Nombre y apellido:.. Curso Z2045

E1.- Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4y^2}{x^4+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine, justificando, en qué puntos de su dominio la función es continua.

b) Analice la diferenciabilidad de la función en el origen.

a) La función está definida en todo el plano, de manera que tenemos que analizar la continuidad en todos los puntos de R^2.

En los puntos con $(x,y)\neq(0,0)$ la función es continua por ser un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{para } (a,b)\neq(0,0)}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{x^4y^2}{x^4+2y^2}=\frac{a^4b^2}{a^4+2b^2}=f(a,b)$$

En (0,0) la función también es continua pues:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y^2}{x^4+2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\frac{x^4}{x^4+2y^2}}_{\substack{\text{cantidad acotada}(*)\\ \text{cerca de }(0,0)}}\underbrace{y^2}_{\substack{\text{infinitésimo}\\ \text{para}\\ (x,y)\to(0,0)}}$$

(*): $\frac{x^4}{x^4+2y^2}$ es una cantidad acotada cerca del origen pues:

$$0\le x^4\le x^4+2y^2$$

y fuera del (0,0) es, entonces,

$$0\le\frac{x^4}{x^4+2y^2}\le 1$$

Entonces, *la función resulta continua en todo el plano*.

b) Para analizar la diferenciabilidad en (0,0) podemos, por ejemplo, analizar la derivabilidad en el origen:

$$f'\big((0,0);(v_1,v_2)\big)\underbrace{=}_{\text{si existe}}\lim_{h\to0}\frac{f\big((0,0)+h(v_1,v_2)\big)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(hv_1,hv_2)-0}{h}=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^4 v_1^4 h^2 v_2^2}{h^4 v_1^4 + 2h^2 v_2^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^6 v_1^4 v_2^2}{(h^2 v_1^4 + 2v_2^2)} = \lim_{h\to 0} h^3 \frac{v_1^4 v_2^2}{(h^2 v_1^4 + 2v_2^2)} \underbrace{=}_{\substack{\text{cualquiera} \\ \text{sea } \breve{v}}} 0$$

de modo que todas las derivadas direccionales existen en (0,0) y son nulas, en particular las derivadas parciales. Esto no nos permite afirmar nada acerca de la diferenciabilidad, así que recurrimos a la definición, analizando el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - [f(0,0) + f_x'(0,0).(x-0) + f_y'(0,0).(y-0)]}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^4 y^2}{x^4+2y^2} - [0 + 0.x + 0.y]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+2y^2}}_{\substack{\text{cantidad acotada}(*) \\ \text{cerca de } (0,0)}} \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\substack{\text{cantidad acotada}(**) \\ \text{cerca de } (0,0)}} \underbrace{y}_{\substack{\text{infinitésimo} \\ \text{para} \\ (x,y)\to(0,0)}} = 0$$

por lo que *la función es diferenciable en (0,0).*

(**): $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es una cantidad acotada cerca del origen pues:

$$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

y fuera del (0,0) es, entonces,

$$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$$

$$-1 \le \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$$

E2.- Demuestre que la ecuación $sen(xyz) - xy^2 + ln(z) = 0$ define implícitamente z como función de x e y cerca del punto $(0,-1,1)$, y halle un valor aproximado de z para $x = 0{,}01$ e $y = -0{,}98$.

Sea $F(x,y,z) = sen(xyz) - xy^2 + \ln(z)$. Se trata de una función con dominio $D = \{(x,y,z) \in R^3 / z > 0\}$ del cual (0,-1,1) es un punto interior. Podemos tratar de aplicar el Teorema de la Función Implícita:

i) $F(0,-1,1) = sen(0.(-1).1) - 0.(-1)^2 + \ln(1) = 0$ por lo tanto el punto pertenece al conjunto de nivel 0 de F.

ii) $\left.\begin{array}{r} F_x'(x,y,z) = yz cos(xyz) - y^2 \\ F_y'(x,y,z) = xz cos(xyz) - 2xy \\ F_z'(x,y,z) = xy cos(xyz) + \frac{1}{z} \end{array}\right\}$ son continuas en D, en particular en un entorno de (0,-1,1), por lo tanto F es C^1 en ese entorno.

iii) $F_z'(0,-1,1) = 0.(-1)cos(0.(-1).1) + \frac{1}{1} = 1 \neq 0$

Como se cumplen las hipótesis del Teorema, podemos asegurar que la ecuación $sen(xyz) - xy^2 + \ln(z) = 0$ define, en un entorno de $(0,-1,1)$, z como función implícita de x e y, digamos $z = f(x,y)$.

