9. Integrales múltiples

01) Calcule el área de las siguientes regiones planas mediante integrales dobles; se recomienda no aplicar propiedades de simetría, plantee los límites para toda la región.

a) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \ / \ y \geq 2x^2 + 1 \ \wedge \ x + y \leq 4\}$.

b) D : definida por $x^2 \leq y < \sqrt{2 - x^2}$.

c) D : dominio del campo $\bar{f}(x, y) = (\ln(x + y - 2) \, , \sqrt{y - 2x + 2} \, , (2x + 2 - y - x^2)^{-1/4})$.

d) D : limitada por las curvas de ecuación $y = x^3$ e $y = x$.

e) D : conjunto de positividad de $f(x, y) = (y - 2|x|)\sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

f) D : conjunto donde son positivas las componentes de $\bar{f}(x, y) = (4 - x^2 - y^2, 2 - x - y^2)$.

02) Calcule las siguientes integrales en ambos órdenes de integración y verifique que los resultados coinciden.

a) $\iint_D dx\,dy$, D definido por: $0 \leq y \leq \text{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

b) $\iint_D x \, dx\,dy$, $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

c) $\iint_D |x| \, dx\,dy$, $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

d) $\iint_D f(x, y) \, dx\,dy$, D definido por: $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$, $f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

e) $\int_0^1 dx \int_0^x (x + y)\,dy + \int_1^4 dx \int_0^1 (x + y)\,dy$.

f) $\iint_D e^{-x} \, dx\,dy$, D definido por: $e^x \leq y \leq e^{2x} \ \wedge \ 0 \leq x \leq \ln 2$.

03) Calcule la masa y el centro de masa de una placa circular con centro en el origen de coordenadas, si su densidad superficial (kg/m^2) en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje *x*.

04) Sea D una placa plana con densidad $\delta(x, y)$ y centro de masa $\overline{G}$. Demuestre que el momento de inercia de D respecto a una recta r paralela a los ejes coordenados es mínimo cuando r pasa por $\overline{G}$.(*)

05) Calcule las siguientes integrales, en algunos casos puede convenirle invertir el orden de integración.

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx$. b) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\,dy$. c) $\int_{-4}^0 dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_0^5 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx$.

06) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

a) $\iint_D (6 - x - y)^{-1} dx\,dy$, D : $|x + y| \leq 2 \ \wedge \ y \leq x + 2 \leq 4$, usando $(x, y) = (v, u - v)$.

b) Calcule el área de la región plana definida por $1 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 4$, $a,b \in \mathbb{R}^+$ aplicando la transformación $(x, y) = (a\rho\cos(\varphi) , b\rho\,\text{sen}(\varphi))$.

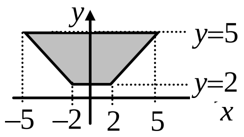
c) $\iint_D (x - y)^4 dx\,dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| + |y| \leq 4\}$, aplicando una transformación lineal apropiada.

(*) En general, el momento de inercia respecto de una recta es mínimo cuando la recta pasa por $\overline{G}$.

d) $\iint_D (x+y-2)^2\,dxdy$ aplicando el cambio de variables definido por :

$$(x,y)=(u+v,u-v)\,,\ \text{con}\ \ D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2/\ y\geq |x|\,,\ x+2y\leq 3\}.$$

e) Siendo D la región sombreada del dibujo, **calcule** $\iint_D y\,(x^2+y^2)^{-1}dxdy$ usando coordenadas polares.



07) a) Dada $f(x,y)=e^{x^2+2y^2}$, calcule el área de la región plana limitada por las curvas de nivel e^4 y e^8 de la función.

b) Calcule $\iint_D e^{x^2+2y^2}dx\,dy$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+2y^2\leq 4\ \wedge\ x\geq\sqrt{2}\,|\,y\,|\}$.

08) Dada la $\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$ con $D=\mathbb{R}^2$.

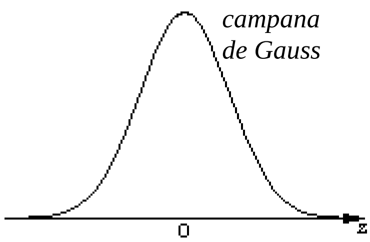
a) Calcúlela usando coordenadas polares.

b) Trabajando en cartesianas, demuestre que su resultado es del tipo $(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du)^2$.

c) Dada $f(z)=(2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}$, demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz=1.$$

Definida en $\mathbb{R}$, f es la función de densidad de probabilidad normal estandarizada que se utiliza en múltiples aplicaciones, incluso en teoría de errores. La gráfica de f se denomina “campana de Gauss”.



09) Calcule $\iint_D \frac{x+4y}{x^2}\,dxdy$ con $D:\ x\geq y\ ,\ x+4y\leq 4\ ,\ y\geq 0$ usando coordenadas polares.

10) En los siguientes casos se indica una integral planteada en coordenadas polares, grafique la región correspondiente en el plano xy, plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

a) $\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos(\varphi)}\rho^3\,d\rho$.

b) $\int_{-\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}/\cos(\varphi)}\rho^2\cos(\varphi)\,d\rho$.

11) Dada $\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2}d\rho\int_0^{4-\rho^2}\rho^2\,dz$ planteada en coordenadas cilíndricas, represente la región de integración en el espacio xyz, plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

12) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

a) H definido por $2y\geq x^2+z$, $x+y\leq 4$, 1° octante.

b) $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y+z\leq 6\ \wedge\ z\geq x+y\ \ \wedge\ x\geq 0\wedge y\geq 0\}$.

c) H definido por $x^2+z^2\leq 2ax$, interior a la esfera de radio $2a$ con centro en el origen de coordenadas.

d) H definido por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2$ con $a > 0$.

e) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \geq x^2 \ \wedge \ x \geq z^2 \ \wedge \ x \geq |y| \}$.

f) H definido por $x^2+z^2 \leq 9$, $y \geq 2x$, $y \leq 2x+4$.

