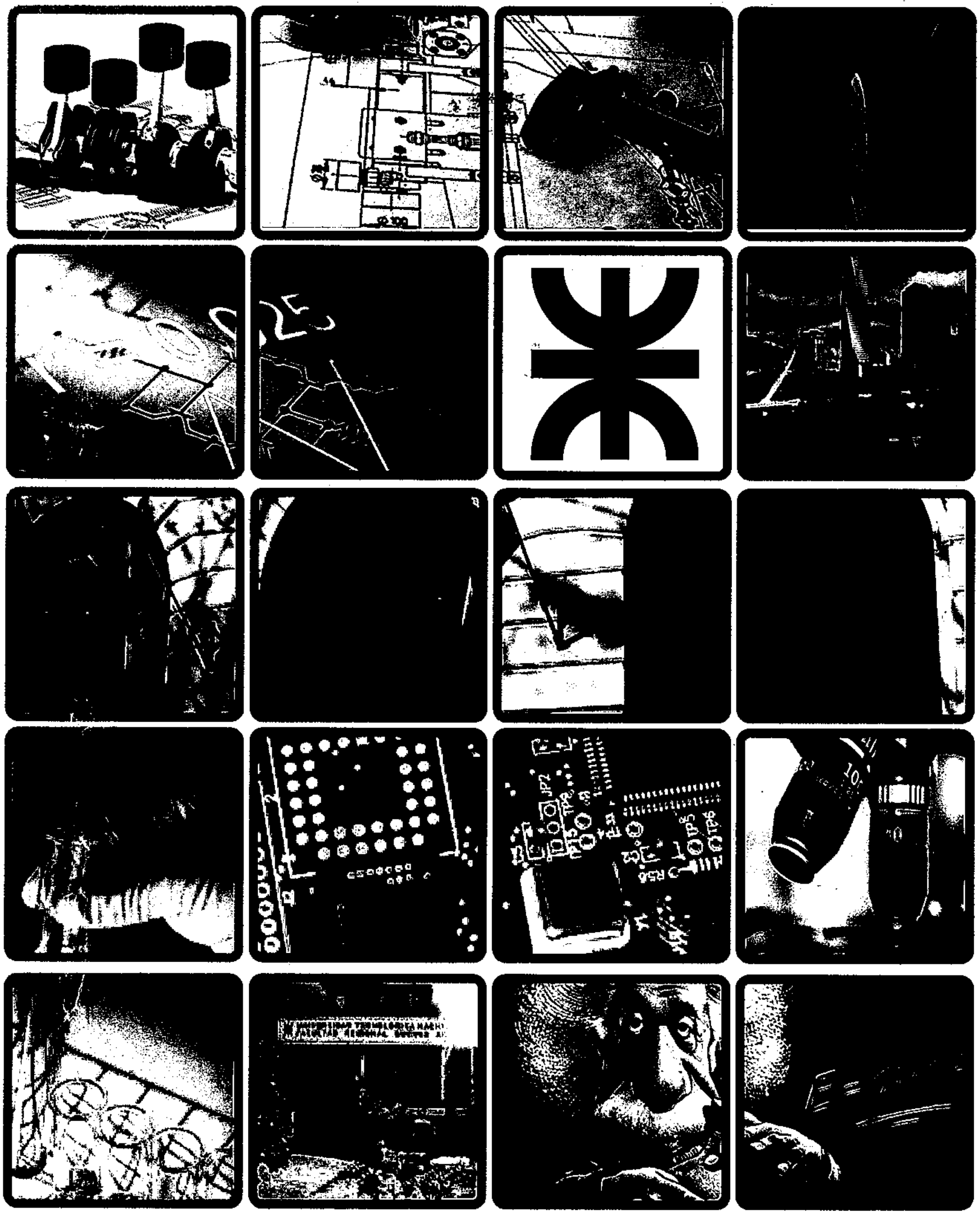


GUIA DE TP 0-1-2-3-4

ANALISIS MATEMATICO I

U.D.B. MATEMÁTICA BM1AP8

CENTRO de ESTUDIANTES de INGENIERIA TECNOLOGICA

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

CÁTEDRA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

N° 0, 1, 2, 3 y 4

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Directores de cátedra

Miguel Albione
Marta Anaya
María Inés Cavallaro
Débora Chan
Cristina Cossuti
Alejandro Hayes
Estela Lorusso
Armando Nuñez
Jorge Paruelo
Jorge Recchini
Maria Elena Trumbich
Pedro Vardanega
Blanca Vitale
Marta Zemleduch

Programa analítico de la materia

Unidad 1: Topología de la recta real. Funciones

Topología en $\Re$. Métrica en la recta real: valor absoluto o módulo. Definición. Propiedades. Conjuntos acotados. Cotas superior e inferior. Conjuntos mayorante y minorante. Extremos superior e inferior. Entorno y vecinal. Clasificación de puntos: interiores, exteriores, acumulación, frontera y aislados. Clasificación de conjuntos de números reales: abierto, cerrado. Función. Definición. Clasificación. Función inversa. Simetría. Desplazamiento y cambio de escala. Funciones especiales. Composición de funciones. Funciones hiperbólicas y sus inversas. Funciones definidas paramétricamente.

Unidad 2: Límite de funciones reales.

Definición de límite de una función en un punto. Unicidad. Propiedades. Álgebra de límites. Límites laterales. Infinitésimos: orden de infinitésimos. Operaciones con infinitésimos. Teoremas de intercalación y conservación de signo. Definición de límite en el infinito. Límites infinitos. Cálculo de límites que presentan distintos tipos de indeterminaciones.

Unidad 3: Funciones continuas

Definición de función continua en un punto. Discontinuidades evitables y no evitables. Extensión continua de una función. Funciones continuas en un intervalo abierto y en uno cerrado. Álgebra de funciones continuas. Propiedades locales de las funciones continuas. Teoremas de funciones continuas en un intervalo cerrado: Teorema de acotación, de Wierstrass, del valor intermedio, de Bolzano. Asíntotas.

Unidad 4: Funciones diferenciables

Definición de derivada de una función en un punto. La velocidad instantánea de una partícula. Condición necesaria de derivabilidad. Interpretación geométrica. Derivadas laterales. Función derivada. Ecuaciones de la recta tangente y normal a una curva en un punto. Derivabilidad de una función en un intervalo. Álgebra de derivadas. Reglas de derivación. Teoremas de derivación de funciones inversas y compuestas. Derivadas sucesivas. Derivadas de funciones definidas paramétricamente. Diferenciabilidad de una función en un punto. Diferencial de una función. Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad de una función en un punto. Interpretación geométrica. Aproximación lineal de una función en el entorno de un punto. Reglas de diferenciación. Aplicación de la derivada al cálculo de extremos. Teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy y L'Hôpital. Condición necesaria para la existencia de extremos relativos. Uso de las derivadas de primer y segundo orden para la determinación de extremos en puntos críticos. Análisis de concavidad y convexidad de la gráfica de una función. Puntos de inflexión, condición suficiente para su existencia. Trazado de curvas. Problemas de optimización. Polinomios de Taylor asociados a una función. Propiedades de los polinomios: linealidad, sustitución, derivación e integración (sin demostración). Cálculo con polinomios de Taylor. Resto de Lagrange. Aplicaciones. Estimación del error de truncamiento.

Unidad 5: Integral indefinida

Integral indefinida y primitivas de una función. Continuidad de la integral indefinida. Técnicas de integración: sustituciones diversas, fracciones simples, integración por partes.

Unidad 6: Cálculo integral

Introducción histórica de la integral definida. La integral de Riemann: particiones y sumas de Riemann. Integral inferior y superior de Riemann. Funciones integrables, definición y ejemplos. Condiciones de integrabilidad. Integrabilidad de las funciones monótonas y de las continuas. Propiedades de la integral de Riemann: linealidad y aditividad. Propiedades de positividad de la integral. Teorema del valor medio del cálculo integral. Función integral: teorema fundamental. Regla de Barrow. Cálculo de áreas. Aplicaciones físicas. Generalización para el cálculo de integrales definidas para funciones acotadas e integrables. Integrales impropias de primera y segunda especie. Convergencia. Valor principal de Cauchy. Comparación de impropias.

Unidad 7: Sucesiones, series numéricas y funcionales

Sucesión: definición. Convergencia. Sucesiones monótonas. Sucesiones acotadas. Uso del teorema de intercalación. El número e.

Definición de serie numérica. Ejemplos. Convergencia de una serie numérica. Propiedades de las series numéricas convergentes. Condición necesaria para la convergencia de una serie. Serie geométrica. Serie armónica y serie armónica generalizada. Criterios de convergencia para series de términos no negativos: comparación, de la raíz, del cociente, de la integral. Enunciación del teorema de que D'Alembert implica Cauchy. Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional. Teorema de Leibniz. Series funcionales: presentación. Series de potencias. Radio de convergencia. Propiedades de las funciones definidas por series de potencias. Serie de Taylor de una función. Operaciones con series de potencias. Aplicaciones al cálculo del número e y logaritmos.

Bibliografía recomendada

Smith, R. Minton, R. (2003) Cálculo – Volumen 1 – 2ª edición. Mc Graw Hill, México.

Leithold, L. (1999) El Cálculo – EC7 – Oxford University Press, México.

Stewart, J. (1998) Cálculo. International Thomson Editores. México.

PRACTICA 0

Esta práctica 0 es una revisión de conocimientos básicos sobre el concepto de función. Los ejercicios que acá se presentan no serán tratados en las clases sino que se proveen para que los cursantes los lleven a cabo por su cuenta y consulten con el docente en caso de que aparezcan dificultades.

1) Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x-1}{|x|} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ c) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

2) Determinar el conjunto imagen, los ceros y signos de la función:

a) $y = -3 - x^2 + 4x$ b) $y = \dfrac{sg\left[(x+2)(x-3)\right]}{x-1}$ (*sg* se lee "signo")

3) Determinar dominio e imagen de manera que exista la función inversa y hallarla:

a) $f(x) = 3\,|x-1|^2$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$

4) Determinar analíticamente si las funciones son pares o impares.

a) $f(x) = x - 3x^3$ b) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$ c) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

5) Para cuestionarse:

¿Toda función inyectiva es impar?
¿Toda función impar es inyectiva?
¿Una función par puede ser periódica? ¿Y una impar?
¿Una función puede ser par y biyectiva?
¿Una función puede ser periódica e inyectiva?

6) Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, determinar dominio e imagen de cada una para que existan fog y gof y hallarlas.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$; $g(x) = (x-4)^2$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$; $g(x) = \sqrt{3-x}$
c) $f(x) = senx$; $g(x) = x^2$

7) Si $fog(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x^2 - 4)}$

a) Dar al menos dos posibles funciones f y dos funciones g que satisfagan la composición anterior.

b) Hallar dominio e imagen de las funciones f y g halladas.
c) Determinar $gof(x)$, si es posible.

8) Dadas las funciones $f:\Re \to \Re / f(x)=2x+3$ y $g:\Re \to \Re / g(x)=x^2$, calcular:

a) f^{-1}
b) $f+g$ y $f.g$
c) $f \circ g$ y $g \circ f$

9) Dadas las funciones $f(x)=|x|-1$ y $h(x)=-x^2+1$, determinar:

a) Dominio de cada una de ellas.
b) Gráfica de cada una de ellas.
c) Las coordenadas de los puntos de intersección.

10) Sea $f(x)=\begin{cases} x^3 & si \;\; x \geq 1 \\ x(x+1) & si \;\; x<1 \end{cases}$ determinar sus ceros y el conjunto imagen.

11) Sea $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \; x>2 \\ 3 & si \; -2<x<2 \\ -2x+1 & si \; -5<x<-2 \end{cases}$ determinar el dominio, ceros, conjunto imagen y trazar su gráfica.

12) Completar el siguiente cuadro para las funciones $f_i : D_f \to \Re$

Ecuación	Dominio	Ceros	Paridad	Período	Imagen
$f_1(x)=senx$					
$f_2(x)=\cos x$					
$f_3(x)=tgx$					
$f_4(x)=sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$					
$f_5(x)=\cos(x-\pi)$					
$f_6(x)=sen^2 x$					
$f_7(x)=\cos 2x$					
$f_8(x)=\lvert senx \rvert$					
$f_9(x)=\cos\lvert x \rvert$					

13) Completar el siguiente cuadro para las funciones $f_i : D_f \to \Re$

Ecuación	Dominio	Ceros	Paridad	¿es acotada?	Imagen
$f_1(x) = 5$					
$f_2(x) = \frac{\lvert x \rvert}{x}$ (signo de x)					
$f_3(x) = \frac{1}{x}$					
$f_4(x) = \frac{1}{x^2}$					
$f_5(x) = \lvert x^3 \rvert$					
$f_6(x) = ent(x) = [x]$ (parte entera)					
$f_7(x) = mant(x) = x - [x]$ (mantisa)					
$f_8(x) = \sqrt{x}$					
$f_9(x) = \sqrt{3-x}$					
$f_{10}(x) = \frac{1-x}{3+x}$					
$f_{11}(x) = \frac{11x-6}{33x-99}$					
$f_{12}(x) = \frac{\lvert x-1 \rvert}{x-1}$					

14) Determinar el dominio, los ceros y, donde sea posible, la función inversa de las siguientes funciones. Graficar.

a) $f(x) = \log x$

b) $f(x) = \ln x$

c) $f(x) = \ln(1-x)$

d) $f(x) = \log\lvert x \rvert$

e) $f(x) = \ln x + 2$

15) Determinar el dominio, los ceros y la función inversa, si existen, y trazar la gráfica de:

a) $g(x) = e^x$

b) $g(x) = e^{x-1}$

c) $g(x) = e^x - 1$

d) $g(x) = 10^x$

e) $g(x) = 10^x - 10$

16) Completar el siguiente cuadro.

Ecuación	Dominio	Ceros
$f(x)=\log(x-2)+\log x-\log 8$		
$h(x)=\log(2x^2+7x+3)$		
$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$		
$t(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$		
$s(x)=\sqrt{\ln(e^{2x}-1)}$		

17) Calcular el dominio y los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3^{x-1}-9$

b) $f(x)=5^{x+2}+3.5^{x+1}-8$

c) $f(x)=4^x-2^{x+1}+8$

d) $f(x)=\log(2x)-2\log(4x-15)$

e) $f(x)=x^{\log x}-100x$

f) $f(x)=\log\left(\dfrac{1}{2}+x\right)-\log\dfrac{1}{2}+\log x$

PRÁCTICA 1

Funciones hiperbólicas

1) Sean las funciones: $f(x) = senh(x)$ (seno hiperbólico de *x*), $g(x) = \cosh(x)$ (coseno hiperbólico de *x*) y $h(x) = \tanh(x)$ (tangente hiperbólica de *x*), se pide:

a) Obtener los correspondientes dominios. Analizar la existencia de ceros en cada una y determinar su paridad. Realizar una gráfica aproximada de cada una de ellas.

b) Demostrar que: $\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$ para todo valor de *x*.

c) Analizar si son, o no, biyectivas. En el caso de no serlo efectuar las restricciones necesarias para obtener la función inversa de cada una de ellas y determinar dichas funciones inversas.

Aplicaciones de funciones

<u>NOTA</u>: En todos los ejercicios donde el concepto de función se aplica en Física, Biología, etc. se deberá hacer un análisis de las unidades con las que se trabaja: determinando aquellas que corresponden tanto a las variables como a las constantes involucradas en cada expresión.
Adoptaremos como convención no escribir las unidades en las expresiones para dejar más claro el problema matemático. También debe tenerse en cuenta que en las aplicaciones las unidades en las que se expresa cada magnitud deben ser homogéneas para poder realizar los cálculos.

2) Halle la expresión del área de un triángulo equilátero en función de su perímetro.

3) Halle la expresión del área de un hexágono regular en función del radio de la circunferencia en la que está inscripto.

4) Se supone que la población de cierta ciudad responde a un modelo de crecimiento tal que si ***t*** es la cantidad de años transcurridos desde 1980 en adelante, la cantidad de personas que viven en la ciudad un tiempo ***t*** es $h(t) = 4600\,(1{,}016)^t$ habitantes. Determinar:

a) ¿Cuál será la población en 2020?
b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la población existente en 1980?

5) Cierto elemento radioactivo tiene una vida media de 1690 años. Empezando con 30 miligramos habrá $q(t) = 30\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$ miligramos, después de *t* años. (Se conoce como vida media al tiempo necesario para que desaparezca la mitad de la sustancia inicial).
Determinar:

a) La constante *k*.
b) ¿Cuántos miligramos de sustancia habrá después de 2500 años?

6) La intensidad de corriente en un circuito eléctrico está gobernada por la función $i(t) = 30\ sen(100\pi\, t)$ amperes, donde *t* es el tiempo medido en segundos, determinar:

a) El período.
b) La máxima intensidad de corriente.
c) ¿Cuántos períodos hay en un segundo?

7) En el circuito anterior ahora la intensidad de corriente está gobernada por la función $i(t) = 30\ sen[100\pi\,(t-0{,}2)]$ amperes, donde *t* es el tiempo medido en segundos. Determinar el valor positivo más pequeño de *t* para que la corriente sea de 15 amperes.

8) Un objeto viaja por una vía circular, centrada en el origen, con velocidad angular constante. La coordenada ***y*** de la posición del objeto en función del tiempo *t* medido en segundos es dada por $y(t) = 2\cos\left(\pi\, t - \frac{\pi}{12}\right)$ cm. ¿En qué tiempo *t* el objeto cruza el eje *x*? ¿Existe un solo *t*?

Conjuntos y puntos en $\Re$

9) Graficar sobre la recta real:

a) |x-3|= 2   b) |x+5| < 3   c) |x+2| ≥1   d) |2x+1| ≤ 3

10) Determinar los conjuntos que se indican y graficarlos sobre la recta real:

a) E(2;3)   b) E'(2;3)   c) E(-1;2)   d) E'(-1;2)

11) a) Hallar sin hacer cuentas (graficando sobre la recta por ejemplo):

E(1;5) ∩ E(-1;4)

b) Expresar el conjunto anterior como el entorno de un punto de radio conveniente.

12) Dado el conjunto A = (-3,5]

a) Determinar el conjunto mayorante (conjunto de cotas superiores) y el conjunto minorante (conjunto de cotas inferiores).
b) Determinar, si posee, supremo e ínfimo.
c) Determinar, si tiene, mínimo y máximo.

13) Dado el conjunto $A = \left\{ x \in \Re \,/\, x = \frac{1}{n},\ n \in N \right\}$

a) Dar algunos elementos del conjunto.
b) Determinar los conjuntos mayorante y minorante.

c) Determinar, si posee, supremo e ínfimo.
d) Determinar, si tiene, mínimo y máximo.

14) Dado el conjunto A = [-2, 5) ∪ {8}

a) Determinar el conjunto de puntos interiores de A.
b) Determinar el conjunto de puntos frontera de A.
c) Determinar el conjunto de puntos de acumulación de A.
d) Determinar el conjunto de puntos aislados de A.

15) Dado el conjunto $A = \left\{ x \in \Re / x = \frac{1}{n}, n \in N \right\}$

a) Hallar el conjunto de puntos interiores, el de puntos frontera, el de puntos de acumulación y el de puntos aislados.

[illegible] corrección

b) Demostrar que cero es punto de acumulación del conjunto A.

16) Justificar por qué un punto aislado no puede ser punto de acumulación de un conjunto.

17) Justificar por qué decir que un conjunto tiene cota superior e inferior es equivalente a afirmar que la distancia entre cualquier par de puntos del conjunto es finita.

18) a) Demostrar que si $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, se verifica que: $x \in E'(3, \delta) \Rightarrow (2x+1) \in E(7, \varepsilon)$

es decir: $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |2x+1-7| < \varepsilon$

b) Si $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{10}$ ¿la implicación sigue siendo verdadera?

19) Demostrar que dado cualquier número ε positivo, siempre es posible hallar un valor positivo δ tal que:

$$|x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x - 1\right| < \varepsilon$$

PRÁCTICA 2 (Límite funcional)

1) Dadas las funciones:

$f:\Re \to \Re / f(x) = -x+3$

$g:\Re-\{2\} \to \Re / g(x) = \dfrac{-x^2+5x-6}{x-2}$

$h:\Re \to \Re / h(x) = \begin{cases} -x+3 & si\ x \neq 2 \\ -1 & si\ x = 2 \end{cases}$

$k:\Re \to \Re / k(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

a) Graficarlas

b) Teniendo en cuenta las gráficas completar:

b1) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ b2) $\lim_{x\to 2} g(x) = 1$ b3) $\lim_{x\to 2} h(x) = 1$ b4) $\lim_{x\to 2} k(x) = \nexists$

? c) Comparar el comportamiento de las funciones en un $E'(2;\delta)$ y en $x = 2$.

d) Escribir la definición de límite para las funciones del inciso b, en los casos en que exista. lo de h como es?
c

2) Siendo g la función del ejercicio 1

a) Obtener algunos δ (radio del entorno reducido con centro 2) para $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$

b) Graficar lo obtenido en a)

c) Demostrar por definición que: $\lim_{x\to 2} g(x) = 1$

3) Demostrar por definición los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} (2x-3) = -1$ b) $\lim_{x\to -2} (-3x+1) = 7$ c) $\lim_{x\to a} k = k$ (k constante real)

d) $\lim_{x\to a} (mx+b) = ma+b \quad (m \neq 0)$ e) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ f) $\lim_{x\to 1} 5(x-1)^2 + 2 = 2$

4) Si $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 1{,}99 & x < 1 \end{cases}$

a) Representar f en $[0,2]$

b) Hallar δ , si es posible, tal que $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ con

a) $\varepsilon = 0{,}5$ b) $\varepsilon = 0{,}1$ c) $\varepsilon = 0{,}0001$

c) Tomando como base los resultados obtenidos analíticamente en 4.2.
¿Es posible afirmar que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$?

5) Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \text{ (racionales)} \\ -1 & \text{si } x \in I \text{ (irracionales)} \end{cases}$

a) Demostrar utilizando la definición de límite que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$

b) Demostrar utilizando la definición de límite que $\lim_{x \to 0} f(x) \neq -1$

¿ Existe $L \in R$ tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = L$?

6 Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Q \text{ (racionales)} \\ 0 & \text{si } x \in I \text{ (irracionales)} \end{cases}$ ¿Existe $L \in \Re$ tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = L$?

En caso afirmativo demostrar por definición.

7 a) Visualizar gráficamente los límites de las siguientes funciones elementales:

$\lim_{x \to a} k = k$ con $k \in R$ (demostrado en 3-c)	$\lim_{x \to a} x = a$ (demostrado en 3-d)
$\lim_{x \to a} x^n = a^n$ con $n \in N$	$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ con $n \in N \wedge (a > 0$ si n es par)
$\lim_{x \to a} \log_b x = \log_b a$ con $a, b \in R^+$, $b \neq 1$	$\lim_{x \to a} b^x = b^a$ con $b \in R^+$
$\lim_{x \to a} sen\, x = sen\, a$	$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$
$\lim_{x \to a} arcsen\, x = arcsen\, a$ con $a \in (-1\,;\,1)$	$\lim_{x \to a} \arccos x = arc\cos a$ con $a \in (-1\,;\,1)$
$\lim_{x \to a} arctg\, x = arctg\, a$ con $a \in R$	$\lim_{x \to a} \lvert x \rvert = \lvert a \rvert$

b) Sabiendo que $\lim_{x \to a} f(x) = l$, ejemplificar cada una de las siguientes propiedades de límites:

1- $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = l^n$ con $n \in N$

2- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ con $n \in N \wedge (l > 0$ si n es par)

3- $\lim_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b l$ con $l, b \in R^+$, $b \neq 1$

4- $\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^l$ con $b \in R^+$

5- $\lim_{x \to a} sen\, f(x) = sen\, l$

6- $\lim_{x \to a} \cos f(x) = \cos l$

7- $\lim_{x \to a} arcsen\, f(x) = arcsen\, l$ con $l \in (-1\,;\,1)$

8- $\lim_{x \to a} arc\cos f(x) = arc\cos l$ con $l \in (-1\,;\,1)$

9- $\lim_{x \to a} arc\,tg\, f(x) = arc\,tg\, l$ con $l \in R$

10- $\lim_{x \to a} \lvert f(x) \rvert = \lvert l \rvert$

c) Enunciar en lenguaje coloquial las siguientes propiedades algebraicas de los límites y ejemplificar:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x \to a} g(x) = L_2$ con $L_1, L_2 \in R$ entonces:

1- $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L_1 + L_2$

2- $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = L_1 - L_2$

3- $\lim_{x\to a}[k.f(x)] = k.L_1$ con $k \in R$

4- $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = L_1.L_2$

5- $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = L_1 / L_2$ con $L_2 \neq 0$

6- $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2}$ cuando exista $L_1^{L_2}$

8) Utilizando las propiedades algebraicas de los límites y el límite de las funciones elementales enunciadas en el ejercicio 7, calcular los siguientes límites (indicando las propiedades utilizadas):

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^3+3x-4}$ = 0

b) $\lim_{x\to \pi/6} tg(2x)$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{sen(x-3)+e^{x^2}}{\ln(x-2)+x^3-8x}$

d) $\lim_{x\to 1} \left((1+x).\sqrt{3-x}\right)^{\frac{x}{x+3}}$

9) Calcular los siguientes límites (indeterminaciones del tipo 0/0)

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3+x}}{x}$

d) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$

e) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^5+x^3-3x+1}$

g) $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right]^{\frac{-x^2+1}{x-1}}$

h) $\lim_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

10)

a) Definir infinitésimo

b) Determinar en que valores de x las siguientes funciones son infinitésimos:

b1) $f(x) = x^3 - x$

b2) $f(x) = e^x + 1$

b3) $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

11) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x \le 1 \\ 3x-5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Graficar f

b) Determinar los siguientes límites:

b1) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

b2) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

c) Expresar formalmente lo que obtuvo en b.

d) Demostrar por definición los dos límites laterales hallados.

