E1.- Considere

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine y grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) ¿En qué puntos de su dominio es $f(x,y)$ continua? Justifique.

c) Estudie la existencia de derivadas direccionales de f en el origen.

a) $C_0 = \{(x,y)\in Dom(f) \,/\, f(x,y)=0\}$

$\therefore\ (x,y)\neq(0,0) \,/\, \underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}=0}_{x=0\ \vee\ y=0} \quad \vee \quad (x,y)=(0,0)$

$\therefore\ C_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=0 \ \vee\ y=0\}$ Ejes coordenados

$C_1 = \{(x,y)\in Dom(f) \,/\, f(x,y)=1\}$

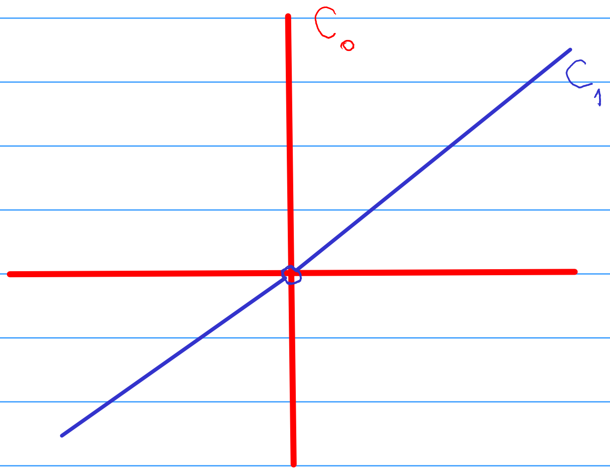
$\therefore\ (x,y)\neq(0,0) \,/\, \frac{2xy}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow 2xy = x^2+y^2$

$0 = x^2+y^2-2xy$

$0 = (x-y)^2$

$\therefore\ x=y$ (Recta)

$C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=y \text{ con } (x,y)\neq(0,0)\}$



b) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{sobre } y=mx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 m}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

Como el límite por rectas en $(0,0)$ varía según la pendiente de la recta elegida, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\therefore$ $f(x,y)$ tiene en $(0,0)$ una discontinuidad esencial

En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la función es continua por ser un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula.

c) $$f'((0,0);(v_1,v_2)) \overset{\text{si existe}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(v_1,v_2)) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 v_1 v_2}{h(h^2v_1^2+h^2v_2^2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2v_1v_2}{h}$$

El límite sólo existe si $v_1v_2=0$

$\therefore$ existen las derivadas direccionales sólo para los versores $(v_1,v_2)=(\pm 1,0)$ o $(0,\pm 1)$

E2.- Se sabe que la intersección entre el conjunto de nivel 0 de $F(x, y, z) = x^2 + 2y - 3z^2$ y la imagen de $\vec{\Sigma}(u, v) = (u + v, v - u, v^2)$, con $(u, v) \in [-1, 1] \times [-2, 2]$, define una curva C en un entorno del punto $P = (1, 1, 1)$. Determine si el plano $\pi : x - y = 15$ es paralelo al plano normal a C en P.

$$S_1 : \underbrace{x^2 + 2y - 3z^2}_{F(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3) \text{ por ser polinomio}} = 0 \quad , \; C_0 \text{ de } F$$

$$\therefore \nabla F(1,1,1) = (2x, 2, -6z)\Big|_{(1,1,1)} = (2,2,-6) = 2\underbrace{(1,1,-3)}_{\vec{N}_1}$$

es normal a S_1 por ser cjto. de nivel de una función diferenciable

$$S_2 : \quad \vec{\Sigma}(u,v) = (u+v, \; v-u, \; v^2)$$

En $(1,1,1)$:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ v - u = 1 & (2) \\ v^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $2v = 2 \rightarrow v = 1$ $\therefore u = 0$

verifica (3)

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma}'_u &= (1, -1, 0) \\ \times \; \vec{\Sigma}'_v &= (1, 1, 2v) \end{aligned} \Big\} \text{ tangente a } S_2$$

$$\vec{N} = (-2v, -2v, 2)\Big|_{(0,1)} = (-2,-2,2) = 2\underbrace{(-1,-1,1)}_{\vec{N}_2}$$

Un vector tangente a $C = S_1 \cap S_2$ en P es $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 0) = 2(-1, 1, 0)$$