El Teorema asegura, además, que $f(x,y)$ es C^1 en ese entorno y son

$$f_x'(0,-1) = -\frac{F_x'(0,-1,1)}{F_z'(0,-1,1)} = -\frac{(-1).1cos(0.(-1).1) - (-1)^2}{1} = 2$$

$$f_y'(0,-1) = -\frac{F_y'(0,-1,1)}{F_z'(0,-1,1)} = -\frac{0.1cos(0.(-1).1) - 2.0.(-1)}{1} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x,y)$ en $(0,-1,1)$ es

$$z = f(0,-1) + f_x'(0,-1).(x-0) + f_y'(0,-1).(y-(-1))$$

$$z = 1 + 2.x + 0.(y+1)$$

$$z = 1 + 2.x$$

Entonces,

$$f(0{,}01; -0{,}98) \cong 1 + 2.0{,}01 = 1{,}02$$

E3.- Analice si la recta normal en $(2,0,-2)$ a la superficie definida por $\vec{\Gamma}(u,v) = (u^2+v, u^2-v, u-v)$, con $(u,v) \in [-2,0] \times [0,2]$, corta al plano tangente en el punto $(2,0,1)$ a la gráfica del campo $f(x,y) = xy + cos(xy)$. Justifique todos sus cálculos.

La superficie definida por $\vec{\Gamma}(u,v) = (u^2+v, u^2-v, u-v)$ pasa por $(2,0,-2)$ si

$$\begin{cases} u^2 + v = 2 \quad (1) \\ u^2 - v = 0 \quad (2) \\ u - v = -2 \quad (3) \end{cases}$$

Esto ocurre sólo si (sumando (1) y (2)) $2u^2 = 2$ por lo que $u^2 = 1$ y entonces, de (2), $v = 1$ y de (3) $u = -1$.

El vector normal a la superficie es

$$\vec{\Gamma}'_u(-1,1) \times \vec{\Gamma}'_v(-1,1) = \left| \begin{matrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 2u & 2u & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} \right| \Bigg|_{(-1,1)} = (3,-1,4)$$

La recta normal a la superficie en $(2,0,-2)$ es, entonces,

$$r: (x,y,z) = (2,0,-2) + t(3,-1,4), \quad \text{para } t \in R$$

La gráfica de la función $f(x,y) = xy + \cos(xy)$ tiene en $(2,0,1)$ plano tangente de ecuación

$$\pi: z = f(2,0) + f'_x(2,0).(x-2) + f'_y(2,0).(y-0)$$

ya que son $f'_x(x,y) = y - ysen(xy)$ y $f'_y(x,y) = x - xsen(xy)$ continuas en todo el plano, por lo que la función es diferenciable en $(2,0)$.

El plano tangente tiene entonces ecuación

$$\pi: z = 1 + 0.(x-2) + 2.(y-0)$$

$$\pi: z = 1 + 2y$$

La recta r y el plano π se cortan si

$$\underbrace{-2+4t}_{z \text{ en } r} = 1 + 2.\underbrace{(-1).t}_{y \text{ en } r},$$

esto es si $t = 1/2$.

Entonces *el plano y la recta se cortan* en el punto

$$(x,y,z) = (2,0,-2) + 1/2(3,-1,4) = (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$$

E4.- Estudie, justificando apropiadamente, la existencia de extremos de la función $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

$a)$ en todo su dominio;

$b)$ en el círculo $x^2 + 2x + y^2 \leq 3$.

a) Son $f'_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$, $f'_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$ continuas en todo el plano, entonces la función es $C^1(R^2)$ y, por lo tanto, diferenciable en todo su dominio, por lo que los únicos puntos críticos serán estacionarios.

Son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f'_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

Como la exponencial nunca se anula, el único punto estacionario es (0,0).

Resultan

$$f''_{xx}(x,y) = -2e^{-(x^2+y^2)} - 2x.(-2x)e^{-(x^2+y^2)} = (4x^2-2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f''_{xy}(x,y) = -2x(-2y)e^{-(x^2+y^2)} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$$

$$f''_{yy}(x,y) = -2e^{-(x^2+y^2)} - 2y.(-2y)e^{-(x^2+y^2)} = (4y^2-2)e^{-(x^2+y^2)}$$

por lo que

$$\Delta H_f(0,0) = \begin{vmatrix} \underbrace{-2}_{<0} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

y entonces en (0,0) se localiza un máximo relativo de valor $f(0,0) = e^{-(0^2+0^2)} = 1$.