12) Investigar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} sg(x-3)$ (función signo)

b) $\lim\limits_{x\to 3} [x]$ (función parte entera)

c) $\lim\limits_{x\to 2,5} [x]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2}{|x|}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+x^2}{|x|}$

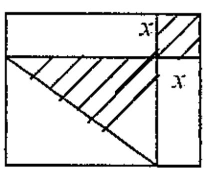
f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{(x-2)}$

13) Si $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 4 \wedge \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 7$. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x^3-x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x^3-x)$

14) Dada $g: D_g \to \Re \ / \ g(x) = \begin{cases} |x-2|+1 & si \ \ x>2 \\ -|x-1| & si \ \ x<2 \end{cases}$; investigar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

15) La figura es un cuadrado de lado 10 y x es un número real que verifica que 0<x<10.



a) Razonando geométricamente averiguar a que valor se acerca el área sombreada si x se acerca a 0. Idem si se acerca a 10.

b) Hallar la expresión del área sombreada A(x) y calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} A(x)$ y $\lim\limits_{x\to 10^-} A(x)$ y corroborar los resultados de a)

16)

a) Siendo $f(x) = \begin{cases} -bx & \text{si } x \le -1 \\ x^2+ax & \text{si } -1 < x \le 2 \\ -bx+a & \text{si } \ x>2 \end{cases}$ determinar las constantes *"a"* y *"b"* para que existan los límites en $x=-1$ y en $x=2$.

b) Sea $g(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{si x} \le -1 \\ -x^2+1 & \text{si } |x| < 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si x} \ge 1 \end{cases}$

Calcular si existen $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1/e} g(x)$

17) a) Enunciar formalmente e interpretar en forma geométrica el teorema de intercalación o del "sandwich".

b) Teniendo en cuenta a) demostrar la siguiente propiedad

$$\forall x \in E'(a,r) \ \ \exists k \in \Re^+ \ / \ |f(x)| \le k \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = 0$$

(coloquialmente: infinitésimo por acotada es igual a un infinitésimo)

18)

a) Calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, si $\forall x \in E'(2;\delta)$ *con* $\delta > 0 : |f(x) - 7| \le 5(x-2)^2$.

b) Calcular $\lim\limits_{x \to \pi} [f(x) \operatorname{sen} x]$, si $\forall x \in \Re : f^2(x) \le 9$

c) Si $\forall x \in \Re - \{a\} : f(x) \le k|x - a|$ con $k > 0$ demuestre que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

d) Sea $f : R \to R$ tal que $\forall x \in R : x^2 - \frac{3}{4}x^4 \le f(x) \le x^2$. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$

19) a) Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

b) Utilizando a) calcular:

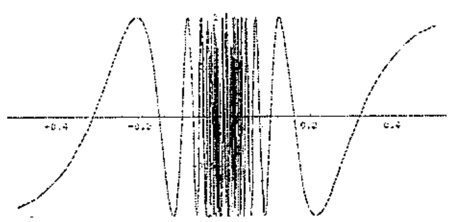
b1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(4x)}{x}$ b2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(6x)}{sen(4x)}$ b3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x}$

b4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x}$ b5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arc\,sen(4x)}{x}$ b6) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{sen\,x}{x - \pi}$

20) a) Sea $f : D \subseteq R \to R \,/\, f(x) = sen(1/x)$

a1) Hallar $x \in D : f(x) = 0$ a2) Hallar $x \in D : f(x) = 1$ a3) Hallar $x \in D : f(x) = -1$

a4) La gráfica de *f(x)* es:



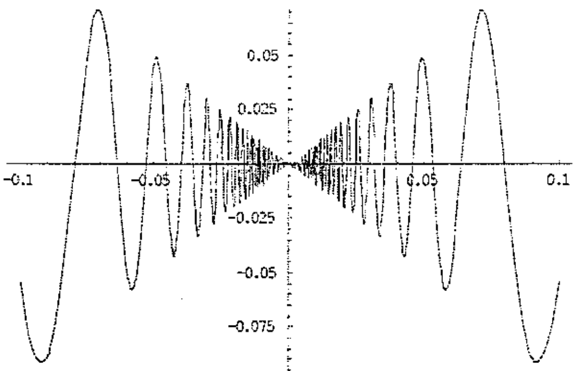
Interpretar en el gráfico las respuestas de los ítems anteriores

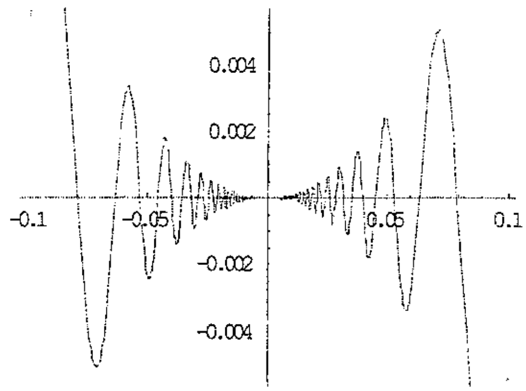
a5) ¿qué se puede decir del $\lim\limits_{x \to 0} sen(1/x)$?

b) Sean $g(x) = x.sen(1/x)$ y $h(x) = x^2.sen(1/x)$

b1) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} x.sen(1/x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sen(1/x)$

b2) Identificar los gráficos de $g(x)$ y $h(x)$, e interpretar en los mismos el ítem b1)





21) Dada $f:\Re-\{3\}\rightarrow\Re\,/\,f(x)=\dfrac{5}{x-3}$

a) Graficar f con dominio $[1;3)\cup(3;5]$

b) Calcular

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to3} f(x)=$

c) Expresar formalmente los límites anteriores

d) Demostrar utilizando la definición.

Idem a y b para $g(x)=\dfrac{5}{(x-3)^2}$, $h(x)=\dfrac{-5}{|x-3|}$, $s(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-3} & si\ x>3\\ x & si\ x\le 3\end{cases}$

22) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

a) ¿Es posible conocer los siguientes límites?

a1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ ∞ $\qquad$ a2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ ∞ $\qquad$ a3) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$ NO NO $K=0$

a4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ 0 $\qquad$ a5) $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x)$ si k=0 ∞ $\qquad$ a6) $\lim\limits_{x\to a} 1/g(x)$ 0

b) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ ¿Es posible conocer los siguientes límites?

b1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ $\qquad$ b2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ $\qquad$ b3) $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$ $\qquad$ b4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$

23) Dada $f:\Re-\{0\}\rightarrow\Re\,/\,f(x)=\dfrac{5}{x}+2$

a) Graficar f en su dominio.

b) Determinar

b1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ $\qquad$ b2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ $\qquad$ b3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$

c) Expresar formalmente los límites anteriores.

d) Demostrar utilizando la definición.

Idem a y b para $s(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-3} & si\ x>3\\[2mm] \dfrac{1}{x-5}+2 & si\ x\le 3\end{cases}$

24) a) Calcular los siguientes límites.

a1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ a2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ a3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

a4) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x$ a5) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$ a6) $\lim\limits_{x\to\infty}3^x$

b) Completar:

$Si\ \ r>1,\ entonces\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} r^x = ...+\infty...\\ \lim\limits_{x\to-\infty} r^x = ...0...\end{cases}$ $\qquad Si\ \ 0<r<1,\ entonces\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} r^x = ...0...\\ \lim\limits_{x\to-\infty} r^x = ...+\infty...\end{cases}$

25) Para las siguientes funciones calcular, si existen: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

a) $f(x)=x^3-2x$ b) $f(x)=-x^3-2x$ c) $f(x)=x^4-2x^2$

d) $f(x)=2-e^{-x}$ e) $f(x)=arctg(x)$ f) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(3-x)}$

26) Calcular, si existen, los siguientes límites e interpretar geométricamente a partir de los resultados obtenidos:

a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} e^{-\frac{1}{|x-1|}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} arctg(1/x)$

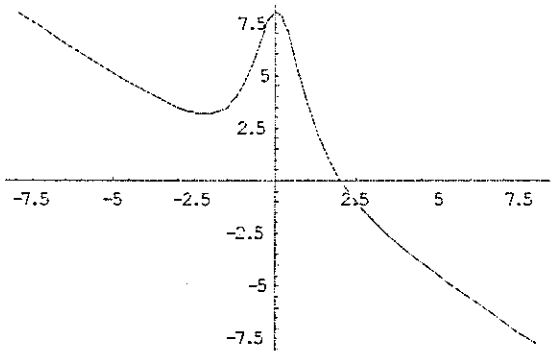
27) a) Calcule los siguientes límites:

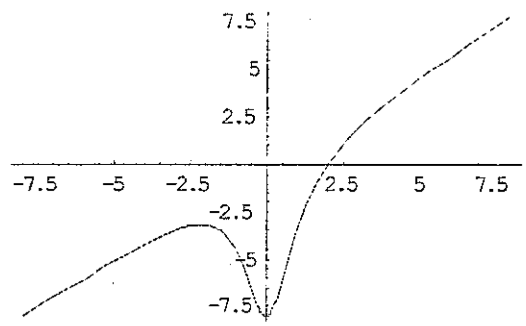
a1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-2}{4x^3-x+3}$ a2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^3-x+4}{-x^3-x+10}$

a3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2+x-1}{3x^2-2x+7}$ a4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x-1|+3x^2}{|x^2-3|}$

b) Completar: si $a_p.b_q\ne 0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_px^p}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_qx^q}=\begin{cases}...0... & si\ p<q\\ ...\infty... & si\ p>q\\ ...\frac{a_p}{b_q}... & si\ p=q\end{cases}$

c) Analizando el comportamiento de la función $f(x)=\dfrac{-x^3+8}{x^2+1}$ en el $\pm\infty$, indicar cuál de los siguientes gráficos corresponde a la misma.





28) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2+1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$

29) a) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, probar que $\lim\limits_{z\to 0^+}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

b) Calcular los siguientes límites

b1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ b2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)^{x}$ b3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{3/x}$

b4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{-3/x^3}$ b5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$ b6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

? b7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ b8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$ b9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

30) En cada caso determinar si existe indeterminación, indicar de qué tipo y de ser posible calcular el límite indicado.

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^{\frac{1}{x}}-2}{4+7^{\frac{1}{x}}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-1}\right)^{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2}{2-3^{\frac{1}{x+1}}}$ e) $\lim\limits_{x\to -3} \left[(x+3)^2\, sen\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+3}}\right]$ f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$ con $a>0 \wedge a\neq 1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{2}{x^2}}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}.sen(2x)$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{sen(2x)}$

j) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)^{2x+1}$ k) $\lim_{x\to 0}\frac{5x - arc\,sen x}{5x + arc\,tg\,x}$ l) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}$

m) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$ n) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{sen\,x}{x}}{1+\cos^2 x}$ o) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x+|x|)}{x^2}$

HACER

31) Determinar para qué valores de la variable independiente las siguientes expresiones dadas en cada caso son infinitésimos simultáneos. En dichos casos compararlos.

a) $\alpha(x)=\cos x$ y $\beta(x)=\frac{\pi}{2}-x$

b) $\alpha(x)=1-tgx$ y $\beta(x)=x-\frac{\pi}{4}$

c) $\alpha(x)=\frac{1}{x^2+3x-2}$ y $\beta(x)=\frac{2}{4x^3+x^2-x+3}$

d) $\alpha(x)=sen(x-1)$ y $\beta(x)=|x-1|$

32) Determinar el/los valor/es real/es de a para que $\varphi(x)=1-\cos x$ y $\mu(x)=a.tg^2x$ sean infinitésimos equivalentes.

33) a) Determinar valores de a y b tales que $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$

b) Analizar para qué valores de $n\in N$ el siguiente límite es finito $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)sen\,x}{x^n}$

34) Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}(x^2+1)}{g(x)}$ si $\forall x\in\Re: x^2+1\le g(x)$. Justificar adecuadamente.

35) Marcar con una cruz la respuesta correcta y argumentarla.

	No existe	=1	=0	∞
$\lim_{x\to 0} x.sen(1/x)$			X	
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)$			X	
$\lim_{x\to\infty} sen\,x$	X			
$\lim_{x\to\infty} x.sen\,x$	X			

36) Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar la respuesta:

a) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = l \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) \wedge \exists \lim_{x\to a} g(x)$

b) $\exists \lim_{x\to a} f(x) \;\wedge\; \lim_{x\to a}[f(x).g(x)] \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} g(x)$

c) $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f(z+a) = l$

d) $\exists \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \wedge \exists \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

e) $\lim_{x\to a} f(x) = l \leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = |l|$

Aplicaciones del concepto de límite

37) En un circuito eléctrico la corriente **i** que circula obedece a la ley:

$i(t) = 5 + 2e^{-t} sen(\pi t)$, donde **t**: tiempo, $t \geq 0$ .se mide en segundos e i en amperes

Al respecto, se desea saber:

¿En qué instante de tiempo, la corriente vale 5 amperes?

¿Qué sucede con la corriente con valores de t muy grandes?

Graficar *i(t)*.

38) La fuerza de repulsión entre 2 cargas eléctricas puntuales unitarias del mismo signo sigue la ley de Coulomb $F(r) = \dfrac{k}{r^2}$ siendo:

k: constante, $k > 0$ r:distancia entre las carga; $F(r)$:módulo de la fuerza repulsiva donde por ejemplo r se mide en metros y F en Newton

a) ¿Qué sucede con F cuando las cargas se encuentran muy próximas?

b) Idem, cuando las cargas se encuentran muy alejadas.

c) Graficar *F(r)*.

39) Al retirar un bizcochuelo del horno, su temperatura fue de 300°C. Luego se permitió que se enfriara, dejándolo a temperatura ambiente (30 °C). Si se sabe que la ley de enfriamiento es $T(t) = 30 + Ae^{kt}$ donde **t** representa el tiempo [minutos], y T la temperatura [°C], se desea establecer:

a)¿Cuál es el valor de la constante A en la ecuación?

b) Hallar el valor de k, sabiendo que T(3)=200°C

c) ¿A qué tiempo la temperatura sería de 31°C?

d) Graficar T(t).

40) Un objeto de masa **m** se deja caer desde el reposo. Su velocidad **v** al cabo de un cierto tiempo **t**, teniendo en cuenta la resistencia del aire, viene dada por:

$$v(t)=\frac{mg}{r}(1-e^{-\frac{rt}{m}})$$

En la ecuación, [v]=m/seg; [t]=seg; **g**: aceleración de la gravedad; **r**: coeficiente de resistencia (r>0). Tener en cuenta que si r =0 no habría resistencia, y ello sucede sólo si el objeto cayera en el vacío. Al respecto, se desea establecer lo siguiente:

a) Valor del $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$

b) Graficar v(t).

c) Considerando que t es fijo y r es variable, hallar $\lim\limits_{r\to 0^+} v(r)$

d) Dado que en el vacío v(t)=g t, siendo la velocidad inicial nula, hallar:
Valor del $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$

e) Graficar v(t).

41) La fuerza gravitacional ejercida la Tierra sobre una masa m, a una distancia r del centro del planeta viene dada como: $F(r)=\begin{cases}\dfrac{GMrm}{R^3} & si \quad r<R\\ \dfrac{GM\ m}{r^2} & si \quad r\geq R\end{cases}$

siendo **M** masa en la tierra (medida en kg), **R**: radio de la tierra (medido en m), **G** la constante gravitatoria(G=6.67392X10^{-11} m^3 / seg^2.kg) Al respecto:

a) Hallar $\lim\limits_{r\to R} F(r)$

b) Hallar $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r)$

c) Graficar F(r).

42) En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula **m** , con velocidad **v** , viene dada por la siguiente expresión: $m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, siendo **c:** velocidad de la luz, **m$_0$**: masa de la partícula en reposo, y el valor de **v** es tal que $0\leq v<c$.(v y c medidas en las mismas unidades, por ej.:m/seg). Se desea establecer lo siguiente:

a) Hallar $\lim\limits_{v\to 0^+} m$

b) Hallar $\lim\limits_{v\to c^-} m$

PRÁCTICA 3 (asíntotas y continuidad)

1) Hallar las asíntotas lineales de las gráficas de las siguientes funciones

a) $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+2}$ A.V: $x=-2$ A.O: $y=x$	e) $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-5}{2^{\frac{1}{x}}+5}$	i) $f(x)=\frac{3^{-x}+2}{3^{-x}-2}$
b) $f(x)=\ln\left[\frac{e.x^2+2}{x^2+6}\right]$	f) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$	j) $f(x)=\frac{9-x^2}{x\,(\lvert x\rvert-3)}$
c) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$	g) $f(x)=\ln\,(1-x^2)$	k) $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x^2-1}$
d) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$	h) $f(x)=\frac{4x^3-1}{2x^2-1}$	l) $f(x)=\frac{2}{\ln(x+3)}$

2) Indicar si es V o F justificando la respuesta

a) Si P es un polinomio cualquiera, entonces la función: $f(x)=\frac{P(x)}{x-2}$ tiene asíntota vertical de ecuación x=2 **F**

? b) Todas las funciones racionales tiene por lo menos una asíntota vertical.

c) Las funciones polinómicas no tienen asíntotas. **V**

d) Si f tiene asíntota vertical en x=b, entonces no está definida en b **F**

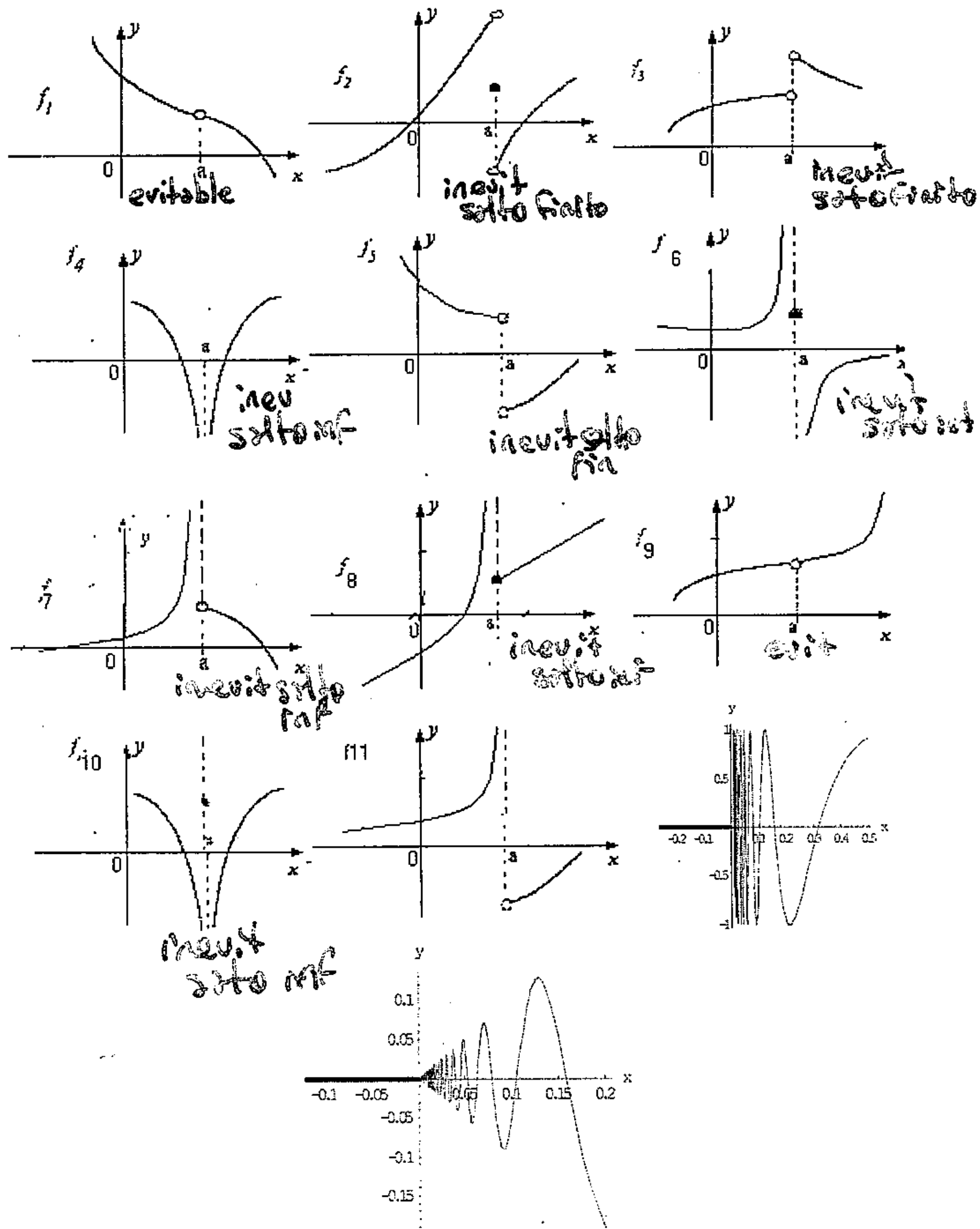
3) Escribir la expresión analítica de una función que tenga las siguientes características y graficarla:

a) Asíntota vertical de ecuación x=3 y asíntota horizontal de ecuación y=1
b) Asíntota vertical de ecuación x=2 y asíntota oblicua de ecuación y=x
c) Asíntota vertical de ecuación x=3 y asíntota horizontal a izquierda ($x \to -\infty$) de ecuación y=1 y oblicua de ecuación y=x a derecha ($x \to +\infty$)

4) En un tanque que tiene 1000 l de agua destilada se inyecta una solución salina cuya concentración es de 5 gr/ l a razón de 1 litro por cada minuto. Suponiendo que la mezcla se realiza tan rápido que se considera instantánea. Escribir una función que describa la evolución en el tiempo de la concentración de sal dentro del tanque. Graficar. ¿Qué sucede con esa concentración cuando el proceso se mantiene en el tiempo?

Continuidad

5) En cada caso clasificar la discontinuidad que presenta la función en $x=a$ y justificar.



6) Indicar si las siguientes funciones son continuas en cada punto de su dominio natural:

a) El espacio recorrido por un móvil que se desplaza con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en función del tiempo. Si

b) La altura de una persona en función del tiempo. Si

c) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida. No

d) El área de la región sombreada del problema 15 de la práctica 2) como función de x.

7) En un estacionamiento se cobra $8 la hora o fracción mayor a media hora y $ 4 por fracción menor o igual a media hora.

a) Graficar el costo de estacionar un automóvil durante un intervalo de hasta 5 horas y definir analíticamente la función.

b) Indicar si la función de a) es continua y en caso contrario analizar las discontinuidades.

8) Dadas las siguientes funciones, estudiar la continuidad en los puntos que se indica y clasificar las discontinuidades que se presenten:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & si\ x\neq -1\\ 3 & si\ x=-1\end{cases}$ en x = -1	d) $f(x)=\frac{2}{x-3}$ en x =3	g) $f(x)=xsen\frac{\pi}{x}$ en x =0
b) $f(x)=\ln(x-2)$ en x =2	e) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ en x =0	h) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}.sen\frac{\pi}{x}$ en x =0
c) $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & si\ x\geq 2\\ 2x-3 & si\ x<2\end{cases}$ en x =2	f) $f(x)=sen\frac{\pi}{x}$ en x =0 ?	i) $\begin{cases}-1 & si\ x\in Q\\ 1 & si\ x\notin Q\end{cases}$ en x =3

9) Sea $f(x)=[x]$. Graficar la función y teniendo en cuenta su gráfica analizar la continuidad de $f(x)$ en:

a) [3/2; 5/2] b) (1; 2) c) [1 ; 2)
d) (1; 2] e) [1; 2] f) [$n;n+1$] con $n\in Z$

y responder ¿Es $f(x)$ continua en su dominio?

10) Discutir las siguientes afirmaciones:

a) Si f es continua en [a; b] y g es continua en [b; c] entonces la función

h(x) = $\begin{cases}f(x) & si\ a\leq x\leq b\\ g(x) & si\ b\leq x\leq c\end{cases}$ está bien definida y es continua en [a; c].

b) Si f es continua en [a; b] y g es continua en [b, c] entonces la función h(x) = $\begin{cases} f(x) & si\, a \leq x \leq b \\ g(x) & si\, b < x \leq c \end{cases}$ está bien definida y es continua en [a; c].

c) Si f es continua en [a; b] y g es continua en [b, c] y f(b) = g(b) entonces la función h(x) = $\begin{cases} f(x) & si\, a \leq x \leq b \\ g(x) & si\, b < x \leq c \end{cases}$ está bien definida y es continua en [a; c].

