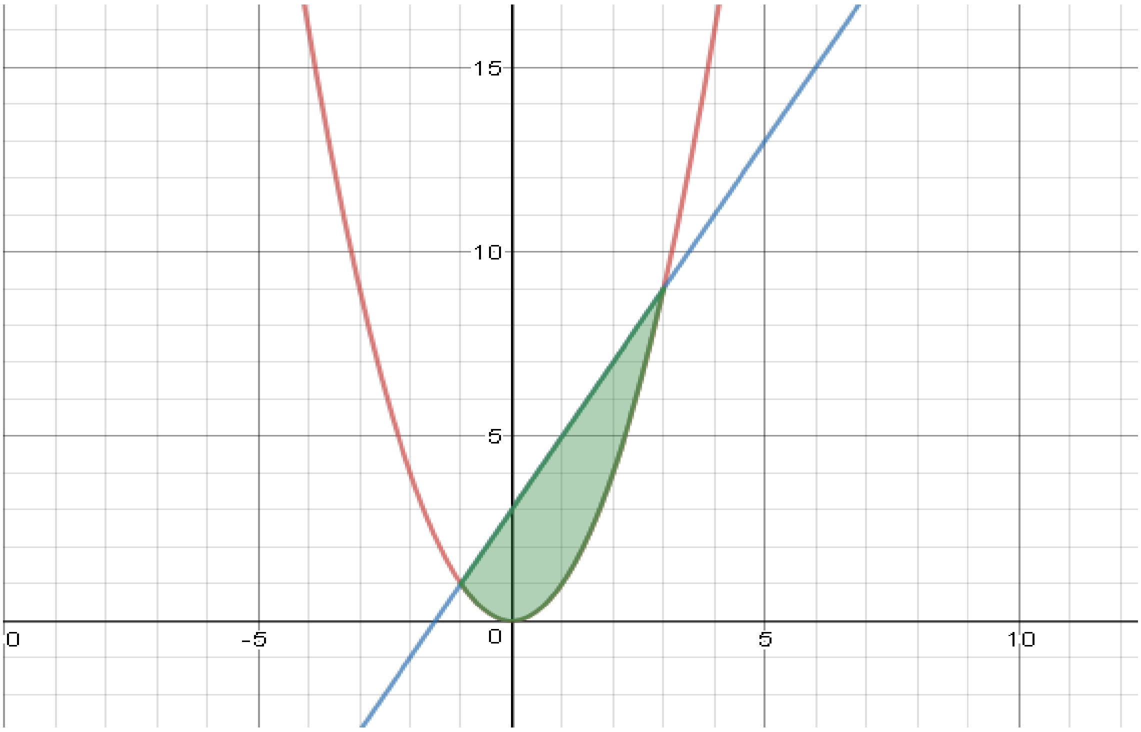
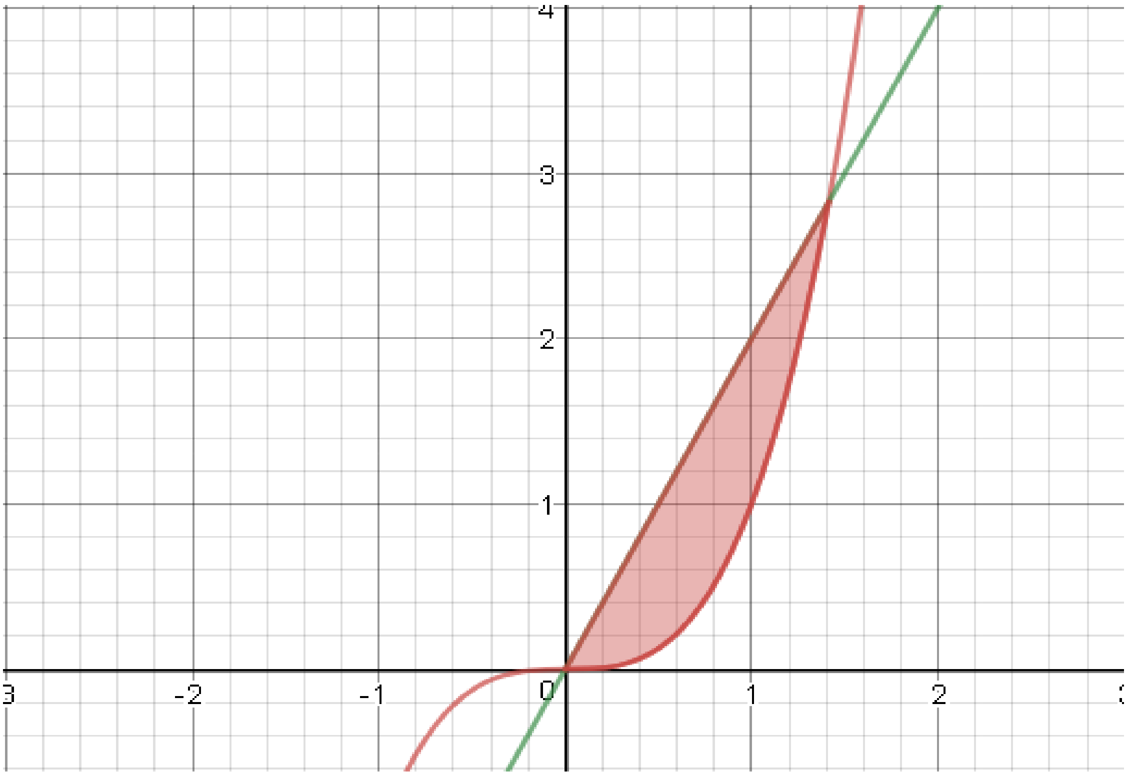
MARTIN Y HERRERA, Marcos Félix

RESUMEN SEGUNDO PARCIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO I





Índice

1. POLINOMIO DE TAYLOR 3
2. POLINOMIO DE MACLAURIN 3
3. INTEGRALES 6
3.1. Integral Indefinida 6
3.1.1. Métodos de integración 7
3.1.2. Ecuaciones diferenciales 12
3.2. Integral definida 17
3.2.1. Teorema del valor medio del cálculo integral 20
3.2.2. Teorema fundamental del cálculo integral 20
3.2.3. Regla de Barrow 21
3.2.4. Área entre dos curvas 27
3.2.5. Integración sobre el eje y 32
3.3. Integral impropia 35
3.3.1. 1° especie 35
3.3.2. 2° especie 36
3.3.3. Criterio de comparación 40
4. SUCESIONES 41
4.1. Igualdad 44
4.2. Sucesiones acotadas 42
4.3. Sucesión convergente 42
4.4. Sucesión divergente 42
4.5. Sucesión oscilante 43
4.6. Sucesiones monótonas 43
4.7. Criterio de D'Alambert 43
4.8. L'Hopital con sucesiones 44
5. SERIES 45
5.1. Clasificación 45
5.2. Serie geométrica 45
5.3. Series p 46
5.4. Series alternadas 46
5.5. Condición necesaria de convergencia 47
5.6. Criterio de D'Alambert 47
5.7. Criterio de la raíz de Cauchy 47
5.8. Criterio de Leibniz 47
5.9. Criterio de la integral de Cauchy 48
5.10. Convergencia absoluta 48
5.11. Criterio de comparación de Gauss 48
6. SERIES DE POTENCIA 49
6.1. Radio de convergencia 49
7. SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN 52
8. OTRAS FORMAS DE OBTENER DESARROLLOS EN SERIE 54
8.1. Teorema de derivación 54
8.2. Teorema de integración 54
9. EJERCICIOS GENERALES 55

1. POLINOMIO DE TAYLOR

$$P(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n$$

2. POLINOMIO DE MACLAURIN

Es el polinomio de Taylor con $a = 0$.

$$P(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}.x^n$$

1) $Desarrollar\ mediante\ la\ f\acute{o}rmula\ de\ Taylor\ hasta\ el\ t\acute{e}rmino\ de\ 3°\ grado$

$f(x) = \cos x\ en\ \frac{\pi}{4}$.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(x) = -sen\ x => f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) = -cos\ x => f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(x) = sen\ x => f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}$$

$$\boxed{cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}\right]}$$

2) $Hallar\ h\ y\ k\ de\ modo\ tal\ que\ el\ polinomio\ de\ MacLaurin\ de\ grado\ 2\ de$

$f(x) = h.ln(1 + kx)$ sea $P_2(x) = 2x - 2x^2$.

