Capacidad y capacitores

Si tenemos un cuerpo conductor, por ejemplo una esfera de radio R y le suministramos distintos valores de carga $Q_1, Q_2, \ldots Q_N$ que traemos del infinito, definimos la Capacidad de esa esfera aislada del resto del universo como

Capacidad del conductor aislado $\quad C = \dfrac{|Q_i|}{|V_i - \underbrace{V_\infty}_{0}|}$, $[C] = \dfrac{[Q]}{[V]} = \dfrac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = F$ (Faradio)

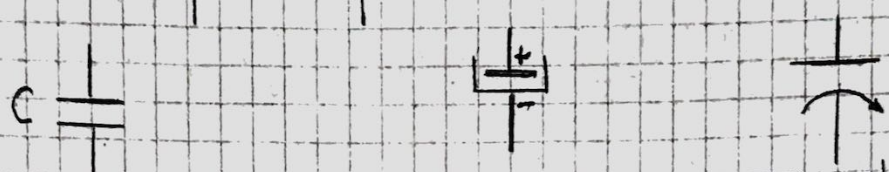
Para la esfera aislada es $\quad C = \dfrac{\cancel{Q}}{\dfrac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$

OBS 1: En la expresión anterior se observa que la capacidad depende solo del medio donde está el campo eléctrico (ε_0) y la geometría del conductor (R) pero no de la carga Q_i.

OBS 2: En este contexto resulta útil reemplazar la unidad de ε_0, $[\varepsilon_0] = \dfrac{C^2}{Nm^2} = \dfrac{C}{\frac{Nm}{C} \cdot m} = \dfrac{C}{Vm} = \dfrac{F}{m}$.

* La capacidad de todo capacitor es $C = \dfrac{|Q|}{|\Delta V|}$, donde Q: carga de una placa.
ΔV: dif. de pot. entre placas

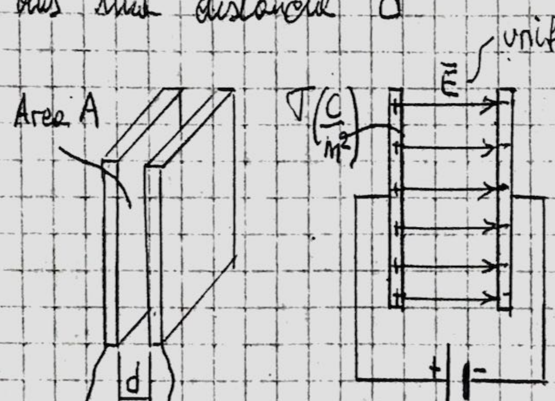
En la práctica se busca aumentar la capacidad de almacenar carga, a la vez que confinar el campo eléctrico en el interior de un dispositivo denominado CAPACITOR (o condensador). *
Consta de 2 placas o armaduras conductoras conectadas a terminales y un aislante (dieléctrico) entre ellos. Los hay de varios tipos, los símbolos para representarlos son:



Capacitor — Capacitor electrolítico polarizado — Capacitor Variable

Estudiaremos primero los capacitores en vacío (sin dieléctrico)

Capacitor plano: posee 2 placas conductoras de area A, separadas una distancia d



OBS: FEM (fuerza electromotriz), provee una diferencia de potencial ΔV

Al conectar la FEM, ésta lleva cargas ⊕ a una placa y ⊖ a la otra, de tal manera que entre las placas del capacitor se establece la dif. de potencial ΔV.
Las cargas se ubican en las superficies interiores de las placas.
Por ley de Gauss y principio de superposición se obtiene el

NOTA

campo en el interior del capacitor, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. La diferencia de potencial entre placas vale en módulo

$$|\Delta V| = \left|-\int_0^d E\,dx\right| = \left|-E\int_0^d dx\right| = E\,d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

y la capacidad

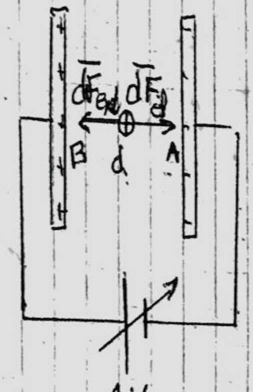
$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

Capacidad del cap. plano en vacío

La carga de una placa resulta (en módulo)

$$|Q| = C\,|\Delta V|$$

Energía de un capacitor cargado: basta unir sus terminales para ver una chispa, el capacitor almacena energía.