11) Algebra de funciones continuas

Usando la definición de continuidad en un punto, la continuidad de las funciones básicas y el álgebra de funciones continuas, estudiar la continuidad en $\Re$ de las siguientes funciones, en caso de ser discontinua clasificar la discontinuidad:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3+x^2-6x}$	c) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$	e) $f(x)=\ln\left\lvert \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert$
b) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$	d) $f(x)=(1+x)\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$	f) $f(x)=\begin{cases} \lvert x+2 \rvert & si\ \ x\leq 0 \\ [\ (2-x)\ ] & si\ \ 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ \ x\geq 2\ \wedge\ x\neq 3 \end{cases}$

12) Redefinir, si es posible, las funciones del ejercicio anterior para que sean continuas en $\Re$.

13) Dar la definición analítica de una función que cumpla las siguientes características y graficarla:

a) f tiene una discontinuidad evitable en x=2 y una discontinuidad esencial de primera especie con salto finito en x=3
b) f tiene una discontinuidad esencial de segunda especie en x =1

14) Hallar, si existe, el valor de $a \neq 0$ para que f sea continua en su dominio.

$$f : Df \to R \,/\, f(x)=\begin{cases} (1+ax)^{\frac{3}{x}} & si\ x\neq 0 \\ e^{a^2+2a} & si\ x=0 \end{cases}$$

15) Indicar si es V o F justificando.

a) Si $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$ entonces f es continua en a.

b) Si f(x)=g(x) para x≠b y f(b) ≠ g(b), entonces algunas de las dos funciones no es continua en b.

c) La función $g(x)=\dfrac{x+2}{|x+2|}$ es continua en R.

d) Si $\lim_{x\to c} f(x)=l \; y \; f(c)=l$ entonces f es continua en c.

e) Si la gráfica de una función f tiene asíntota vertical de ecuación x=a, entonces f es discontinua en a.

16) En un país, el impuesto a las ganancias se paga sobre todo salario que, en bruto, supere los 3500 \$. Hasta los primeros 4000\$, se paga el 8% sobre lo que supere el monto de 3500. Entre 4000 y 6000, el 10% sobre lo que supere el monto de 3500 y para más de 6000, el 15%. Escribir analíticamente la función Impuesto en función del salario. Indicar si es una función continua y qué significa la continuidad en este contexto. Cuánto debe corresponder pagar a una persona que gana exactamente 7500\$? Graficar.

17) Encontrar a y b reales, tal que: $f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} x+1 & si\; x<1 \\ ax+b & si\; 1\le x\le 2 \\ 3x & si\; x>2 \end{cases}$ resulte continua en x = 1 y $x=2$

18) Siendo $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2+x^2} & si\; x<a \\ x^2 & si\; a\le x<b \\ a^2x & si\; x\ge b \end{cases}$

Hallar *a* y *b* reales positivos tal que *f* sea continua en $\Re$.

19) a) Analizar para qué valores de $n \in N_0$, es continua en R.

$$f(x)=\begin{cases} x^n.sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si\; x\ne 0 \\ 0 & si\; x=0 \end{cases}$$

b) Analizar para qué valores de $n \in N_0$, $g(x)=\dfrac{x^n}{1-\cos(x)}$ presenta una discontinuidad evitable en *x = 0*. ¿Para dichos valores de *n* la función es continua en R?

20) Hallar una función $f(x)$ que sea discontinua en todos sus puntos pero $|f(x)|$ sea continua $\forall x \in \Re$.

21) Las siguientes afirmaciones son FALSAS. Dar un contraejemplo para cada una y grafique.

a) $f(a)\ne \lim_{x\to a} f(x) \;\Rightarrow\; |f|$ es discontinua en *a*

b) f y *g* son discontinuas en $a \;\Rightarrow\; f.g$ es discontinua en *a*.

c) f y *g* son discontinuas en $a \;\Rightarrow\; f+g$ es discontinua en *a*.

d) f discontinua en a y *g* discontinua en $f(a) \;\Rightarrow\; g\,o\,f$ es discontinua en *a*.

22) a) Probar que si *f* es continua en *a* y *g* es discontinua en *a entonces* *f+g* es discontinua en *a*.
b) Con las mismas hipótesis que en a) ¿Se puede afirmar la continuidad o la discontinuidad para el producto?

23) Determinar si la función f(x)= x^2 tiene máximo y mínimo globales en:
a) $(0,1)$ b) $[-1,1]$ c) $(0,8]$
¿Se modifican las respuestas si $g(x)=-x^2$? Justificar cada respuesta. Todo al revés

24) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^4+x^3}{x^4-3x^2-4}$, ¿tiene máximo y mínimos globales o absolutos en el intervalo $[3,10]$? Justificar la respuesta.

25) Analizar si cada una de las funciones está o no acotada en el intervalo que se indica a continuación. ¿Cuál alcanza máximo y mínimo global? Justificar cada una de las respuestas.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ en $\left[-4,-\dfrac{3}{2}\right]$

b) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ en $\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$

c) $g(x)=\ln x$ en $(0,1)$

d) $h(x)=e^{-x}$ en $\Re$

e) $m(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ en $\Re$

26) a) Sea $f(x)=\begin{cases} x & si\ x\leq 2 \\ -x+3 & si\, x>2 \end{cases}$

a1) Analizar si *f* verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [1 ,4] **NO**
a2) Hallar las raíces de *f(x)* en [1,4].¿Hay contradicción con la respuesta de a1)?

b) Sean $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\dfrac{5}{2-x^2}-4$, determinar las raíces de $h(x)=(g\circ f)(x)$ en el intervalo $[0;2\pi]$. ¿Cumple la función h con las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo dado? ¿La respuesta obtenida sobre las raíces es coherente con lo que establece el teorema? Justificar.

27) Hallar, si existen, los valores de los parámetros μ y λ para que la función h verifique las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[1,5]$?

a) $h(x)=\begin{cases} 2+\lambda x^3 & ; x>3 \\ 2-x^2 & ; 1\leq x\leq 3 \\ \mu x & ; x<1 \end{cases}$

b) $h(x)=\begin{cases} 2\mu^2-\lambda^2 x & si\ x>2 \\ x^3-4x & si\ x\leq 2 \end{cases}$

28) ¿La función $f(x)=\cos x - x$ admite al menos un cero? Justificar la respuesta. Sí

29) a) Demostrar que la ecuación $\ln x = 3-2x$ tiene al menos una raíz. Con un procedimiento gráfico verificar que es única.
b) Hallar una aproximación de la raíz con un error $<10^{-1}$.

30) Verificar, mediante el Método de Bisección, que una de sus raíces de la ecuación $2x^3+5x-13=0$ es $x \approx 1.43009$.

31) Hallar una raíz de la ecuación $\cos x = x^2$ con un error en la aproximación menor que 10^{-4}.

32) Demostrar que existe un número c tal que f(c) = -1 siendo $f(x) = x^5-2x^3+x^2+2$

33) Indicar si es V o F justificando su respuesta:
La ecuación $x^2=\sqrt{x+1}$ tiene solución en el intervalo (1,2)

34) Probar que si una función f : [0;1] ->[0;1] es continua, entonces existe un número c en dicho intervalo tal que f(c) = c

35) Dada la función $g:[0,4] \to \Re / g(x) = -\sqrt{16-x^2}$, verificar que se cumplen las hipótesis del teorema del Valor Intermedio en $[0,4]$ y hallar c tal que $g(c)=-1$. Justificar la respuesta.

36) Hallar el valor de las constantes reales ***m*** y ***n*** tales que:

$h:\Re \to \Re / h(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \in (-\infty,3] \\ x^2+mx+n & si\ x \in (3,+\infty) \end{cases}$ cumpla con la hipótesis del

Teorema de Bolzano en el $[2,4]$. Justificar la respuesta.

37) Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ó $-\infty$) y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (ó $+\infty$) y f es continua en R entonces $\exists z \in R : f(z) = 0$

b) Toda función periódica en $\Re$ que es continua es acotada.
c) Si $f:[a,b] \to [m,M]$ (siendo m y M el mínimo y el máximo globales de f respectivamente) es continua entonces f es sobreyectiva

38) Utilizando resultados de análisis matemático, demostrar que todo polinomio con coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.

Practica 4 (Derivada – 1ª parte)

Interpretación geométrica y física.

1) Encuentre la razón media de cambio de la función $y = 5x^3 - 2x + 3$ cuando x cambia de 1 a –1.

2) Calcule la razón media de cambio del volumen de un cubo sabiendo:

a) Su arista aumenta de 2 cm. a 2,3 cm.
b) Su arista de x cm a (x+ Δ x)cm

3) Un objeto circular va cambiando de tamaño con el tiempo, de forma tal que su radio r viene dado por r = 3t + 2 siendo t el tiempo en minutos y r el radio en cm

a) Cuál es la velocidad media de crecimiento del radio r?
b) Cuál es la velocidad media de crecimiento del área?
c) Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento del radio r?
d) Cuál es la velocidad instantánea de crecimiento del área?

4) Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba. Su posición con respecto al tiempo está dada por la función $f(t) = -t^2 + 4t + 5$ considerando el tiempo en segundos y la posición en metros.
a) Calcular la posición inicial de la piedra
b) Graficar la función posición en función del tiempo
c) Hallar la altura máxima que alcanza la piedra
d) Hallar el tiempo que tarda en alcanzar esa altura.
e) Hallar el tiempo que tarda en caer al suelo
f) Hallar la velocidad media entre el tiempo en que alcanza altura máxima y un segundo antes.
g) Hallar la velocidad media entre el tiempo en que alcanza altura máxima y un segundo después.
h) Interpretar el signo de la velocidad en f) y en g).
i) Hallar la velocidad instantánea en el tiempo que alcanza la altura máxima.

5) Galileo Galilei (1564-1642) determinó experimentalmente que el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre es: $e(t) = \frac{1}{2}gt^2$, donde: $e(t)$ es el espacio recorrido, g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo.
a) A partir de la fórmula del espacio recorrido en función del tiempo en caída libre, y recordando que $v_m = \frac{\Delta e}{\Delta t}$, estimar el valor de la velocidad instantánea de un cuerpo

en caída libre luego de 1 segundos de recorrido, calculando la velocidad media entre el instante $t=1$ y los instantes: $t=0{,}9$; $t=0{,}99$; $t=1{,}01$; $t=1{,}1$

b) Calcular la velocidad instantánea en el instante $t=1$ segundo a partir de la definición de derivada de función en un punto.

6) Un cultivo de bacterias se desarrolla en un fermentador, recipiente cerrado, el cual contiene un medio de cultivo (líquido) en el cual se introduce el inóculo (masa inicial de bacterias cuyo crecimiento se desea). Manteniendo a un valor apropiado la temperatura, el pH , y el oxígeno disuelto en el medio de cultivo en el cual se introdujo el inóculo, se desarrolla el aumento de la masa de bacterias.

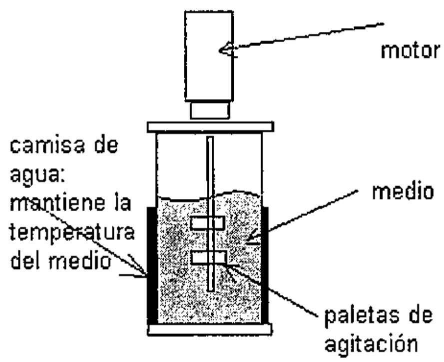
Si la masa de bacterias en función del tiempo está expresada por la función $m(t)=t^2+3$ gramos, calcular:

a) El aumento de la masa en el intervalo de tiempo $[3\,,3.02]$ (horas)

b) El aumento medio de la masa de bacterias en el intervalo anterior

c) La rapidez de crecimiento en el instante $t=3$ horas

d) La masa inicial de bacterias



Esquema de un fermentador

7) Dada la función $f(x)=x^3+1$

a) Halle la pendiente de la recta secante entre los puntos del gráfico de abscisa x=1 y x=2 y la ecuación de dicha recta.

b) Halle la pendiente de la recta secante entre los puntos del gráfico de abscisa x=1 y x=0 y la ecuación de dicha recta

c) Halle la pendiente de la recta secante entre los puntos del gráfico de abscisa x=1 y x=1,5 .

d) Halle la pendiente de la recta secante entre los puntos del gráfico de abscisa x=1 y x=0,5.

e) Halle la pendiente de la recta secante entre los puntos del gráfico de abscisa x=1 y $x=1+\Delta x$

f) Halle la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en x=1.

g) Interpretar los items anteriores en un gráfico.

Derivabilidad en un punto.

8) I) Usando la definición de derivada, hallar las pendientes de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos que se indican y sus respectivas ecuaciones.

a) $y = 2x - 7$ en (2 ; -3) b) $y = x^2$ en (2 ; 4) c) $y = 2x^3$ en (2 ; 16)

d) $y = 1/x$ en (2 ; ½) e) $y = (x+2)^{1/2}$ en (2 ; 2) f) $y = \ln(x)$ en (1 ; 0)

g) $y = sen(x)$ en (0 ; 0) h) $y = x/(x+1)$ en (1 ; 0,5)

II) Graficar las curvas y las rectas tangentes.

9) Dadas las siguientes funciones definidas sobre el conjunto de números reales:

a) $f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \le 0 \\ x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in Q \\ 0 & si\ x \in \Re - Q \end{cases}$

d) $r(x) = \sqrt[3]{x}$ e) $s(x) = \sqrt[3]{x^2}$ f) $t(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & si\ x \ge 0 \\ x^2 - 3x & si\ x < 0 \end{cases}$

a) Graficarlas, en caso de ser posible.

b) Analizar la derivabilidad de todas las funciones en (0,0).¿(0 ; 0) es punto anguloso de la gráfica de las funciones?

c) A partir de ella definimos las siguientes funciones: m: R→R/ m(x) = x h(x) y n: R→R/ n(x) = x² h(x) . Pruebe que m es continua únicamente en x=0 y que n es derivable únicamente en x=0.

10) Grafique una función que cumpla las siguientes características:

a) continua en x= 1 y sus derivadas a izquierda y a derecha sean respectivamente -1 y 2.

→ b) continua en x=1 y que sus derivadas laterales sean 3 por derecha y - ∞ por izquierda.

c) cuya derivada sea 0 para x<3 , 0 para x>3 ¿la función resultará siempre continua en x=3? NO

11) A partir de las graficas de las funciones: $f(x) = x + |x|$ y $g(x) = x.|x|$ determinar en cada caso si existe la tangente a la grafica en (0,0). Luego, en ambos casos, demostrarlo analíticamente.¿(0 ; 0) es punto anguloso de la gráfica de las funciones?

NOTACIÓN: Dada $f: D \subseteq R \to R$ con $y = f(x)$ para denotar la función derivada se puede encontrar en la bibliografía disponible de la materia las siguientes notaciones

$f'(x) \qquad D_x f \qquad \dfrac{df}{dx} \qquad \dfrac{dy}{dx}$

Todas ellas equivalentes y que utilizaremos indistintamente en lo sucesivo

12) Calcular la función derivada utilizando la definición e indicar su dominio:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ c) $f(x) = \cos(x)$

d) $f(x) = \ln(x)$ e) $f(x) = \log(x)$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

13) Partiendo del cociente incremental, probar que f(x) no es derivable en el origen.

$$f(x) = \begin{cases} x sen(\pi / x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

14) Partiendo del cociente incremental probar que f(x) es derivable en el origen y que f'(0)=0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\pi / x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

15) Sea f una función definida sobre R. Mostar que si $|f(x)| \leq x^2$ entonces f es derivable en $x=0$. ¿Cuál es la derivada de f en $x=0$? Interpretar geométricamente.

Reglas de derivación.

16) Usando las reglas de derivación de sumas, productos y cocientes, hallar las derivadas:

$a) y = 2x^{\frac{1}{3}}$

$b) y = 5x^{-1} + 2x^{\frac{1}{2}}$

$c) y = x^3 + x^2 + senx$

$d) y = x^2 \cos x$

$e) y = x \ln x$

$f) y = \dfrac{ax+b}{cx-d}$

$g) y = \dfrac{\ln x}{x \cos x}$

$h) y = x senx \ln x$

$i) y = e^x + x^3 senx$

$j) y = (x^3 + 1/x)(x^4 + 1)$

$k) y = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(x^2+4)}$

17) a) Encontrar los puntos en la curva $y=x^3+x^2+x$ donde la tangente es paralela a la recta $y=x+3$.

b) Encontrar los puntos en la curva $y=\sin x$ donde la tangente es paralela a la recta $y=2$.

c) Encontrar los puntos en la curva $y=\ln(x)$ donde la normal es paralela a la recta $y=-2x+3$.

18) Determinar las constantes a, b, c para que las curvas $y=x^2+ax+b$ e $y=cx-x^2$ sean tangentes en el punto (1,3).

19) ¿En que punto son tangentes las curvas $y=x^3-1$, e $y=3x+1$? Graficar.

20) Un astronauta se desplaza de izquierda a derecha según la parábola $y=x^2$.

a) ¿En que punto de su trayectoria parabólica debe abandonar ésta para, siguiendo la trayectoria de la recta tangente a la trayectoria parabólica en el punto en que la abandona, llegar al punto $(3,5)$? Graficar la trayectoria del astronauta.

b) ¿En que punto de su trayectoria parabólica debe abandonar ésta para, siguiendo la trayectoria de la recta normal a la trayectoria parabólica en el punto en que la abandona, llegar al punto(2; ½)? Graficar la trayectoria del astronauta.

21) Determinar el valor de una constante positiva para que la recta de ecuación $y=3x+1$ sea tangente a la grafica de la función $f(x)=x^3+c$. Graficar. ¿Se cortan esta recta y la cúbica en algún otro punto?

Regla de la cadena.

22) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ y=(2x-5)^{\frac{1}{2}}$	$b)\ y=(\text{sen}x)^3$	$c)\ y=\text{sen}\,x^3$
$d)\ y=e^{\cos x}$	$e)\ y=\ln(x+\text{sen}x)$	$f)\ y=\cos(sen(3x))$
$g)\ y=\log_3(x^2+1)$	h) $y=\dfrac{x+1}{sen(2x)}$	i) $y=sen(\ln(x^2+4))$
j) $y=e^{senx}\ln(x^3-2)$	k) $y=\dfrac{e^{3x^2+2}}{\ln(2x)}$	l) $y=e^{\frac{x}{x+1}}$
$m)\ y=\ln\|x\|$		

23) Sean f(x) = 5x+3 y g(x) una función derivable en x=8. Sabiendo que $(gof)'(1)=2$, calcular $g'(8)$.

24) Dados los siguientes valores de las funciones f, g y sus derivadas para $x=1$ y $x=-2$:

f(1)=1 ; f´(1)= 3 ; f(-2)= -2 ; f´(-2)= -5
g(1)=-2 ; g´(1)= -1 ; g(-2)= 1 ; g´(-2)= 7

Encontrar las derivadas indicadas a continuación:

$i)\left[f(x)^2+g(x)^2\right]', para. x=1$

$ii)\left[g(g(x))\right]', para. x=-2$

$iii)\left[f(g(4-6x))\right]', para. x=1$

$iv)\left[\sqrt{f(x)}\right]', para. x=1$

25) Sea f una función tal que $f'(x)=1/x$ para todo $x \neq 0$.
Usar la regla de la cadena para demostrar que para cualquier constante $a \neq 0$ vale: $[f(ax)]'=f'(x)$.

26) Sea f una función derivable sobre R y par, demostrar que f´ es una función impar.

27) a) Una escalera de 5 metros de largo está apoyada sobre una pared vertical, hallándose su extremo superior a 4 m del piso. Si la parte inferior de la escalera empieza a resbalar sobre el piso a una velocidad de 1 m/seg, expresar en función del tiempo la velocidad con que desciende el extremo superior.

b) Uno de los lados de un rectángulo tiene una longitud fija de 10 cm. Y el otro variable llamado x, que aumenta a una velocidad constante de 4 cm/seg-

b1) Determinar a qué velocidad crecerá la diagonal del rectángulo para x=10 cm.

b2) Idem para x=40 cm.

c) Una esfera de radio R tiene volumen $V(R)=4/3\pi R^3$ y superficie $S(R)=4\pi R^2$

c1) Muestre que $S(R)=\dfrac{dV}{dR}$

c2) Halle una relación análoga entre el área de un círculo de radio R y la longitud de su circunferencia.

d) Un tanque cilíndrico de 2m. de radio se está llenando a razón de 1 m^3 cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con que aumenta la altura del líquido en el tanque si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

28) a) Calcule por definición si existe f'(1) para $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2-3 & si\ x\geq 1\\ -2x & si\ x<1\end{cases}$

b) ¿es correcto decir que si $f(x)=\begin{cases}g(x) & si\ x\geq a\\ h(x) & si\ x<a\end{cases}$ entonces $f'(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+} g'(x)$ y $f'(a^-)=\lim\limits_{x\to a^-} h'(x)$?

c) Verifique que no es cierto b) para $f(x)=\begin{cases}x^2 sen(1/x) & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\geq 0\end{cases}$ en x=0

d) ¿Bajo qué hipótesis es válida la propiedad citada en b)?

Derivada logarítmica y derivada de funciones inversas.

29) Hallar el dominio de las siguientes funciones y calcule sus derivadas:

$f(x)=x^x$ $\qquad$ $g(x)=(x-2)^{\text{sen } x}$ $\qquad$ $h(x)=[\text{sen } x]^{(x+3)}$

30) Sea $f(x)=x^3+5$

a) Hallar $f^{-1}(x)$

b) Calcular $(f^{-1})'(6)$ por dos métodos distintos

31) Sea $f(x)=x^3+x+3$, hallar $(f^{-1})'(3)$

32) Calcular la derivada de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a) f(x)=arcsen x $\quad$ b) g(x)= arcos x $\quad$ c) h(x)=arctg(x)

33) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\text{sh}\,x+arctg(\frac{1}{x})$ $\qquad$ b) $f(x)=x^{sen(x)}-2$

c) $f(x)=(lnx)^{cosx}$ $\qquad$ d) $f(x)=arcsen(x^3+2)$

e) $f(x)=\cos(\sqrt{x^4+7})$ $\qquad$ f) $f(x)=\frac{1+\sqrt{sen(3x)}}{1-x+x^2}$

g) $f(x)=\cos(x.\ln x)$ $\qquad$ h) $f(x)=e^{\cos(\ln x+1)}-\ln(2)$

Derivada de funciones definidas en forma paramétrica y de funciones definidas en forma implícita

34) Graficar las siguientes funciones definidas en forma paramétrica:

a) $\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t+3 \end{cases}$ $t \in R$

b) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t^2+3 \end{cases}$ $t \in R$

c) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3sen t + 2 \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$

d) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4sen t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$

e) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3sen t + 2 \end{cases}$ $t \in [0;\frac{3\pi}{2}]$

f) $\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t+3 \end{cases}$ $t \in R_{\geq 2}$

35) Calcular la derivada de las funciones dadas en forma paramétrica:

a) $\begin{cases} x = a\,sent \\ y = b\cos t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = e^t \\ y = 1-t^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 1-t^2 \end{cases}$

36) Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las curvas definidas en forma paramétrica, en los puntos indicados, cuando sea posible

a) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3t^2 \end{cases}$ $A = (1;3)$

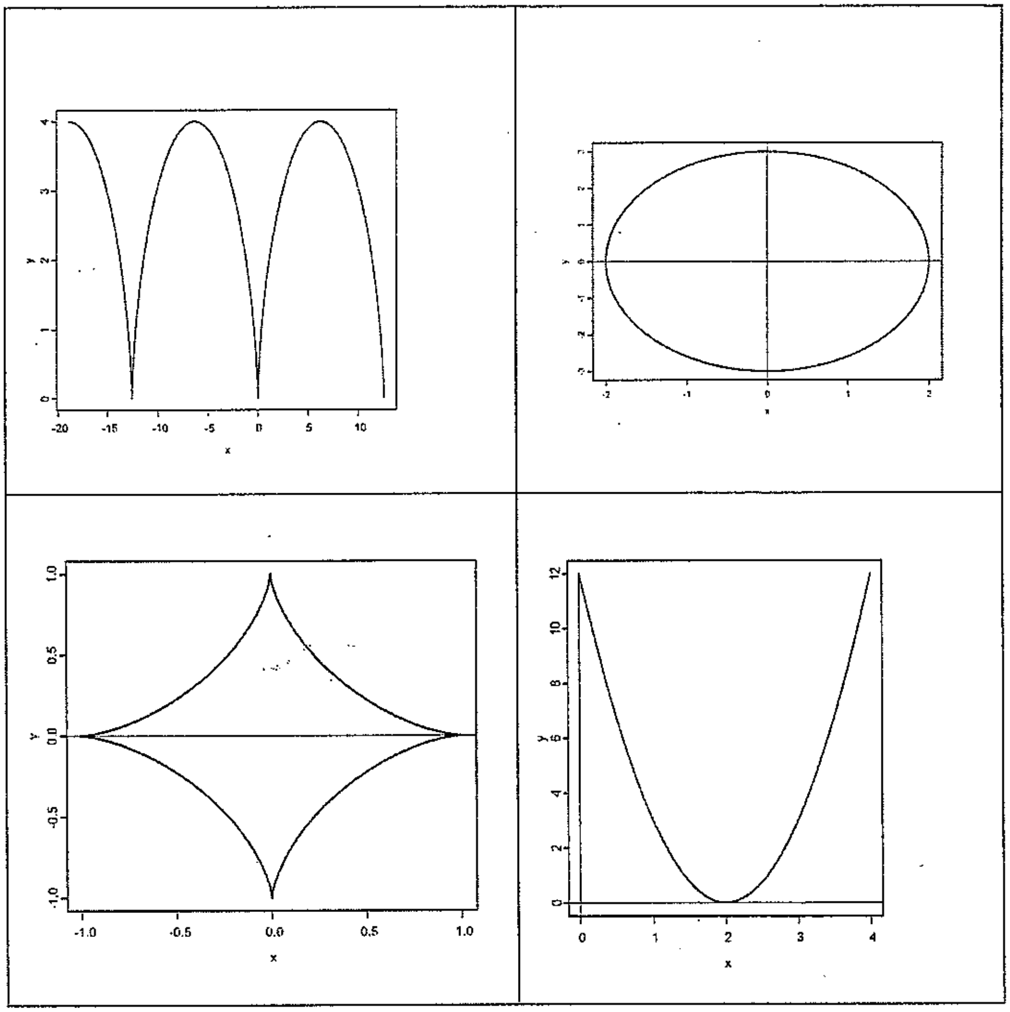
b) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3sent \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ (elipse) en $A = (0\,,3)$, $B = (-\sqrt{2}\,,\frac{3\sqrt{2}}{2})$

c) $\begin{cases} x = a(t - sen\,t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $;-\pi \leq t \leq 2\pi$ (cicloide)

en $A = \left(a\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}, a\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(0\,,0)$

d) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = sen^3 t \end{cases}$; $0 \leq t \leq 2\pi$ (astroide) $A = (x(\frac{\pi}{4}); y(\frac{\pi}{4}))$ $B = (x(\frac{2\pi}{3}); y(\frac{2\pi}{3}))$

Reconozca la gráfica de cada una de las curvas anteriores y señale los puntos A y B elegidos para cada una y grafique las rectas tangentes en esos puntos.



