Análisis Matemático II

Preparación de cosas para hacer en clase...

21 de junio de 2018

---

1. 2do parcial seminara 05/07/2016 #233

—enunciado—

a) Analice si el campo $\vec{f}(x,y,z) = (ye^z + 1, xe^z, xye^z + y)$ admite o no función potencial. En caso afirmativo, encuentre esa función. En caso negativo, justifique adecuadamente.

b) Considere la curva borde de la superficie $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ con $z \leq 2$. Utilice el Teorema del Rotor para calcular la circulación del campo del inciso anterior sobre esa curva. Indique en un gráfico en que sentido ha elegido recorrer la curva.

Rta: a) No tiene función potencial.
b) 0.

—solución—

a) Primero calculo su matriz jacobiana

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 & e^z & ye^z \\ e^z & 0 & xe^z \\ ye^z & xe^z + 1 & xye^z \end{pmatrix}$$

como no es simétrica, **no tiene función potencial** porque no cumple con la condición necesaria.

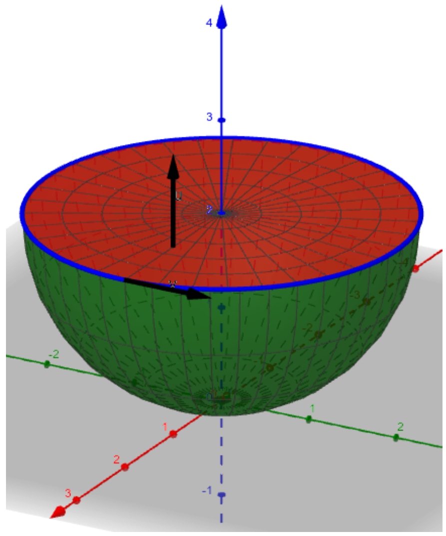
b) La curva es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$,$z = 2$.

$$rot(\vec{f}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ye^z + 1 & xe^z & xye^z + y \end{vmatrix} =$$

$(xe^z + 1 - xe^z, ye^z - ye^z, e^z - e^z) = (1, 0, 0)$

Usando como superficie el plano π de ecuación $z = 2$ con $x^2 + y^2 \leq 4$, con versor normal $n = (0, 0, 1)$, y usando el teorema del rotor

$\int_C f \cdot dc = \iint_\pi rot(f) \cdot ds = \boxed{0}$



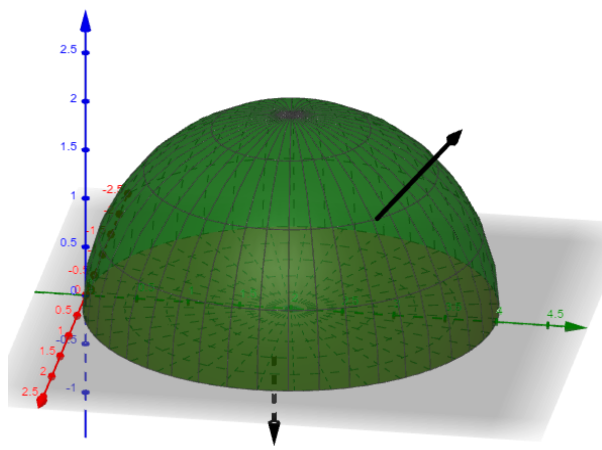
---

2. 2do parcial seminara 29/11/2016 #243

—enunciado—
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (z + x^2y, z - xy^2, 3z)$ a través de la superficie definida por $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ con $z \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de la normal que utilizó, e interprete el signo del resultado que obtuvo.

Rta: 16π

—solución—
Cerrando la superficie con el plano $z = 0$, orientando de forma saliente, y usando el teorema de la divergencia, el flujo pedido es
$\iint_S f \cdot ds = \iiint_H div(f)dV - \iint_T f \cdot ds$
El sólido H es una semiesfera de radio 2, y $div(f) = 2xy - 2xy + 3 = 3$, luego
$\iiint_H div(f)dV = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi 2^3 = 16\pi$
Sea $G(x,y,z) = -z$, entonces $\nabla G = (0,0,-1)$, y el flujo sobre la tapa nos queda
$\iint_T f \cdot ds = \iint_{T_{xy}} (x^2y, -xy^2, 0) \cdot (0,0,-1)dxdy = 0$
Luego el flujo pedido es $16\pi - 0 = \boxed{16\pi}$



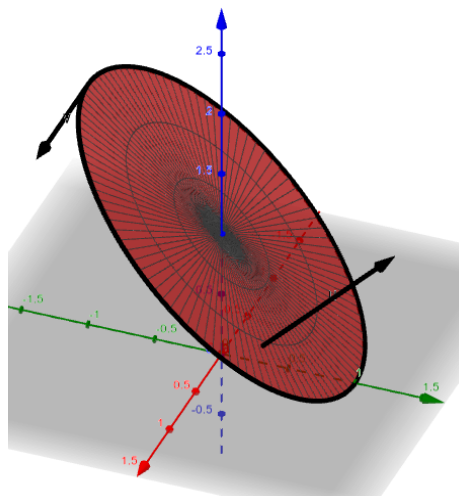
---

3. 2do parcial seminara 24/11/2017 #251

—enunciado—
Calcule el trabajo que el campo $\vec{f}(x, y, z) = (ye^z + 1, xe^z, xye^z + y)$ realiza sobre una partícula que se mueve sobre la curva definida por la intersección entre el plano $y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Indique en un gráfico el sentido con que eligió recorrer la curva.

