Nombre y apellido:.. Curso Z2041

Se aprueba con 2 ítems (E_i) bien resueltos. Promoción directa: 4 ítems, uno teórico (T_i).

E1.- Calcule la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 4$ con $y = 4$, con $z \geq 0$, si la densidad es, en cada punto, $\delta(x, y, z) = |xz|$.

E2.- Considere la superficie definida por $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 6$, $y \geq 0$. Evalúe el flujo del campo $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (xy^2, -x^2y, xz)$ a través de ella, considerando la normal orientada hacia las z negativas. Interprete el signo del flujo obtenido.

E3.- Considere la curva borde de la superficie $x = y^2 + z^2$ con $x \leq 1$. Utilice el Teorema del Rotor para calcular la circulación del campo $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, yz)$ sobre esa curva. Indique en un gráfico en qué sentido ha elegido recorrer la curva y decida si el campo es conservativo.

E4.- Halle la solución de la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 2$ que verifica $y(0) = y'(0) = 0$.

T1.- *a*) Enuncie el Teorema de la Gauss; detalle las hipótesis adecuadamente.

b) Determine la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:
"El flujo del campo $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (2x, -2y, z^2)$ es nulo a través de la frontera de cualquier cuerpo que sea simérico con respecto al plano xy". Fundamente adecuadamente.

T2.- *a*) Defina "campo vectorial conservativo".

b) Analice si el campo $\overrightarrow{f}(x, y) = (x + y, x + e^y)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$. Fundamente adecuadamente.

E1.- $M = \int_C \delta \, ds$ $C: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 4 \end{cases}, \; z \geq 0$

$\vec{\gamma}(t) = (2\cos(t), 4, 2\text{sen}(t))$, $t \in [0,$

$\delta(x,y,z) = |x\underset{\geq 0}{z}| = 2 \cdot 2\,|\cos(t)|\,\text{sen}(t)$

$\vec{\gamma}'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 0, 2\cos(t))$

$\|\vec{\gamma}'(t)\| = 2$

$$M = 8\int_0^{\pi} |\cos(t)|\,\text{sen}(t)\,dt = 8\left[\int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\text{sen}(t)\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\,\text{sen}(t)\,dt\right] =$$

$$= 8\left[\frac{\text{sen}^2(t)}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\text{sen}^2(t)}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right] = 8\left[\frac{1}{2} - \frac{0}{2} - \frac{0}{2} + \frac{1}{2}\right] = 8$$

E2.- $\frac{z^2}{9} - x^2 - y^2 = 0$

$\vec{N} = (-2x, -2y, \frac{2z}{9})$

$z < 0$:

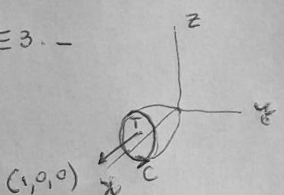
$\vec{N}' = (2x, 2y, -\frac{2z}{9})$

$\vec{f} \cdot \vec{N}' = \cancel{xy^2 2x} - \cancel{x^2 y\, 2y} - 2\frac{x z^2}{9} = -\frac{2}{9}x\,(9(x^2+y^2))$

$$\Phi = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{P_{xy}} \vec{f} \cdot \vec{N}'\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2} \Big(-\frac{2}{9}\Big) \overbrace{r\cos\theta}^{x}\; 9\, \overbrace{r^2}^{x^2+y^2}\, \underbrace{r}_{J}\,dr =$$

$$= -2\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^2 \;\; \text{sen}\theta\Big|_0^{\pi} = 0$$ ← significa que pasa tanto fluido de arriba hacia abajo como de abajo hacia arriba

E3.-



$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2 y & yz \end{vmatrix} = (z, 0, 0)$$

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_T \nabla \times \vec{f} \cdot (1,0,0) = \iint_{P_{yz}} z\,dy\,dz = 0$$

P_{yz}: $y^2 + z^2 \leq 1$

E4.- $k^2 + 4k + 4 = 0$ $(k+2)^2 = 0$ $k = -2$ doble

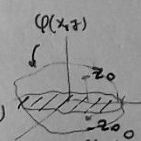
$y_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

$y_p(x) = K$ $y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 4K = 2 \rightarrow K = \frac{1}{2}$

SGNH: $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = -1 \end{array}$ $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} - xe^{-2x} + \frac{1}{2}$

T1 b) $\nabla \cdot \vec{f} = 2z$



$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{P_{xy}} \int_0^{\varphi(x,y)} 2z\,dz + \iint_{P_{xy}} \int_{-\varphi(x,y)}^{0} 2z\,dz = 0$$

T2 b) $\begin{cases} x + y = \varphi'_x \\ x + e^y = \varphi'_y \end{cases}$

$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + e^y + C$

FRBA - UTN | Análisis Matemático II | 2ndo. Parcial - 15/7/22 - T2

Nombre y apellido:.. Curso Z2041

Se aprueba con 2 ítems (E_i) bien resueltos. Promoción directa: 4 ítems, uno teórico (T_i).