$f(0) = h.ln1 = 0$

$f'(x) = \frac{h.k^2}{1+kx} => f'(0) = h.k$

$f''(x) = -\frac{h.k^2}{(1+kx)^2} => f''(0) = -h.k^2$

$P(x) = h.k.x - \frac{h.k^2}{2}.x^2 => h.k.x - \frac{h.k^2}{2}.x^2 = 2x - 2x^2$

$h.k = 2 \wedge \frac{h.k^2}{2} = 2 => h = \frac{2}{k}$

$\therefore \boldsymbol{k = 2 \wedge h = 1}$

Término complementario

Taylor

$$\boxed{T_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad a < c < x}$$

MacLaurin

$$\boxed{T_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad 0 < c < x}$$

Ejemplos:

1) *Utilizar el polinomio de MacLaurin hasta el término de grado* 5 *para aproximar sen* 0,1. *Acotar el error.*

$f(0) = sen(0) = 0$

$f'(x) = \cos x => f'(0) = 1$

$f''(x) = -sen\ x => f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x => f'''(0) = -1$

$f^{iv}(x) = sen\ x => f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = \cos x => f^{v}(0) = 1$

$f^{vi}(x) = -\text{sen}\, x => f^{v}(c) = -sen\ c$

Entonces:

$$\boxed{sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{sen\ c}{6!}x^6 \quad 0 < c < x}$$

$$\text{sen}\, 0{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{3!} + \frac{(0{,}1)^5}{5!} = 0{,}09983341667$$

Ahora tengo que acotar el error. Que en definitiva sería acotar el término complementario:

$$|T_5(0{,}1)| = \frac{|\text{sen}(c)|}{6!}(0{,}1)^6$$

El **valor máximo** que puede alcanzar el sen c es 1. Entonces:

$$|T_5(0{,}1)| = \frac{|\text{sen}(c)|}{6!}(0{,}1)^6 \leq \frac{1}{6!}(0{,}1)^6 = 8{,}3.10^{-8} \quad 0 < c < 0{,}1$$

Por lo tanto, esto asegura que la aproximación hallada anteriormente tiene al menos 7 cifras decimales exactas.

Para comprobar que esto se cumple, hallo sen 0,1 con calculadora (en radianes):

$\text{sen}\, 0{,}1 \approx 0{,}09983341667 \quad Aproximación$

$sen\ 0{,}1 = 0{,}09983341665 \quad Calculadora$

3) $Hallar\ \sqrt{e}\ con\ un\ polinomio\ de\ MacLaurin\ de\ grado\ 3\ e\ indicar\ la\ exactitud\ del\ resultado\ obtenido.$

Considero el polinomio de MacLaurin de grado 3 asociado a la función $f(x) = e^x$ para efectuar el cálculo aproximado.

Además, para determinar la exactitud del resultado, voy a tener que acotar el error.

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x => f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x => f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x => f'''(0) = 1$

$f^{iv}(x) = e^x => f^{iv}(c) = e^c$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^c.x^4}{4!} \quad 0 < c < x}$$

$\sqrt{e} = e^{0{,}5} \quad => x = 0{,}5$

$$\sqrt{e} \approx 1 + 0{,}5 + \frac{(0{,}5)^2}{2!} + \frac{(0{,}5)^3}{3!} = 1{,}64583$$

Para determinar la exactitud del resultado tengo que acotar el término complementario:

$$|T_4(0{,}5)| = \frac{|e^c|}{4!}(0{,}5)^4$$

Como $e = 2.71828$ ..., puedo establecer una cota superior: $e < 3$.

Entonces, el **valor máximo** que puede alcanzar e^c es 2.

$$|T_4(0{,}5)| = \frac{|e^c|}{4!}(0{,}5)^4 \leq \frac{2(0{,}5)^4}{24} = 5{,}2.10^{-3} \quad 0 < c < 0{,}5$$

Finalmente, el resultado obtenido tiene dos cifras decimales exactas.

3. INTEGRALES

3.1. Integral indefinida

1) $\int dx = x + C$

2) $\int k.dx = k.x + C$

3) $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ \ n \neq -1$

4) $\int \frac{1}{x}.dx = ln|x| + C$

5) $\int [f(x)]^n.f'(x).dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

5) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}.dx = ln|f(x)| + C$

$f(x)$	$\int f(x)$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{ln\,a} + C$
$sen\ x$	$-cos\ x + C$
$cos\ x$	$sen\ x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\ x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsen\ x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$ArgSh\ x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ArgCh\ x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x + C$

$Recordar$: $a^b.a^c = a^{b+c}, \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}\ , \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, (a^b)^c = a^{b.c}$

Propiedades:

1) $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$

2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Ejemplos:

Este tipo de integrales son inmediatas, porque se resuelven utilizando las fórmulas mencionadas anteriormente.

1) $\int 34\, dx = \boldsymbol{34x + C}$

2) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}.dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}.\sqrt{x^3} + C}$

3) $\int \dfrac{4}{1+x}dx = 4\int \dfrac{1}{1+x}dx = 4\int (1+x)^{-1}dx = \boldsymbol{4.\,ln|x+1| + C}$

4) $\int \dfrac{x}{x^2+1}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{x^2+1}dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}.\,ln|x^2+1| + C}$

Multiplico y divido por 2

5) $\int sen^3x.\cos x.dx = \boldsymbol{\dfrac{sen^4x}{4} + C}$

6) $\int 2^x dx = \boldsymbol{\dfrac{2^x}{ln\,2} + C}$

7) $\int tg^2x = \int \dfrac{sen^2x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx - \int \dfrac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}dx = \boldsymbol{tg\,x - x + C}$

3.1.1. Métodos de Integración

Sustitución

Este método consiste en transformar una integral no inmediata en otra inmediata a través de una sustitución de variables.

Ejemplos:

1) $\int \dfrac{x-3}{x^2-6x+4}dx = \int \dfrac{x-3}{u}\,\dfrac{du}{2x-6} = \int \dfrac{\cancel{x-3}}{u}\,\dfrac{du}{2(\cancel{x-3})} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{u}du = \dfrac{1}{2}ln|u| + C =$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}ln|x^2 - 6x + 4| + C}$

$u = x^2 - 6x + 4$ Lo que va ahí es la derivada de u.

$\dfrac{du}{dx} = 2x - 6 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x-6}$

$$2) \int x.\sqrt{x^2+1}.dx = \int \cancel{x}.\sqrt{u}.\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}.du = \frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt[2]{(x^2+1)^3}}{3} + C$$

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$3) \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}arcsen(u) + C = \frac{1}{2}arcsen(2x) + C$$

$u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$4) \int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}dx = \int \frac{\cancel{x^2}}{1+(u)^2}\frac{du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}.\int \frac{1}{1+u^2}.du = \frac{1}{3}arctg(u) + C$$

$$= \frac{1}{3}arctg(x^3) + C$$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

Por partes

El objetivo es transformar una integral no inmediata en resta de un producto de funciones que debe ser inmediata o por lo menos más fácil que la original. Se presentan varios casos.

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

Para elegir "u" se tiene en cuenta el criterio "**ILPET**":

I: Inversa – Trigonométrica

L: Logarítmica

P: Potencia

E: Exponencial

T: Trigonométrica

Ejemplos:

1) $\int x.senx.dx =$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = senx.dx$

$\int dv = \int senx.dx \Rightarrow v = -cosx$

$$\int x.senx.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int x.senx.dx = x.(-\cos x) - \int -\cos x\,.dx$$

$$\int x.senx.dx = x.(-\cos x) + \int \cos x\,.dx$$

$$\int x.senx.dx = x.(-\cos x) + \ sen\,x + C$$

$$\int x.senx.dx = \boldsymbol{-x.\cos x + \ sen\,x + C}$$

2) $\int ln\,x\,.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du \ =$

$u = ln\,x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = 1.dx \quad v = x$

$$\int ln\,x\,.dx = ln\,x.x - \int \cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}}dx$$

$$\int ln\,x\,.dx = \boldsymbol{ln\,x.x \ - x + C}$$

$$3)\int e^x.sen\,x.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$$

En este ejercicio voy a tener que integrar dos veces por partes.

