Nombre y apellido:.. Curso Z2041

Se aprueba con 2 ítems prácticos (E_i) bien resueltos. Promoción directa: 4 ítems, uno teórico (T_i).

E_1) Considere el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y^2-x} & \text{si } x \neq y^2 \\ 1 & \text{si } x = y^2 \end{cases}$$

a) Halle y grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) Analice la existencia de plano tangente a la gráfica de f en $(0,0,1)$.

E_2) Considere las superficies S_1, imagen de $\overrightarrow{F}(u,v) = (uv, u-v, u+v^2)$ para $u^2+v^2 \leq 4$, y S_2, conjunto de nivel 1 de $G(x,y,z) = ye^x + z^2$.

Halle la recta determinada por la intersección entre los planos tangentes a S_1 en el punto $P = (1,0,0)$ y a S_2 en el punto $Q = (0,-3,2)$. Justifique todos sus cálculos.

E_3) Se sabe que la ecuación $yzcos(x) + e^{xyz} = 2$ define implícitamente $z = f(x,y)$ en un entorno de $(0,1,1)$. Encuentre las direcciones de derivada nula de $g(x,y) = xy + f(x,y)$ en $(0,1)$ justificando todos sus cálculos.

E_4) Considere la familia de curvas $\mathcal{F} : y + ke^x = 0$.

a) Halle la familia $\mathcal{F}^\perp$ y grafique en forma aproximada tres miembros de cada familia.

b) Halle la curva de cada familia que pasa por $(1,0)$.

T_1) a) ¿Cuándo se dice que un campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ es derivable en un punto $(x_0, y_0) \in D^\circ$, en cierta dirección $\breve{v}$?

b) Analice si

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y^2-x} & \text{si } x \neq y^2 \\ 1 & \text{si } x = y^2 \end{cases}$$

es derivable en $(0,0)$ en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

T_2) a) Indique condiciones necesarias para que un campo $f(x,y)$ diferenciable en un punto (a,b) tenga allí un extremo.

b) ¿V o F? Justifique convenientemente. "El campo escalar $f(x,y)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en $(-1,1)$ es $p(x,y) = 1 + xy$ tiene en $(-1,1)$ un punto silla."

Primer Parcial Resuelto

#711

E1)

--- Enunciado ---

Considere el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y^2-x} & \text{si } x \neq y^2 \\ 1 & \text{si } x = y^2 \end{cases}$$

- a) Halle y grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.
- b) Analice la existencia de plano tangente a la gráfica de f en $(0,0,1)$.

--- Solución ---

El conjunto de nivel 0 satisface para $x \neq y^2$

$$\frac{y-x}{y^2-x} = 0$$

Por lo tanto

$$C_0(f) = \{(x,y) \in R^2 : y = x\} - \{(0,0),(1,1)\}$$

El conjunto de nivel 1 satisface para $x \neq y^2$

$$\frac{y-x}{y^2-x} = 1$$

$$y - x = y^2 - x$$

$$y = y^2$$

$$y^2 - y = 0$$

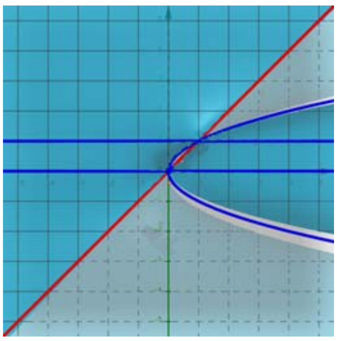
$$y(y-1) = 0$$

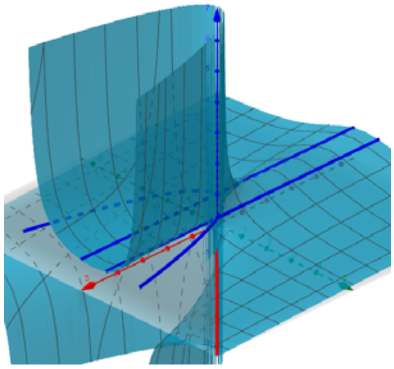
y también incluye los puntos de la forma $x = y^2$.

Por lo tanto

$$C_1(f) = \{(x,y) \in R^2 : (x = y^2) \vee (y = 0) \vee (y = 1)\}$$

En el siguiente gráfico se ve el $C_0(f)$ en rojo, y $C_1(f)$ en azul.





Como el $(0,0)$ es punto de acumulación de $C_0(f)$ y de $C_1(f)$, no existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pues al analizar el límite por dichos conjuntos el límite da 0 y 1 respectivamente.

