FRBA - UTN | Análisis Matemático II | 2° Parcial - 2/12/22 - T1

Nombre y apellido:.. Curso Z2545

Se aprueba con 2 ítems prácticos (E_i) bien resueltos.

Para promoción directa se requieren 4 ítems, uno de ellos teórico (T_i).

E1.- Calcule el trabajo que el campo $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (e^x + yz, xz, xy + 2z)$ realiza sobre una partícula que se mueve sobre la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^3 - z^2 = 1 \\ y = 2(z^2+1) \end{cases}$$

desde el punto $(1,2,0)$ al punto $(2, y_0, \sqrt{7})$.

E2.- Considere la integral doble $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} 2x\,dx\,dy$.

a) Grafique la región de integración;

b) invierta el orden de integración y calcule en el orden en que le parezca más conveniente. ¿Podría estar calculando una masa con esta integral? Explique.

E3.- Sea el trozo de superficie $S : z = 4 - x^2$ con $z \geq 0$ y $0 \leq y \leq 2$.
Calcule su área y evalúe el flujo del campo $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (-x, sen(xz), x^2 + y^2)$ a través de ella indicando en un gráfico el sentido de la normal que consideró. ¿Podría hacer el cálculo del flujo usando el Teorema de Gauss? Si es posible explique cómo lo haría.

E4.- Utilice el Teorema del Rotor para calcular la circulación de $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (-x, sen(xz), x^2 + y^2)$ a lo largo del borde de $y = x^2 + z^2 - 9$ con $y \leq 0$. Indique en un un gráfico el sentido con que eligió recorrer la curva. ¿Es $\overrightarrow{f}$ un campo conservativo? Justifique.

T1.- *a*) Enuncie el Teorema de Green, detallando las hipótesis adecuadamente.

b) Utilice ese Teorema para calcular la circulación de $\overrightarrow{f}(x,y) = (x+y, -2y)$ a lo largo de la circunferencia $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$ orientada en sentido horario.

T2.- *a*) ¿Qué significa que un campo $\overrightarrow{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sea conservativo en D°?

b) Analice si $\overrightarrow{f}(x,y,z) = (1, ln(z), \frac{y}{z})$ lo es en su dominio. Justifique.

1) Calcule el trabajo que el campo $\vec{f}(x,y,z) = (e^x + yz,\ xz,\ xy + 2z)$ realiza sobre una partícula que se mueve sobre la curva

$C: \begin{cases} x^3 - z^2 = 1 \\ y = 2(z^2+1) \end{cases}$ desde el punto $(1,2,0)$ al punto $(2, y_0, \sqrt{7})$

- $\varphi'_x = e^x + yz \longrightarrow \varphi(x,y,z) = e^x + xyz + h(y,z)$

$\downarrow$

- $\varphi'_y = xz \longleftrightarrow \varphi'_y = xz + h'_y(y,z)$

$\downarrow$

$h'_y(y,z) = 0 \longrightarrow h(y,z) = g(z)$

$\varphi(x,y,z) = e^x + xyz + g(z)$

$\downarrow$

- $\varphi'_z = xy + 2z \longleftrightarrow \varphi'_z = xy + g'(z)$

$\downarrow$

$g'(z) = 2z \longrightarrow g(z) = z^2 + K$

$\therefore\ \varphi(x,y,z) = e^x + xyz + z^2 + K$

$$\int_{(1,2,0)}^{(2,y_0,\sqrt{7})} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(2, y_0, \sqrt{7}) - \varphi(1,2,0) =$$

$$= e^2 + 2y_0\sqrt{7} + 7 + K - e - 1.2.0 - 0^2 - K =$$

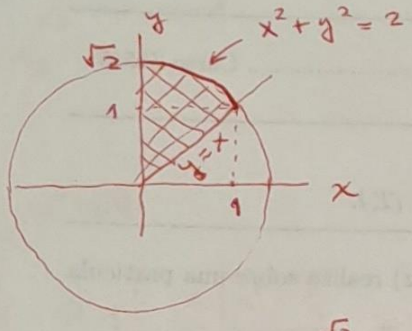
$$= e^2 - e + 2y_0\sqrt{7} + 7$$

$y_0 = 2(\sqrt{7}^2 + 1) = 16$

$$\therefore \int_{(1,2,0)}^{(2,16,\sqrt{7})} \vec{f} \cdot d\vec{s} = e^2 - e + 32\sqrt{7} + 7$$

