6. Funciones compuestas e implícitas

01) Dadas f y g, analice en cada caso si quedan definidas $f \circ g$ y $g \circ f$. Además, para cada función generada mediante la composición, determine su dominio natural y obtenga su matriz jacobiana en algún punto interior al mismo.

a) $\bar{f}(x,y) = (xy\,,\ x-y)\ ,\ \ \bar{g}(u,v) = (u^2, v-u)$.

b) $f(x,y) = x\sqrt{y}\ ,\ \ \bar{g}(u) = (u,\ 2-u)$.

c) $\bar{f}(x,y) = (x-y\,,\ \sqrt{x+y}\,)\ ,\ \ \bar{g}(t) = (2-t,\ t-3)$.

d) $\bar{f}(x,y) = (xy^2, y-x,\ x)\ ,\ \ \bar{g}(u,v,w) = (u-v,\ w\sqrt{1-u}\,)$.

02) Dada $h : D \subset \Re^2 \to \Re \ /\ h(x,y) = x\ln(1-xy)$ siendo D su dominio natural, defina dos funciones cuya composición genere h.

03) Si $z = 2uv - 2\sqrt{v-u}$ con $\begin{cases} u = x - y^2 \\ v = x + 2xy - 1 \end{cases}$, resulta $z = h(x,y)$.

a) Reconozca las funciones f y g que generan h como $h = f \circ g$.

b) Calcule la derivada direccional de h en (2,1), en la dirección que va hacia el (5,5).

c) Sea n_0 la recta normal a la gráfica de h en $(2,1,z_0)$, exprese n_0 como la intersección de dos superficies.

d) Analice si la recta n_0 mencionada en "c)" tiene algún punto en común con el eje z.

04) Dada $w = u^3 - xv^2$ con $u = x\sqrt{y-x} \ \wedge\ v = 2x + y^2$, resulta $w = f(x,y)$. Aplicando la regla de derivación de funciones compuestas (sin realizar la composición), calcule $f'_x(0,1)$.

05) Dadas $f(u,v) = |u-1| - v$, $g(x,y) = (1+x^2, 2y-1)$, demuestre que $h = f \circ g$ es derivable en (0,0). ¿Se puede aplicar la regla de la cadena?.

06) Sea $z = f\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ con f diferenciable, calcule $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

07) Dada $h(x,y) = f(2x/y) - f(y/x)$ con $f \in C^1$, verifique que $x\,h'_x + y\,h'_y = 0$ para todo punto (x,y) tal que $xy \neq 0$.

08) Sean $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ y $\bar{g}(x,y) = (x+y,\ a\,y)$, determine el valor de a para que $h = f \circ \bar{g}$ en $(1,1)$ tenga máximo crecimiento en la dirección del vector $\bar{v} = (5,7)$.

09) La temperatura en cada punto (x,y) de una lámina metálica plana es $T = 3x/(x^2+y^2)$.

a) Halle la línea de nivel (isoterma) que pasa por el punto $\overline{A} = (2,-1)$.

b) Halle la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en $\overline{A} = (2,-1)$.

c) Halle el coeficiente de variación de temperatura, $f'(\overline{A},\breve{r})$ con $\overline{A} = (2,-1)$, en la dirección de la bisectriz del 1º cuadrante con componente positiva según x.

d) Halle el coeficiente de variación de temperatura a lo largo de la curva C de ecuación $\overline{X} = (2\,\mathrm{sen}(t), \cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Esto es dT/dt con $T = f(\overline{X})$ y $\overline{X} \in C$.(*)

e) Halle la cota de error relativo porcentual en el cálculo de T si se midieron $x = 2$ e $y = -1$ con cotas de errores relativos de 1% y 2% respectivamente.

(*) Observe que esta derivada, para funciones diferenciables, coincide con $f'(\overline{X},\breve{r})$ para $\overline{X} \in C$ y $\breve{r}$ versor tangente a la curva orientado según lo impone la parametrización de la misma.

10) La ecuación $xy - e^{z-x} = \ln(z)$ define implícitamente $z = f(x,y)$, halle una expresión lineal que permita aproximar los valores de f en un entorno del punto (1,1).

11) La ecuación $z^3 + 2xz + yz - x = 0$ define $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,-2)$.
   a) Determine $\nabla f(1,-2)$.
   b) Halle ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la gráfica de f en $(1,-2,z_0)$.
   c) Calcule las derivadas direccionales de f en $(1,-2)$, en las direcciones que forman ángulos de $\pi/3$ y de $-\pi/3$ medidos en sentido trigonométrico respecto de x^+.

12) Halle los puntos del hiperboloide de una hoja de ecuación $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $z = x - y$.

13) Dada $f(x,y,z) = 8x^2 - 2xy$, calcule la derivada de f en (3,1,2), en la dirección a la normal "interior" a $x^2+y^2+z^2=14$ en dicho punto.