$$u = e^x \qquad du = e^x dx$$

$$dv = sen\,x.dx \quad v = -cos\,x$$

$$\int e^x.sen\,x.dx = e^x.-\cos x\; - \int -\cos x.e^x.dx$$

$$\int e^x.sen\,x.dx = e^x.-\cos x\; + \int \cos x.e^x.dx$$

Tengo que integrar por partes otra vez para resolver esta integral, por lo tanto:

$$u = e^x \qquad du = e^x dx$$

$$dv = cos\,x.dx \quad v = sen\,x$$

$$\int e^x.sen\,x.dx = e^x.-\cos x\; + \left(e^x.sen\,x\; - \int sen\,x.e^x.dx\right)$$

$$\int e^x.sen\,x.dx + \int e^x.sen\,x.dx = e^x.-\cos x\; + \; e^x.sen\,x$$

$$2\int e^x.sen\,x.dx = e^x.-\cos x\; + \; e^x.sen\,x$$

$$\int e^x.sen\,x.dx = \frac{\boldsymbol{e^x.-\cos x\; + \; e^x.sen\,x}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

$$4)\int \cos(ln\,x)\,.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$u = \cos(ln\,x) \qquad du = -sen(ln\,x).\frac{1}{x}.dx$$

$$dv = 1.dx \quad v = x$$

$$\int \cos(ln\,x)\,.dx = \cos(ln\,x).x - \int \cancel{x}.-sen(ln\,x).\frac{1}{\cancel{x}}.dx$$

$$\int \cos(ln\,x)\,.dx = \cos(ln\,x).x + \int sen(ln\,x).dx$$

$$u = \mathrm{sen}(ln\,x) \qquad du = cos(ln\,x).\frac{1}{x}.dx$$

$$dv = 1.dx \quad v = x$$

$$\int \cos(ln\,x)\,.dx = \cos(ln\,x).x + \left(x.sen(ln\,x) - \int x.\cos(ln\,x)\frac{1}{x}dx\right)$$

$$\int \cos(ln\,x)\,.dx = \frac{\boldsymbol{x(\cos(ln\,x) + sen(ln\,x))}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

Por descomposición en fracciones simples

Este método se utiliza para integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

1) Raíces de $Q(x)$ son reales y distintas

$$\int \frac{4x+8}{x^2-5x+6} dx =$$

$x^2-5x+6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$

$$\frac{4x+8}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}$$

$4x+8 = A(x-3)+B(x-2)$

Si $x = 3 \Rightarrow 12+8 = B(3-2) \Rightarrow \mathbf{20 = B}$

Si $x = 2 \Rightarrow -A = 16 \Rightarrow \mathbf{A = -16}$

Luego:

$$\int \frac{4x+8}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{-16}{x-2} + \frac{20}{x-3}\right) dx = -\mathbf{16\, ln|x-2| + 20\, ln|x-3| + C}$$

2) Raíces de $Q(x)$ reales múltiples

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)} dx =$$

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 2$

$$\frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1).(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2.(x-2)}$$

$x^2-x+4 = A(x-2)+B(x-1).(x-2)+C(x-1)^2$

Si $x = 2 \Rightarrow \mathbf{C = 6}$

Si $x = 1 \Rightarrow \mathbf{A = -4}$

Si $x = 0 \Rightarrow 4 = -2A+2B+C \Rightarrow \mathbf{B = -5}$

Luego:

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)} dx = \int \left(\frac{-4}{(x-1)^2} + \frac{-5}{x-1} + \frac{6}{x-2}\right) dx$$

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)} dx = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{x-1}} - \mathbf{5\, ln|x-1| + 6\, ln|x-2| + C}$$

3) Raíces de $Q(x)$ complejas

$$\int \frac{x+8}{(x-2).(x^2+1)}dx =$$

$$\frac{x+8}{(x-2).(x^2+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2).(x^2+1)}$$

$x+8 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$

Si $x = 2 => \ 10 = 5A \ => \ \boldsymbol{A = 2}$

Si $x = 0 => 8 = A - 2C => \boldsymbol{C = -3}$

Si $x = 1 => 9 = 2A - B - C => \boldsymbol{B = -2}$

Luego:

$$\int \frac{x+8}{(x-2).(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2+1}\right)dx =$$

$$\int \frac{2}{x-2} - \left(\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx\right) = \boldsymbol{2\,ln|x-2| - ln\left|x^2+1\right| - 3arctg\,x + C}$$

3.1.2. ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial es una ecuación que vincula a un número finito de variables con las derivadas de una de ellas respecto de las otras, o lo que es equivalente, los diferenciales de las variables.

Ejemplos:

1) $Resolver\ y' = x$

$y' = x$

$$\frac{dy}{dx} = x => dy = x.dx$$

$dy = x.dx$

Integrando en ambos miembros:

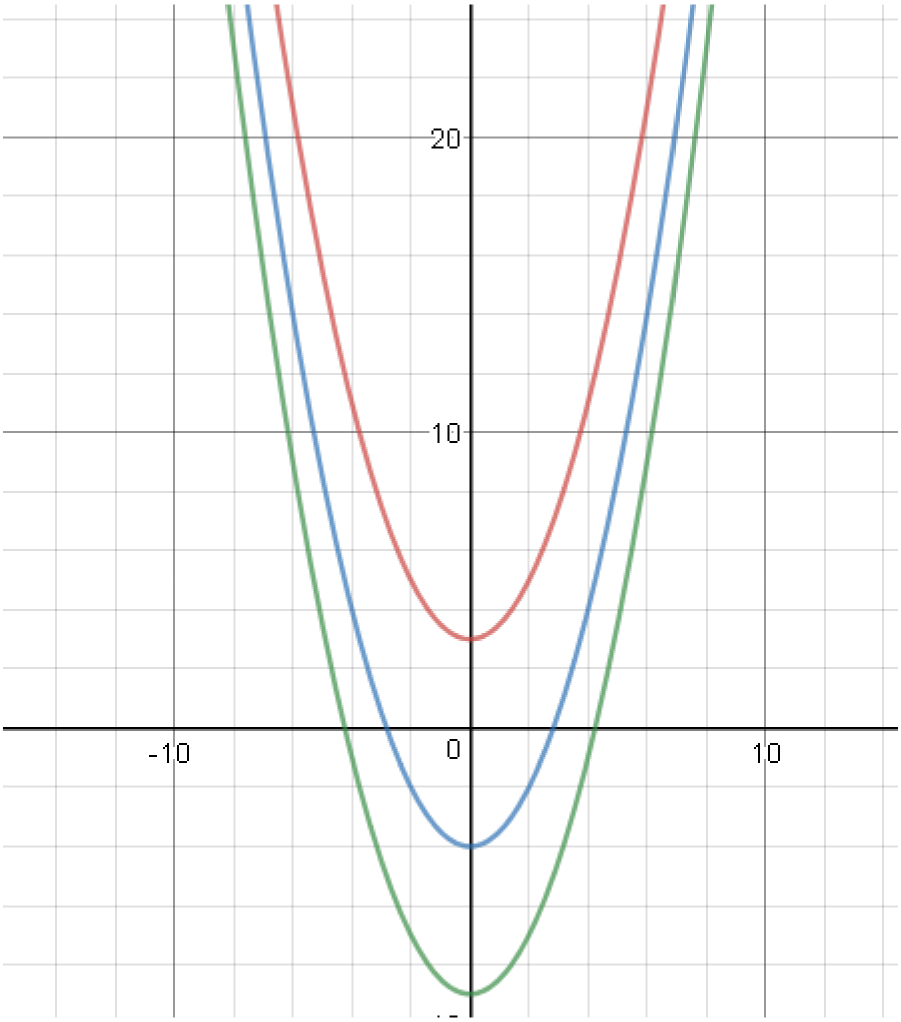
$$\int dy = \int x.dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Esto último que obtuve es la Solución General.

La Solución General de una ecuación diferencial es una familia de funciones.

En este caso, la solución general está constituida por una familia de parábolas.