2) Considera la integral doble $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} 2x\,dx\,dy$

Grafique la región de integración, invierta el orden, calcule.
¿Podría estar calculando una masa?



$$\int_0^1 dy \int_0^y 2x\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} 2x\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2\Big|_0^y\right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(x^2\Big|_0^{\sqrt{2-y^2}}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} (2-y^2)\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

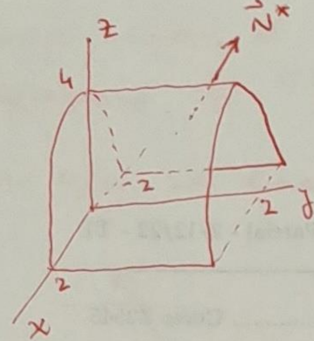
$$= \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$$

Se puede estar calculando la masa de la chapa, con la forma del gráfico, pues $2x > 0$ puede representar una densidad

3) Sea el trozo de superficie $S: z = 4 - x^2$ con $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 2$
Calcule su área y evalúe el flujo de $\vec{f}(x,y,z) = (-x, \operatorname{sen}(xz), x^2+y^2)$ a través de ella indicando en un gráfico el sentido de la normal que consideró.
¿Podría hacer el cálculo del flujo usando el Teo de Gauss? Explique

$S: z = 4 - x^2$

$\vec{N} = (-2x, 0, -1)$ ó $\vec{N}^* = (2x, 0, 1)$



$$\text{Área}(S) = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_{P_{xy}} dx\,dy\, \|\vec{N}^*\| =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_0^2 dy \sqrt{4x^2+1} =$$

$$= \left(\int_0^2 dy\right)\left(2\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}\, dx\right) =$$

N° 189

$$= 4\left[\frac{x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}\right)\right]_{-2}^{2} =$$

$$= 4\left[\frac{2\frac{\sqrt{17}}{2}}{2} + \frac{1}{8}\ln\left(2+\frac{\sqrt{17}}{2}\right) + \frac{2\frac{\sqrt{17}}{2}}{2} - \frac{1}{8}\ln\left(-2+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\right] =$$

$$= 4\left[\sqrt{17} + \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right] \cong 18{,}59$$

Flujo:

$$\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{\sigma} = \iint_{P_{xy}} \left(-x, \operatorname{sen}(xz), x^2+y^2\right)\Big|_S \cdot (2x,0,1)\, dx\,dy =$$

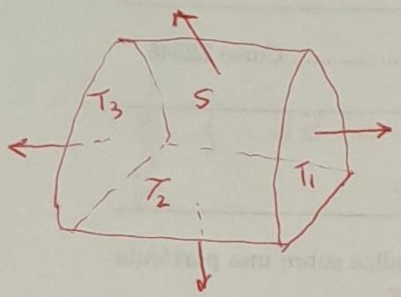
$$= \int_{-2}^{2} dx \int_0^2 \left(-2x^2+x^2+y^2\right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_0^2 dy\, \left(y^2-x^2\right) = \int_{-2}^{2} dx \left[\frac{y^3}{3} - x^2 y\right]_0^2 =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{3} - 2x^2\right) dx = \frac{8}{3}x - 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 0$$

Para usar el Teorema de Gauss sería necesario agregar 3 "tapas" y luego restar el flujo saliente en c/u de esas tapas:



$T_1: \quad y=2 \qquad 0 \le z \le 4-x^2$

$T_2: \quad z=0 \qquad -2 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2$

$T_3: \quad y=0 \qquad 0 \le z \le 4-x^2$

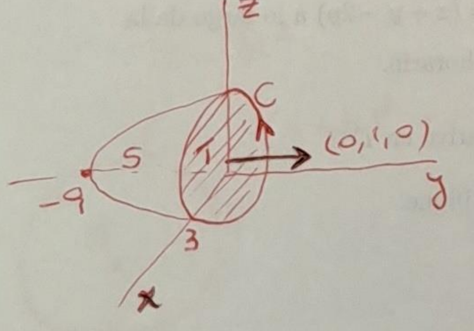
$$\operatorname{div} \vec{f} = -1 + 0 + 0 = -1$$

$$\text{Flujo}(S) = \iiint_V -1 \, dx\,dy\,dz - \iint_{T_1} \vec{f}\Big|_{y=2} \cdot (0,1,0)\, dx\,dz -$$

$$- \iint_{T_3} \vec{f}\Big|_{y=0} \cdot (0,-1,0)\, dx\,dz - \iint_{T_2} \vec{f}\Big|_{z=0} \cdot (0,0,-1)\, dx\,dy$$

