INTEGRALES DOBLES : $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

AREA(D) $= \iint_D dx\,dy$ VALOR MEDIO $= \dfrac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\text{AREA}(D)}$

CAMBIO de VARIABLE (TEOREMA) : Siendo $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función continua

$\bar{g}: D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2 \,/\, \bar{g}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ función continua

$\bar{g}$ biyectiva, $\bar{g} \in C^1$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$

entonces $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$

MOM. ESTÁTICO : $S_x = \iint_D y\,dx\,dy$ BARICENTRO: $\bar{g}(x_g, y_g)$ $X_g = \dfrac{S_y}{\text{AREA}(D)}$

MOM. INERCIA : $I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy$

MOM. I. POLAR : $I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ MASA (D) (de una PLACA PLANA) $= \iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy$

MOM. I. CENTRIF. : $I_{xy} = \iint_D xy\,dx\,dy$

INTEGRALES TRIPLES : $\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

VOL(E) $= \iiint_E dx\,dy\,dz$ VALOR MEDIO $= \dfrac{\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\text{VOL}(E)}$

MOM. ESTÁTICO: $S_x = \iiint_E x\,\delta\,dx\,dy\,dz$

MOM. INERCIA : $I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\cdot\delta\,dx\,dy\,dz$

BARICENTRO : $X_g = \dfrac{S_x}{\text{MASA}(E)}$ MASA(E) (de un CUERPO) $= \iiint_E \delta\,dx\,dy\,dz$

ECUACIONES DIFERENCIALES (PARTE II)

Ec Dif. LINEALES de 2do ORDEN : $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$

SG: $y(x) = \underbrace{y_P}_{\text{PART.}} + \underbrace{y_c}_{\text{HOMO.}}$

y_P depende de $f(x)$:

- Si $f(x) =$ pol. grado $n \to y_P =$ pol. grado n
- Si $f(x) =$ fun. exp. $e^{ax} \to y_P = e^{ax}$
- Si $f(x) = \cos(\beta x)$ ó $\operatorname{sen}(\beta x) \to y_P = \cos(\beta x)$ ó $\operatorname{sen}(\beta x)$

Ec. Dif. Lin. de 2do ORDEN HOMOGENEA : $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA : $a_2 \cdot \underbrace{m^2}_{y''} + a_1 \cdot \underbrace{m}_{y'} + a_0 = 0 \to \boxed{m}$

Si m:

- raices reales iguales $\to y_c = e^{mx}(c_1 + c_2)$
- raices reales distintas $\to y_c = c_1 \cdot e^{m_1 x} + c_2 \cdot e^{m_2 x}$
- raices complejas conj. $\to y_c = e^{\alpha x}[c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(\beta x)]$

$m = \alpha + \beta i$

INTEGRALES SOBRE CURVAS

LONGITUD(c) = $\int_c d\lambda = \int_a^b \|\bar{\lambda}'(t)\|\,dt$, $\xRightarrow{TFI}$ $L(c) = \int_a^b \frac{\|\overline{\nabla} g\|}{|g'_y|}\,dx$

INTEGRAL de un CAMPO ESCALAR s/ CURVA:

$$\int_{c\lambda} f = \int_c f\,d\lambda = \int_a^b \bar{f}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \|\bar{\lambda}'(t)\|\,dt \xRightarrow{TFI} \int_c f = \int_a^b f(x, y(x))\, \frac{\|\overline{\nabla} g\|}{|g'_y|}\,dx$$

VALOR MEDIO = $\dfrac{\int_c f}{\text{LONG}(c)}$

INTEGRAL de un CAMPO VECTORIAL s/ CURVA (TRABAJO):

$$\int_{c\lambda} f_T = \int_c \bar{f} \cdot d\bar{\lambda} = \int_a^b \bar{f}(\bar{\lambda}(t)) \cdot \lambda'(t)\,dt \quad \text{(CIRCULACIÓN)}$$

ROTOR (en $\mathbb{R}^2$): $\underbrace{\text{rot}\, \bar{f}(x,y)}_{=0 \longrightarrow \bar{f} \text{ IRROTACIONAL}} = f'_{2x} - f'_{1y}$