Por lo tanto f no es continua en $(0,0)$, y por lo tanto tampoco es diferenciable en $(0,0)$. Luego la gráfica de f en $(0,0,1)$ no admite plano tangente.

#712

E2)

--- Enunciado ---

Considere las superficies S_1, imagen de $\vec{F}(u,v) = (uv, u-v, u+v^2)$ para $u^2+v^2 \leq 4$, y S_2, conjunto de nivel 1 de $G(x,y,z) = ye^x + z^2$.

Halle la recta determinada por la intersección entre los planos tangentes a S_1 en el punto $P = (1,0,0)$ y a S_2 en el punto $Q = (0,-3,2)$. Justifique todos sus cálculos.

--- Solución ---

$\vec{F}(u,v) = (uv, u-v, u+v^2)$

Averiguo (u_0, v_0) tal que

$\vec{F}(u_0, v_0) = (1,0,0)$

$u_0 v_0 = 1$ (1)

$u_0 - v_0 = 0$ (2)

$u_0 + v_0^2 = 0$ (3)

De (2) $u_0 = v_0$, en (1) $u_0^2 = 1$, junto con (3) vemos que $u_0 = v_0 = -1$.

$\vec{F}_u(u,v) = (v,1,1)$

$\vec{F}_v(u,v) = (u,-1,2v)$

$\vec{F}_u(-1,-1) = (-1,1,1)$

$\vec{F}_v(-1,-1) = (-1,-1,-2)$

$$(\vec{F}_u \times \vec{F}_v)(-1,-1) = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2+1, -1-2, 1+1) = (-1,-3,2)$$

El plano π_1 tangente a S_1 en P es de ecuación

$(x-1, y, z) \cdot (-1, -3, 2) = 0$

$-(x-1) - 3y + 2z = 0$

$-x - 3y + 2z = -1$

$\boxed{x + 3y - 2z = 1}$ (*)

Por otro lado

$G(x, y, z) = ye^x + z^2$

$\nabla G(x, y, z) = (ye^x, e^x, 2z)$

$\nabla G(0, -3, 2) = (-3, 1, 4)$

El plano π_2 tangente a S_2 en Q es de ecuación

$(x, y+3, z-2) \cdot (-3, 1, 4) = 0$

$-3x + y + 3 + 4(z-2) = 0$

$-3x + y + 3 + 4z - 8 = 0$

$\boxed{-3x + y + 4z - 5 = 0}$ (**)

De (*)

$x = 1 - 3y + 2z$

en (**)

$-3(1 - 3y + 2z) + y + 4z - 5 = 0$

$-3 + 9y - 6z + y + 4z - 5 = 0$

$10y - 2z - 8 = 0$

$5y - z = 4$

$z = 5y - 4$

Luego

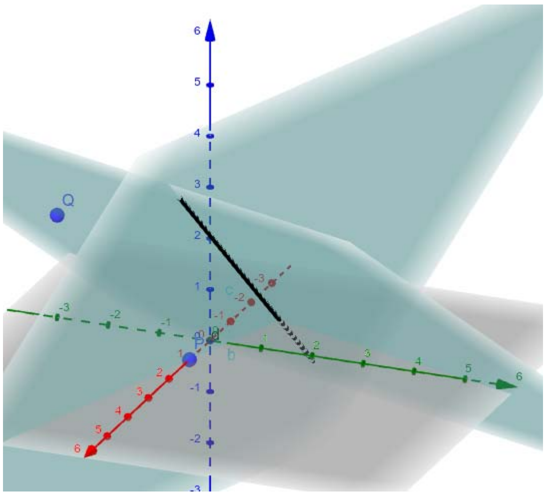
$x = 1 - 3y + 2(5y - 4)$

$x = 1 - 3y + 10y - 8$

$x = 7y - 7$

Finalmente, la recta buscada es de ecuación

$(x, y, z) = (7y - 7, y, 5y - 4) = (-7, 0, -4) + y(7, 1, 5)$



E3)

--- Enunciado ---

Se sabe que la ecuación $yz\cos(x) + e^{xyz} = 2$ define implícitamente $z = f(x, y)$ en un entorno de $(0, 1, 1)$. Encuentre las direcciones de derivada nula de $g(x, y) = xy + f(x, y)$ en $(0, 1)$ justificando todos sus cálculos.

--- Solución ---

$F(x, y, z) = yz\cos(x) + e^{xyz} - 2$

Vemos que $F(0, 1, 1) = 0$

$F_x' = -yz\sin(x) + yze^{xyz}$

$F_y' = z\cos(x) + xze^{xyz}$

$F_z' = y\cos(x) + xye^{xyz}$

Vemos que $F \in C^1$.