Si en el ejemplo anterior quiero la solución que pasa por el $P(1{,}1)$, estoy buscando la Solución Particular. Para obtenerla hay que calcular la constante C:

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Reemplazo por $x = 1$ e $y = 1$ en la solución general:

$$1 = \frac{1^2}{2} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Luego la solución particular es:

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$2)\ Resolver\ 3xy' - x^2y = 0$

$3xy' - x^2y = 0$

$$y' = \frac{x^{\cancel{2}}y}{3\cancel{x}}$$

$$y' = \frac{x}{3}.y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3}.y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{3}.dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{3}.dx \ => ln\,|y| = \frac{x^2}{6} + C => |y| = e^{\left(\frac{x^2}{6}\right)+C}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{6}}.e^c => \boldsymbol{y = k.e^{\frac{x^2}{6}}} \quad \boldsymbol{S.G}$$

$3)\ Resolver\ y^2y' - x^2 - x = 0\ con\ y\ (0)\ =\ 2$

$y^2y' - x^2 - x = 0$

$$y' = \frac{x^2 + x}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x}{y^2}$$

$$y^2dy = (x^2 + x).dx$$

$$\int y^2dy = \int (x^2 + x).dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{3x^2}{2} + C} \quad \boldsymbol{S.G}$$

Me están pidiendo la solución particular que pasa por $y(0)\ =\ 2$. Entonces:

$$2 = \sqrt[3]{0 + \frac{3.0^2}{2} + C} => 2 = \sqrt[3]{C} \ => 8 = C$$

Luego:

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{3x^2}{2} + 8} \quad \boldsymbol{S.P}$$

4) $Hallar\ la\ curva\ y\ que\ verifica$: $(x^3 - x).y' = x - 2$ $sabiendo\ que\ pasa\ por$

$el\ punto\ P(2{,}0)$.

$$y' = \frac{x-2}{x^3-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x^3-x}$$

$$dy = \frac{x-2}{x^3-x}dx$$

$$\int dy = \int \frac{x-2}{x^3-x}dx$$

$$y = \int \frac{x-2}{x^3-x}dx$$

$$\int \frac{x-2}{x^3-x}dx$$

$$x^3 - x = 0 => x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$$

$$\frac{x-2}{x^3-x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x} = \frac{A(x+1).x + B(x-1).x + C(x-1).(x+1)}{x^3-x}$$

Si $x\ =\ 0 => \ -2 = -C\ => \boldsymbol{C = 2}$

Si $x = -1 => \ -3\ =\ 2B\ => \ \boldsymbol{-3/2 = B}$

Si $x = 1 => \ -1 = 2A\ => \ \boldsymbol{A = -1/2}$

$$\int \frac{x-2}{x^3-x}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{2}{x} \right) dx = -\frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{3}{2}ln|x+1| + 2\,ln|x| + C$$

$y = -\frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{3}{2}ln|x+1| + 2\,ln|x| + C$ $\quad \boldsymbol{S.G}$

Si quiero hallar la curva y que pasa por P(2,0):

$$0 = -\tfrac{1}{2}ln|2-1| - \tfrac{3}{2}ln|2+1| + 2\,ln|2| + C$$

$$0 = -\tfrac{1}{2}ln|1| - \tfrac{3}{2}ln|3| + 2\,ln|2| + C$$

$$0 = 0 - \tfrac{3}{2}ln|3| + 2\,ln|2| + C$$

$$C = \tfrac{3}{2}ln\,3 - 2ln2$$

Luego la solución particular es:

$y = -\frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{3}{2}ln|x+1| + 2\,ln|x| + \frac{3}{2}ln\,3 - 2ln2$ $\quad \boldsymbol{S.P}$

5) $Hallar\ la\ ecuación\ de\ la\ familia\ de\ curvas\ que\ tienen\ pendiente, en\ cada\ punto\ de\ la\ mismas, igual\ al\ cociente\ entre\ la\ abscisa\ y\ la\ ordenada\ del\ punto. Además, determinar\ la\ que\ pasa\ por\ el\ punto\ (1{,}0). Graficar\ dicha\ curva.$

Como habla de pendiente, se refiere a la derivada de una función. Simbólicamente: $\boldsymbol{f'(x)}$

Y, además, el enunciado dice que la pendiente tiene que ser “igual al cociente entre la abscisa y la ordenada del punto”. Simbólicamente, esto se puede representar así: $\boldsymbol{\frac{x}{y}}$

Entonces:

$$f'(x) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y.dy = x.dx$$

Integrando en ambos miembros:

$$\int y.dy = \int x.dx$$

$$y^2 = x^2 + C$$

$$\boldsymbol{y^2 - x^2 = C \quad S.G}$$

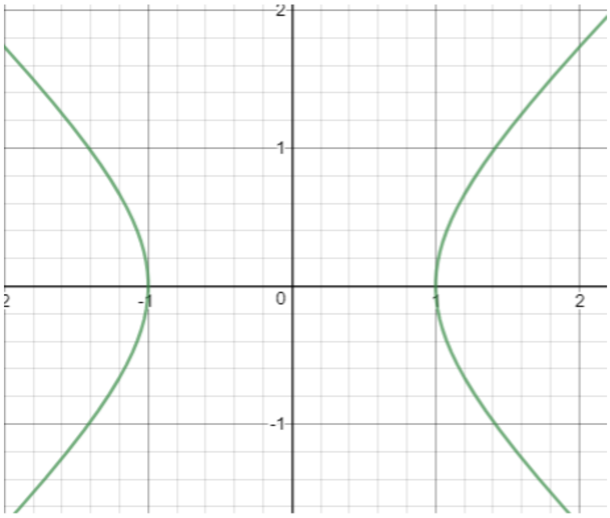
La solución general está constituida por hipérbolas centradas en el origen.

Me piden la solución particular que pasa por $P(1{,}0)$. Luego:

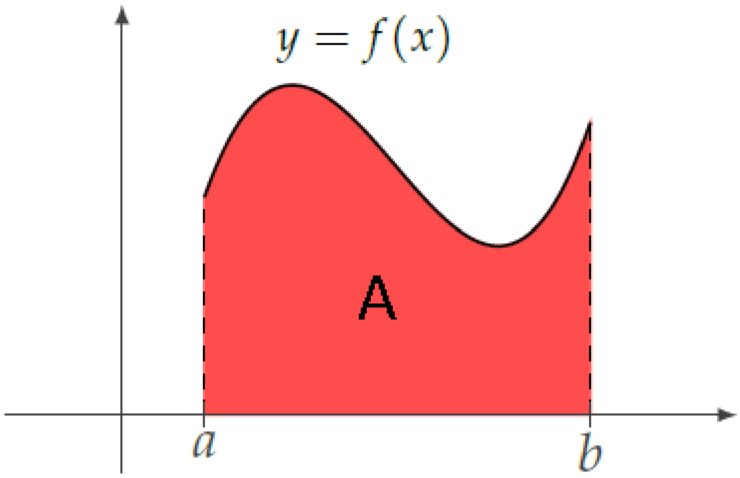
$$0 - 1^2 = C => \boldsymbol{C = -1}$$

$$y^2 - x^2 = -1$$

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1 \quad S.P}$$



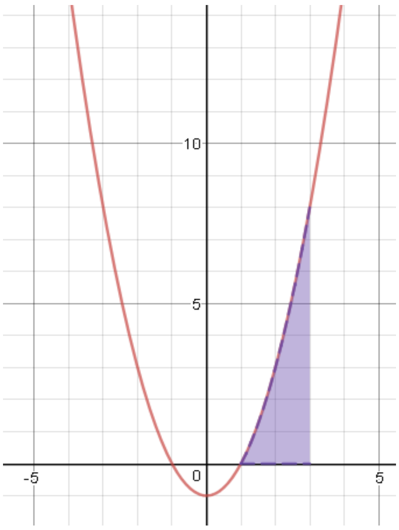
3.2. Integral definida



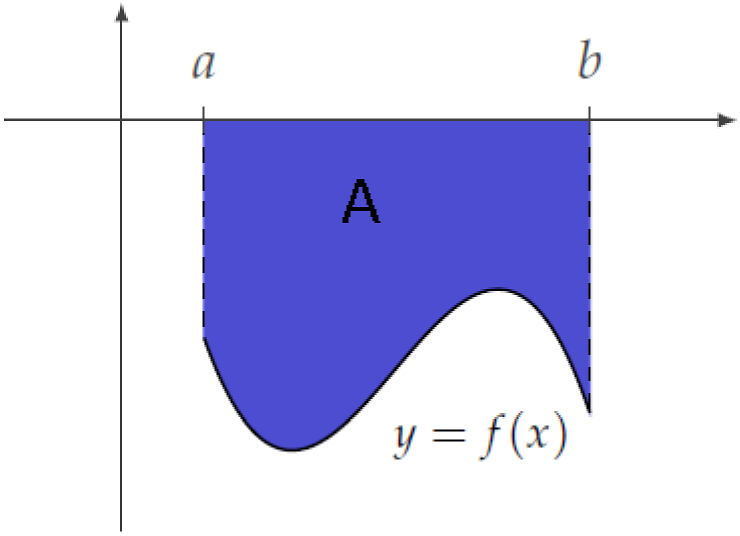
$$A = \int_{a}^{b} f(x).\,dx$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $y = x^2 - 1$ *entre* $x = 1$ *y* $x = 3$.