E1.- Calcule la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de las superficies $y^2 + z^2 = 4$ con $x = 4$, con $z \geq 0$, si la densidad es, en cada punto, $\delta(x, y, z) = |yz|$.

E2.- Considere la superficie definida por $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 4$, $y \geq 0$. Evalúe el flujo del campo $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (-xy^2, x^2y, xz)$ a través de ella, considerando la normal orientada hacia las z negativas. Interprete el signo del flujo obtenido.

E3.- Considere la curva borde de la superficie $y = x^2 + z^2$ con $y \leq 1$. Utilice el Teorema del Rotor para calcular la circulación del campo $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, xz)$ sobre esa curva. Indique en un gráfico en qué sentido ha elegido recorrer la curva y decida si el campo es conservativo.

E4.- Halle la solución de la ecuación $y'' + 6y' + 9y = 3$ que verifica $y(0) = y'(0) = 0$.

T1.- *a*) Enuncie el Teorema de la Gauss; detalle las hipótesis adecuadamente.

b) Determine la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:
"El flujo del campo $\overrightarrow{f}(x, y, z) = (-2x, 2y, z^2)$ es nulo a través de la frontera de cualquier cuerpo que sea simérico con respecto al plano xy". Fundamente adecuadamente.

T2.- *a*) Defina "campo vectorial conservativo".

b) Analice si el campo $\overrightarrow{f}(x, y) = (y + e^x, x + y)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$. Fundamente adecuadamente.

E1.- $M = \int_C \delta \, ds$ $\quad C: \begin{cases} y^2+z^2=4, & z \geq 0 \\ x = 4 \end{cases}$

$\vec{\gamma}(t) = (4, 2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)), \ t \in [0,\pi]$

$\vec{\gamma}'(t) = (0, -2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t))$

$\|\vec{\gamma}'(t)\| = 2$

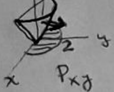
$\delta(x,y,z) = |yz| = 2 \cdot 2 \, |\cos(t)| \operatorname{sen}(t)$

$$M = 8 \int_0^{\pi} |\cos(t)| \operatorname{sen}(t)\, dt =$$

$$= 8 \left[\int_0^{\pi/2} \cos(t)\operatorname{sen}(t)\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\operatorname{sen}(t)\, dt \right] = 8 \left[\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] =$$

$$= 8 \left[\frac{1}{2} - \frac{0}{2} - \frac{0}{2} + \frac{1}{2} \right] = 8$$

E2.- $\dfrac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 0$



$\vec{N} = \left(-2x, -2y, \frac{2z}{4}\right)$

$z < 0$:

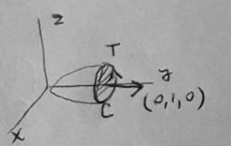
$\vec{N}' = \left(2x, 2y, -\frac{2z}{4}\right)$

$\vec{f} \cdot \vec{N}' = \cancel{-2x^2y^2} + \cancel{2x^2y^2} - \frac{x}{2} z^2 = -\frac{x}{2} 4(x^2+y^2)$

$$\Phi = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{P_{xy}} \vec{f} \cdot \vec{N}' \, dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 \Big(-2 \overbrace{r\cos\theta}^{x} \underbrace{r^2}_{x^2+y^2} \underbrace{r}_{J} \, dr\Big) =$$

$$= -2 \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\pi} = 0 \leftarrow$$ significa que pasa tanto fluido de abajo hacia arriba como de arriba hacia abajo

E3.-



$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2y & xz \end{vmatrix} = (0, -z, 0)$$

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_T \nabla \times \vec{f} \cdot (0,1,0)\, dx\,dz = \iint_{\substack{P_{xz} \\ x^2+z^2 \leq 1}} -z \, dx\,dz = 0$$

E4.- $k^2 + 6k + 9 = 0 \qquad (k+3)^2 = 0 \qquad k = -3$ doble

$y_H(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

$y_p(x) = K \qquad y_p'' + 6y_p' + 9y_p = 3 \qquad 9K = 3 \qquad K = \frac{1}{3}$

SGNH: $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + \frac{1}{3} = 0 \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C_1 = -\frac{1}{3} \\ C_2 = -1 \end{array} \qquad y(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} - xe^{-3x} + \frac{1}{3}$

T1b) $\nabla \cdot \vec{f} = 2z$

T2b) $\begin{cases} y + e^x = \varphi'_x \\ x + y = \varphi'_y \end{cases} \quad \varphi(x,y) = xy + \frac{y^2}{2} + e^x + C$