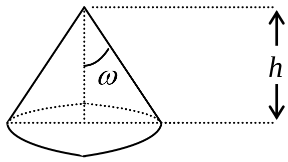
g) H definido por $y \geq x^2$, $x^2+y^2 \leq 2$, $z \geq 0$, $z \leq x$.

h) H definido por $x^2+2y^2+z \leq 32$, $z \geq x^2$.

13) Determine el centro de masa del cuerpo limitado por $y = x$, $y = 2x$, $x+y+z = 6$, $z = 0$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano *yz*.

14) Dado el cuerpo definido por $\sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq 4$, calcule su momento de inercia respecto del eje x sabiendo que su densidad es $\delta(x,y,z) = k|y|$ con k constante.

15) Determine el volumen de un cuerpo cónico (cono circular recto) de altura h y ángulo de apertura ω; ubíquelo en la posición más conveniente para facilitar los cálculos.



16) Sea el cuerpo H convexo y simétrico respecto del plano *xz*, calcule $\iiint_H y^n \, dx\, dy\, dz$ cuando n es un número natural impar.

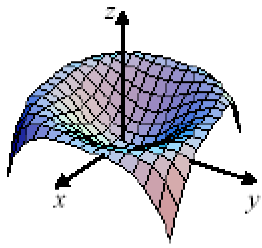
17) Calcule la masa de los siguiente cuerpos:

a) Cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

b) Cuerpo definido por $z \geq |y|$, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano *xy*.

c) Cuerpo definido por $x^2+y^2 \leq 9$, $0 \leq z \leq 2$ con densidad en cada punto proporcional a la distancia desde el punto al plano *xz*.

18) En la figura se representa la forma de un recipiente cuya ecuación es $z = 8x^2+8y^2-(x^2+y^2)^2$ con $(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$; el recipiente se apoya en el plano *xy* en las puntas y en el origen.
Calcule el volumen de líquido que contiene el recipiente cuando se lo llena exactamente hasta el borde superior; considere que la expresión dada permite calcular z en centímetros cuando x e y están expresados en cm.



Cuestionario

a) ¿Pueden usarse coordenadas polares en regiones que contengan al origen? (recuerde que el jacobiano se anula en el origen).

b) ¿Por qué el área de un círculo no cambia si se incluye o no la circunferencia frontera?.

c) Realice una interpretación geométrica de la fórmula de cambio de variables en integrales dobles.

d) Describa las superficies coordenadas de cilíndricas y esféricas en el espacio *xyz*.

Integrando con el Mathematica

Se dispone de dos funciones básicas, **Integrate** y **NIntegrate**.

Integrate[f, x] devuelve una primitiva de **f** integrada respecto de **x**.
Integrate[f, {x,a,b}] calcula la integral definida de **f** respecto de **x** entre **a** y **b**.
Integrate[f, {x,a,b}, {y,y$_1$(x),y$_2$(x)}] }] calcula la integral doble, integrando primero respecto de **y** entre **y$_1$(x)** e **y$_2$(x)** y luego respecto de **x** entre **a** y **b**.
NIntegrate[f, {x,a,b}] calcula una aproximación numérica de la integral definida de **f** respecto de **x** entre **a** y **b**. Nota: **f**, **a** y **b** deben estar completamente definidos.

El Mathematica admite límites infinitos, **Infinity** lo interpreta como ∞.

Ejemplos

Integrate[x Cos[x], x] $\to$ Cos[x] + x Sin[x]

Integrate[x Cos[x], {x,0,Pi/2}] $\to -1+\frac{\text{Pi}}{2}$

NIntegrate[x Cos[x], {x,0,Pi/2}] $\to$ 0.570796

Integrate[x Cos[a x], {x,0,Pi/2}] $\to -\frac{1}{a^2}+\frac{\text{Cos}[\frac{a\,\text{Pi}}{2}]}{a^2}+\frac{\text{Pi Sin}[\frac{a\,\text{Pi}}{2}]}{2\,a}$

NIntegrate[x Cos[a x], {x,0,Pi/2}] $\to$ no resuelve ("a" no está previamente definida).

Integrate[Exp[– x^2], {x, –Infinity, Infinity}] $\to$ Sqrt[Pi] (se puede concluir del ítem 08 a y b).
NIntegrate[Exp[– x^2], {x, –Infinity, Infinity}] $\to$ 1.77245

Para resolver $\int_1^2 dx \int_x^{2x} (x^2-y)\, dy$ ordenamos: **Integrate[x^2–y, {x,1,2}, {y, x, 2 x}]** $\to \frac{1}{4}$

o bien, **Integrate[Integrate[x^2–y, {y, x, 2 x}],{x,1,2}]** $\to \frac{1}{4}$.

Resolviendo $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_{x+y}^2 x\,y\,dz$: **Integrate[x y, {x, 0, 1}, {y, 0, x}, {z, x+y, 2}]** $\to \frac{1}{12}$

Resolviendo $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y^2} dx$ correspondiente al ítem "01f ":

Integrate[1, {y, –Sqrt[3], Sqrt[3]}, {x, –Sqrt[4–y^2], 2–y^2}] $\to \frac{1}{3}(9\,\text{Sqrt}[3]+4\,\text{Pi})$