HOJA Nº

FECHA

P1) $S_1: y = x^2$ $\quad S_2: e^{xz-1} - xy + \ln(yz) = 0$ $\quad A = (1,1,1)$

$S_1 \cap S_2$ $\quad G(x,y,z) = y - x^2 = 0$ $\quad F(x,y,z) = e^{xz-1} - xy + \ln(yz) = 0$

$G'x = -2x$

$G'y = 1$

$G'z = 0$

$F'x = z e^{xz-1} - y = 0$

$F'y = -x + \frac{1}{y} = 0$

$F'z = x e^{xz-1} + y \frac{1}{z} = 2$

$\bar{T} \rightarrow$ vector tangente a la curva

$\bar{T} = \vec{\nabla} G \times \vec{\nabla} F = (-2,1,0) \times (0,0,2) = (2;4;0)$

$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(2;4,0)$

$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

Si se interseca al plano $x + y = 8$,

$1 + 2\lambda + 1 + 4\lambda = 8$

$6\lambda = 6$

$\lambda = 1$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

$d\,(1,1,1)$ a $(3,5,1) = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2 + (1-1)^2} = \underline{2\sqrt{5}}$

$P_2)$ $\quad 1{,}01^{1{,}98} \rightarrow f(x,y) = x^y \qquad A = (1,2) \qquad \bar{H} = (\overbrace{0{,}01}^{h_1}, \overbrace{-0{,}02}^{h_2})$

$$f(1{,}01;1{,}98) \cong f(1,2) + f'_x(1,2)\cdot h_1 + f'_y(1,2)\cdot h_2 + \frac{f''_{xx}}{2}(1,2)\cdot h_1^2 + f''_{xy}(1,2)\, h_1 \cdot h_2 + \frac{f''_{yy}}{2}(1,2)\cdot h_2^2$$

Teorema que enuncia que $f''_{xy} = f''_{yx}$

$f'_x(\bar{A}) = y\,x^{y-1} = 1^1 \cdot 2 = 2$

$f'_y(\bar{A}) = x^y \cdot \ln(x) = 0$

$f''_{xx}(\bar{A}) = y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2} = 2\cdot 1\cdot 1^0 = 2$

$f''_{yy}(\bar{A}) = \ln(x)\cdot \ln(x)\cdot x^y = 0$

$f''_{yx}(\bar{A}) = y\,x^{y-1}\cdot \ln(x) + \dfrac{x^y}{x} = 1 \qquad f(1,2) = 1$

Reemplazo en la ecuación de arriba

$$f(1{,}01;1{,}98) \cong 1 + 2\cdot 0{,}01 + 0\cdot(-0{,}02) + \frac{2}{2}\cdot 0{,}01^2 + 1\cdot 0{,}01\cdot(-0{,}02) + \frac{0}{2}\cdot(-0{,}02)^2$$

$$\left[f(1{,}01;1{,}98) \cong 1{,}0199\right]$$

$P_3)$ $\quad w = f(u,v) \qquad 3v + ue^{2w} - w = 1 \qquad f(7,-2) = 0 \qquad u = x - 2y$, $v = x + y$

$g(x,y) = (\overbrace{x-2y}^{u}, \overbrace{x+y}^{v}) \qquad g(1,-3) = (7;-2) \rightarrow w = 0$

$w = (x,y) \quad (1,-3)$

$F(u,v,w) = 3v + ue^{2w} - w - 1 = 0$

$F'_u = e^{2w}$

$F'_v = 3$

$F'_w = 2u\,e^{2w} - 1$

en $(7,-2,0)$: $F'_u = 1$, $F'_v = 3$, $F'_w = 13$

$f'_u = -\dfrac{1}{13} \qquad f'_v = -\dfrac{3}{13}$

$\bar{\nabla} f = \left(-\dfrac{1}{13}; -\dfrac{3}{13}\right)$

Planteo función compuesta $h = f \circ g = f[g(x,y)]$

$Dg = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{\nabla} h = \bar{\nabla} f \cdot Dg = \left(-\dfrac{4}{13}; -\dfrac{1}{13}\right)$

$h(0{,}97;-3{,}01) \cong \underbrace{h(1,-3)}_{w=0} + h'_x(1,-3)\cdot(-0{,}03) + h'_y(-0{,}01) \cong \underline{0{,}01}$

HOJA Nº

FECHA

P4) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ → Es polinómica, es diferenciable por lo tanto $f''_{xy} = f''_{yx}$

(I) $f'_x = 4x^3 - 4y$

(II) $f'_y = 4y^3 - 4x$

para que sean extremos, $f'_x = 0$ y $f'_y = 0$ (condición necesaria pero no suficiente)

(I) $4x^3 - 4y = 0$
$\cancel{4}x^3 = \cancel{4}y$

(II) $\cancel{4}y^3 - \cancel{4}x = 0$ ← Reemplazo por (I)