37) Hallar la derivada de las siguientes funciones definidas implícitamente.

a) $x^2 + 2\cos(xy) = 6$ b) $y = (x-y)^2$ c) $x - y = sen(xy)$

38) Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal al gráfico de la función $f(x)$ en el punto $(1,2)$, si $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación:

$$yx^4 + x^3y^2 - 3x = 3$$

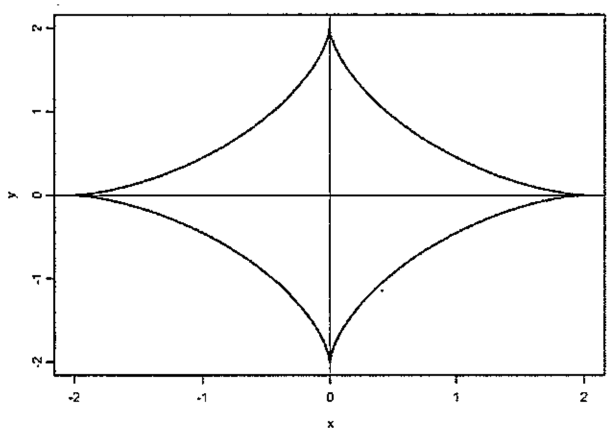
39) Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal al gráfico de la función $f(x)$ en el punto $(1,1)$, si $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación:

$$x^2y - 3x\ln y^2 + \ln(xy) = 1$$

40) Sea la curva $xy^3+x^2y+\sqrt{xy^3}=3$. Hallar la ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$, con $f(x)$ definida implícitamente por la ecuación dada, en el punto $(1, f(1))$

41) Sea la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ (astroide)

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación dada, en el punto $(1\ ,1\ )$



42) Hallar $\frac{dy}{dx}$ para los siguientes casos:

a) Sen (x + y)+ln(xy^2)=8

b) $\begin{cases} x(t)=2(t-sent) \\ y(t)=2(t+\cos t) \end{cases}$ en A=(0,2)

43) Utilizando la derivación implícita compruebe que:

$$(x^r)'=rx^{r-1}\ .\ \forall r \in Q$$

(sugerencia: escribir *r=p/q* y derivar implícitamente la expresión $y^q=x^p$)

44) Dada f(x)=x.$|x|$

a) calcular f´(0)

b) Calcular f´(x) ¿es continua?

c) Calcular, si existen, f´´(0) y f´´(1)

45) Dada $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

a) Analizar hasta que orden f es derivable en x=0

b) Analizar si f$\in C^1$

46)

a) Hallar la $D^{55} sen(x)$ y $D^{20} \cos(2x)$

b) Encontrar las derivadas sucesivas de las siguientes funciones

b1) $y = (x^3+2x-5)^2$ b2) $y = \text{sen } x$ b3) $y=\cos x$ b4) $y= e^{-2x}$

Diferencial, aproximación lineal de una función

47) Mostrar que si una función es diferenciable en un entorno de un punto $x = x_o$ entonces f puede ser expresada de la forma $f(x)= l(x) + r(x)$ donde $l(x)$ es una función lineal y $r(x)$= verifica que $\lim_{x \to x_o} \frac{r(x)}{x-x_o} = 0$

48) Hallar las expresiones de $l(x)$ y $r(x)$ en el entorno de los puntos indicados en cada caso para:

a) $f(x)= x^3 + x$ en $x_0 = 1$

b) $f(x)= 2x^2 + x - 3$ en $x_0 = 2$

c) $f(x)= 4$ en $x_0 = -2$

49) Calcule df para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)= 2x^2 + x \text{ sen } x$

b) $f(x)= 2x^2 \ln x$

c) $f(x)= x - (3 \ln x)e^{2x}$

50) Empleando una función lineal hallar una aproximación de los siguientes valores:

a) sen (31°) b) $\sqrt{3{,}98}$ c) Ln(1.02)

<u>Practica 4</u> (Derivada – 2ª parte)

Teoremas del valor medio y consecuencias.

1) Determinar si la siguiente función satisface las hipótesis del teorema de Rolle.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -0.5 \le x \le 1 \\ 5-(x-2)^2 & \text{si } 1 \prec x \le 4 \end{cases}$$

En caso afirmativo, encuentre el valor intermedio.

2) a) Determinar si la siguiente función satisface las hipótesis del teorema de Rolle.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } -3\le x\le 2\\ 3x-6 \quad \text{si} & \text{si } 2\le x\le 11/3\end{cases}$$

b) Hallar, si existe, $a\in(-3;11/3)$ tal que $f'(a)=0$

3) Analice si la función $f(x)=(x-1)^{4/5}$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el $[0,2]$. En caso afirmativo, encuentre el valor intermedio.

4)a) Determinar si la función $f(x)=x^3-9x$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [-5,5]

b) Hallar el punto intermedio. ¿es único?

5) La temperatura de un líquido (medida en grados centígrados) varía en un lapso de 4 horas de acuerdo con la siguiente ley: $T(t)= 30 +4t-t^2$, donde T es la temperatura y t el tiempo medido en horas.

Sin usar la derivada, mostrar que en algún instante del lapso [0 ; 4] la velocidad de variación de T fue nula.

6) Utilizando el Teorema de Lagrange :

a) Probar que, $\forall b>a>0$: $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$

b) Probar que $x< \operatorname{tg} x$ $\forall x\in(0;\pi/2)$

7) Sea f una función derivable en R

a) Probar que si a y b son raíces de f entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

b) Usando la parte a) deducir si $f(a_1)=f=(a_2)=.....=f(a_r)=0$ entonces f' tiene al menos $r-1$ ceros, es decir, existen números $b_1,....,b_{r-1}$ tales que $f'(b_1)=f'(b_2)=......=f'(b_{r-1})=0$

c) Pruebe que la ecuación $x^7 + 3x^5 +2x+1=0$ tiene exactamente una raíz real.

8) Probar que :

a) Si $f:(a,b)\to R$ es derivable y $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$ entonces f es constante en (a,b)

b) Sea $f(x)=\begin{cases}5 & si\ x\ge 0\\ 3 & si\ x<0\end{cases}$ ¿contradice lo demostrado en a)?

c) Si $f:(a,b)\to R$ es derivable y $f'(x)<0$ $\forall x\in(a,b)$ entonces f es estrictamente decreciente en (a,b)

9) Calcule los siguientes límites aplicando el Teorema de L´Hopital.

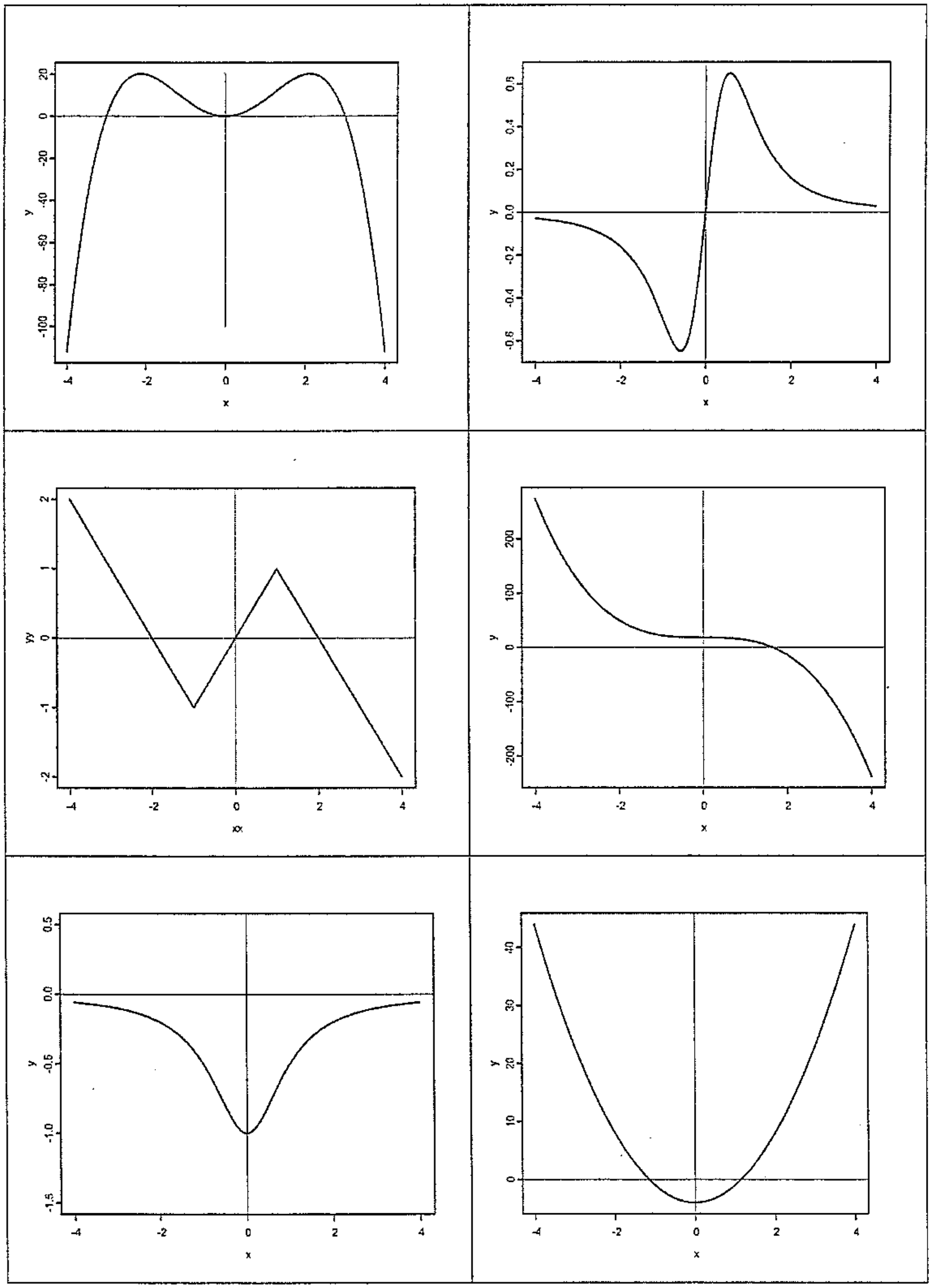
$a)\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$	$b)\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$	$c)\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
$d)\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}$	$e)\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^4}$	$\text{f)}\lim_{x\to\infty}\dfrac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$
$\text{g)}\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x$	$\text{h)}\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$	$\text{i)}\lim_{x\to 0^+}(sen\,x)^x$
$\text{j)}\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}$	$\text{k)}\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctg\,x\right)^{1/x}$	$\text{l)}\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{senx}\right)$
$\text{m)}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(senx)^{tgx}$	$\text{n)}\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln(sen\,x)}{\pi-2x}$	$\tilde{\text{n}})\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$
$\text{o)}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\cot g\,x}$	$\text{p)}\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$	$\text{r)}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{\cot g\,x}$

10) Probar que $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 sen(\frac{1}{x})}{senx}=0$ sin aplicar la regla de L´Hopital. ¿Qué sucede si se aplica la regla?

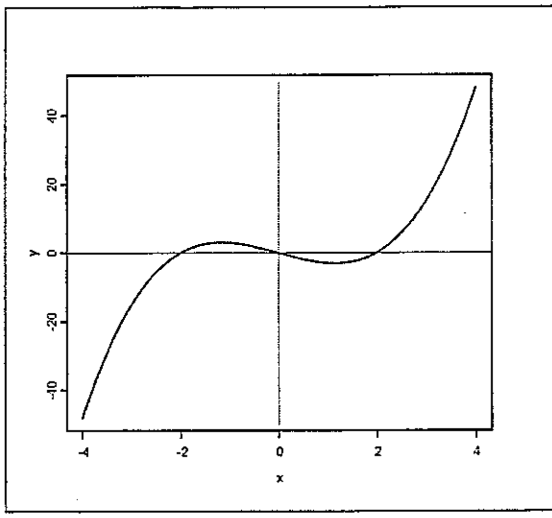
11) Hallar las asíntotas lineales de la función $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$

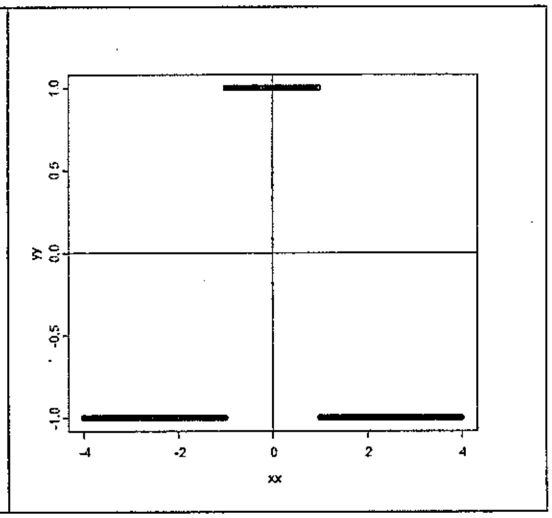
Aplicaciones al estudio de función y a optimización.

12) Identificar para las funciones de la columna de la izquierda los gráficos de sus funciones derivadas que se encuentran en la columna de la derecha a partir del concepto de crecimiento



y
20 0 -20 -40 -60 -80 -100
-4 -2 0 2 4
x
y
0.6 0.4 0.2 0.0 -0.2 -0.4 -0.6
-4 -2 0 2 4
x
yy
2 1 0 -1 -2
-4 -2 0 2 4
xx
y
200 100 0 -100 -200
-4 -2 0 2 4
x
y
0.5 0.0 -0.5 -1.0 -1.5
-4 -2 0 2 4
x
y
40 30 20 10 0
-4 -2 0 2 4
x





13) Dadas las siguientes funciones determinar sus puntos críticos, los intervalos en que son crecientes y decrecientes, y de acuerdo a esto clasificar los puntos críticos hallados.

a) $f(x)=x^3+x-2$	b) $f(x)=x^4-3x^2+1$	c) $f(x)=2x^3+5$
d) $f(x)=-x^3+2x+1$	e) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$	f) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$
g) $f(x)=e^{-x^2}$	h) $f(x)=xe^{\lvert x\rvert}$	i) $f(x)=9-\dfrac{8}{x}-2\sqrt{x}$

14) En las siguientes funciones encontrar:

a) intervalos de concavidad positiva y negativa

b) puntos de inflexión

c) graficar

a) $f(x)=x^3-3x^2$	b) $f(x)=x^4+1$
c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$	d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2-3x & \text{si } x>0 \end{cases}$

15) Determine la concavidad del gráfico de la función $f(x)$ en el punto $(1\,,f(1))$ si la función está definida implícitamente por:

$$x^2y+4yx^2+\sqrt{xy}=6$$

16) Dadas las siguientes funciones:

a) realizar estudio completo

b) Graficar aproximadamente

c) Determinar el conjunto imagen y los extremos absolutos

a) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}+3$	b) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$	c) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$
d) $f(x)=x\ln(x)$	e) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$	f) $f(x)=\|x-3\|e^x$
g) $f(x)=(x-1)^{3/5}$	h) $f(x)=x+arctg\ (x)$	i) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$
j) $f(x)=e^{-x^2}$		

17) Sea $f:R\to R$ una función derivable en todo punto y que además cumple las siguientes condiciones:

i) $f'(-1)=f'(-1/2)=f'(0)=f'(3/2)=0$

ii) $\{x\in R: f'(x)>0\}=(-\infty;-1)\cup(0\ ;3/2)$

iii) $\{x\in R: f'(x)<0\}=(-1;-1/2)\cup(-1/2\ ;0)\cup(3/2;+\infty)$

A partir de todos estos datos determinar todos los máximos y mínimos locales de la función f. Justificar las afirmaciones. Graficar una función que cumpla con estas condiciones.

18) Sea $f(x)=x^2+px+q$ encontrar los valores de p y de q tales que $f(1)=3$ sea un valor extremo de f en $[0,2]$. ¿Este valor es un máximo o un mínimo?¿absoluto o local?

19) Dada $f(x)=x^4-4x^2$ hallar, si existen, sus extremos absolutos en los conjuntos indicados:

a) [-3 , 5]	b) [-1 , 1]	c) [3 , 5]	d) [1 , 2)	e) R

20) Para cada una de las siguientes funciones hallar, si existen, el máximo y el mínimo en el intervalo dado. Hacer un grafico aproximado de la función en ese intervalo.

$f(x)=\sqrt{1+x^2}$ en $[\ 0\ ,\ \sqrt{8}\ ]$	$g(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$ en (0 , 2)
$h(x)=(1-\|x\|)^2$ en (0 , 2)	$t(x)=e^{3x^2+12}$ (-4 , 0)

21) Considerando solamente los valores $x\geq 0$ y sea la función $f(x)=x-\sin x$.

a) Mostrar que f alcanza un mínimo absoluto en $x=0$.

9

b) Teniendo en cuenta el valor $f(0)$ y la parte a), mostrar que $\sin x \leq x, para. x \geq 0$.

22) Encontrar dos números que sumen 24 y tengan el mayor producto posible.

23) Decidir de que manera deben elegirse dos números no negativos para que su suma sea 1, y la suma de sus cuadrados sea.

a) la mayor posible.

b) la menor posible

24) Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa. El área combinada de los lados y del fondo es de $48dm^2$. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que cumpla estos requerimientos.

25) Un triángulo tiene un vértice en el punto $P=(-1,0)$, otro en un punto del eje x, con x entre 0 y 1, y el restante sobre la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$. Sabiendo que el lado contenido en el eje x es uno de los catetos, hallar el área máxima que puede tener el triángulo.

26) Un alambre de $1m$ de largo se corta en dos partes, la primera se dobla en forma de circunferencia y la segunda en forma de cuadrado. ¿Cómo deberíamos cortarlo para que la suma de las áreas del circulo y del cuadrado sea

a) un mínimo? b) un máximo?

27) Un hombre está en la orilla de un río que tiene un km de ancho. Quiere ir a un pueblo que está en la orilla opuesta, pero un km río arriba. Pretende remar en línea recta hasta un punto P de la ribera opuesta y caminar la distancia restante. ¿Cómo debe elegir el punto P para llegar lo antes posible, si:

a) Puede caminar a $5km/h$ y remar a $3km/h$?

b) Puede caminar a $5km/h$ y remar a $4km/h$?

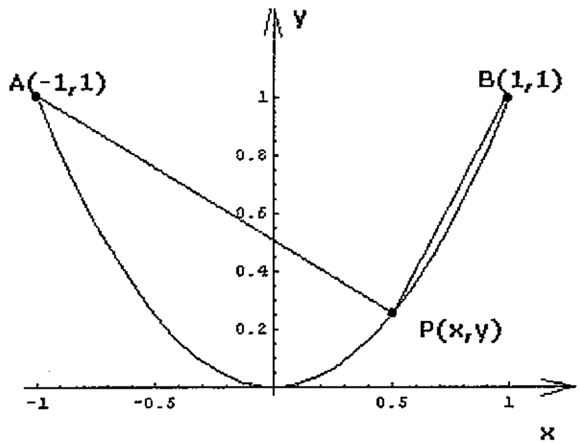
28) Hallar las coordenadas de los puntos de ecuación $x^2-y^2=16$ que son más cercanos al punto $(0,6)$.

29) Un barril cilíndrico cerrado debe contener 128π m^3 de líquido. Si el costo por m^2 del material para construir la superficie lateral es 1/3 del costo del material para construir la base y la tapa, ¿cuáles deben ser las dimensiones del tambor para que el costo del material sea mínimo?

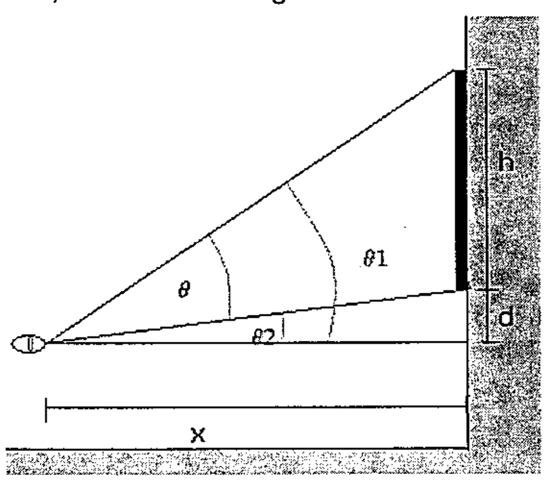
30) Hallar las coordenadas de los puntos $P(x,y)$ sobre la parábola $y=x^2$, con $y \leq 1$, tales que:

a) minimizan $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$

b) maximizan $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ Justifique su respuesta



? 31) En un museo, una pintura tiene una altura **h** y está colgada de modo que su borde inferior queda a una distancia **d** por encima del ojo del observador. ¿A qué distancia de la pintura debe ubicarse un observador para tener mejor visión de la pintura? (es decir, maximizar el ángulo θ de observación).



Polinomio de Taylor

32) Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 de la función f(x) = ln(1+x) en un entorno de x_o=0. Verificar que el polinomio de Taylor y la función coinciden en la función y en las derivadas hasta el orden 3 en $x_o = 0$.

33) Si el polinomio de Taylor de la función y=f(x) en un entorno de x_o=2 es:

$P(x) = (x-2)^5 + 3(x-2)^4 + (x-2)^2 + 1$

Calcular:

a) las derivadas de orden 3 y 4 de f en x_o=2

b) si se sabe que el desarrollo es de orden 7, que puede decirse de las derivadas de orden 6 y 7 de f en x_o=2

c) el desarrollo de Taylor de g(x)=ln(f(x)) alrededor de x_o=2

34) Sea $f : R \to R$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ es $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7$.

a) Calcular $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$

b) Sea $h : R \to R$ definida por $h(x) = f(x^2 - 3x + 2)$. Calcular $h'(2)$ y $h''(2)$

35) Sea $f : R \to R$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 2$ es $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x + 3$.

a) Calcular $f(2), f'(2), f''(2), f'''(2)$

b) Sea $h : R \to R$ definida por $h(x) = x^2 f(x^4 + 1)$. Calcular $h'(-1)$ y $h''(-1)$

36) Justifique que en un entorno de x=0 vale la siguiente aproximación:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

37) Sea $f(x) = e^x$

a) Hallar el polinomio de Taylor de orden n en un entorno de $a = 0$, y su término complementario.

b) Utilizando el polinomio hallado en a), calcule en número *e* y acote el error cometido cuando se consideran 4 términos del polinomio.

Nota: Utilice como cotas del nº e para acotar el error: $2 < e < 3$

c) ¿Cuántos términos son necesarios para calcular el valor del número *e* con un error $\varepsilon < 10^{-4}$? Verifique su respuesta calculando el valor de *e* con esa cantidad de términos y compare el valor con el obtenido con la calculadora.

d) Utilizando el polinomio hallado en a), calcule $e^{-0.2}$ y acote el error cometido cuando se consideran 4 términos del polinomio.

e) ¿Cuántos términos son necesarios para calcular el valor de $e^{-0.2}$ con un error $\varepsilon < 10^{-6}$? Verifique su respuesta calculando el valor de $e^{-0.2}$ con esa cantidad de términos y compare el valor con el obtenido con la calculadora.

