0$, demuestre que f produce un máximo absoluto en el intervalo $[0,a]$; ¿cuál es el valor de dicho máximo?.

28) Dada la ecuación diferencial $(x^2-1)\,y'+x\,y(1-y)=0$, …

a) … halle su solución general.

b) … verifique que existe sólo una solución que pasa por el punto $(3,2)$.

c) … verifique que por los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$ pasan infinitas soluciones.

29) Se sabe que $y=x^3-x$ es una solución de la ecuación diferencial $y'+\beta(x)\,y=2\,x^2$, halle la solución de dicha ecuación que verifica $y(1)=4$.

30) *Optativo*: Halle las soluciones de $x^2(y')^2-y^2=0$ que pasan por (1,1).

31) *Optativo*: Halle la solución general que se indica en el ítem “02) c)”.

(#) Transformación de *reducción de orden*, útil cuando en la ecuación diferencial no figura la y.