$x^9 - x = 0$ →

$y_1 = 1 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 0$

$f''_{xx} = 12x^2 \qquad f''_{xx_1} = 12 \quad f''_{xx_2} = 12 \quad f''_{xx_3} = 0$

$f''_{yy} = 12y^2 \qquad f''_{yy_1} = 12 \quad f''_{yy_2} = 12 \quad f''_{yy_3} = 0$

$f''_{xy} = f''_{yx} = -4$

$H_1(1,1) = \begin{vmatrix} f''_{xx_1} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy_1} \end{vmatrix} = 128 > 0$, existe el extremo y como $(f''_{xx_1} = 12) > 0$, es mínimo en $f(1,1) = -1$

$H_2(-1,-1) = \begin{vmatrix} f''_{xx_2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy_2} \end{vmatrix} = 128 > 0$, existe el extremo y como $f''_{xx_2} > 0$ es mínimo en $f(-1,-1) = -1$

$H_3(0,0) = \begin{vmatrix} f''_{xx_3} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy_3} \end{vmatrix} = -16 < 0$, no produce extremos, punto silla en $f(0,0) = 1$

7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$

Analizo continuidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\to \text{acotada}} \overbrace{\operatorname{sen} y}^{\to 0} = 0 \quad \text{es continua}$$

$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$

$0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \leftarrow$ acotado

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((\overline{x_0}), h\breve{v}) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2} v_x^2 \operatorname{sen}(h v_y)}{\cancel{h^2}\underbrace{(v_x^2 + v_y^2)}_{1}} \cdot \frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} v_x^2 \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(h v_y)}{h} \cdot \frac{v_y}{v_y}}_{\to 1} = v_x^2 \cdot v_y$$

justificación: $\quad u = h v_y$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$$

Derivadas nulas: $\quad 0 = v_x^2 v_y \qquad v_x^2 + v_y^2 = 1$

si $v_x = 0 \quad$ o $\quad v_y = 0$, $\quad v_x^2 \cdot v_y = 0$

Por lo tanto tiene 4 derivadas nulas: $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

Al tener más de dos derivadas nulas, la función no es diferenciable.

Demostración de derivadas en la siguiente hoja:

T1) $z = f(x, y)$

Para que sea diferenciable se debe verificar que:

$f(\bar{x}_0 + \bar{H}) = f(\bar{x}_0) + \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \bar{H} + \varphi(\bar{H}) \cdot \|\bar{H}\| \longrightarrow$ donde $\lim\limits_{H \to 0} \varphi(\bar{H}) = 0$

Derivada direccional por definición:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \bar{H}) - f(\bar{x}_0)}{h}$ reemplazando: $\bar{H} = h\check{v}$, $\bar{H} = h(v_1 ; v_2)$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{f(\bar{x}_0)} + \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \bar{H} + \varphi(\bar{H}) \cdot \|\bar{H}\| - \cancel{f(\bar{x}_0)}}{h}$ $\quad \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \cancel{h}\check{v}}{\cancel{h}} + \underbrace{\overbrace{\varphi(\bar{H})}^{\to 0} \cdot \overbrace{\|\check{v}\|}^{1} \cdot \frac{|h|}{h}}_{\to \text{acotada}} = \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \check{v}$

↳ existen todas

T2) Un punto ~~regular~~ de una curva, es punto regular si existe recta tangente a la curva en ese punto. Para ello debe existir una parametrización dada por $\bar{f}(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n = 2 \text{ o } n = 3)$. Además se debe cumplir que $\bar{f}'(t) \neq 0$ en el punto. Si no se cumplen estas condiciones es un punto singular

$y' - 2y = x$ utilizo método de $u \cdot v = y$, $y' = u'v + uv'$ $\quad \bar{A} = (0; -\frac{1}{4})$

$u'v + uv' - 2uv = x$

$u'v + u(v' - 2v) = x \longrightarrow$ impongo que $v' - 2v = 0 \longrightarrow v' = 2v$

$\int \frac{dv}{v} = \int 2dx$

$u' \cdot e^{2x} = x$

$\ln v = 2x$

$u' = x \cdot e^{-2x}$

$v = e^{2x}$

$\int du = \int x \cdot e^{-2x} dx \longrightarrow \int x e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{(-2)^2} \cdot (-2x+1) + C$ $\longrightarrow$ por tabla

$u = \frac{e^{-2x}}{4} \cdot (-2x+1) + C$

$u \cdot v = y = \left(e^{-2x} \cdot \frac{(-2x+1)}{4} + C\right) \cdot e^{2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C \cdot e^{2x}$

$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} + C \cdot e^{2 \cdot 0} = \frac{1}{4} + C \qquad C = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^{2x}$