? 38) Hallar una aproximación con dos cifras exactas de los valores del ejercicio 50 a) y c) 1ra parte.

→ nos da un caso menor.

39) Obtenga el polinomio de Taylor de orden n de $f(x) = ln(1 + x)$ en un entorno de $a = 0$, con término complementario.

? a) Utilizando 4 términos no nulos del polinomio hallado, calcule aproximadamente $ln(1.3)$ y acote el error cometido.

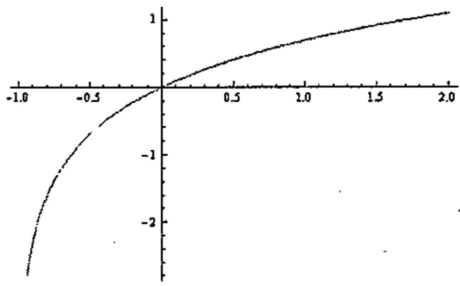
Entero

b) ¿Cuántos términos son necesarios para que el error sea menor a 10^{-4}?

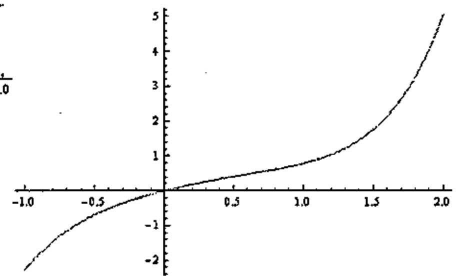
c) ¿ Es posible calcular aproximadamente $\ln(3)$ utilizando el polinomio hallado en a)? ¿por qué?

d) Observe los siguientes gráficos e interprete los resultados obtenidos:

Gráficos de $f(x) = ln(1+x)$; $p(x) = \sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^{i+1}\, x^i}{i}$ y superposición de los mismos.

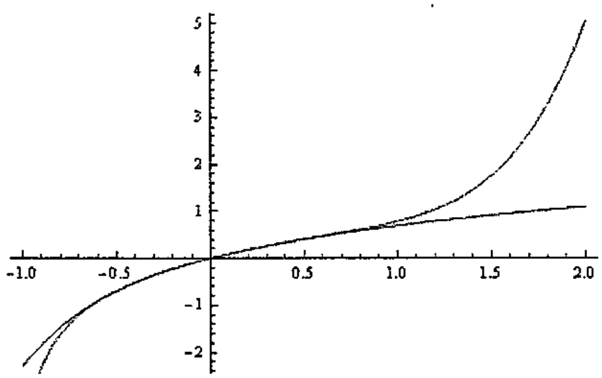


y= f(x)



y=p(x)

p(x): polinomio de Taylor de Ln(1+x)



superposición de los gráficos

<u>RESPUESTAS:</u>

Se agradece la invalorable y desinteresada colaboración de las profesoras Silvina Cafferata y Paola Badía en la elaboración de las respuestas.

<u>Práctica 0</u>

1. a. $D=(-2;2)-\{0\}$ b. $D=[\,1;+\infty)$ c. $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$

2. a. $C^0=\{1,3\}$ $C^+=(1;3)$ $C^-=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ $I=(-\infty;1]$

b. $C^0=\{\ \}$ $C^+=(-2;1)\cup(3;+\infty)$ $C^-=(-\infty;-2)\cup(1;3)$ $I=R-(\{0\}\cup[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}])$

3. La función no es biyectiva. Para que sea biyectiva se puede considerar:

a1. $f_1:[1;+\infty)\to\Re_0^+ \,/\, f_1(x)=3|x-1|^2$ $f_1^{-1}:\Re_0^+\to[1;+\infty)/\, f_1^{-1}(x)=1+\sqrt{x/3}$

a2. $f_2:[1;+\infty)\to\Re_0^+ \,/\, f_2(x)=3|x-1|^2$ $f_2^{-1}:\Re_0^+\to[1;+\infty)/\, f_2^{-1}(x)=1-\sqrt{x/3}$

b. $g:\Re-\{2\}\to\Re-\{1\}/\, g(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$ $g^{-1}:\Re-\{1\}\to\Re-\{2\}/\, g^{-1}(x)=\dfrac{1}{x-1}+2$

4. a. Impar   b. Par   c. Ni par ni impar   d. Impar   e. Impar

5. a. Falsa; b. Falsa; c1. Si, por ejemplo, $f(x)=\cos x$; c2. Si, por ejemplo, $f(x)=senx$

d. Si es par entonces $f(-x)=f(x)$ y $-x\neq x$ cuando $x\neq 0$. Entonces, la respuesta es falsa

e. Si es periódica entonces $f(x+T)=f(x)$ y $x+T\neq x$. Entonces, la respuesta es falsa

6. a. $f:[-3;+\infty)\to\Re_{\geq 0}$; $g:\Re\to\Re_{\geq 0}$; $(f\circ g)(x)=\sqrt{(x-4)^2+3}$; $(g\circ f)(x)=\left(\sqrt{x+3}-4\right)^2$

b. $f:(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\to\Re$; $g^*:(-\infty;2)\to\Re_{\geq 1}$; $(f\circ g^*)(x)=\ln(2-x)$

$g:(-\infty;3]\to\Re_{\geq 0}$ $f^*:\left[-\sqrt{e^3+1};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{e^3+1}\right]\to(-\infty;3]$; $(g\circ f^*)(x)=\sqrt{3-\ln(x^2-1)}$

c. $f:\Re\to[-1;1]$ $g:\Re\to\Re_{\geq 0}$; $(f\circ g)(x)=sen(x^2)$ $(g\circ f)(x)=(senx)^2$

7. a. Por ejemplo, $f_1(x)=\sqrt{x}$ y $g_1(x)=sen(x^2-4)$ o $f_2(x)=\sqrt{senx}$ y $g_2(x)=x^2-4$

8. a. $f^{-1}(x)=1/2x-3/2$; b. $(f+g)(x)=x^2+2x+3$; $(f\cdot g)(x)=2x^3+3x^2$

c. $(f\circ g)(x)=2x^2+3$ $(g\circ f)(x)=(2x+3)^2$

9. a. $D_f=\Re$ $D_h=\Re$ c. $(1;0)$, $(-1;0)$

10. $C^0=\{0,-1\}$ $\mathrm{Im}_f=[-1/4;+\infty)$

11. $D_f=(-5;+\infty)-\{-2\,,2\}$ $C^0=\{\ \}$ $\mathrm{Im}_f=\{3\}\cup(5;+\infty)$

12. $f_1(x)=senx$, $D_{f_1}=\Re$, $C_1^{\,0}=\{x/x=k\pi,k\in Z\}$, Impar, $T_1=2\pi$, $\mathrm{Im}_{f_1}=[-1;1]$

$f_2(x)=\cos x$, $D_{f_2}=\Re$, $C_2^{\,0}=\{x/x=k\pi+\pi/2,k\in Z\}$, Par, $T_2=2\pi$, $\mathrm{Im}_{f_2}=[-1;1]$

$f_3(x)=tgx$, $D_{f_3}=\Re-\{x/x=(2k+1)\cdot\pi/2,k\in Z\}$, $C_3^{\,0}=\{x/x=k\pi,k\in Z\}$, Impar, $T_3=\pi$, $\mathrm{Im}_{f_3}=\Re$

$f_4(x)=sen(x+\pi/4)$, $D_{f_4}=\Re$, $C_4{}^0=\{x/x=-\pi/4+k\pi,k\in Z\}$, No es par ni impar, $T_4=2\pi$, $\mathrm{Im}_{f_4}=[-1;1]$

$f_5(x)=\cos(x-\pi)$, $D_{f_5}=\Re$, $C_5{}^0=\{x/x=3\pi/2+k\pi,k\in Z\}$, Par, $T_5=2\pi$, $\mathrm{Im}_{f_5}=[-1;1]$

$f_6(x)=sen^2x$, $D_{f_6}=\Re$, $C_6{}^0=\{x/x=k\pi,k\in Z\}$, Par, $T_6=\pi$, $\mathrm{Im}_{f_6}=[0;1]$

$f_7(x)=\cos(2x)$, $D_{f_7}=\Re$, $C_7{}^0=\{x/x=\pi/4+k\pi/2,k\in Z\}$, Par, $T_7=\pi$, $\mathrm{Im}_{f_7}=[-1;1]$

$f_8(x)=|senx|$, $D_{f_8}=\Re$, $C_8{}^0=\{x/x=k\pi,k\in Z\}$, Par, $T_8=\pi$, $\mathrm{Im}_{f_8}=[0;1]$

$f_9(x)=\cos|x|$, $D_{f_9}=\Re$, $C_9{}^0=\{x/x=k\pi+\pi/2,k\in Z\}$, Par, $T_9=2\pi$, $\mathrm{Im}_{f9}=[-1;1]$

13. $f_1(x)=5$, $D_{f_1}=\Re$, $C_1{}^0=\{\ \}$, Par, Si, $\mathrm{Im}_{f_1}=\{5\}$

$f_2(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $D_{f_2}=\Re-\{0\}$, $C_2{}^0=\{\ \}$, Impar, Si, $\mathrm{Im}_{f_2}=\{-1,1\}$

$f_3(x)=\dfrac{1}{x}$, $D_{f_3}=\Re-\{0\}$, $C_3{}^0=\{\ \}$, Impar, No, $\mathrm{Im}_{f_3}=\Re-\{0\}$

$f_4(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $D_{f_4}=\Re-\{0\}$, $C_4{}^0=\{\ \}$, Par, Inferiormente, $\mathrm{Im}_{f_4}=(0;+\infty)$

$f_5(x)=|x^3|$, $D_{f_5}=\Re$, $C_5{}^0=\{0\}$, Par, Inferiormente, $\mathrm{Im}_{f_5}=[0;+\infty)$

$f_6(x)=[x]$, $D_{f_6}=\Re$, $C_6{}^0=[0;1)$, No es par ni impar, No, $\mathrm{Im}_{f_6}=Z$

$f_7(x)=x-[x]$, $D_{f_7}=\Re$, $C_7{}^0=Z$, No es par ni impar, Si, $\mathrm{Im}_{f_7}=[0;1)$

$f_8(x)=\sqrt{x}$, $D_{f_8}=\Re_{\geq 0}$, $C_8{}^0=\{0\}$, No es par ni impar , Inferiormente, $\mathrm{Im}_{f_8}=[0;+\infty)$

$f_9(x)=\sqrt{3-x}$, $D_{f_9}=(-\infty;3]$, $C_9{}^0=\{3\}$, No es par ni impar, Inferiormente, $\mathrm{Im}_{f_9}=[0;+\infty)$

$f_{10}(x)=\dfrac{1-x}{3+x}$, $D_{f_{10}}=\Re-\{-3\}$, $C_{10}{}^0=\{1\}$, No es par ni impar, No, $\mathrm{Im}_{f_{10}}=\Re-\{-1\}$

$f_{11}(x)=\dfrac{11x-6}{33x-99}$, $D_{f_{11}}=\Re-\{3\}$, $C_{11}{}^0=\left\{\dfrac{6}{11}\right\}$, No es par ni impar, No, $\mathrm{Im}_{f_{11}}=\Re-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$f_{11}(x)=\dfrac{11x-6}{33x-99}$, $D_{f_{11}}=\Re-\{3\}$, $C_{11}{}^0=\left\{\dfrac{6}{11}\right\}$, No es par ni impar , No, $\mathrm{Im}_{f_{11}}=\Re-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$f_{12}(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $D_{f_{12}}=\Re-\{1\}$, $C_{12}{}^0=\{\ \}$, No es par ni impar , Si, $\mathrm{Im}_{f_{12}}=\{-1,1\}$

14. a. $D=\Re_{>0}$, $C^0=\{1\}$, $f^{-1}:R\to R^+$ $f^{-1}(x)=10^x$;

b. $D=\Re_{>0}$, $C^0=\{1\}$, $f^{-1}:R\to R^+$ $f^{-1}(x)=e^x$

c. $D=(-\infty;1)$, $C^0=\{0\}$, $f^{-1}:R\to(-\infty;1)$ $f^{-1}(x)=1-e^x$;

d. $D=\Re-\{0\}$, $C^0=\{-1,1\}$, f no es inyectiva (por ej. f(2)=f(-2)=ln2) entonces no existe f^{-1}

e. $D=\Re_{>0}$, $C^0=\{e^{-2}\}$, $f^{-1}:R\to R^+$ $f^{-1}(x)=e^{x-2}$

15. a. $D=\Re$, $C^0=\{\ \}$, $f^{-1}:R^+\to R$ $f^{-1}(x)=\ln x$;

b. $D=\Re$, $C^0=\{\ \}$, $f^{-1}:R^+\to R$ $f^{-1}(x)=\ln x+1$

c. $D=\Re$, $C^0=\{0\}$, $f^{-1}:(1,+\infty)\to R$ $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$;

d. $D=\Re$, $C^0=\{\ \}$, $f^{-1}:R^+\to R$ $f^{-1}(x)=\log x$

e. $D=\Re$, $C^0=\{1\}$, $f^{-1}:(-10,+\infty)\to R$ $f^{-1}(x)=\log(x+10)$;

16. $D_f=(2;+\infty)$, $C_f{}^0=\{4\}$

$D_h=(-\infty;-3)\cup(-1/2;+\infty)$, $C_h^0=\left\{-\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4};-\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}\right\}$;

$D_g=(1;+\infty)$, $C_g{}^0=\phi$

$D_t=R-\{0;1\}$ $C_t^0=\phi$

$D_s=[\ln\sqrt{2};+\infty)$, $C_s{}^0=\{\ln\sqrt{2}\}$

17. a. $D=\Re$, $C^0=\{3\}$; b. $D=\Re$, $C^0=\{-1\}$; c. $D=\Re$, $C^0=\{\ \}$;

d. $D=(15/4;+\infty)$, $C^0=\{9/2\}$; e. $D=(0;+\infty)$, $C^0=\left\{100;\frac{1}{10}\right\}$; f. $D=(0;+\infty)$, $C^0=\{1/2\}$

<u>Práctica 1</u>

1.a) $f(x)=shx$; $D_f=R$; $C^0=\{0\}$; *es impar*

$f(x)=chx$; $D_f=R$; $C^0=\phi$; *es par*

$f(x)=thx$; $D_f=R$; $C^0=\{0\}$; *es impar*

c) Restringiendo dominios para que sean biyectivas , si es necesario, se obtiene:

$f:R\to R\,/\,f(x)=shx$ $\quad f^{-1}:R\to R\,/\,f^{-1}(x)=\arg shx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$f:[0\ ;+\infty)\to[\ 1\ ;+\infty)\,/\,f(x)=chx$ $\quad f^{-1}:[1\ ;+\infty)\to\{0\ ;+\infty)\,/\,f^{-1}(x)=\arg chx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$f:R\to(-1\ ;1\ )\,/\,f(x)=thx$ $\quad f^{-1}:(-1\ ;\ 1)\to R\,/\,f^{-1}(x)=\arg thx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2. $A(p)=\frac{\sqrt{3}}{36}p^2$ $\quad$ 3. $A(r)=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ $\quad$ 4. a) $8679{,}73\cong 8680$, b) en 44 años

5. $k=1/1690\cong 5.9171\cdot 10^{-4}$, $q(2500)\cong 10.76$

6. $T=1/50$, $30\,amperes$, $50\,periodos$ $\quad$ 7. $1/600$ *segundos*

8. $t=7/12$ *segundos*, $t=7/12+k$, $k\in N$

9. a. $S=\{5\ ,1\}$ $\quad$ b. $S=(-8;-2)$ $\quad$ c. $S=(-\infty;-3]\cup[-1;+\infty)$ $\quad$ d. $S=[-2;1]$

10. a. $E(2;3)=\{x/|x-2|<3\}=(-1;5)$ $\quad$ b. $E'(2;3)=\{x/0<|x-2|<3\}=(-1;2)\cup(2;5)$

c. $E(-1;2)=\{x/|x+1|<2\}=(-3;1)$ $\quad$ d. $E'(-1;2)=\{x/0<|x+1|<2\}$

11. a) (-4 ; 3) $\quad$ b. $E\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$

12. $Mayorante = [5;+\infty)$, $Minorante = (-\infty;-3]$, $Supremo = 5$, $Ínfimo = -3$, $Máximo = 5$, $Mínimo = no\ existe$

13. a. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3};...$; b. $Mayorante = [1;+\infty)$, $Minorante = (-\infty;0]$; c. $Supremo = 1$, $Ínfimo = 0$; d. $Máximo = 1$, $Mínimo = No\ \exists$ (porque $\inf(A) \notin A$)

14. a. $A = (-2;5)$ b. $Fr(A) = \{-2, 5, 8\}$ c. $A' = [-2;5]$ d. $Aisl(A) = \{8\}$

15. $Int(A) = \{\ \}$, $Fr(A) = A \cup \{0\}$, $A' = \{0\}$, $Aisl(A) = A$

Práctica 2

1. b.1) 1 b.2) 1 b.3) 1 b.4) $No\exists$, $L^+ = 1$, $L^- = 4$

8. a) 0 b) $\sqrt{3}$ c) $e^9/3$ d) $(2\sqrt{2})^{1/4} = 2^{3/8}$

9. a) 0 b) $1/2$ c) $-1/2\sqrt{3}$ d) -5 e) 6 f) $2/5$ g) 4 h) $1/12$

10. b.1) $x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$ b.2) $No\exists x \in \Re$ b.3) $x = 2k$, $k \in Z$

11. b.1) -2 b.2) 1

12. a) $No\exists$, $L^+ = 1$, $L^- = -1$ b) $No\exists$, $L^+ = 3$, $L^- = 2$ c) 2
d) $No\exists$, $L^+ = 1$, $L^- = -1$ e) 0 f) $No\exists$, $L^+ = 1$, $L^- = -1$

13. 7 ; 4

14. a) $No\exists$, $L^+ = 1$, $L^- = -1$ b) -1 c) 0

15. a) $x \to 0^+, A \to 50$; $x \to 10^-, A \to 100$ b) $A(x) = \dfrac{(10-x)^2}{2} + x^2$ Dom(A)=(0 ; 10)

16. a) $a = 6, b = -5$ b) 1, 0, $No\exists$,($L^+ = -1$, $L^- = 0$), $1 - e^{-2}$

18. a) 7 b) 0 d) 1

19. b.1) 4 b.2) $3/2$ b.3) 1 b.4) 0 b.5) 4 b.6) -1

20. a.1) $x = 1/k\pi$, $k \in Z - \{0\}$ a.2) $x = 2/(1+4k)\pi$, $k \in Z$ a.3) $x = 2/(3+4k)\pi$, $k \in Z$,
a.4) $k \to \infty, x \to 0$ a.5) $No\exists$ b.1) 0, 0 b.2) El primero y el segundo, respectivamente

21. Para f: $+\infty$, $-\infty$, ∞ Para g: $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$ Para h: $-\infty$, $-\infty$, $-\infty$
Para s: $+\infty$, 3, no existe

22. a.1) ∞ a2) ∞ a3) no si k=0 a4) 0 a5) ∞ a6) 0
b1) solo si sg($\lim_{x\to a} f(x)) = sg(\lim_{x\to a} g(x))$ b2) solo si sg($\lim_{x\to a} f(x)) \neq sg(\lim_{x\to a} g(x))$

b3) ∞ (el signo se determina de acuerdo a la regla de los signos del producto)
b4) indeterminación ∞/∞

23. Para f: b.1) 2 b.2) 2 b.3) 2   Para s: b.1) 0 b.2) 2 b.3) no existe

24. a.1) 0 a.2) $+\infty$ a.3) no existe ($x \to +\infty, L = 0$; $x \to -\infty, L = +\infty$) a.4) $+\infty$
a.5) 0 a.6) no existe ($x \to +\infty, L = +\infty$; $x \to -\infty, L = 0$)
b) Si $r > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} r^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} r^x = 0$
Si $0 < r < 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} r^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} r^x = +\infty$

25. a) ∞, $+\infty$, $-\infty$ b) ∞, $-\infty$, $+\infty$ c) $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$ d) no existe, 2 ; $-\infty$,
e) no existe, $\pi/2$; $-\pi/2$ f) como $D_f = (-\infty, 3)$ solo puede calcularse para $x \to -\infty, L = 0$

26. a) no existe (pues $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-1/x} = +\infty$)
b) no existe (pues $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}} = 2 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{1+e^{-1/x}} = 0$)
c) 0 d)no existe (pues $\lim\limits_{x \to 0^+} arctg(1/x) = \pi/2 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} arctg(1/x) = -\pi/2$)

27. a.1) 0 a2) ∞, a.3) $-4/3$, a.4) 3
b) 0 si p<q ∞ si p>q a_p / b_q si p=q
c) El primero, $f(x) = -x + \dfrac{x+8}{x^2+1}$

28. a) no existe b) 1 c) 0 d) $-\infty$ e) no existe
29. b.1) e^6 b.2) e^{-2} b.3) 1 b.4) no existe b.5) e^{-1} b.6) e^2 b.7) $+\infty$ b.8) a
b.9) e
30. a) $-12\sqrt{3}$ b) no existe c) no existe d) no existe e) 0 f) $\ln a$ g) e^6 h) 0
i) $1/2$ j) $e^{-4/3}$ k) $2/3$ l) 0 m) $-sena$ n) 0 o) no existe

31. a) $x = \pi/2$, son equivalentes b) $x = \pi/4$, son del mismo orden
c) $x \to \infty$, $\beta(x)$ es de orden superior a $\alpha(x)$ d) $x = 1$, no se pueden comparar

32. $a = 1/2$, para $x_0 = 2k\pi, \quad k \in Z$
33. a) $(a = 1 \wedge b = -1/2) \vee (a = -1 \wedge b = 1/2)$ b) $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$
34. 0
35.

1	2	3	4
0	0	$No \ \exists$	$No \ \exists$

36. a) Falsa b) Falsa c) Verdadera d) Falsa e) Falsa e) Falsa

37. $t \in N_0$, $i \to 5$

38. a) $F \to +\infty$, b) $F \to 0$

39. $A = 270\ ^oC$, $k = \ln(17/27)^{1/3}$, $t \cong 36$

40. a) mg/r, c) gt, d) $+\infty$

41. a) GMm/R^2, b) 0

42. a) m_0, b) $+\infty$

Práctica 3

a) $AV\ x = -2$, $AO\ y = x$ b) $AH: y = 1$ $AV: no\ \exists$

c) AV: *por derecha* $x = 1$, *por izquierda* $x = -1$, , $AH: no\ \exists$

$AO: y = x$ *por derecha* $y = -x$ *por izquierda*

d) $AV\ x = 1, x = -1$ $AH\ y = 1$ e) $AH: y = -2/3$

f) AV *por derecha* $x = -1$, $AH\ y = 1$

g) AV *por izquierda* $x = 1$, AV *por derecha* $x = -1$;

h) $AV\ x = \sqrt{2}/2, x = -\sqrt{2}/2$, $AO\ y = 2x$

i) $AH: y = -1$ *por derecha* $y = 1$ *por izquierda* $AV: x = -\ln 2 / \ln 3$

j) $AV\ x = 0$, AH *hacia derecha* $y = -1$, AH *hacia izquierda* $y = 1$

k) $AV\ x = 1, x = -1$, $AH\ y = 0$; l) $AV\ x = -2$, AH *hacia derecha* $y = 0$

2- a) Falso b) Falso c) Verdadero d) Falso

4- $C(t) = \dfrac{5t}{1000 + t}$

5- 1) Evitable 2) Esencial de 1° especie con salto finito

3) Esencial de 1° especie con salto finito 4) Esencial de 1° especie con salto infinito

5) Esencial de 1° especie con salto finito 6) Esencial de 1° especie con salto infinito

7) Esencial de 1° especie con salto infinito 8) Esencial de 1° especie con salto infinito

9) Evitable 10) Esencial de 1° especie con salto infinito

11) Esencial de 1° especie con salto infinito 12) Esencial de 2° especie

13) Es continua en $x = a$

6- Continua b) Continua c) Discontinua d) Continua

7- $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot [2x] & \text{si } x = \dfrac{n}{2} (n \in N) \\ 4 \cdot [2x] + 4 & \text{si } x \neq \dfrac{n}{2} (n \in N) \end{cases}$

8. a) DE (discontinuidad evitable), b) $DNoE$ (no evitable) salto ∞
c) C (continua), d) $DNoE$ salto ∞, e) $DNoE$ salto ∞ f) DNE(2da especie)
g) DE ,h) $DNoE$,i) $DNoE$ (2da especie)

9- a) Es discontinua en $x = 2$ b) Es continua c) Es continua d) Es discontinua en $x = 2$

e) Es discontinua en $x = 2$ f) Es discontinua en $x = n + 1$

11.a) $x = 0\ DNoE, salto\ \infty$, $x = -3\ DNoE, salto\ \infty$, $x = 2\ DE$;
b) $x = -1\ DNoE, salto\ \infty$ c) $x = 1\ DNoE, salto\ finito$;
d), $x = -1\ DE$; $x = 1\ DNoE, salto\ finito$
e) En $x = (2k+1)\pi$ con $k \in Z$ DnoE de1° especie con salto infinito.

f) $x = 3\ DNoE, salto\ \infty$, $x = 1\ DNoE, salto\ finito$, $x = 2\ DNoE, salto\ finito$,
$x = 0\ DNoE, salto\ finito$

12- Se puede redefinir en $x = 2$ d) Se puede redefinir en $x = -1$

14. a=1
15-a) Verdadero b) Verdadero c) Falso d) Verdadero e) Verdadero

16-

$$I(s) = \begin{cases} 0 \quad si \quad 0 < s \le 3500 \\ 0.08(s-3500) \quad si \quad 3500 < s \le 4000 \\ 0.10(s-3500) \quad si \quad 4000 < s \le 6000 \\ 0.15(s-3500) \quad si \quad s > 6000 \end{cases}, \quad I : impuesto, \; s : salario$$

17. $a = 4, b = -2$
18. $a = \sqrt{2} \wedge b = 2$
19. a) $n \in \mathrm{N}$
b) $n \in \mathrm{N} \wedge n \ge 2$ No porque presenta discontinuidades en $x = 2k\pi, k \in Z, k \ne 0$
23. a) No b) Máx, Mín, c) Máx
24. Por ser f continua en el intervalo dado, puede afirmarse que tiene máximo y mínimo absolutos (no se puede conocer aún dichos valores, pero puede afirmarse que existen por el Teorema de Weierstrass).