14) Dada $f : \Re^2 - \{\bar{0}\} \to \Re \;/\; f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, calcule la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) de su dominio natural, en la dirección normal exterior[(@)] a la línea de nivel de f que pasa por dicho punto.

15) Sea $\bar{A}$ un punto de una superficie de nivel del campo escalar f y π_0 el plano tangente a dicha superficie en $\bar{A}$. Demuestre que la derivada direccional de f en $\bar{A}$ es siempre nula si se la calcula en la dirección que va desde $\bar{A}$ hacia cualquier punto $\bar{X} \in \pi_0$.

16) Siendo *C* la curva intersección de las superficies: $x^2 - y^2 = 12$ y $z = x + y^2$, analice si la recta tangente a C en $(4,2,z_0)$ corta a la superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$.[(#)]

17) Dada $z = u + v\,e^{u-v}$ con $(u,v) = (f(x,y),\, y^2)$ resulta $z = h(x,y)$. Halle las direcciones $\breve{r}$ tales que $h'((2,1),\, \breve{r}) = 0$, si la función f queda definida implícitamente mediante la ecuación $2y - ux - \ln(u) = 0$.

18) Halle la ecuación cartesiana del plano normal a la curva *C* en $\bar{A} = (2,1,-4)$ si se sabe que los puntos de *C* pertenecen a la superficie de ecuación $z = xy - 3x$, y que la proyección de *C* sobre el plano *xy* es la parábola definida por $y = x^2 - 3$ con $z = 0$.

19) Considere $h = f \circ \bar{g}$ con $\bar{g}(x) = (e^x, e^{x^2})$ y $f(u,v)$ definida por $y - 1 + \ln(yuv) = 0$. Demuestre que $y = h(x)$ con $h(0) = 1$ satisface la ecuación $(1+y)\,y' + (1+2x)\,y = 0$.

20) Verifique que $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $x + yz - e^z = 0$ satisface la ecuación que $z\,z'_x - z'_y = 0$.

21) Calcule la derivada direccional máxima de $h = f \circ \bar{g}$ en el punto (1,1) cuando $f(u,v)$ queda definida por $z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) = 0$, siendo $\bar{g}(x,y) = (xy^2,\, y - x^2)$.

[(@)] Hacia afuera de la región acotada que la línea encierra.

[(#)] Nota: Si $F, G \in C^1$ en un entorno de $\bar{A} \in \Re^3$, $F(\bar{A}) = 0$, $G(\bar{A}) = 0$ y el vector $\bar{d} = \nabla F(\bar{A}) \wedge \nabla G(\bar{A}) \neq \bar{0}$, la intersección de las superficies dadas implícitamente por $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$ define una curva regular en un entorno de $\bar{A}$ cuya recta tangente en este punto está dirigida por $\bar{d}$.

22) Dada $w = u^2 v + 3v^2$ con $\begin{cases} u = x + y^2 \\ v = g(x,y) \end{cases}$, resulta $w = h(x,y)$. Calcule aproximadamente $h(2.98, 2.01)$ sabiendo que g queda definida por $xv + \ln(v + y - 2) - 3 = 0$.

23) La ecuación $uy + x + e^{2u+y+x-5} - 4 = 0$ define implícitamente $u = f(x,y)$, sabiendo que los puntos (x,y) pertenecen a la curva de ecuación $\overline{X} = (t^2 - 3,\ 2 + \operatorname{sen}(t-2))$ resulta que $u = h(t)$; verifique que h es decreciente en $t_0 = 2$.

24) Sea $f \in C^1$ con $\nabla f = (1,-1)$ constante, halle g derivable tal que $h(x) = f(x\,g(x),\ g(x))$ sea constante; suponga que la gráfica de g pasa por (3,1).

25) Halle $f(u)$ tal que $y = x\,f(x^2 - 1)$ sea solución de la ecuación diferencial $x y' - y = 2x^3$.

Cuestionario

a) Indique condiciones para que $f(x,y) = 0$ defina una curva plana que pasa por $\overline{A}$, ¿puede asegurar que la curva es regular en dicho punto?.

b) Sea $\nabla\varphi$ continuo en un entorno de $\overline{A}$ y no nulo en $\overline{A}$; demuestre que $\nabla\varphi(\overline{A})$ es normal al conjunto de nivel de φ que pasa por $\overline{A}$, y está orientado localmente hacia los conjuntos de nivel creciente.

c) Sea S una superficie regular en $\overline{A}$ y π_0 su plano tangente en $\overline{A}$. Demuestre que π_0 contiene a la recta tangente en $\overline{A}$ a cualquier curva regular $C \subset S$ que pase por dicho punto.

d) Proponga dos funciones discontinuas (no son continuas en todo punto) cuya composición genere una función continua y derivable en todo punto.