Como $e^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{e^{x^2+y^2}} < 1$ por ser $e^{x^2+y^2} > 1$ cualquiera sea $(x,y) \neq (0,0)$ el máximo encontrado es absoluto.

b) Dentro del círculo de ecuación $x^2+2x+y^2 \leq 3$ se encuentra el origen, de manera que tenemos que tener en cuenta el máximo hallado.

Ahora debemos analizar el borde, que es la circunferencia de ecuación

$$x^2+2x+y^2 = 3$$

o, equivalentemente, $(x^2+2x+1)+y^2 = 3+1$ esto es

$$C: (x+1)^2+y^2 = 2^2$$

que es una circunferencia de centro (-1,0) y radio 2, donde por lo tanto $x \in [-3,1]$.

En ese borde es

$$f|_C = e^{-(x^2+y^2)}\Big|_C = e^{2x-3} = g(x)$$

$$g'(x) = 2e^{2x-3} \neq 0 \quad \forall x$$

por lo tanto los máximos y mínimos se producirán en los extremos del intervalo $[-3,1]$.

Como $g(-3) = e^{2(-3)-3} = e^{-9}$, $g(1) = e^{2.1-3} = e^{-1}$ y además tenemos el máximo $f(0,0) = 1$, resulta, en este círculo, *un mínimo absoluto en $x=-3, y=0$ de valor e^{-9} y un máximo absoluto en (0,0) de valor 1.*

T1.- *a*) Defina *solución general*, *solución particular* y *solución singular* de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

b) Dada la EDO $y' = x^2y - 2x^2$, verifique $y \equiv 2$ es solución y determine si es particular o singular. Justifique.

a) Una *solución general* (SG) de una EDO de primer orden es una familia uniparamétrica de funciones que verifican la ecuación diferencial.

Una *solución particular* (SP) es una de las funciones de esa familia, que se elige dando un valor al parámetro, de acuerdo con ciertas condiciones iniciales.

Una *solución singular* (SS) es una función que verifica la EDO, pero no pertenece a la familia de la solución general (no se obtiene dando un valor a la constante).

b) La EDO $y' = x^2y - 2x^2$ es de variables separables si la escribimos

$$y' = x^2(y-2)$$

La función $y \equiv 2$ la verifica trivialmente pues para ella es $y' = 0$ y $x^2(2-2) = 0$.

Para $y \neq 2$ es

$$\frac{y'}{y-2} = x^2$$

$$\int \frac{y'}{y-2}dx = \int x^2 dx$$

$$ln|y-2| = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y - 2 = e^{\frac{x^3}{3}+C} = Ke^{\frac{x^3}{3}}$$

$$SG: y = 2 + Ke^{\frac{x^3}{3}}$$

Por lo que $y \equiv 2$ es una solución particular: la correspondiente a K=0.

T2.- *a*) ¿Qué significa, geométrica y analíticamente, que un campo $f(x, y)$ sea derivable en un punto (a, b), en una determinada dirección (v_1, v_2)?

b) Analice, justificando, la existencia de derivadas direccionales, en $(0, 0)$, del campo

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}. & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Geométricamente, que $f(x,y)$ sea derivable en (a,b) en una dirección (v_1,v_2) significa que la curva que se obtiene cortando el gráfico de $f(x,y)$ con un plano vertical cuya traza en el plano xy es la recta $(x,y)=(a,b)+t(v_1,v_2)$, tiene recta tangente en $(a,b,f(a,b))$ cuya pendiente es, precisamente, el valor de esa derivada: $f'\big((a,b);(v_1,v_2)\big)$.

Analíticamente significa que existe y es finito el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\big((a,b)+h(v_1,v_2)\big)-f(a,b)}{h}$$

b) $f'\big((0,0);(v_1,v_2)\big) \underbrace{=}_{\text{si existe}} \lim_{h\to 0}\frac{f\big((0,0)+h(v_1,v_2)\big)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)-0}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2v_1^2\,\dfrac{sen(h^2v_1^2+h^2v_2^2)}{h^2v_1^2+h^2v_2^2}}{h}=\lim_{h\to 0}hv_1^2\,\frac{sen(h^2(v_1^2+v_2^2))}{h^2\underbrace{(v_1^2+v_2^2)}_{\substack{1,\\ \text{por ser versor}}}}=\lim_{h\to 0}hv_1^2\underbrace{\frac{sen(h^2)}{h^2}}_{\substack{\text{tiende a 1}\\ \text{para h}\to 0}}=0$$

De modo que existen todas las derivadas direccionales en (0,0) y valen 0.