25. a) Acotada, tiene extremos globales porque verifica hipótesis del Teo. de Weierstrass (no se pueden determinar aún)
b) No acotada
c) No acotada inferiormente Tiene máximo M=0
d) No acotada superiormente. No tiene ni máximo ni mínimo
e) Acotada
26. a.1) No a.2) $x = 3$
b) Las raices son $\{\pi/6 \,;\, 5\pi/6 \,;\, 7\pi/6 \,; 11\pi/6\}$ La función h no verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo dado.

27. a) $\mu = 1$, $\lambda = -1/3$, b) no existen
31. $x = 0.824132$
35. $c = \sqrt{15}$
36. $m < -11$ y $n = -3m - 5$

Práctica 4 1ra. Parte

1. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$; **2.** a) $\frac{\Delta V}{\Delta x} = 13.89$, $V: volumen$, $x: arista$; b) $\frac{\Delta V}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

3. a) $\frac{\Delta r}{\Delta t} = 3$, $r: radio$, $t: tiempo$; b) $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \pi(18t + 9\Delta t + 12)$, $A: área$

c) vi = 3 m / seg; d) vi = 6 π (3 t + 2) m / seg

4. a.) f (0) = 5 c) hm = 9 m d) t = 2 seg e) t = 5 seg

f) vm = 1 m / seg g) vm = - 1 m / seg i) vi = 0 m / seg

5. a)

t	0.9	0.99	1.01	1.1
v_{mc}	9.31	9.751	9.849	10.29

b) vi = 9,8 m / seg

6. a) $\Delta_m = 0{,}1204$ gr b) = 6,02 gr c) 6 gr / seg; d) 3 gr

7. a) m = 7 y la ec. de la recta secante es y = 7 x – 5; b) m = 1 y la ec. de la recta secante es y = x + 1; c) m = 4,75 y la ec. de la recta secante es y = 4,75 x – 2,75

d) m = 1,75 y la ec. de la recta secante es y = 1,75x + 0,25 e) m = $3 + 3\Delta x + \Delta x^2$; f) mt = 3

8. a) m = 2, ec. de la recta tangente y = 2x-7 b) m= 4, ec. de la recta tangente y = 4 x – 4; c) m = 24, ec. de la recta tangente y = 24 x – 32; d) m = - 1 / 4, ec. de la recta tangente y = - 1 / 4 x + 1; e) m = 1 / 4, ec. de la recta tangente y = 1 / 4 x + 3 / 2

f) m = 1, ec. de la recta tangente y = x – 1; g) m = 1, ec. de la recta tangente y = x

h) m = 1 / 4, ec. de la recta tangente y = 1 / 4 x + 1 / 4

9. a) h(x) no se puede graficar

b) f no es derivables en x = 0, (0 ; 0) es punto anguloso.

g es derivable en $x = 0$ y $g'(0) = 0$

r no es derivables en x = 0, recta tangente vertical x=0

s no es derivables en x = 0, (0 ; 0) es punto anguloso.

f no es derivables en x = 0, (0 ; 0) es punto anguloso.

11. $f'(0^+) = 2 \wedge f'(0^-) = 0 \rightarrow No\ \exists\ f'(0)$, (0,0) es punto anguloso

$g'(0^+) = 0 \wedge g'(0^-) = 0 \rightarrow \exists\ g'(0) = 0$, recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$

12. $a) f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad b) f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad c) f'(x) = -sen(x)$ $\quad d) f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$e)\ f'(x) = \dfrac{1}{x}\log e = \dfrac{1}{x \cdot \ln 10}$ $\quad f)\ f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

15. $f'(0) = 0$

16.

$a) y' = \dfrac{2}{3x^{2/3}}$ $\quad b) y' = -\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad c) y' = 3x^2 + 2x + \cos(x)$ $\quad d) y' = x2\cos(x) - x^2 sen(x)$

$e) y' = \ln(x) + 1$ $\quad f) y' = \dfrac{-(ad+bc)}{(cx-d)^2}$ $\quad g) y' = \dfrac{\cos(x) - \ln(x)(\cos(x) - x.sen(x))}{x^2\cos^2(x)}$

$h) y' = sen(x)(\ln(x)+1) + x\cos(x).\ln(x)$ $\quad i) y' = e^x + x^2(3sen(x) + x\cos(x)$ $\quad j) y' = 7x^6 + 6x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

$k) y' = \dfrac{4-5x^2}{3x^{2/3}(x^2+4)^2}$

17. a) (0 ; 0) y (- 2 / 3 ; - 14 / 27); b) (π / 2 + 2 k π ; 1) y (3 / 2 π + 2 k π ; - 1)
c) (2 ; ln 2); 18. a = 0 ; b = 2 ; c = 4; 19. (-1 ; - 2); 20. a) (1 ; 1); b) (1 ; 1)

21. Si c = 3 , f y t se cortan en (1 ; 4) y (- 2 ; - 5);

22.

$a) f'(x) = (2x-5)^{-1/2}$

$b) f'(x) = 3.sen^2(x)\cos(x)$

$c) f'(x) = 3x^2\cos(x^3)$

$d) f'(x) = -e^{\cos(x)} sen(x)$

$e) f'(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{x + sen(x)}$

$f) f'(x) = -3sen(sen(3x))\cos(3x)$

$g) f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$

h) $f'(x) = \dfrac{sen(2x) - 2(x+1)\cos(2x)}{sen^2(2x)}$

$i) f'(x) = \dfrac{2x.\cos(\ln(x^2+4))}{x^2+4}$

j) $f'(x) = e^{senx} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(x^3-2) + \dfrac{3x^2}{x^3-2}\right)$

k) $f'(x) = \dfrac{e^{3x^2+2}(6x^2\ln(2x) - 1)}{x\ln^2(2x)}$

l) $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad x \neq 0$

23. $g'(8) = 2/5$

24.

$i) = 10$

$ii) = -7$

$iii) = -126$

$iv) = 3/2$

27. a) $v(t) = -\dfrac{3+t}{\sqrt{25-(3+t)^2}}$

b) Cuando $x = 10$ la velocidad con que crece la diagonal es de $\dfrac{40}{\sqrt{200}}$

Cuando $x = 40$ la velocidad con que crece la diagonal es de $\dfrac{16}{\sqrt{17}}$

c) $S'(R) = \dfrac{dS}{dR} = 2\pi R$

d) $\dfrac{1}{8\pi}$

28. a) f ' (1) = - 2;

29- $D_f = (0;+\infty) \qquad D_g = (2;+\infty) \qquad D_h = \{x \in R : sen(x) > 0\}$

$$f'(x) = x^x(\ln(x)+1)$$

$$g'(x) = (x-2)^{sen(x)}\left[\cos(x).\ln(x-2) + \frac{sen(x)}{x-2}\right]$$

$$h'(x) = (sen(x))^{(x+3)}\left[\ln(sen(x) + (x+3)\frac{\cos(x)}{sen(x)}\right]$$

30. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$ b) $(f^{-1})'(6) = 1/3$;

31. $(f^{-1})'(3) = 1$

32.

$$a) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};...Df' = (-1;1)$$

$$b) g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},...Dg' = (-1;1)$$

$$c) h'(x) = \frac{1}{1+x^2},....Dh' = R$$

33.

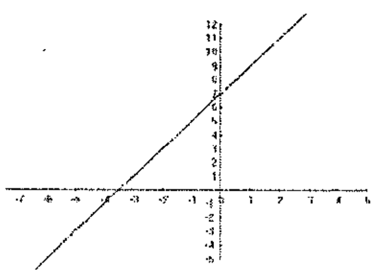
$a) f'(x) = ch(x) - \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $b) f'(x) = x^{sen(x)}\left[\cos(x).\ln(x) + \dfrac{sen(x)}{x}\right]$

$c) f'(x) = (\ln(x))^{\cos(x)}.\left[-sen(x).\ln(\ln(x)) + \dfrac{\cos(x)}{x.\ln(x)}\right]$ $\qquad$ $d) f'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+2)^2}}$

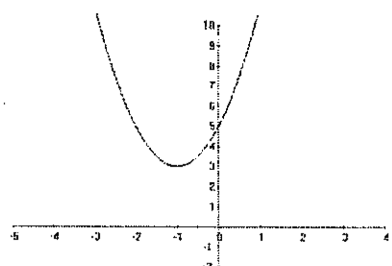
$e) f'(x) = \dfrac{-sen\sqrt{x^4+7}}{\sqrt{x^4+7}}.2x^3$ $\qquad$ f) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{3\cdot\cos(3x)\cdot(1-x+x^5)}{2\cdot\sqrt{sen(3x)}} - \left(1+\sqrt{sen(3x)}\right)(5x^4-1)}{(1-x+x^5)^2}$

$g) f'(x) = -sen(x.\ln(x)).(\ln(x)+1)$ $\qquad$ h) $f'(x) = -e^{\cos(\ln x+1)}\cdot\dfrac{sen(\ln x+1)}{x}$

34. a)



b)

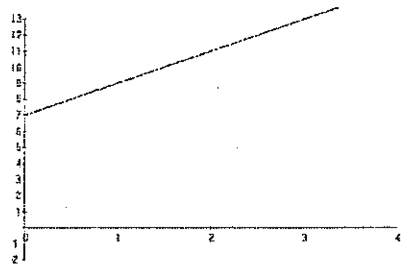


c) Es una circunferencia con centro en $(0;2)$ y radio 3

d) Es una elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

e) Teniendo en cuenta el ítem c) analizar los valores de t para los cuales está definida

f)



35. $a)\, f'(x(t)) = -\dfrac{b}{a}\, tg(t)$ $\quad b)\, f'(x(t)) = \dfrac{-2t}{e^t}$ $\quad c)\, f'(x(t)) = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$ $\quad d)\, f'(x(t)) = -1$

36. a) $y_t = -6x + 9 \qquad y_n = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{17}{6}$

b) Para A: $y_t = 3 \quad x_n = 0$ Para B: $y_t = \dfrac{3}{2}x + 3\sqrt{2} \qquad y_n = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

c) Para A: $y_t = \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(x - a\cdot\dfrac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}\right) + a\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$$y_n = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(x - a\cdot\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}\right) + a\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Para B: no es posible (ver gráfico)

d) Para B: $y_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Orden de las graficas : c)(para a=2), b), d) y a)

37. a) $y' = \dfrac{x - y\, sen(xy)}{x\, sen(xy)}$, b) $y' = \dfrac{2(x-y)}{1+2x-2y}$, c) $y' = \dfrac{1 - y\cos(xy)}{1 + x\cos(xy)}$

38. tg : y = -17 / 5 x + 27 / 5 , n : y = 5 / 17 x + 29 / 17

39. $y_t = \dfrac{3}{4}(x-1) + 1 \qquad y_n = -\dfrac{4}{3}(x-1) + 1$

40. $y_t = -\dfrac{7}{11}(x-1) + 1 \qquad y_n = \dfrac{11}{7}(x-1) + 1$

42.a) $y' = -\dfrac{y\ \ x.\cos(x+y) + 1}{x\ \ y.\cos(x+y) + 2}$ b) $\dfrac{dy}{dx}$ en t=0 no existe , $\dfrac{dx}{dy}(2) = \dfrac{x'(0)}{y'(0)} = 0$, recta tg x=0

44. a) $f'(0) = 0$

b) $$f'(x)=\begin{cases}2x \; si \; x>0\\ 0 \;\; si \; x=0\\ -2x \; si \; x<0\end{cases}$$, f' es continua en $x=0$

c) $f''(0^+)=2 \wedge f''(0^-)=-2 \rightarrow No\exists\, f''(0)$, $f''(1)=2$

45. a) Es derivable hasta el primer orden, b) $f \notin C^1$

46. a) $D^{(99)}(senx)=-\cos x$, $D^{(50)}(\cos(2x))=-2^{50}\cos(2x)$

b.1) $y^{VI}=720$ y observar que $y^{(n)}=0 \;\; \forall n\geq 7$ b2) $y^{(n)}=sen(x+n\pi/2)$

b3) $y^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$ b.4) $y^{(n)}=(-2)^n\, e^{-2x}$

48. a) $l(x)=4x-2$, $r(x)=x^3-3x+2$; b) $l(x)=9x-11$, $r(x)=2x^2-8x+8$

c) $l(x)=4$, $r(x)=0$

49. a) $dy=(4x+senx+x\cos x)dx$; b) $dy=2x(2\ln x+1)dx$;

c) $$dy=\left(1-3\frac{e^{2x}}{x}-6e^{2x}\ln x\right)dx$$

50- a) $sen31°\cong\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=0.51514994$; b) $\sqrt{3.98}\cong 2+\frac{1}{4}\cdot(-0.02)=1.995$

c) $\ln 1.02\cong 0+1\cdot 0.02=0.02$

Práctica 4 (2da. Parte)

1. Si cumple, $x = 2$

2. a) No cumple, $No \exists f'(2)$; b) $a = 0$

3. No es derivable en x 0 = 1 ϵ [0 , 2]

4. a) Satisface la hipótesis del teorema de Lagrange; b) No es único , $x_1 = +\frac{5\sqrt{3}}{3}; x_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

5. t = 2 seg.

7. a) Aplicar el teorema de Rolle; c) Utilizar Teo de Bolzano para justificar existencia y Teo de Rolle para justificar unicidad(suponer que hay dos y probar que son iguales)

9. a) 1	b) ∞	c) 1 / 2	d) $+\infty$	e) 0	f) 1	g) 0
h) $+\infty$	i) 1	j) $e^{1/3}$	k) 0	l) 0	m) 1	n) 0
ñ) 1 / 2	o) 1	p)1	q) = 0			

11. No posee asíntotas

13. a) No tiene extremos relativos. Es siempre creciente; es decir:

Intervalo de crecimiento = R. Intervalo de decrecimiento = $\varnothing$

b) Máximo relativo en x = 0 ; mínimo relativo en $x = \pm\sqrt{3/2}$

Intervalo de crecimiento = (- $\sqrt{3/2}$; 0) U ($\sqrt{3/2}$; + ∞)

Intervalo de decrecimiento = (- ∞ ; - $\sqrt{3/2}$) U (0 ; + $\sqrt{3/2}$)

c) No posee extremos relativos ; Intervalo de crecimiento = R

d) Máximo relativo en x = $\sqrt{2/3}$; mínimo relativo en x = - $\sqrt{2/3}$

Intervalo de crecimiento = (- $\sqrt{2/3}$; + $\sqrt{2/3}$)

Intervalo de decrecimiento = (- ∞ ; - $\sqrt{2/3}$) U (+ $\sqrt{2/3}$; + ∞)

e) Mínimo relativo en x = 0; Intervalo de crecimiento = (0 ; + ∞)

Intervalo de decrecimiento = (- ∞ ; 0)

f) Máximo relativo en x = 1 ; mínimo relativo en x = - 1

Intervalo de crecimiento = (- 1 ; 1) ;

Intervalo de decrecimiento = (- ∞ ; - 1) U (1 ; + ∞)

g) Máximo relativo en x = 0

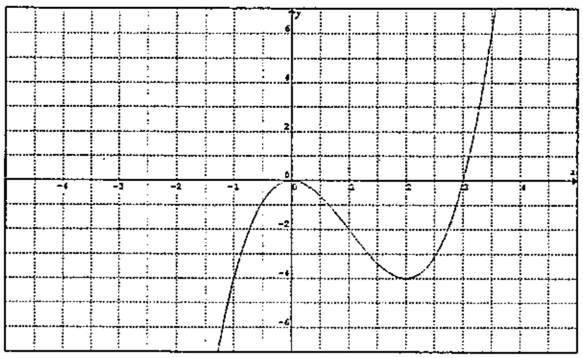
Intervalo de crecimiento = (- ∞ ; 0) ; Intervalo de decrecimiento = (0 ; + ∞)

h) No posee extremos relativos; Intervalo de crecimiento = R

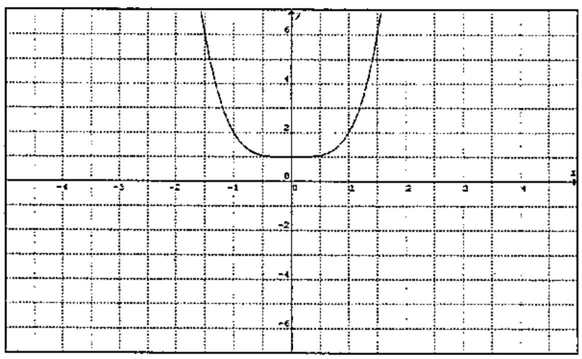
i) Máximo relativo en x = 4 ; Intervalo de crecimiento = (0 ; 4)

Intervalo de decrecimiento = (4 ; $+\infty$)

14 a) Intervalo de concavidad positiva = $(1;+\infty)$. Intervalo de concavidad negativa = $(-\infty;1)$. Punto de inflexión: $(1;-2)$

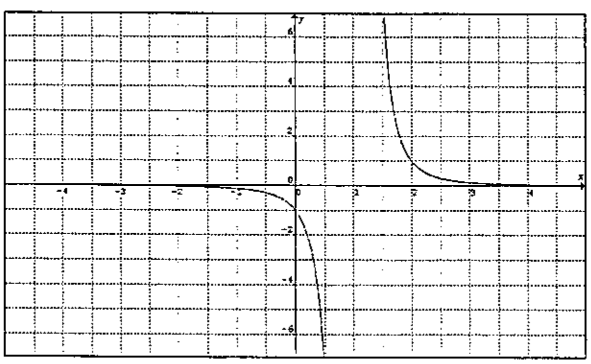


b) Concavidad positiva = R ; No posee puntos de inflexión



c) Concavidad positiva = (1; $+\infty$) ; Concavidad negativa = (- ∞ ; 1)

No posee puntos de inflexión

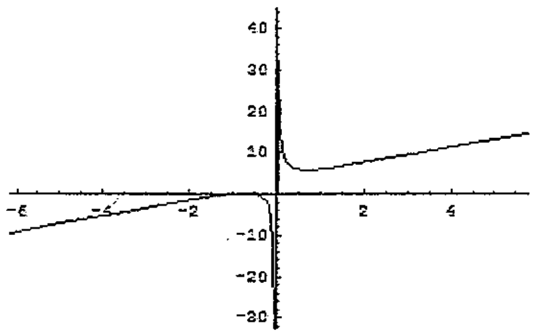


d) Concavidad positiva = R

No posee puntos de inflexión

15. Concavidad negativa en $(1;1)$

16. a)



Intervalos de crecimiento $= \left(-\infty\,;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$

Intervalo de decrecimiento $= \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;0\right),\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Mín. rel. $= \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}+3\right)$.

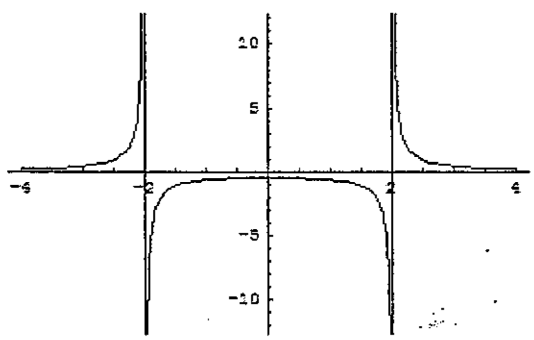
Max. Rel. $= \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{3}{\sqrt{2}}+3\right)$.

Intervalo de concavidad positiva $= (0\,;+\infty)$.

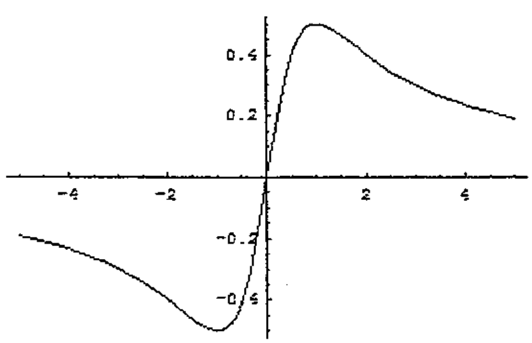
Intervalo de concavidad negativa $= (-\infty\,;0)$

Puntos de inflexión: no tiene.

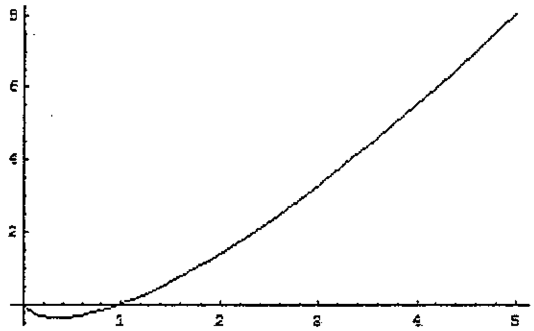
b)



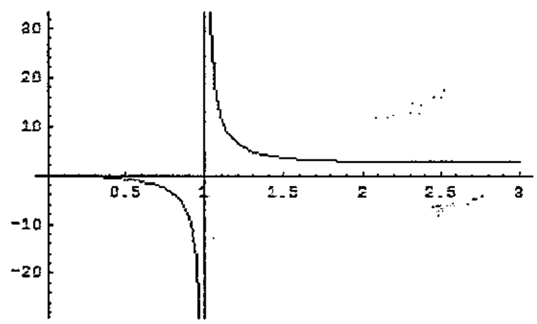
c)



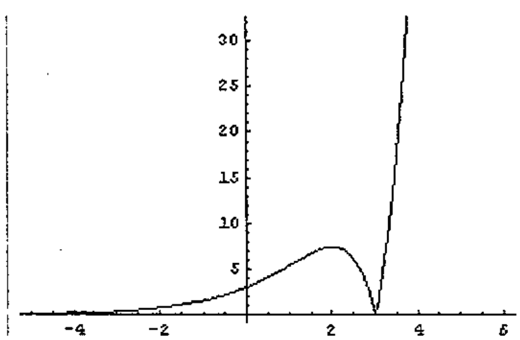
d)



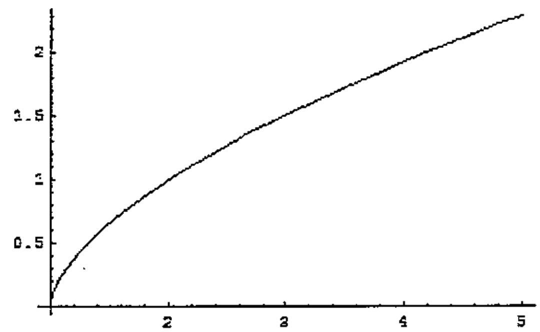
e)



f)



g)



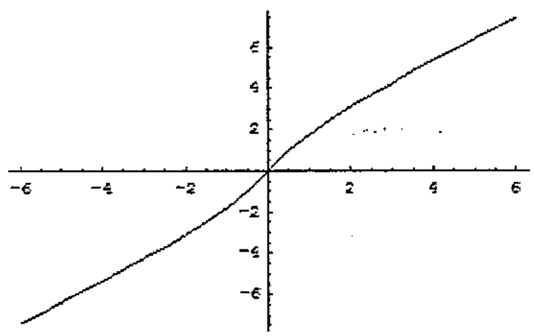
OBS: El gráfico está incompleto. $D_f = R$. Es creciente en todo su dominio.

Intervalo de concavidad positiva = $(-\infty; 1)$.

Intervalo de concavidad negativa = $(1; +\infty)$.

Punto de inflexión: $(1; 0)$

h)



OBS: el gráfico está incompleto. $D_f = R$.