$$A = \int_{1}^{3} (x^2 - 1).\,dx$$



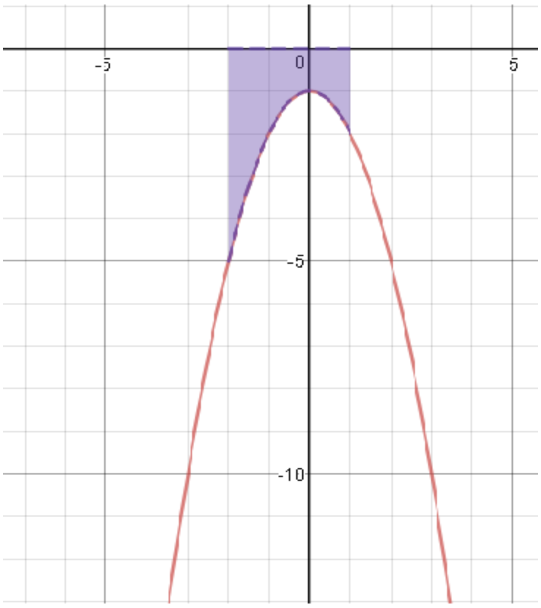
$$A = -\int_{a}^{b} f(x).dx$$

ó

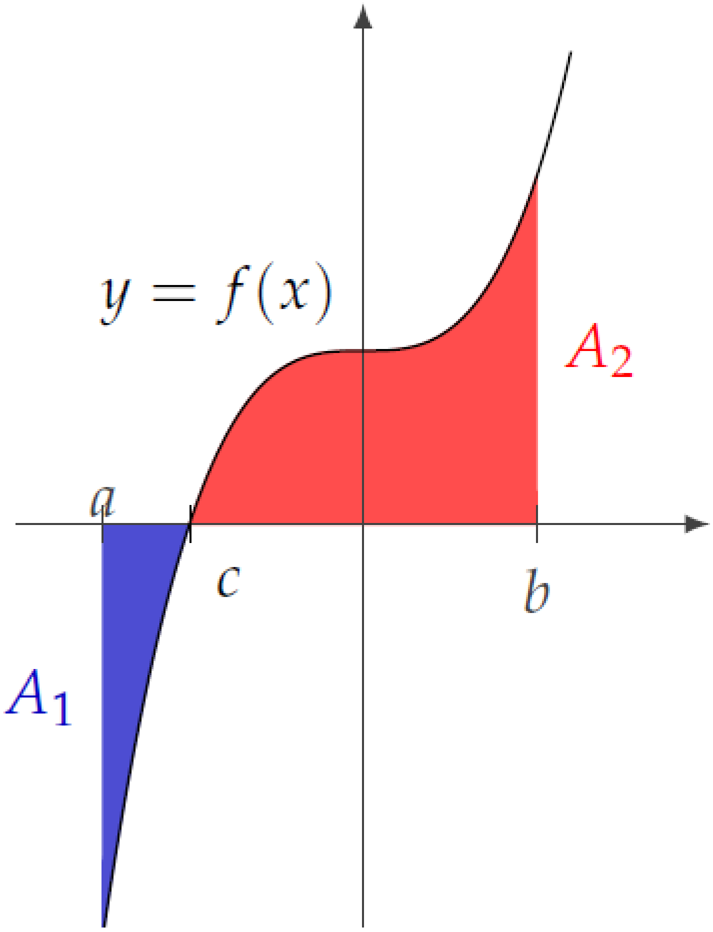
$$A = \left| \int_{a}^{b} f(x).dx \right|$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = -x^2 - 1$ *entre* $x = -2$ *y* $x = 1$.



$$A = -\int_{-2}^{1} (-x^2 - 1).dx$$



$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$

Propiedades:

1) $\int_a^b kf(x).dx = k\int_a^b f(x).dx$

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x).dx \pm \int_a^b g(x).dx$

3) $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

Si se permutan los límites de integración, se obtiene el número opuesto.

4) $\int_{a}^{a} f(x).dx = 0$

5) Si $f(x)$ es impar, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x).dx = 0$$

Si $f(x)$ es par, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x).dx = 2\int_{0}^{a} f(x).dx$$

3.2.1. Teorema del valor medio del cálculo integral

$$\begin{gathered} Si\ f\ es\ continua\ en\ [a;b] \\ => \exists\ c \in (a;b)/f(c) = \frac{1}{b-a}.\int_{a}^{b} f(x).dx \end{gathered}$$

3.2.2. Teorema fundamental del cálculo integral

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t).dt = f[b(x)].b'(x) - f[a(x)].a'(x)$$

Ejemplos:

1) $F(x) = \int_{0}^{e^{3x}} sen(t).dt => \boldsymbol{F'(x) = sen(e^{3x}).e^{3x}.3}$

2) $Hallar\ h(x)/h{:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, continua\ y\ derivable\ \forall x > 0, que\ verifica\ h(0) = 0\ y$

$$x^2h(x) - 3x = 1 - h(x) - \int_{x^2}^{1} h(\sqrt{t}).dt$$

En este tipo de ejercicios hay que aplicar el teorema fundamental del cálculo y además, hay que derivar todo el resto. **Si sólo resuelvo la integral está mal.**

$$x^2h(x) - 3x = 1 - h(x) - \int_{x^2}^{1} h(\sqrt{t}).dt$$

$$2x\cancel{h}(x) + x^2.h'(x) - 3 = -h'(x) + 2x\cancel{h}(x)$$

$$x^2.h'(x) - 3 = -h'(x)$$

$$x^2.h'(x) + h'(x) = 3$$

$$h'(x)(x^2 + 1) = 3$$

$$h'(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$dy = \frac{3}{x^2 + 1}dx$$

$$\int dy = \int \frac{3}{x^2 + 1}dx$$

$$y = 3arctg\, x + C$$

Como verifica $h(0) = 0$:

$$y = 3arctg\, x + 0 \;\; => \boldsymbol{y = 3arctg\, x \;\; RTA}$$

3.2.3. Regla de Barrow

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)}$$

Integro la función y luego aplico los límites de integración.

Ejemplos:

1) $\int_1^3 (x^2 - 1).dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = 6 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{20}{3}}$

2) $- \int_{-2}^{1} (-x^2 - 1).dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 1).dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big]_{-2}^{1} = \boldsymbol{6}$

Ejercicios integradores:

$1)\ Encontrar\ el\ valor\ medio\ de\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+6}}\ en\ [0;3]\ utilizando\ el\ teorema$

$del\ valor\ medio\ del\ cálculo\ integral.$

$$f(c) = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}dx = \frac{1}{3}.1{,}42 = 0{,}47 \rightarrow \boldsymbol{f(c) = 0,47}$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}dx = \left(\sqrt{x^2+6}\right)\Big]_0^3 = \sqrt{15} - \sqrt{6} \cong 1{,}42$$

$2)\ Dada\ la\ función\ integral\ \ F(x) = \int_1^{x^3} \sqrt[3]{t}.dt\ \ hallar\ el\ Polinomio\ de\ Taylor$

$de\ grado\ 2\ asociado\ a\ F\ alrededor\ del\ punto\ a = 1.$

$$F(1) = \int_1^1 \sqrt[3]{t}.dt = 0 \quad Por\ propiedad\ de\ integral\ definida.$$

$$F'(x) = \sqrt[3]{x^3}.3x^2 = 3x^3 \ \ => F'(1) = 3$$

$$F''(x) = 9x^2 \ \ => F''(1) = 9$$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2$$

Por lo tanto, el polinomio es:

$$\boldsymbol{P_2(x) = 3(x-1) + \frac{9}{2}(x-1)^2}$$

$3)\ Hallar\ por\ Aproximación\ Lineal\ F(1{,}1)\ si\ F(x) = 2 + \int_1^{x^2} \dfrac{10.dt}{1+t}$

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{10.dt}{1+t} => F'(x) = \frac{10}{1+x}.2x$$

$$F'(1) = 10 \ \ => Con\ esto\ obtuve\ la\ pendiente\ de\ la\ recta\ tangente.$$

$$y_T - 2 = 10(x-1)$$

$$y_T = 10(x-1) + 2$$

$$y_T = 10x - 8$$

Luego recordando la relación entre la aproximación lineal y la recta tangente:

$$F(1{,}1) \approx y_T(1{,}1) = \boldsymbol{3}$$

4) $Calcular\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x sen\ t.dt}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x sen\ t\ .dt}{x^2} =^{L'H} \lim_{x\to 0^+} \frac{sen\ x}{2x} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

5) $Sean\ g:\mathbb{R}\to\ \mathbb{R}\ \ y\ \ f:\mathbb{R}\to\ \mathbb{R}/\ F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{g(x)} (cos(t)+1).dt.\ Si\ el\ polinomio\ de$