$F_x'(0, 1, 1) = 1$

$F_y'(0, 1, 1) = 1$

$F_z'(0, 1, 1) = 1$

Vemos que $F_z'(0, 1, 1) = 1 \neq 0$

Luego f es diferenciable en $(0, 1)$ y además

$f_x'(0, 1) = -1/1 = -1$

$f_y'(0, 1) = -1/1 = -1$

Sea $h(x, y) = xy$

Entonces

$g = h + f$

Como ambas son diferenciables en $(0, 1)$

$\nabla g(0, 1) = \nabla h(0, 1) + \nabla f(0, 1)$

Tenemos que $\nabla h(x, y) = (y, x)$, $\nabla h(0, 1) = (1, 0)$.

Entonces

$\nabla g(0,1) = (1,0) + (-1,-1) = (0,-1)$

Como g es diferenciable en $(0, 1)$, las direcciones de derivada nula son las ortogonales al gradiente, es decir $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

#714

E4)

--- Enunciado ---

Considere la familia de curvas $F\ : y + ke^x = 0$.

- a) Halle la familia $F^{\perp}$ y grafique en forma aproximada tres miembros de cada familia.
- b) Halle la curva de cada familia que pasa por $(1, 0)$.

--- Solución ---

Nos dan la familia

$y + ke^x = 0$

Busco la curva de la familia que contiene a $(1, 0)$

$ke^1 = 0$

$\boxed{k = 0}$

La curva es

$\boxed{y = 0}$

$y + ke^x = 0 \quad (1)$

$y' + ke^x = 0 \quad (2)$

Igualando (1) con (2)

$y' = y$

Cambio y' por $-1/y'$

$-1/y' = y$

$-1 = yy'$

$ydy = -dx$

$2ydy = -2dx$

$\int 2ydy = -2\int dx$

$\boxed{y^2 = -2x + C}$

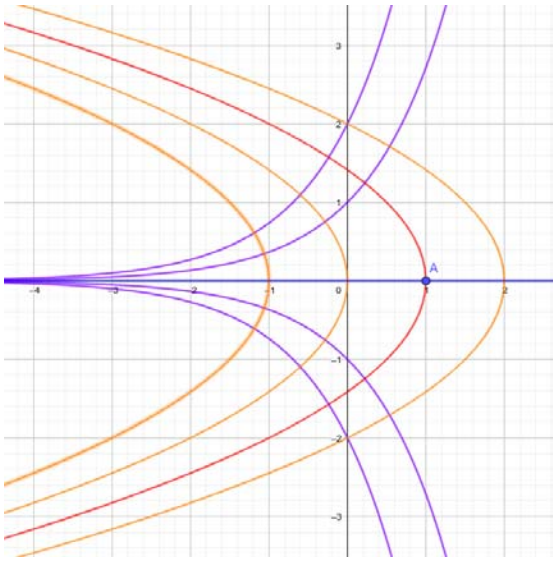
Busco la curva de la familia que contiene a $(1, 0)$

$0 = -2 + C$

$\boxed{C = 2}$

La curva es

$$\boxed{y^2 = -2x + 2}$$



#715

T1)

--- Enunciado ---

- a) ¿Cuándo se dice que un campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$ es derivable en un punto $(x_0, y_0) \in D^\circ$, en cierta dirección $\check{v}$?
- b) Analice si

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y-x}{y^2-x} & \text{si } x \neq y^2 \\ 1 & \text{si } x = y^2 \end{cases}$$

es derivable en $(0, 0)$ en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

--- Solución ---

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}}}{\frac{h^2}{2} - \frac{h}{\sqrt{2}}} - 1\right)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(0 - 1)$$

No existe pues diverge a infinito.

#716

T2)

--- Enunciado ---

- a) Indique condiciones necesarias para que un campo $f(x, y)$ diferenciable en un punto (a, b) tenga allí un extremo.
- b) ¿V o F? Justifique convenientemente. *El campo escalar* $f(x, y)$ *cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en* $(-1, 1)$ *es* $p(x, y) = 1 + xy$ *tiene en* $(-1, 1)$ *un punto silla.*

--- Solución ---

$p(x, y) = 1 + xy$

$p(-1, 1) = f(-1, 1) = 0$

$\nabla p(x, y) = (y, x)$

$\nabla p(-1, 1) = \nabla f(-1, 1) = (1, -1) \neq (0, 0)$

El punto $(-1, 1)$ no produce punto crítico, por lo tanto tampoco puede producir punto silla.