Intervalo de decrecimiento = $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Intervalo de crecimiento = $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

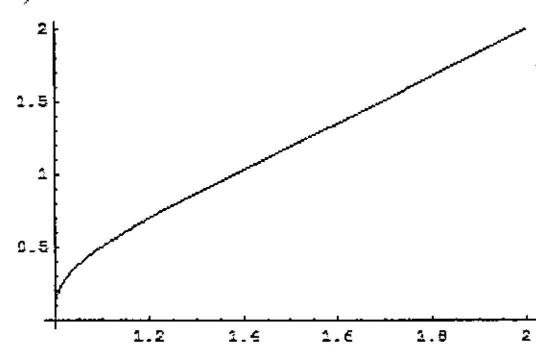
Mínimo relativo = $\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Intervalo de concavidad positiva = $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

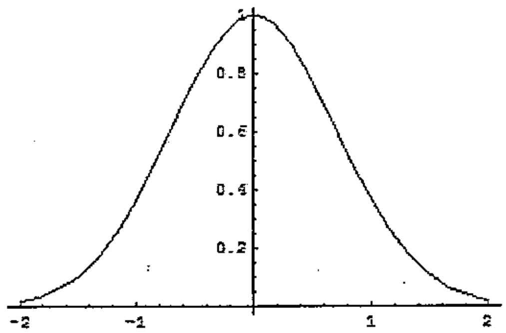
Intervalo de concavidad negativa = $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

Puntos de inflexión: $(1; 0)$ y $\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

i)



j)



17. Máximos: x 1 = - 1 ; x 2 = 3/2 ; Mínimo : x 3 = 0

18. p = - 2; q = 4. En el punto $(1;3)$ hay un mínimo relativo, que es también mínimo absoluto.

19. a) Máximo absoluto = 575 en x = 5 Mínimo absoluto = -4 en x=$\pm\sqrt{2}$

b) Máximo absoluto = 0 en x=0. Mínimo absoluto = -3 en x =± 1

c) Máximo absoluto = 575 en x=5 .Mínimo absoluto = 45 en x =3

d) No tiene máximo absoluto. Mínimo absoluto $=-4$ en $x=\sqrt{2}$

e) No tiene máximo absoluto. Mínimo absoluto $= -4$ en $x=\pm\sqrt{2}$

20. Para la función *f*: mínimo en el punto $(0;1)$ y máximo en el punto $(\sqrt{8};3)$

Para la función *g*: mínimo en el punto $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ y no tiene máximo

Para la función *h*: mínimo en el punto $(1;0)$ y no tiene máximo

Para la función *r*: no tiene mínimo ni máximo en el intervalo dado.

22. x = 12; y = 12

23. a) $(x=1 \wedge y=0) \vee (x=0 \wedge y=1)$; b) x = ½ , y = ½

24. Base = 4 dm ; altura = 2 dm

25. $A=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

26. a) $x=\dfrac{\pi}{4+\pi}$; $y=\dfrac{4}{4+\pi}$

b) $x=0$; $y=1$

27. a) El punto P en la posición $0.25km$ desde el pueblo

b) El punto P en la posición $0km$ desde el pueblo

28. (5 ; 3) y (- 5 ; 3)

29. $x = \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$; $y = 8\ \sqrt[3]{9}$

30. el mínimo se encuentra en el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$ o $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$, y el máximo se encuentra en el punto $(-1;1)$ o $(0;0)$ o $(1;1)$

31. $x = \sqrt{d(h+d)}$

32. $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

33. a) $f'''(2) = 0$, $f^{IV}(2) = 72$ b) $f^{VI}(2) = 0$, $f^{VII}(2) = 0$ c) $Q(x) = (x-2)^2$

34. a) $f(0) = 7; f'(0) = 0; f''(0) = -10; f'''(0) = 6$; b) $h'(2) = 0; h''(2) = -10$

35. a) $f(2) = 3$; $f'(2) = -4$; $f''(2) = -6$; $f'''(2) = -3$

b) $h'(-1) = 10$; $h''(-1) = -202$

37. a) $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!}$; $T_n = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, con $0 < c < x$

b) e ≈ 2, 6666.....

c) n = 7

d) $e^{-0,2} \cong 0{,}818666...$ con un error menor que $6 \cdot 10^{-5}$

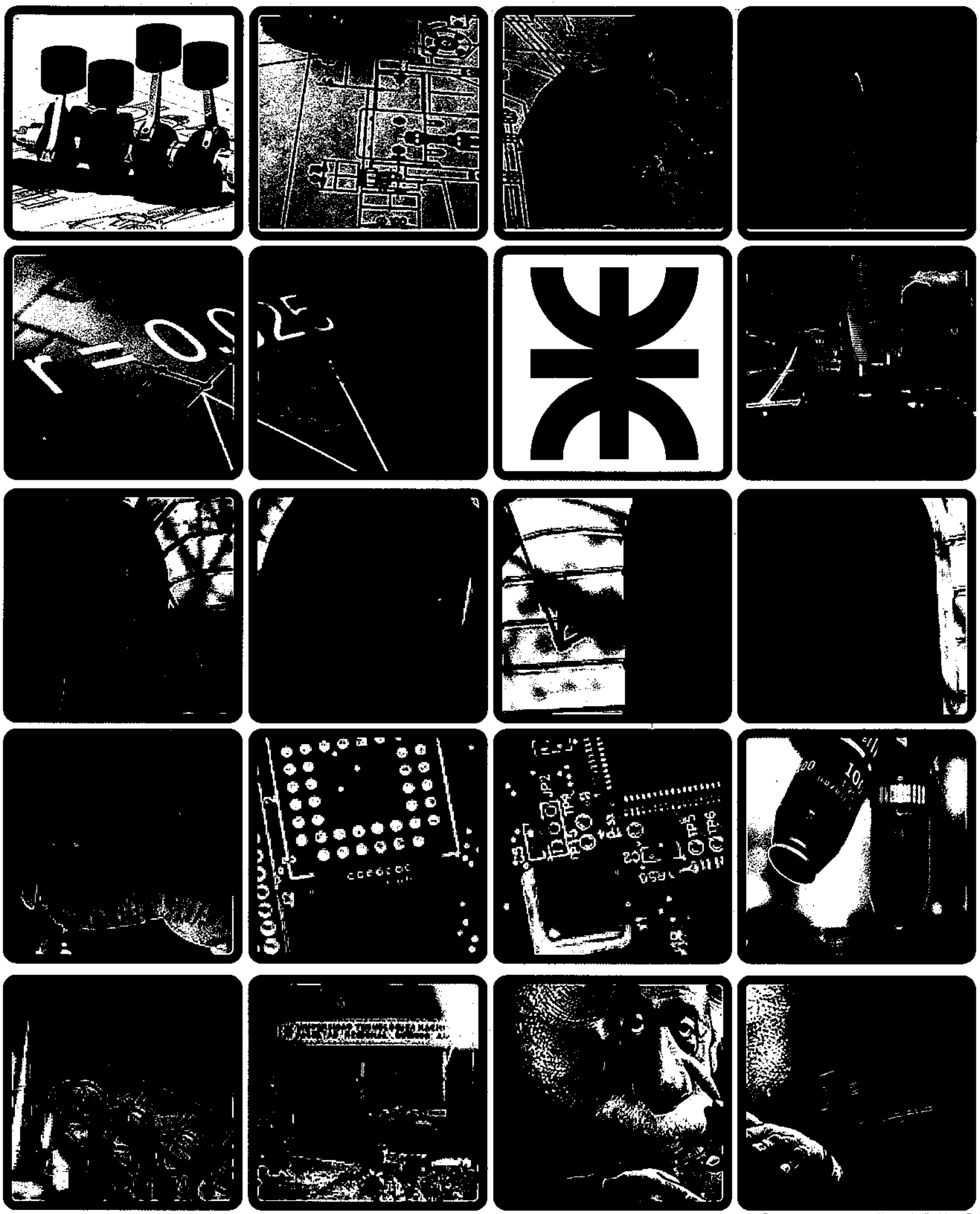
e) n = 5

38.a) $n = 1$ b) Puede aproximarse el valor de $\ln(1{,}02)$ con un error menor que 10^{-2} utilizando un polinomio de Taylor de grado $n = 1$

39. a) $P(x)=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\cdot x^i$ $\qquad T_n=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+c)^n}x^{n+1}$, con $0<c<x$

b) n=6

c) No, $\Delta x = 2$



GUIA DE TP 5-6-7-8

ANALISIS MATEMATICO I

U.D.B. MATEMÁTICA BM1AP9

CENTRO de ESTUDIANTES de INGENIERIA TECNOLOGICA

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

CÁTEDRA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I

GUIA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

N° 5, 6, 7 Y 8

Práctica 5 (primitivas)

Primitivas-Propiedades

1) Decidir el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $F(x)=\frac{1}{x}+c$ es una primitiva de $f(x)=\ln x$

b) $F(x)=x^2-3$ es una primitiva de $f(x)=2x$

c) $F(x)=e^{2x}+\sqrt{2}$ es una primitiva de $f(x)=e^{2x}$

d) $F(x)=2^x 3^x+2$ es una primitiva de $f(x)=6^x \ln 6$

e) $F(x)=\ln x$ es una primitiva de $f(x)=1/x$

f) $F(x)=\ln|x|+1$ es una primitiva de $f(x)=1/x$

2) Expresar el resultado de los siguientes cálculos aplicando convenientemente las propiedades de la integral:

a) $\int kf(x)dx =$

b) $\int [f(x)+g(x)]dx$

c) $\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx$

d) $\int [f(g(x))g'(x)]dx$

e) $\int e^{f'(x)} f''(x)dx$

3) Mostrar que una primitiva de la función $f(x)=|x|$ es $F(x)=x\left|\frac{x}{2}\right|$

4) La aceleración de un móvil en función del tiempo es $a(t)=5t$.

a) Hallar la velocidad en función del tiempo, sabiendo que parte del reposo.
b) Hallar la posición en función del tiempo sabiendo que parte del km 3.

Integrales inmediatas

5) Resolver las siguientes integrales aplicando las reglas de integración:

a) $\int (2x+3)dx$

b) $\int \left(2x^3-\frac{1}{4}x^2+\sqrt{3}\right)dx$

c) $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}-\frac{3}{x}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{x^5+3x^4-2x}{4x}\right)dx$

e) $\int\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2x}{\sqrt[3]{x^4}}\right)dx$

f) $\int\left(4e^x+5\cos x-\frac{7}{2}\right)dx$

g) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-senx\right)dx$

h) $\int\left(\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

i) $\int\frac{(x+2)}{\sqrt{x}}dx^2$

j) $\int(\sec^2 x-\cos ec^2 x)dx$

Integrales por sustitución

6) Resolver las siguientes integrales aplicando el método de sustitución.

a) $\int\frac{e^x}{e^x+3}dx$

b) $\int\frac{sen(2x)}{3+\cos(2x)}dx$

c) $\int(\cos x+3)^{10}senxdx$

d) $\int\sqrt[5]{sen(3x)}\cos(3x)dx$

e) $\int\frac{\ln(x+2)}{x+2}dx$

f) $\int\frac{x}{x^2+1}dx$

g) $\int xsen(x^2)dx$

h) $\int e^{5x}\sqrt{e^{5x}+3}dx$

i) $\int\frac{2+x}{x-3}dx$

j) $\int\left(\frac{arctgx}{1+x^2}\right)dx$

k) $\int sen(2x-1)dx$

l) $\int\frac{senx-3}{\cos^2 x}dx$

m) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

n) $\int\left(\frac{2}{9+(x-2)^2}\right)dx$

7) Teniendo en cuenta que:

$sen^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ y que $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ resolver:

a) $\int\cos^2 x\ dx$

b) $\int\cos^3 x\ dx$

c) $\int\cos^4 x\ dx$

d) $\int\cos^2 x\ sen^2x\ dx$

Integrales por partes

8) Resolver aplicando el método de integración por partes:

a) $\int xe^{x}dx$

b) $\int x^{2}e^{x}dx$

c) $\int (3+x)senx dx$

d) $\int (2-x^{2})\cos x dx$

e) $\int sen^{2}x dx$

f) $\int (x+2)^{\frac{1}{2}}x^{2}dx$

g) $\int x^{2}\ln x dx$

h) $\int \ln(x)dx$

i) $\int sen(\ln x)dx$

j) $\int \left(\frac{x}{\sqrt{2+x}}\right)dx$

k) $\int x3^{x}dx$

l) $\int \cos x e^{x/3}dx$

m) $\int arcsenx dx$

n) $\int x\sqrt{2-x}dx$

Fracciones simples

9) Resolver aplicando el método de integración por descomposición en fracciones simples:

a) $\int \frac{x+1}{x^{2}-4}dx$

b) $\int \frac{x^{2}}{9-x^{2}}dx$

c) $\int \frac{2x}{x^{2}+x-2}dx$

d) $\int \frac{5-x}{x^{2}+2x+1}dx$

e) $\int \frac{x^{3}}{x^{2}+4x+4}dx$

f) $\int \frac{x-2}{x^{2}+1}dx$

G) $\int \frac{x+5}{x^{3}-6x^{2}+9x}dx$

h) $\int \frac{x^{2}-3x}{(x-1)(x^{2}-4x+4)}dx$

i) $\int \frac{3}{(x-2)(x^{2}+9)}dx$

j) $\int \frac{x^{4}}{1-x^{10}}dx$

k) $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}-4}dx$

l) $\int \frac{\ln x+1}{x(\ln^{3}x+\ln^{2}x-2\ln x)}dx$

10) Calcular:

a) $\int \frac{1}{x^{2}+2x+5}dx$

b) $\int \frac{x-3}{x^{2}+2x+5}dx$

c) $\int \frac{x}{(x-2)(x^{2}+2x+5)}dx$

11) Resolver con el método que considere mas adecuado en cada caso.

a) $\int e^{6x}\cos(e^{3x})dx$

b) $\int\sqrt[3]{\sqrt{2x}+3}\,dx$

c) $\int\frac{\ln(2x)\ sen(\ln(2x))}{x}dx$

d) $\int\frac{\cos x}{sen^2x+1}dx$

e) $\int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx$

f) $\int\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{2}{x}})}dx$

g) $\int\frac{6}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$

h) $\int 2\ln^2(x^2+1)dx$

i) $\int\frac{senx\cos x}{4-\cos^2 x}dx$

j) $\int x\sqrt[3]{\frac{2-x}{3}}dx$

k) $\int(4x+4)\ln(1/x)dx$

l) $\int\frac{\sqrt{x}}{x+3}dx$

12) a) Utilizando la sustitución $x = sen\,t$ calcular $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

b) Utilizando a) calcular:

b1) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ b2) $\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$ b3) $\int\sqrt{12x-3x^2-8}\,dx$

c) Utilizando la tabla de integrales calcular:

c1) $\int\sqrt{4+x^2}\,dx$ c2) $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$ c3) $\int\sqrt{12x+3x^2}\,dx$

Ecuaciones diferenciales

11) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $x.dy = y.dx$

b) $y.y' = x.sen(x^2)$

c) $x.y' - y^2 = x.y^2$

d) $4xdy - ydx = x^2dy$

e) $y' + 3y = 2$

f) $(1+x^3).y' = x^2.y$

12) Hallar las curvas planas tales que la recta tangente en todo punto pasa por el origen.

13) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente entre la abscisa y la ordenada-del punto.

14) Hallar la curva plana que pasa por el (1,6) y satisface que en cada punto (x, y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en un punto de ordenada 5y.

15) Un termómetro que marca 10^0C se lleva a una habitación de 20^0C. En un minuto la temperatura del termómetro asciende a 15^0C. Si la velocidad con que cambia la temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de la habitación (que se mantiene constante)

a) Obtener y graficar el comportamiento de la temperatura del termómetro en función del tiempo.
b) ¿En que instante el termómetro marcará una diferencia de 1^0C con respecto a la temperatura ambiente?

16) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen V(t) respecto del tiempo es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para t=0 el diámetro es de 5 cm. Y 30 minutos después el diámetro es de 2 cm. ¿En qué momento el diámetro será de 1cm.?

Práctica 6 (Integral definida y aplicaciones)

Integral definida

1) Dibujar la región asociada a cada integral definida y evaluarlas a través de alguna fórmula geométrica:

a) $\int_1^2 5\,dx$ b) $\int_0^2 x+3\,dx$ c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ d) $\int_{-1}^3 x\,dx$

2) Determinar si las funciones dadas son integrables en el intervalo dado. Justificar. En caso afirmativo calcular el valor de la integral definida en dicho intervalo.

a) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x-2} + 2sen(\frac{\pi}{2}x)$ en (2; 3) b) $f(x) = \text{sig}(x)$ en [-1; 1]

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in Q \\ -1 & si\, x \notin Q \end{cases}$ en [0; 1] d) $f(x) = [x]$ en [-3; 1,5]

3) Sabiendo que $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)dx = 2$, hallar

$a)\ \int_{-1}^0 f(x)dx$ $b)\ \int_0^1 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx$

$c)\ \int_{-1}^1 3f(x)dx$ $d)\ \int_0^1 3f(x)dx$

4) Dada f continua en el intervalo [-3; 3] y si se sabe que $\int_0^3 f(x)dx = 5$, hallar

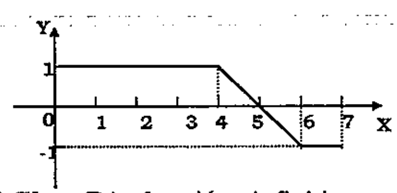
a) $\int_0^3 \left(f(x)+1\right)\,dx$

b) $\int_{-1}^2 f(x+1)dx$

c) $\int_{-3}^3 f(x)dx$ suponiendo que *f* es par

d) $\int_{-3}^3 f(x)dx$ suponiendo que *f* es impar

5) La figura representa el gráfico de una función *f: [0,7] → R* .



Considere *F : [0,7] → R* la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Calcular *F*(4) y *F*(7). b) Realizar un gráfico de F.

6) Calcular y graficar la función $F_i(x) = \int_{-1}^{x} f_i(t)dt$ para las funciones f_i dadas, en el intervalo que corresponda.

a) $f_1(x)=\begin{cases} -1 & si \quad -1 \le x < 0 \\ 2 & si \quad 0 \le x < 4 \\ 1/2 & si \quad 4 \le x \le 6 \end{cases}$ b) $f_2(x)=\begin{cases} -2 & si \quad -1 \le x \le 0 \\ x+3 & si \quad 0 < x < 2 \end{cases}$

c) ¿Qué representa $F_1(5)$?

d) $f_3(x) = | f_1(x)|$ ¿Qué representa $F_3(5)$?

7) Si $g, h:[c,d] \to [a,b]$ con derivada continua, y $f:[a,b] \to R$ es continua, utilizando la regla de derivación de una función compuesta y el teorema fundamental, pruebe que si $F(u) = \int_{a}^{u} f(t)\,dt$ entonces:

a) $\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x)).g'(x)$ b) $\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$

c)Utilizando los resultados de a) y b) calcular:

c1) $F'(2)$ siendo $F(x) = \int_{-3}^{x^2+5x} te^{-t}\,dt$ c2) $F'(0)$ siendo $F(x) = \int_{x^2+5}^{\cos(x)} e^{t}\,dt$

8) La función $F(x) = 3 - \int_{x}^{0} e^{-t^2}\,dt$ ¿presenta un punto de inflexión en x = 0?

9) Hallar f si se sabe que es continua en R y

$$\int_0^x f(u)\,du = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

10) Si f es continua en R determinar los valores $f(1)$ y $f(4)$ si se sabe que

$$x.sen\pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$$

11) Encontrar una función H derivable en R , no idénticamente nula, tal que:

$$H^2(x) = \int_0^x H(u)\frac{\cos u}{1+sen^2 u}\,du \quad \forall x \in R$$

12) Sea $g(x)=x^2+\int_1^{x^2} e^{sen(\pi t)}dt$. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor de a=1

13) a) Calcular:

a1) $\int_0^5 (x-3)dx$	a2) $\int_{-2}^0 xe^{x^2}dx$
a3) $\int_0^5 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$	a4) $\int_0^\pi x.sen\,x dx$

b) Las integrales calculadas en a) ¿representan el área limitada por el gráfico de y=f(x), el eje x y las rectas de ecuación x=a y x=b?

14) Dadas las siguientes funciones continuas en los intervalos indicados en cada caso, hallar el promedio de la función en el intervalo y el valor de la abscisa en el cuál se obtiene ese valor promedio.

$a) f(x)=x^2-2 \quad en[-3,3]$

$b) f(x)=senx+2 \quad en\,[0,\pi]$

$c) f(x)=\frac{x^2+4}{x} \quad en[1,3]$

15) Para la función *f*(*x*)= ax+b con b>0 y a>0 demostrar que el promedio de la función en un intervalo $[x_1, x_2]$ es ac+b, donde c es el punto medio del intervalo. Interpretar geométricamente.

16) Indicar si es V o F justificando:

a) Si f es discontinua en c$\in[a,b]$, entonces f no es integrable en$[a,b]$

b) Si $\int_a^b f(x)dx>0$ entonces f es no negativa para todo x de $[a,b]$

c) $\int_{-1}^1 x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^1=(-1)-1=-2$

d) Si F'(x)=G'(x) en R y $[a,b]\subset R$, entonces F(b)-F(a)=G(b)-G(a)

Cálculo de áreas

17) Calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $y=4x-x^2$ y el eje de las abscisas.

18) Calcular el área de la región comprendida entre las curvas:

$a) y=\sqrt{x}, y=x-2, x=0$

$b) y=-2+\ln(x), y=0, x=1, x=10$

$c) y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2, x=0, y=0$

19) Calcular el área de la región comprendida entre las gráfica de $y^2 = x$, las rectas x = 8 e y = 1.

20) Hallar el área de la región limitada por el eje Y, la recta de ecuación y=8 y el gráfico de la función definida por: $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^3+4$.

21) Hallar el área de la región limitada por el eje X y el gráfico de la función $f(x)=\frac{-6}{3x-5}+\frac{3}{2}$ y las rectas x=5 y x=2

22) Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones: $f(x)=7x^3 e^{x^4-2x^2}$ y $g(x)=7x\ e^{x^4-2x^2}$

23) Calcular el área de la región comprendida entre las gráfica de las parábolas $y^2 = 2px$, y $x^2 = 2py$, para $p > 0$.

24) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas:

$y = x^3 - 5$ e $y = -2x^2 + 3x - 5$

25) Hallar a ε R (a>0) para que el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x)=2\sqrt{x}-6$ y el eje X para $0 \le x \le a$ sea igual a 36.

26) Determine c > 1 de modo que el área de la región limitada por las curvas $y=e^{-2(x-5)}$, $y=e^{2(x-5)}$ y la recta de ecuación y = c sea 1.

27) Hallar a ε R, a > 0 tal que el área de la región acotada comprendida entre las curvas y = a x , $y = x^2$, e $y = a^2$ sea 7 / 48.

28) Determine el área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{x}$, x > 0, y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos de la curva, de abscisas x = 2 y x = ½, respectivamente.

29) Sea y = 3 (x – a).(x – 4), donde 0 < a < 4 y:
A_1 = área entre el eje Y, el eje X y la curva ;
A_2 = área entre el eje X y la curva entre x = a y x = 4.
Hallar a ε (0 ; 4) / $A_1 = A_2$.

30) La parábola de ecuación $y = x^2 - \frac{1}{4}$ divide a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, en dos regiones. Hallar las áreas de las dos regiones.

31) Calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de la función
$f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$, la asíntota oblicua de la misma, y 1 ≤ x ≤ 2.

32) El valor medio de una función continua *f(x)* sobre el intervalo [a,b], es
$f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

a) Si $f(x) = x^2$. Calcule c tal que c ε (0, 3) y f(c)
b) Demuestre que el área de la región por encima de y = f(c) y por debajo de y= f(x) con c ≤ x ≤ 3 es igual al área por debajo de y= f(c) y por encima de la curva con 0 ≤ x ≤ c

33) Suponga que el consumo de leña de una nación está dado por $76e^{0.03t} m^3 / año$ y el crecimiento de nuevos árboles está dado por $50 - 6e^{0.09t} m^3 / año$. Calcule e interprete el área entre las curvas para 0 ≤ t ≤ 10.

34) Si se arroja una piedra desde una cierta altura y en el instante t la velocidad es *v*(*t*) = 9,8 *t* + 8 m/s ¿ Qué distancia recorre en los primeros 3 segundos?

35) Un móvil se mueve con movimiento rectilíneo, si su velocidad en cada instante t es $v(t) = t^2\text{-}4t$ metros por segundo determine: su posición en función de *t*, y la distancia recorrida durante los primeros 4 segundos.

36) Supóngase que fluye agua hacia un depósito a razón de $V(t)$ lts/min, donde $f(t)$ es positiva y continua dada, si Q_0 es la cantidad de agua en el depósito en el instante $t = 0$, probar que la cantidad de agua en el depósito en un instante posterior $t>0$ es :

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t V(x)dx$$

37) Si la aceleración de un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo es $a(t) = 2(t\text{-}1)$ m/seg^2, si su posición inicial fue de 3m, y su velocidad inicial, de 2m/seg, determine para cada t posterior, su velocidad $v(t)$ y la distancia recorrida durante los primeros 2 segundos.