TEOREMA del ROTOR (T. de GREEN): **Siendo** $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo vectorial $\in C^1$
$D \subset A$ una región regular
entonces $\underbrace{\oint_{\partial D^+} \bar{f}\, d\bar{\lambda}}_{\text{CIRCULACIÓN / TRABAJO de la CURVA}} = \iint_D \text{rotor}\, \bar{f}\; dx\,dy$

CAMPOS CONSERVATIVOS $\bar{f} = \overline{\nabla} g$

CONDICION NECESARIA (TEOREMA): **Siendo** $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x,y) = (f_1, f_2)$ campo conserv. $\in C^1$
entonces $f'_{2x} = f'_{1y}$ (OBS: ROTOR = 0)

CONDICION SUFICIENTE (TEOREMA): **Siendo** la condición necesaria verdadera
A simplemente conexo (sin agujeros)
entonces el campo $\bar{f}$ ES CONSERVATIVO y admite FUNCIÓN POTENCIAL

FUNCION POTENCIAL: $\phi(x,y) = \int_0^1 \bar{f}(t_x, t_y)\,(x,y)\,dt + k$ (IDEM $\phi(x,y,z)$)

OBS: $\overline{\nabla}\phi(x,y) = \bar{f}(x,y)$

LINEAS de CAMPO: $y' = \dfrac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$

LINEAS EQUIPOTENCIALES: $y' = -\dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$

INTEGRALES SOBRE SUPERFICIES

$$\text{ÁREA}(S) = \iint_S d\sigma = \iint \|(\overline{\sigma}'_u \times \overline{\sigma}'_v)\| \, du\, dv \xRightarrow{\text{TFI}} \text{ÁREA}(S) = \iint_D \frac{\|\nabla g\|}{|g'_z|} dx\, dy$$

INTEGRAL de un CAMPO ESCALAR s/ SUPERFICIE:

$$\iint_{S\lambda} f = \iint_S f\, d\sigma = \iint_D f(\overline{\sigma}(u,v)) \cdot \|(\overline{\sigma}'_u \times \overline{\sigma}'_v)\| \, du\, dv$$

$$\xRightarrow{\text{TFI}} \iint_{S\lambda} f = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\|\nabla g\|}{|g'_z|} dx\, dy$$

$$\text{VALOR MEDIO} = \frac{\iint_{S\lambda} f}{\text{ÁREA}(S)}$$

INTEGRAL de un CAMPO VECTORIAL s/ SUPERFICIE (FLUJO):

$$\iint_{S\overline{\sigma}} f\, n = \iint_S \overline{f} \cdot d\overline{\sigma} = \iint_D \overline{f}(\overline{\sigma}(u,v)) \underbrace{(\overline{\sigma}'_u \times \overline{\sigma}'_v)}_{\overline{n}} du\, dv$$

$$\xRightarrow{\text{TFI}} \iint_S \overline{f}\, d\overline{\sigma} = \iint_D \overline{f}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\overline{\nabla g}}{|g'_z|} dx\, dy$$

DIVERGENCIA: $\underbrace{\text{div}\, \overline{f}(x,y,z)}_{=0 \to \overline{f} \text{ SINOIDEAL ó INCOMPRENSIBLE}} = \nabla \cdot \overline{f} = f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z}$

TEOREMA de la DIVERGENCIA: (T. de GAUSS) Siendo $\overline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial $\in C^1$

$E \subset A$ región simple en el espacio

entonces $\underbrace{\oiint_{\partial E^+} \overline{f}\, d\overline{\sigma}}_{\text{FLUJO}} = \iiint_E \text{div} \overline{f}\, dx\,dy\,dz$

ROTOR (en $\mathbb{R}^3$): $\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (f_{3y} - f_{2z},\, f_{1z} - f_{3x},\, f_{2x} - f_{1y})$

TEOREMA del ROTOR (T. de STOKES): Siendo $\overline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo $\in C^1$

S superficie simple y orientable

Parametrizada por $\overline{\sigma}$ / ∂S: curva reg. simple

entonces $\underbrace{\oint_{\partial S_n} \overline{f} \cdot d\overline{\lambda}}_{\text{CIRCULACIÓN / TRABAJO de la SUPERFICIE}} = \iint_S \text{rot}\, \overline{f} \cdot d\overline{\sigma}$