$Taylor\ de\ grado\ 2\ de\ g\ en\ x = 3\ es\ P(x) = \frac{\pi}{2} + 2(x-3) - (x-3)^2, encuentre$

$el\ polinomio\ de\ Taylor\ de\ grado\ 2\ de\ F\ en\ x =\ 3.$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{g(x)} (\cos(t)+1).dt \Rightarrow F'(x) = \left(\cos\left(g(x)\right)+1\right).g'(x)$$

$P(x) = \frac{\pi}{2} + 2(x-3) - (x-3)^2$ de $g(x)$ en $x = 3$.

$$P(x) = g(a) + g'(a).(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Por lo tanto:

$g(3) = \frac{\pi}{2}$

$g'(3) = 2$

$g''(3)\ = -2$ porque $\frac{-2}{2!} = \ -1$

$F(3) = 0$

$$F'(3) = \left(\cos\left(g(3)\right)+1\right).g'(3) = \ \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right).2$$

$$F''(x) = \left[\left(-sen\ \left(g(x)\right).g'(x)\right).g'(x)\right] + \left(\cos\left(g(x)\right)+1\right).g''(x)$$

$$F''(3) = \left[\left(-sen\ \left(g(3)\right).g'(3)\right).g'(3)\right]\ + \left(\cos\left(g(3)\right)+1\right).g''(3)$$

$$F''(3) = \left[\left(-sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right).2\right).2\ \right]\ + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right).-2 =\ -4+(-2) =\ -6$$

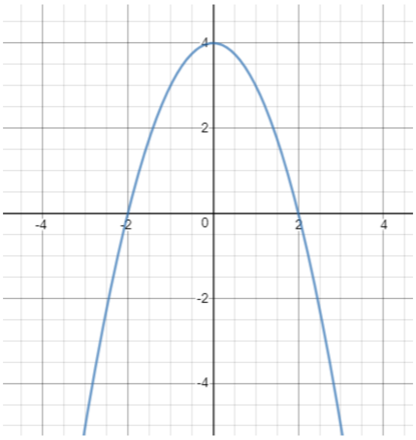
Luego el polinomio queda:

$$P(x) = 0 + 2(x-3) - \frac{6}{2!}.(x-3)^2$$

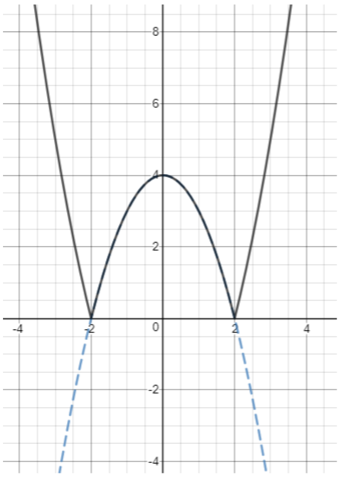
$$\boldsymbol{P(x) = 2(x-3) - 3.(x-3)^2}$$

6) $Resolver: \int_{-2}^{4} |4-x^2|.dx$

$y = 4 - x^2$



$y = |4 - x^2|$



Primero hallo las raíces de la función:

$4 - x^2 = 0 => x_1 = 2, x_2 = -2$

Entonces, el intervalo quedaría así:

$-2 \quad 2 \quad 4$

Ahora me tengo que fijar que si la función es positiva o negativa en esos intervalos:

$(-2,2) \rightarrow f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3 > 0$

$(2,4) \rightarrow f(3) = 4 - 3^2 = -5 < 0$

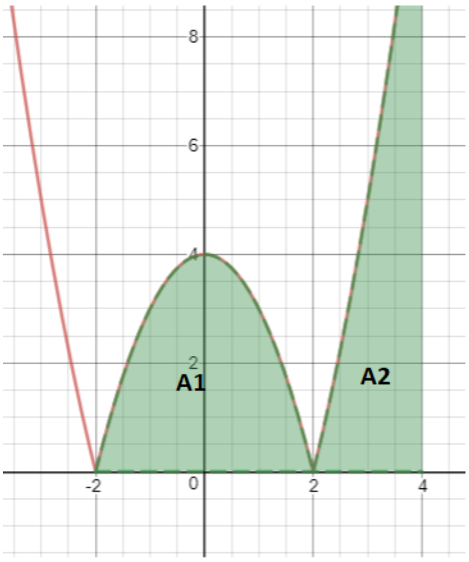
$+ \quad -$

$-2 \quad 2 \quad 4$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{2} (4-x^2).dx + \int_{2}^{4} -(4-x^2).dx$$

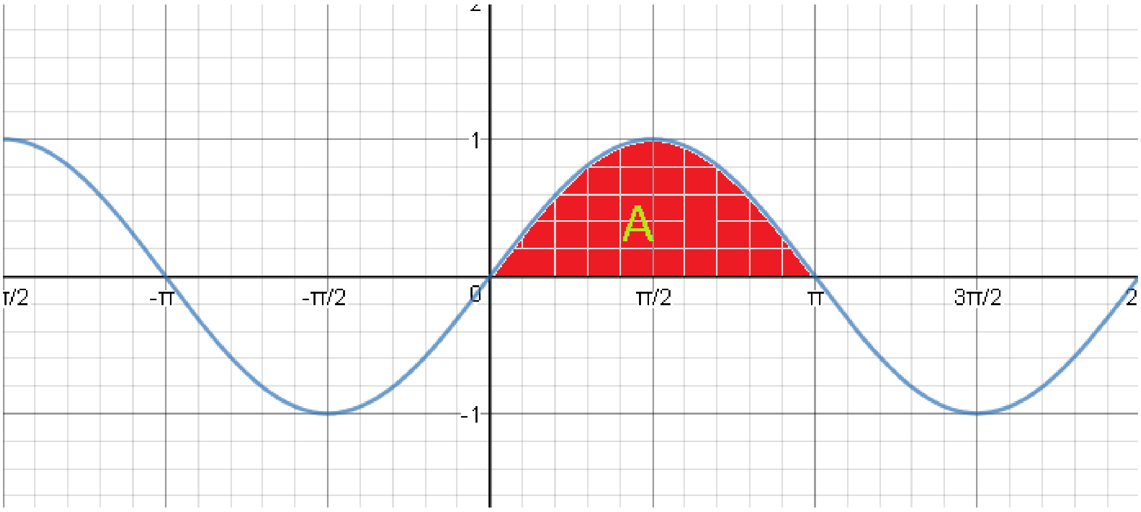
$$A = \int_{-2}^{2} (4-x^2).dx + \int_{2}^{4} (-4+x^2).dx$$

$$A = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-2}^{2} + \left(-4x + \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{2}^{4} = \mathbf{\frac{64}{3}}$$



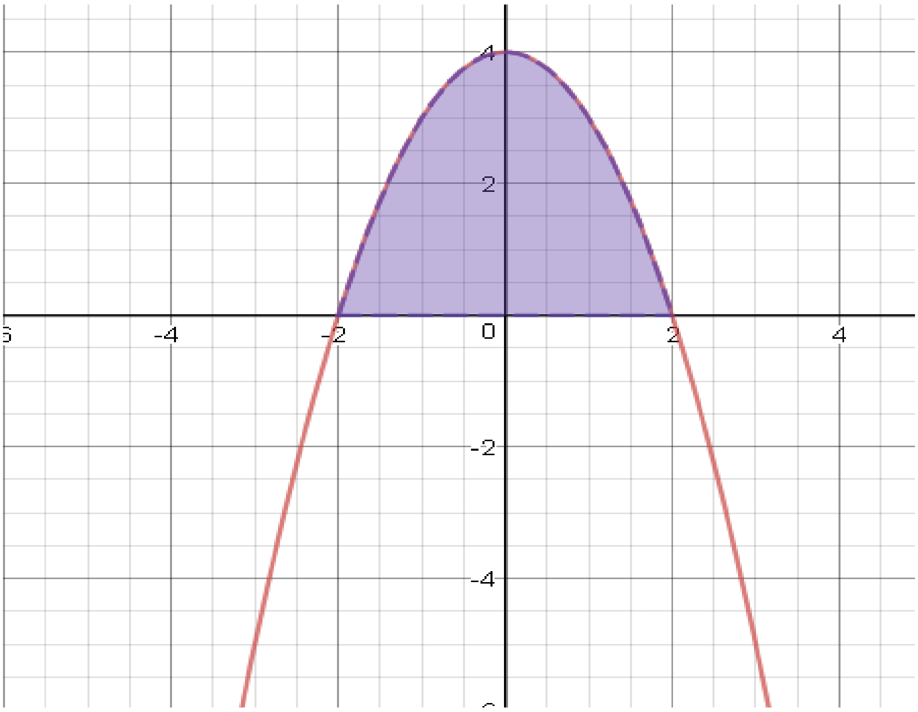
7) $Calcular\ el\ área\ limitada\ por\ las\ gráficas\ de\ las\ siguientes\ funciones\ y\ el\ eje\ x$:

$a)\ y = sen\ x \qquad\qquad 0 \le x \le \pi$



$$A = \int_0^{\pi} sen\, x . dx = \ (-\cos x)]_0^{\pi} = \ -\cos\pi - (-\cos 0) = \mathbf{2}$$

$b)\ y = -x^2 + 4$

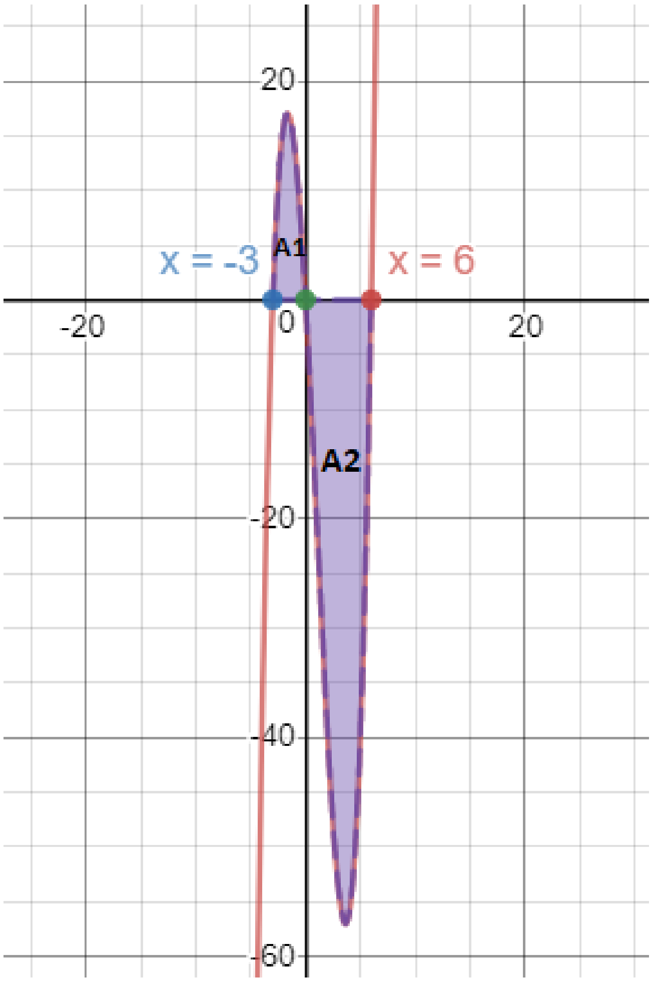


Por propiedad de integral definida:

$$A = \int_{-2}^{2} (-x^2+4).dx = \ 2\int_{0}^{2} (-x^2+4).dx \ = 2.\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg]_0^2 = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}$$

$c)\ y = x^3 - 3x^2 - 18x$

$x^3 - 3x^2 - 18x = 0 => x_1 = 6\,, x_2 = -3, x_3 = 0$



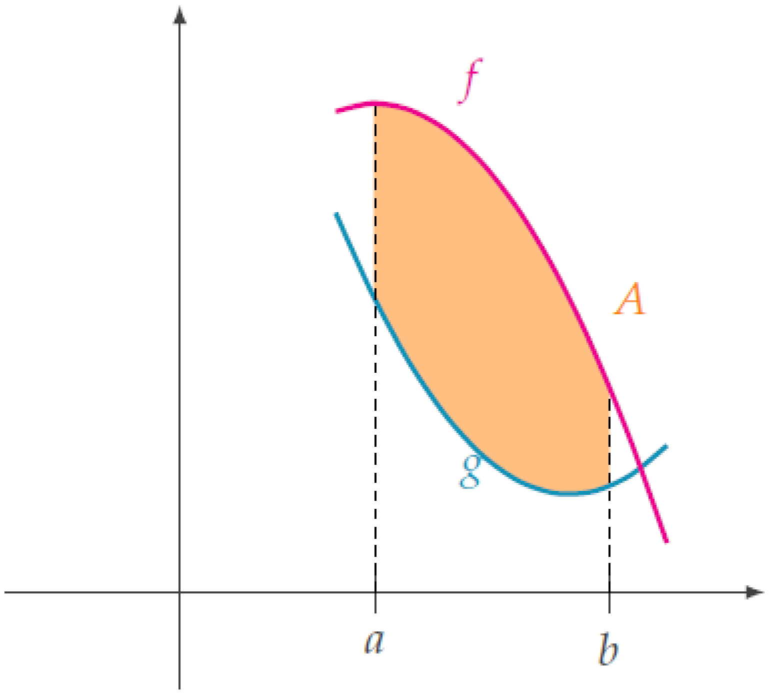
$$A = A_1 + A_2 = \int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 18x\ \ ).dx\ + \left|\int_{0}^{6} (x^3 - 3x^2 - 18x).dx\right|$$

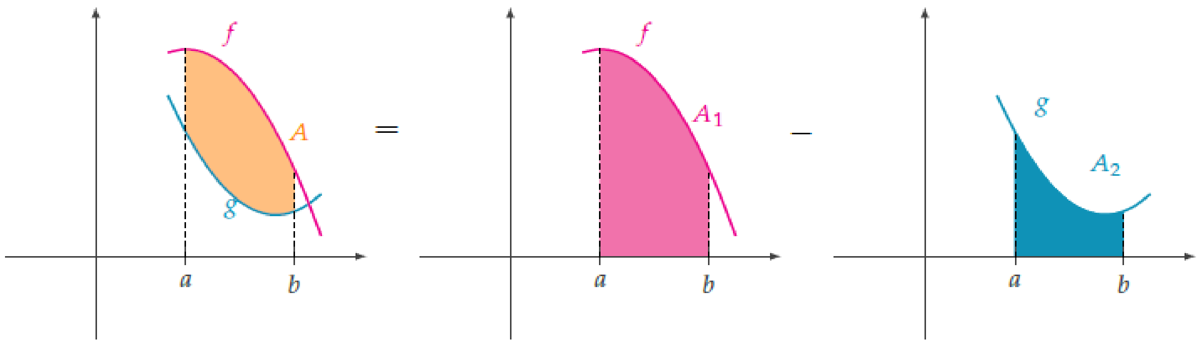
$$A_1 = \int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 18x\ \ ).dx\ = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - 9x^2\right)\Bigg]_{-3}^{0} = \frac{135}{4}$$

$$A_2 = \left|\int_{0}^{6} (x^3 - 3x^2 - 18x).dx\right| = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - 9x^2\right)\Bigg]_{0}^{6} = |-216| = 216$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{135}{4} + 216 = \mathbf{\frac{999}{4}}$$

3.2.4. Área entre dos curvas





$$A_1 = \int_a^b f(x).dx \qquad\qquad A_2 = \int_a^b g(x).dx$$

Por lo tanto, el área A buscada es:

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

a y b son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

También se considera que $f(x)$ es el techo y $g(x)$ el piso. Luego $A = techo - piso$.