Para poder cargar el capacitor, el medio exterior debe hacer trabajo en contra de la fuerza eléctrica. Si el proceso se realiza cuasiestáticamente mediante una FEM (ΔV) variable, dicho trabajo queda acumulado en el capacitor como energía potencial electrostática U_C. Recordando la relación entre trabajo, carga a transportar y dif. de potencial

$$dW^{A\to B}_{F_{ext}} = dQ\,(V_B - V_A) = dQ\,\frac{Q}{C}$$ entonces

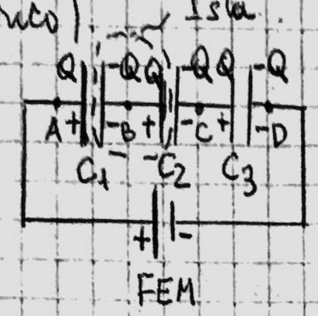
$$W^{A\to B}_{F_{ext}} = \int_0^Q \frac{Q}{C}\,dQ = \boxed{\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = U_C}$$

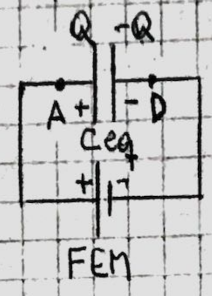
Energía del cap. cargado (J)

NOTA

Asociación de Capacitores

a) Serie: se conectan uno a continuación de otro compartiendo un solo terminal y los extremos a una diferencia de potencial (provista por una FEM u otra parte de un circuito eléctrico).





En el sistema original de la izquierda la FEM redistribuye las cargas de manera que entre A y D exista la diferencia de potencial fijada por ella (los conductores son volúmenes equipotenciales). Analizando las islas que se forman notamos que la carga de cada placa izquierda es +Q y derecha −Q (por conservación de carga). Todo el sistema puede ser reemplazado por un único capacitor denominado "equivalente" que tome la misma carga para la misma diferencia de potencial. Entonces

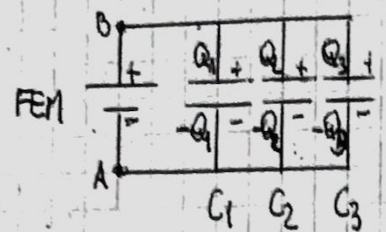
$$V_A - V_D = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D \Rightarrow \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

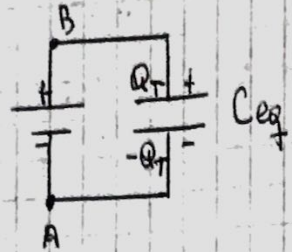
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Para N capac. en serie

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

b) Paralelo: se conectan compartiendo todos ambos terminales y ellos a la diferencia de potencial que resulta la misma para todos los capacitores. La carga que almacena el sistema es la suma de las cargas de cada capacitor. También puede ser reemplazado por un único capacitor C_{eq} que almacena Q_T para la misma ΔV.



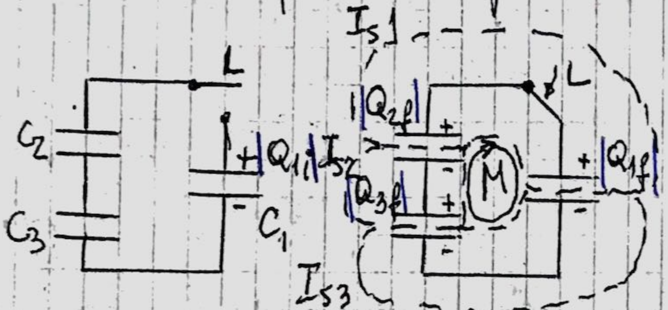


$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$C_{eq}(V_B - V_A) = C_1(V_B - V_A) + C_2(V_B - V_A) + C_3(V_B - V_A) \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Para N cap. en paralelo $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N}$

Método de mallas e islas: permite resolver configuraciones con capacitores sujetos a cambios de conexión entre ellos



$|Q_{1i}|$: carga inicial de C_1 en módulo
(Supongamos $Q_{2i} = Q_{3i} = 0$)

(M): Malla (camino cerrado)

$I_S 1$, I_{S2}: islas (conductores aislados del resto).

Ecuaciones de isla: aplicando principio de conservación de la carga. Nº ecuaciones $\overset{\text{lin. indep.}}{=}$ Nº islas del sistema $- 1$

Ecuaciones de malla: como $\bar{E}$ es conservativo, $\oint_M \bar{E} \cdot d\bar{r} = \sum \widetilde{\Delta V_j} = 0$, $\frac{Q_{jf}}{C_j}$
plantear ec. de mallas mínimas hasta completar el Nº de ecuaciones necesario. En este caso:

$I_S 1$: $|Q_{2f}| + |Q_{1f}| = |Q_{1i}|$

$I_S 2$: $-|Q_{2f}| + |Q_{3f}| = 0$

(M): $-\frac{|Q_{1f}|}{C_1} + \frac{|Q_{3f}|}{C_3} + \frac{|Q_{2f}|}{C_2} = 0$

NOTA

HOJA N°

FECHA

OBS: Las polaridades finales se suponen arbitrariamente, si al resolver algúna $|Q_{jf}|$ diera valor negativo, la polaridad real sería la opuesta. Los ΔV_j se plantean (+) para subidas de potencial y (−) para caídas, en el sentido en que circulamos por la malla. Una vez halladas las cargas finales podemos obtener ΔV_j y V_{cj}.