Rta: 0

—solución—
$rot(f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ye^z + 1 & xe^z & xye^z + y \end{vmatrix} = (xe^z + 1 - xe^z, ye^z - ye^z, e^z - e^z) =$
$(1, 0, 0)$
Sea $G(x, y, z) = y + z - 1$
$\nabla G = (0, 1, 1)$
Luego, si D es la circunferencia unitaria, la circulación pedida es
$\iint_D (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 1) dxdy = \boxed{0}$
Otra forma: Primero escribo f como $f = f_1 + f_2$ donde
$f_1 = (ye^z + 1, xe^z, xye^z)$ es conservativo (y como la curva es cerrada la circulación de f_1 es cero), y $f_2 = (0, 0, y)$.
Luego parametrizo la curva con $g(t) = (\cos(t), \sin(t), 1 - \sin(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, y la circulación pedida es
$\int_0^{2\pi} (0, 0, \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t), -\cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} -\sin(t)\cos(t) dt = \boxed{0}$



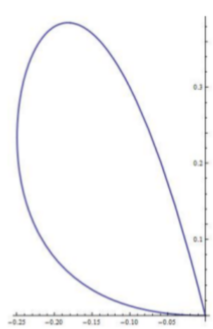
---

4. 2do parcial seminara 24/11/2017 #254

—enunciado—

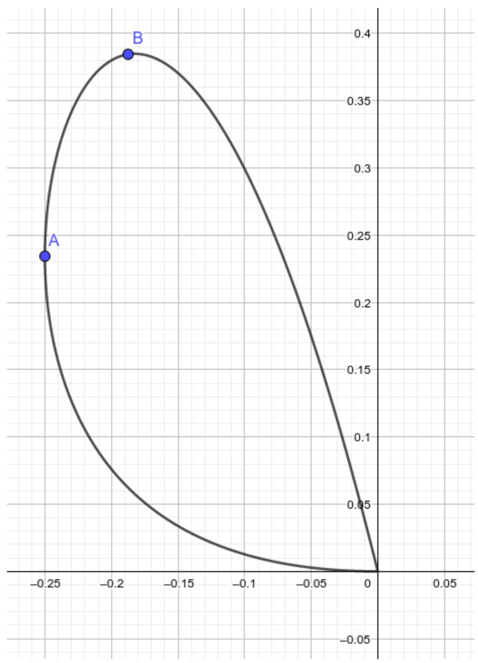
a) Muestre como puede emplear el Teorema de Green para calcular un area plana.

b) Calcule el area delimitada por la curva de ecuación $\vec{X}(t) = (t^2 - t, t^2 - t^6)$ con $0 \leq t \leq 1$ cuyo gráfico se adjunta:



Rta: $\frac{5}{84}$

—solución—
b) Sea $f(x,y) = (0,x)$, entonces $Q'_x - P'_y = 1$
La orientación de la curva es horaria, lo cual se puede observar por ejemplo graficando los puntos $A = X(1/2)$ y $B = X(3/4)$.
Luego, por Green, el area pedida es
$\iint_D dxdy = -\oint_C f \cdot dc = -\int_0^1 (0, t^2 - t) \cdot (2t-1, 2t-6t^5)dt$
$= -\int_0^1 (t^2 - t)(2t - 6t^5)dt = \boxed{\dfrac{5}{84}}$



---

5. final 26/09/2017 #321

—enunciado—
Dado $\vec{f}(x,y) = (2 + yg'(x), g(x) + xy)$ con $\vec{f} \in C^1$, **calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva de ecuación $y = 4 - x^2$ desde $\vec{A} = (-2, 0)$ hasta $\vec{B} = (2, 0)$.
Sugerencia: Realice una conveniente aplicación del teorema de Green.

Rta: $\frac{-136}{15}$

—solución—
$-\left(\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{4-x^2} ydy - \int_{-2}^{2}(2,\ldots)\cdot(1,0)dt\right) = -\left(\frac{256}{15} - 8\right) = -\frac{136}{15}$

---

6. final 07/06/2018 #341

—enunciado—
Dado $f(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$ definido en $\mathbb{R}^3$, **calcule** el flujo de f a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = 10 - x^2 - y^2$ con $z \geq 1$. **Indique** gráficamente cómo orientó a Σ.

Rta: 360π

—solución—
$div(f) = 2 + 2 + 4 = 8$
$\iint_\Sigma f ds = \iiint_H div(f)dV - \iint_T f ds$
Intersecto las superficies
$z = 10 - x^2 - y^2$ (1)
$z = 1$ (2)
de (2) en (1)
$x^2 + y^2 = 9$
$\iiint_H div(f)dV = 8\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 \rho d\rho \int_1^{10-\rho^2} dz = 324\pi$
$\iint_T f ds = -4\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 \rho d\rho = -4\cdot\pi\cdot 3^2 = -36\pi$
Luego el flujo pedido es
$\iint_\Sigma f ds = 324\pi - (-36\pi) = \boxed{360\pi}$