Apéndice

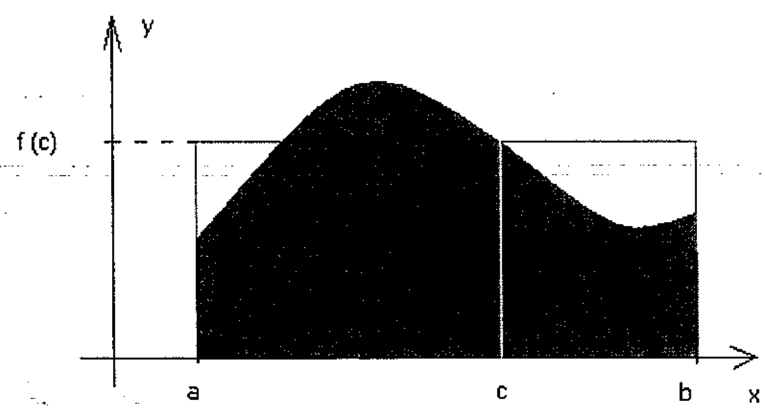
Aplicación del Teorema del Valor medio del Cálculo Integral:

Recordamos el T.V.M. del Cálculo Integral:

$$\boxed{\text{H) } f(x) \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow \text{T) } \exists\, c \in [a.b] / f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Interpretación geométrica:

El área bajo la curva (área gris) es igual al área del paralelogramo de base (b-a) y de altura $f(c)$, siendo *c* algún punto del intervalo $[a,b]$



Ejemplo:

Sean las funciones: $f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$
$g(t) = B\cos(\omega t + \beta)$

Sea $h(t) = f(t)g(t)$

Hallar el valor medio $Av(h)$ de la función $h(t)$ en un período de la función.

El valor medio de la función $h(t)$ es:

$Av(h) = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\,dt$ donde T es el período de la función.

Comenzamos por hallar la función $h(t)$:

$$h(t) = A\cos(\omega t + \alpha)B\cos(\omega t + \beta) = AB\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) =$$
$$= \frac{AB}{2}\left[\cos\left(2\omega t + (\alpha + \beta)\right) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

(Nota: $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x + y) + \cos(x - y)\right]$)

Luego: $\boxed{h(t) = \frac{AB}{2}\left[\cos\left(2\omega t + (\alpha + \beta)\right) + \cos(\alpha - \beta)\right]}$

Podemos llamar: $\varphi = \alpha - \beta$ y resulta:

$$\boxed{h(t) = \frac{AB}{2}\left[\cos\left(2\omega t + (\alpha + \beta)\right) + \cos(\varphi)\right]}$$

El período T de esta función es : $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$

$$\boxed{Av(h) = \frac{1}{\pi/\omega}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{AB}{2}\left[\cos\left(2\omega t + (\alpha + \beta)\right) + \cos(\varphi)\right] dt}$$

Resolviendo la integral, resulta:

$$Av(h)=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left[\cos\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)+\cos(\varphi)\right] dt =$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left[\cos\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)\right]dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(\varphi)dt \right]=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\frac{sen\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)}{2\omega} \Big|_0^{\pi/\omega} + \frac{\pi}{\omega}\cos\varphi\right]=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\left(sen\left(2\pi+(\alpha+\beta)\right)-sen(\alpha+\beta)\right)+\frac{\pi}{\omega}\cos\varphi\right]=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\frac{\pi}{\omega}\cos\varphi\right]$$

Luego:

$$\boxed{Av(h)=\frac{AB}{2}\cos\varphi}$$

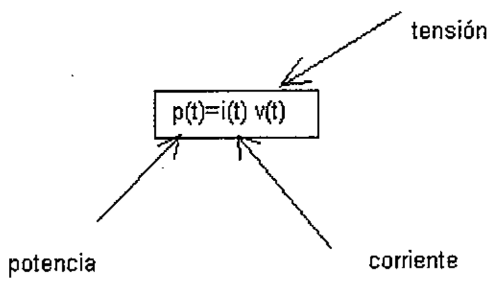
Donde φ es el defasaje entre las funciones $f(t)$ y $g(t)$

Si cambiamos el nombre de las funciones: $f(t)=i(t)$
$g(t)=v(t)$
$h(t)=p(t)$

Resulta: p(t) = i(t) v (t)

Si consideramos a *i(t)* como la corriente, *v(t)* la tensión, resulta *p(t)* la potencia en un circuito de corriente alterna; φ es el defasaje entre la corriente y la tensión.

$$\boxed{p(t)=\frac{I_M V_M}{2}\left[\cos\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)+\cos(\varphi)\right] \text{ , Potencia eléctrica}}$$

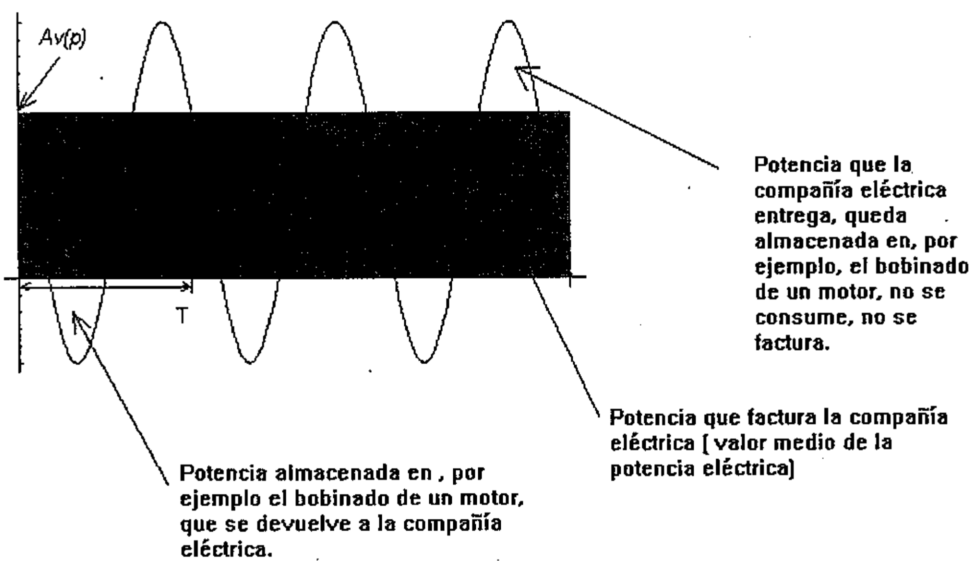


Y el valor medio de la potencia resulta: $Av(p) = \dfrac{I_M V_M}{2} \cos\varphi$

Donde: $A = I_M$ es la amplitud de la corriente

$B = V_M$ es la amplitud de la tensión

Graficamos la potencia eléctrica y su valor medio:



Práctica 7 (Integrales impropias)

1) ¿Se verifica que $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{5}{6}$?

2) Determinar si las siguientes integrales son impropias justificando la respuesta. En caso afirmativo indicar su especie.

a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$ b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{sen\,x}{x}\,dx$ d) $\int_{0}^{\pi/2} (\sec x - tg\,x)\,dx$

e) $\int_{0}^{1} \frac{1}{2x^2-3x-2}\,dx$ f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1-2\,sen\,x}\,dx$ g) $\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$ h) $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

3) Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias utilizando la definición, en el caso que C V indique a que valor

a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{arctg\,x}{x^2+1}\,dx$ b) $\int_{0}^{2} \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)}\,dx$ d) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x} sen\,x\,dx$

e) $\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-3x^2}\,dx$ f) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx$ g) $\int_{0}^{1} \ln x\,dx$ h) $\int_{0}^{+\infty} \ln x\,dx$

i) $\int_{0}^{2} \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx$ j) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-2|}\,dx$ k) $\int_{0}^{+\infty} senx\,dx$ l) $\int_{0}^{+\infty} (2+senx)\,dx$

4) a) Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcular los valores principales de las mismas

a.1) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x}\,dx$ a.2) $\int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

a.3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ a.4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si\ x > 1 \\ x & si\ |x| \le 1 \\ \frac{1}{x^3} & si\ x < -1 \end{cases}$

b) Visualizar en un gráfico las respuestas de a)

5)

a) Verificar que $\int_{1}^{+\infty} [\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}]\,dx \neq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx - \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx$

b) Interpretar geométricamente.

6) Analizar para que valores de $k \in R$ las siguientes integrales son convergentes:

a) $\int_0^{+\infty} e^{kx}\, dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\, dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{kx+3}{x^2+1}\, dx$

7) Utilizando el Criterio de Comparación analice la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ b) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{5+\cos^2 x}{x^2+1}\, dx$ d) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+e^{5x}}\, dx$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x^2+e^{5x}}\, dx$ f) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ g) $\int_0^{\pi/6} \frac{1}{x\, sen\, 3x}\, dx$ h) $\int_0^{2} \frac{1}{e^{3\sqrt{x}}\sqrt{x}}\, dx$

8) Dada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 3$

a) Representarla gráficamente
b) Determinar, si es posible, el área de la región limitada por la gráfica de f y su asíntota horizontal con $x \geq 0$ .Interpretar en un gráfico
c) Determinar, si es posible, el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, los ejes coordenados y la asíntota vertical .Interpretar en un gráfico.

9) Dada . $f(x) = tg\, x.\sec x$, esquematizar y determinar si es posible el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x con $0 \leq x \leq \pi$

10) En una empresa se determinó que la recaudación en cada instante t está dada por $f(t) = t.e^{5-t}$ millones de pesos.

a) ¿En qué momento la recaudación de dinero será máxima?.
b) ¿Cuánto será lo recaudado hasta el instante $t = 10$?.
c) ¿Cuánto se recaudaría si el tiempo fuese ilimitado?. (suponer la variable t continua)

11) Por un caño circula agua que se deposita en un tanque de volumen 100m^3, a una velocidad instantánea de $V(t) = (t+1).e^{-0,1\,(t+1)}$ con $t \geq 0$ y expresado en m^3 / seg. Se pide:

a) ¿Cuál es la cantidad de agua acumulada en los primeros 20 seg.?
b) Si la circulación de agua continúa indefinidamente. ¿Se desborda el tanque en algún momento?

Práctica 8 (Sucesiones y Series numéricas. Series de potencias)

Sucesiones numéricas

1) a) Si $a_1 = 1, a_2 = -1/3, a_3 = 1/5, a_4 = -1/7, ...$, hallar a_n

b) Si $b_1 = -1/2, b_2 = 1/2, b_3 = -3/8, b_4 = 1/4, ...$, hallar b_n

c) Si $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k}, c_{2k-1} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k}$ escribir los seis primeros términos de la sucesión si se sabe que $k \in N \wedge k \geq 5$.

d) Definir por recurrencia la sucesión $(1,4,3,2,1,0,-1,-2,....)$.

2) Dada la sucesión de término general $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in N$:

a) Completar el siguiente cuadro y represente gráficamente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										
$\|a_n - 2\|$										

b) De acuerdo con lo que se puede observar en la tabla ¿cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

c) ¿A partir de qué término se cumple que $|a_n - 2| < \dfrac{1}{4}$?

d) ¿para qué valores de *n* se cumple que la distancia entre a_n y 2 es inferior a 0,1?

3) Demostrar que todos los términos de la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n\in N}$, salvo los diez primeros, están contenidos en el intervalo (0,9;1,1)

4) Calcular los límites de las sucesiones y verifique por definición sus resultados, si los términos generales son:

a) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ b) $\left(\dfrac{|n-9|}{2n+5}\right)$ c) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+3}\right)$ d) $\left(\dfrac{n^2+1+n}{3n^2+5n+1}\right)$

5) Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (NOTA: ver demostración en el apéndice)

Calcular:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{(2n+1)^5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{n+n^2}$

6) Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0 \quad si\ a>1, k>0$ (la demostración de este límite se verá como aplicación del Criterio de D´Alembert en el tema Series numéricas ejercicio 29). Calcular:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+3}{3^n+5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+9}{5n^2+3.2^n+7}$

7) Utilizar el teorema de intercalación para probar que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a \quad si \quad 0<b\le a$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\ \dots\ +\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0$

8) Sabiendo que $(a_n)_{n\in N}=(1{,}52;1{,}522;1{,}5222;\dots)$:

a) Hallar $a_n=f(n)$

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

9) a) Escriba las hipótesis del criterio de Weierstrass que aseguran que la sucesión $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tiene límite.(Verificación en el apéndice)

b) Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ calcular:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3n+2}$

c) Aceptando la siguiente propiedad:

"Si $(a_n)_{n\in N}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ ó $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$ " calcular

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n \ con\, k\in R, k\neq 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n+5}$

10) Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, deberán ser demostradas, si resultan falsas alcanza con dar un contraejemplo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty \wedge \lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0 \vee \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty \wedge \exists \;\; k \in R^+ / |b_n| \le k \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$

e) Toda sucesión monótona creciente es divergente

f) Toda sucesión acotada es convergente

g) Toda sucesión convergente es acotada

h) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \;\; \wedge \nexists \lim\limits_{n\to\infty} b_n \;\; \Rightarrow \;\; \nexists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

11) Calcular los límites de las sucesiones, con $n \in N$:

a) $\left(\dfrac{3n^2+5}{4-5n^2}\right)$ b) $\left(\dfrac{3(n+1)!+n!}{n!-7(n+1)!-2}\right)$ c) $\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+1}\right)$

d) $\left(\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\right)$ e) $\left(\dfrac{sen n}{n}\right)$ f) $\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{4n-7}$

g) $\left(\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}\right)$ h) $\left(n\left[\ln(n+a)-\ln n\right]\right), a>0$

12) Determinar a y $b \in \Re$ de $f(n) = \left(\dfrac{an+b}{2n+1}\right)^{3n} \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = e^{-6}$

13) Sea $(a_n)/a_n = n \,.\, 2^{-n}$

a) Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} (2a_n + 5)$

b) Sea $(b_n)_{n\in N} / |b_n| \le 3$, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$

c) Sea $(c_n)_{n\in N} / a_n \le c_n \le \dfrac{n^2+n+1}{2n^3-5}$, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} (2 + c_n)$

14) a) Analizar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$	b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1/2)^n$	c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^n$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1/2)^n$	e) $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n$	f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$

b) Analice la existencia del $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \;\; \forall q \in R$ (el resultado de este límite se utilizará para estudiar la convergencia de la serie geométrica)

Series numéricas

15) Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

a) Determinar la sucesión de sumas parciales recurriendo a la descomposición en fracciones simples

b) Calcular, aplicando la definición, si existe, la suma de la serie dada.
c) Utilizando la misma línea de razonamientos de a) y b), probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

16) Dadas las siguientes series geométricas, analizar si convergen, divergen u oscilan y, de ser posible, hallar su suma. Justificar.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ b) $\sum_{n=3}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-7)$ d) $\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^{n+1}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}$

17) Discutir la convergencia de las siguientes series numéricas usando la definición, series telescópicas o series geométricas. En el caso de que converjan determine sus sumas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{96}{2^{2n-1}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{6^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+n^2}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{\sqrt{x}}\,dx$

18) Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si $|q|<1$, indicar cuál es la suma de las siguientes series y qué condición debe cumplir *x*:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)^n$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-x)^{n-1}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-3)^n$

19) Se deja caer una pelota desde una altura de 100cm. Cada vez que golpea el piso rebota a 2/3 de su altura anterior. Hallar la distancia total recorrida.

20) Usando las propiedades generales de las series y de las series geométricas y armónicas generalizadas; indicar, si es posible, si convergen o divergen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2}$

d) $\sum_{n=5}^{\infty} \left(2+\frac{3}{n^3}\right)$ e) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-5)^n+(-2)^n}{10^n}$

21) Aplicando condición necesaria de convergencia, determinar si es posible, la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[5+2(-1)^n\right]^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\cos n\pi)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}$

22) Si la suma de los n primeros números de una serie es $\frac{4n+1}{n+3}-\frac{1}{3}$, analizar la convergencia de la serie, calcular el término a_{20} y hallar el término general a_n. Justificar.

23) Sabiendo que la suma de los n primeros términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ es $S_n=\frac{5n^2-3n+2}{n^2-1}$, determinar el término a_6 y discutir la convergencia de la serie. Justificar.

24) De ser aplicables los criterios de comparación, discutir la convergencia, en cada caso, justificando:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[3+\frac{(-1)^n}{2n}\right]$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1/n)}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

25) Mediante el uso de condición necesaria o criterios de D'Alembert, de la raíz o de la integral, discutir la convergencia:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n-5}\right)^{2n+3}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n^2+3}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{e^{2n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n}\right)^n$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n-1}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

26) Discutir la convergencia de las series, empleando los métodos apropiados. Justificar:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2+2}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^n}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2(5n-1)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$

27) Discutir la convergencia para todo $a>0$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\,.\,n!}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n\,.\,2^n}$

28) Sea $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ tal que $u_{2k}=\left(5/7\right)^k$; $u_{2k+1}=5\left(5/7\right)^k$

a) Verificar que D'Alembert no decide.
b) Aplicar el criterio de la raíz y decidir si converge o no.

29) Como consecuencia del criterio de D'Alembert calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$ con $a>1, k>0$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ con $a>1$

30) Investigar si las series alternadas son convergentes ¿cuáles convergen condicional o absolutamente?

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+10}$

31) Dadas las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$

a) Verificar que ambas series convergen y que su suma S verifica 0<S<1

b) Calcular en ambas S_9.

c) Encontrar una cota superior de $|S - S_9|$ en ambos casos. Interprete.

32) Determinar el conjunto de los números *r* para los cuales las series dadas son convergentes y analizar si la convergencia es absoluta o condicional.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{r}{2}\right)^{3n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r+2)^n}{2n+1}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}(2r)^n$

33) Se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}6^n.a_n \,/\, a_n>0$ es convergente. Analizar la convergencia de las siguientes series, justificando la respuesta:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-6)^n.a_n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}5^n.a_n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^n.a_n$

34) Encontrar todos los $\alpha\in R^+$ de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{n^2+1}{3^n}$ converja.

35) Encontrar todos los $\alpha\in N$ de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(\alpha n)!}$ converja.

36) Encontrar todos los $\alpha\in R$ de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^\alpha}{(3n)!}$.

Series de potencias- Serie de Taylor

37) Determinar radio e intervalo de convergencia, analizando los extremos.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+3)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n)!\,(x-3)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2x-7)^n}{n \cdot 3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} . n^n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x+2)^{4n}}{(n^2+1)}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x+2)^{4n+1}}{(n^2+1)}$

38) Obtener las series de Mac Laurin y el intervalo de convergencia. Justificar.

a) $y=e^x$ b) $y=\operatorname{sen} x$ c) $y=\cos x$

d) $y=\frac{1}{1+x}$ e) $y=\ln(1+x)$

39) Decir si las siguientes igualdades son verdaderas. Justificar

a) $\ln(1,2)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(0,2)^n}{n}$ b) $\ln(3)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n}$

40) Usando los desarrollos anteriores y las propiedades de series de potencias, hallar los desarrollos de Mc Laurin de las siguientes funciones e indicar el intervalo de convergencia:

a) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ b) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ c) $f(x)=\frac{1}{2-3x}$

d) $f(x)=e^{-3x}$ e) $f(x)=sen\,(\pi x)$ f) $f(x)=\ln(1+4x)$

g) $f(x)=x\,e^{-2x}$ h) $f(x)=ch\ x$ i) $f(x)=\cos^2 x$

j) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ k) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ l) $f(x)=\int_0^x e^{-u^2}\,du$

m) $f(x)=\begin{cases} \frac{sen\ x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$

41) Recurriendo a la descomposición en fracciones simples y teniendo en cuenta desarrollos de series conocidas, obtener la serie Mac Laurin de $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-1}$.

42) Usando desarrollos en serie, calcule:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

Dada una sucesión de término general a_n se llama ***función asociada a la sucesión*** a una función f de variable real, continua y tal que $f(n)=a_n$

43) Probar que la sucesión $a_n = \frac{\ln n}{n}$ es decreciente con n>2 (sugerencia: estudiar crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ mediante el signo de f')

Propiedad:

Sea f (x) la función asociada a la sucesión a_n

1-Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

2- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

44) Utilizando la propiedad anterior calcular

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5^n}{n^4}$

45) ¿Es posible aplicar la propiedad anterior para calcular $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n\pi$? justifique

Aplicaciones

46) La función potencial del campo de fuerzas gravitatorio es inversamente proporcional a la distancia $r = R + h$ del objeto al centro de la Tierra, siendo *R* el radio de la Tierra (supuesta esférica) y *h* la altura del objeto respecto de la superficie terrestre, y con esta expresión se debería calcular la energía potencial gravitatoria. Sin embargo, el cálculo de dicha energía se realiza a partir del producto *P.h* (*P* peso del objeto), o sea directamente proporcional a la altura *h*. Usted puede explicar esta aparente contradicción basándose sobre los conceptos estudiados hasta aquí.

47) Consideremos un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio r. Al unir los vértices con el centro de la circunferencia, obtenemos n triángulos congruentes. Cada ángulo central mide $\frac{2\pi}{n}$

a) probar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$
b) Llamando S_n a la suma de las áreas de los n triángulos, calcular $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ e interpretar el resultado geométricamente.

Apéndice

I) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Se mostrará que la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ está acotada superior e inferiormente por dos sucesiones cuyos límites son iguales a 1. A partir de este resultado el teorema del intercalación o del "sándwich" asegurará que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

i) Como $n \geq 1 \to a_n = \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1 = b_n$ (sucesión constante)

ii) Como $\sqrt[n]{n} \geq 1$ entonces puede expresarse $\sqrt[n]{n} = 1 + h$ para algún $h \in R_{\geq 0}$

entonces

$$a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h \to n = (1+h)^n \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por binomio de NEWTON (ver (\#))}}}{=} 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots\ldots + h^n \underset{\substack{\downarrow \\ \text{como todos los sumandos son positivos se puede acotar inferiormente con uno solo de ellos}}}{\geq} \frac{n(n-1)}{2!}h^2$$

por transitividad de la desigualdad se tiene que:

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{SI } n>1}}{\to} \frac{2n}{n(n-1)} \geq h^2 \to \frac{2}{n-1} \geq h^2 \to \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq h \to c_n = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq 1 + h = a_n$$

por lo tanto: $1 = b_n \leq a_n \leq c_n = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

y como $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \sqrt{\underbrace{\frac{2}{n-1}}_{0 \text{ SI } n\to\infty}} = 1$

el teorema de intercalación asegura que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

OBSERVACIÓN: Binomio de Newton

$(x+y)^1=x+y$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ sus coeficientes forman el:

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

....

generalizando se obtiene:

<u>TRIÁNGULO DE TARTAGLIA</u>

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 \quad n \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad n \quad 1 \end{array}$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+........+\frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2}+nxy^{n-1}+y^n$$

Esta igualdad se la conoce como Binomio de Newton y puede escribirse como:

$$\boxed{(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k} \quad \text{donde } \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (número combinatorio)}$$

y puede demostrarse formalmente utilizando el Principio de Inducción Matemática.

En la demostración se usó para el caso particular de **x=1 y y=h**

II) Demostrar que la sucesión $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite

Se probará que la sucesión:

i) Es monótona creciente

ii) Está acotada superiormente

de i) y ii) por el Teorema de Weierstrass se tendrá que existe $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sup\{a_n : n\in N\}$. A dicho límite se lo bautiza como el <u>**número e**</u>

Demostración de i): se quiere probar que:

$\forall n\in N: a_{n+1}\geq a_n$ lo que es equivalente a: $\forall n\in N:\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ por ser $a_n>0\ \forall n\in N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right).\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n}=$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n}=$$

$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\underbrace{\frac{-1}{(n+1)^2}}_{h}\right)^{n}\geq\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+n.\frac{-1}{(n+1)^2}\right)=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\right)=$$

DESIGUALDAD DE BERNOULLI
$(1+h)^n \geq 1+nh$
$\forall n\in N, h>-1$

$$=\frac{n+2}{n+1}.\frac{n^2+2n+1-n}{(n+1)^2}=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}=\frac{n^3+2n^2+n^2+2n+n+2)}{(n+1)^3}=\frac{(n^3+3n^2+3n+1)+1)}{(n+1)^3}=$$

$$=\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3}=1+\underbrace{\frac{1}{(n+1)^3}}_{>0}\geq 1.$$

por lo tanto se probó que $\forall n\in N:\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ lo que muestra que la sucesión es ***monótona creciente.***

Demostración de ii): se quiere probar que $\exists K\in R:\forall n\in N:a_n\leq K$

desarrollando el binomio de newton para el caso particular de $x=1\wedge y=\frac{1}{n}$ se tiene:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\binom{n}{4}\frac{1}{n^4}+\ldots\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$ y desarrollando los números combinatorios y simplificando en cada sumando se obtiene:

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{1}{4!}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-(n-1))}{n^{n-1}}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\ldots\frac{n-(n-1)}{n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\le$$

como cada paréntesis verifica $0\le\left(1-\frac{r}{n}\right)<1$ con $1\le r<n$ se tiene:

$$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

> Como $\forall n\in N: n!\ge 2^{n-1}$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$
>
> (se demuestra utilizando el Principio de Inducción) al aplicar esta desigualdad a todos los sumandos a partir del 3er sumando se consigue:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\text{ (Por suma de los términos de una progresión geométrica)}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}_{\le 1}\le 1+2=3$$

Se terminó de demostrar que $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)\le 3\ \forall n\in N$ o sea es una sucesión ***acotada superiormente*** (y también inferiormente)

Por lo tanto por el Teorema de Weierstrass se tendrá que existe

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\text{supremo}\{a_n : n\in N\}.$$

A dicho límite se lo bautiza como el **número e**, el cual satisface que $2<e<3$