4) Utilice el Teorema del Rotor para calcular la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (-x, \operatorname{sen}(xz), x^2+y^2)$ a lo largo del borde de $y = x^2+z^2-9$, $y \le 0$. Indique en un gráfico el sentido con que eligió recorrer la curva. ¿Es $\vec{f}$ conservativo?

La curva es borde de S y también borde de T. Es más sencillo usar T que S.



$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & \operatorname{sen}(xz) & x^2+y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2y - x\cos(xz), -2x, z\cos(xz))$$

Como $\nabla \times \vec{f} \neq \vec{0}$, $\vec{f}$ $\underline{\underline{\text{no}}}$ es conservativo

$$\nabla \times \vec{f}\Big|_T \cdot (0,1,0) = (2.0 - x\cos(xz), -2x, z\cos(xz))\,(0,1,0) =$$

$$= -2x$$

$$\therefore \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_T \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{x^2+z^2 \leq 9} -2x\,dx\,dz =$$

$$= -2 \int_0^3 r\,dr \int_0^{2\pi} r\cos\theta\,d\theta = -2 \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^3 \left(\operatorname{sen}\theta\right|_0^{2\pi} = 0$$

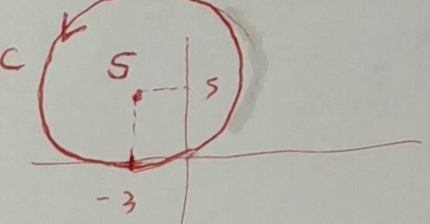
T1) Enuncie el Teorema de Green.
Utilícelo para calcular la circulación de $\vec{f}(x,y) = (x+y, -2y)$ a lo largo de $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$ en sentido horario.

Sea $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo $C^1(D)$,
$C \subset D$ una curva cerrada simple, orientada de modo de dejar su interior, S, a izquierda.
Entonces,
$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S (f'_{2x} - f'_{1y})\,dx\,dy$$

En este caso: $\vec{f}(x,y) = (x+y, -2y)$, $f'_{2x} - f'_{1y} = 0 - 1$

$D = \mathbb{R}^2$

$C: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$



$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S (0-1)\,dx\,dy =$$

sentido antihorario

$$= -\overbrace{\iint_S dx\,dy}^{\text{área}} = -\pi 5^2 = -25\pi$$

Como se pide en sentido horario,

$$\oint_{\substack{C \\ \text{sentido} \\ \text{horario}}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -(-25\pi) = 25\pi$$

T2) ¿Qué significa que un campo $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sea conservativo en D°?

Analice si $\vec{f}(x,y,z) = \left(1, \ln(z), \frac{y}{z}\right)$ lo es.

$\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo en D° si y sólo si

- la integral curvilínea de $\vec{f}$ entre dos puntos cualesquiera de D° no depende del camino elegido

o

- la integral curvilínea de $\vec{f}$ sobre cualquier curva cerrada contenida en D° es nula

o

- $\exists\ \varphi : D^\circ \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ \vec{f} = \nabla\varphi \quad \forall (x,y,z) \in D^\circ$

$\vec{f}(x,y,z) = \left(1, \ln(z), \frac{y}{z}\right)$

$D^\circ = \{(x,y,z) \ / \ z > 0\}$

$\exists\ \varphi(x,y,z) = x + y\ln(z)$

$\therefore \vec{f}$ es conservativo en D°

$\varphi'_x = 1 \longrightarrow \varphi = x + h(y,z)$

$\varphi'_y = \ln(z) \longleftrightarrow \varphi'_y = h'_y(y,z)$

$h'_y(y,z) = \ln(z)$

$h(y,z) = y\ln(z) + g(z)$

$\varphi'_z = \frac{y}{z} \longleftrightarrow \varphi'_z = \frac{y}{z} + g'(z)$

$g(z) = K$