$\therefore$ plano normal a C en $(1,1,1)$:

$$[(x,y,z) - (1,1,1)] \cdot (-1,1,0) = 0$$

$$\alpha : \; -x + y = 0$$

Es paralelo a

$$\pi : \; x - y = 15$$

pues las normales respectivas son paralelas

E3.- *a*) Demuestre que la ecuación $e^{x+y} - x^2 - 2yx = 2$ define, implícitamente, una curva en el plano, en un entorno del punto $Q = (1, -1)$.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto Q. Justifique sus cálculos.

a) Sea $F(x,y) = e^{x+y} - x^2 - 2yx$

- $F(1,-1) = e^{1-1} - (-1)^2 - 2(-1)(1) = 1 - 1 + 2 = 2$
- $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ pues

$$\left.\begin{array}{l} F'_x = e^{x+y} - 2x - 2y \\ F'_y = e^{x+y} - 2x \end{array}\right\} \text{son continuas en } \mathbb{R}^2$$

- $F'_y(1,-1) = e^{1-1} - 2.1 = -1 \neq 0$

De las 3 condiciones podemos decir que, por el Teorema de la Función Implícita, $F(x,y) = 0$ define una curva de la forma $y = y(x)$

b) Por el mismo teorema,

$$y'(1) = -\frac{F'_x(1,-1)}{F'_y(1,-1)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$\therefore$ recta tangente a la curva en $(1,-1)$:

$$y - (-1) = y'(1)(x-1)$$

O sea $\quad y = x - 2$

E4.- Sea $f(x,y) = x - y^2$. Estudie, justificando apropiadamente, los extremos de f en el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $\therefore$ si tiene ptos. críticos serán estacionarios

$$\begin{cases} f'_x = 1 \\ f'_y = -2y \end{cases}$$

Nunca se anulan simultáneamente

$\therefore$ f no tiene ptos. críticos en su dominio natural

$\therefore$ Sólo habrá extremos en el borde de $x^2 + y^2 \leq 4$

Si $x^2 + y^2 = 4$: $f\big|_{x^2+y^2=4} = x - (4 - x^2) = x - 4 + x^2$ para $x \in [-2, 2]$

$g(x) = x^2 + x - 4$ con $x \in [-2, 2]$ (intervalo cerrado)

$g'(x) = 2x + 1 = 0$ sii $x = -\frac{1}{2}$

$g(-\frac{1}{2}) = -\frac{17}{4}$ Mínimo Absoluto

$g(2) = 2$ Máximo Absoluto

$g(-2) = -2$

En $x^2 + y^2 = 4$: si $x = -\frac{1}{2}$, $y = \pm\sqrt{4 - (-\frac{1}{2})^2} = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

si $x = -2$, $y = 0$

$\therefore$ En $x^2 + y^2 \leq 4$, $f(x,y)$ tiene dos mínimos absolutos de valor $-\frac{17}{4}$ en $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$ y un máximo absoluto de valor 2 en $(-2, 0)$

T1.- a) ¿Qué es una *ecuación diferencial lineal de primer orden*?

b) Halle la solución de la EDO $y' - xy = x$ que pasa por $(2, 1)$.

a) Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son conocidos y $y = y(x)$ es la función incógnita

b) $y' - xy = x$ es una EDO lineal, pero también es de variables separables.

$$y' = x + xy$$

$$y' = x(1+y)$$

$y \equiv 1$ es solución pues $0 = x \cdot 0$

Si $y \neq -1$:

$$\int \frac{y'\, dx}{1+y} = \int x\, dx$$

$$\ln|1+y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = K e^{x^2/2} - 1$$

Por $(1,2)$:

$$2 = K e^{1/2} - 1 \quad \rightarrow \quad K = 3 e^{-1/2}$$

$$\therefore\ y(x) = 3 e^{x^2/2 - 1/2} - 1$$

es la solución buscada

T2.- a) ¿Qué significa, geométrica y analíticamente, que un campo $f(x,y)$ sea diferenciable en un punto (x_0, y_0) del interior de su dominio?

b) Analice si el campo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$. Justifique.

a) Geométricamente significa que la gráfica de $f(x,y)$ admite plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Analíticamente significa que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \right]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

b) En el E1) se vio que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. Como ésta es una condición necesaria de la diferenciabilidad, $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.