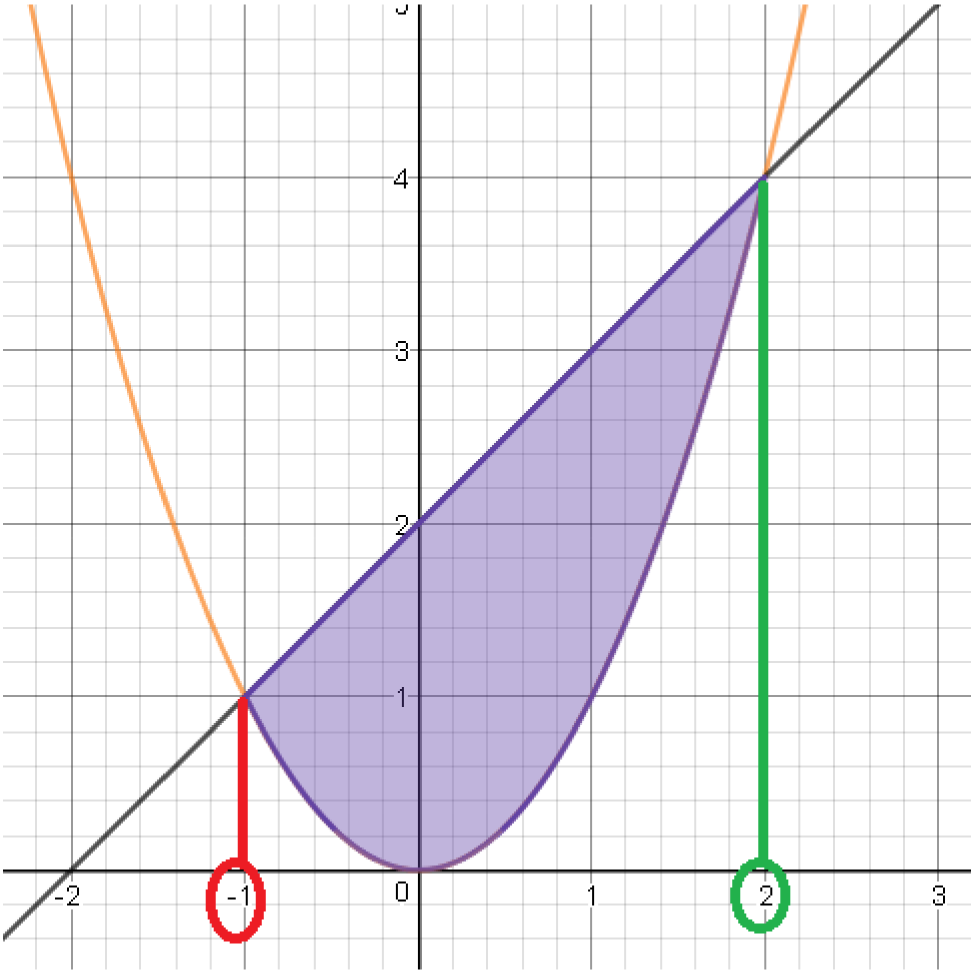
Ejemplo:

1) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

Primero hallo puntos de intersección:

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$



El techo en este caso es la recta y = $x + 2$ y el piso la parábola y = x^2.

Entonces el área es:

$$A = \int_{-1}^{2} [x + 2 - x^2]dx = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

$$\int_{-1}^{2} [x + 2 - x^2]dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{9}{2}}$$

Regla práctica para determinar el techo y piso

Para explicar esta regla voy a utilizar dos ejemplos:

1) $Hallar\ el\ área\ comprendida\ entre\ las\ gráficas\ de\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x\ y$

$g(x) = x^2 - 4x.$

Como en todo problema de área, primero hallo los puntos de intersección:

$x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$

$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

$x(x^2 - 7x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3, x_3 = 4$

Ahora me pregunto: ¿Quién hace de techo en el intervalo (0,3)?

¿Quién hace de techo en el intervalo (3,4)?

Intervalo (0,3):

Elijo un número que pertenezca a ese intervalo. Por ejemplo, $x = 1$.

Luego, evalúo las funciones en dicho valor escogido:

$f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 8.1 = 3$

$g(1) = 1^2 - 4.1 = -3$

$\boldsymbol{f(1) > g(1) \Rightarrow f\ \ hace\ de\ techo\ en\ el\ intervalo\ (0,3)}$

$\boldsymbol{g\ \ hace\ de\ piso\ en\ el\ intervalo\ (0,3)}$

Intervalo (3,4):

Elijo un número que pertenezca a ese intervalo. Por ejemplo, $x = 3{,}5$.

Luego, evalúo las funciones en dicho valor escogido:

$f(3{,}5) = (3{,}5)^3 - 6.(3{,}5)^2 + 8.(3{,}5) = -2{,}625$

$g(3{,}5) = (3{,}5)^2 - 4.(3{,}5) = -1{,}75$

$\boldsymbol{g(3,5) > f(3,5) \Rightarrow g\ \ hace\ de\ techo\ en\ el\ intervalo\ (3,4)}$

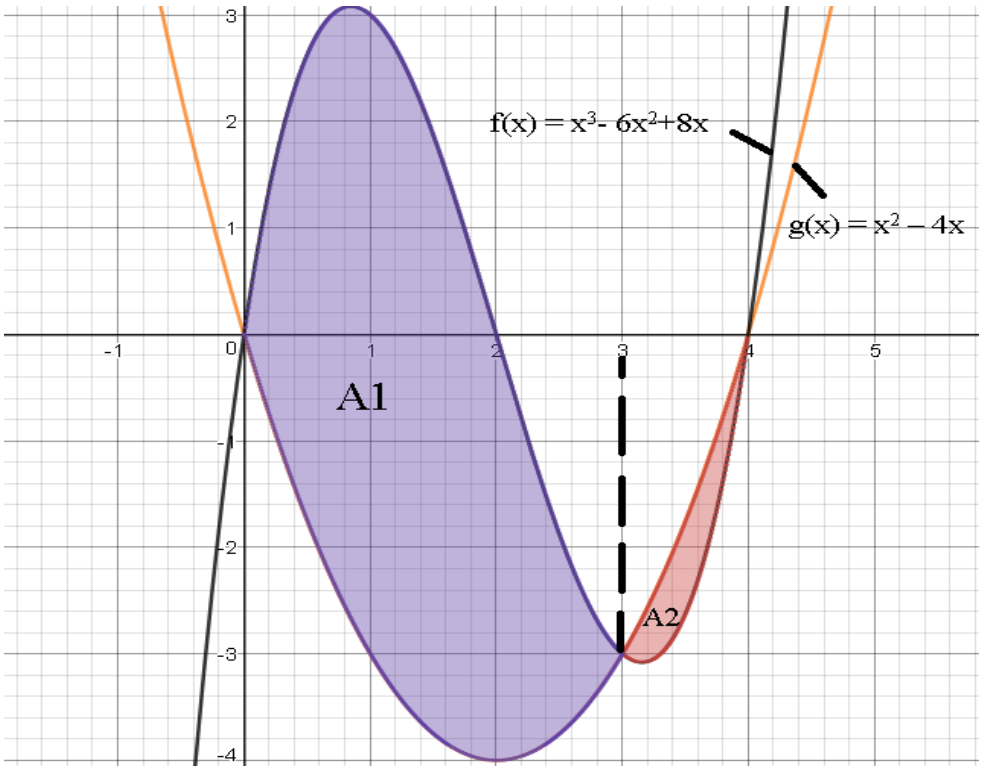
$\boldsymbol{f\ \ hace\ de\ piso\ en\ el\ intervalo\ (3,4)}$

Por lo tanto, hay dos áreas:

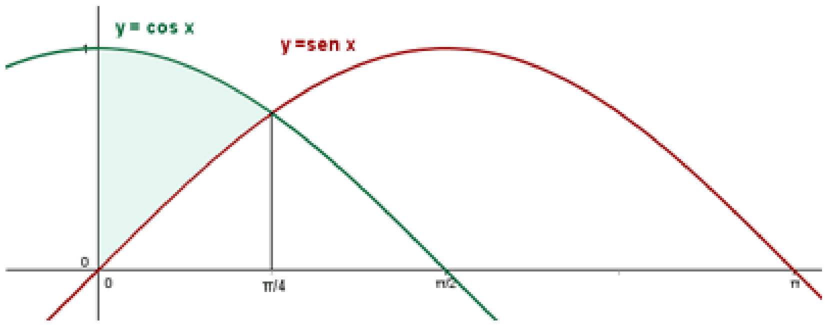
$$A_1 = \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]dx = \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)dx = \frac{45}{4}$$

$$A_2 = \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]dx = \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)dx = \frac{7}{12}$$

$$\boldsymbol{A} = A_1 + A_2 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{\mathbf{71}}{\mathbf{6}}$$



2) *Hallar el área de la región limitada por*: $y = sen\ x, y = \cos x\ , x = 0.$



$$sen\ x = cos\ x \ \ => \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{cos\ x}{cos\ x} \ => \ tg\ x = 1 \ => \ x = \frac{\pi}{4}$$

¿Quién hace de techo en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$?

Tomo $x = \frac{\pi}{6}$:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{g}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) > \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right) \ => \mathbf{A} = \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}}(\boldsymbol{cos\ x} - \boldsymbol{sen\ x})\boldsymbol{dx} = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

Ejercicio integrador:

Dibujar la superficie plana limitada por la gráfica de $f(x) = 2x^2 - x^4$ *y la recta que pasa por* $(a; f(a))$ *y* $(b; f(b))$, *si* $f(a)$ *y* $f(b)$ *son los valores máximos de* f.

Hallar el área.

$f'(x) = 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ son los puntos críticos.

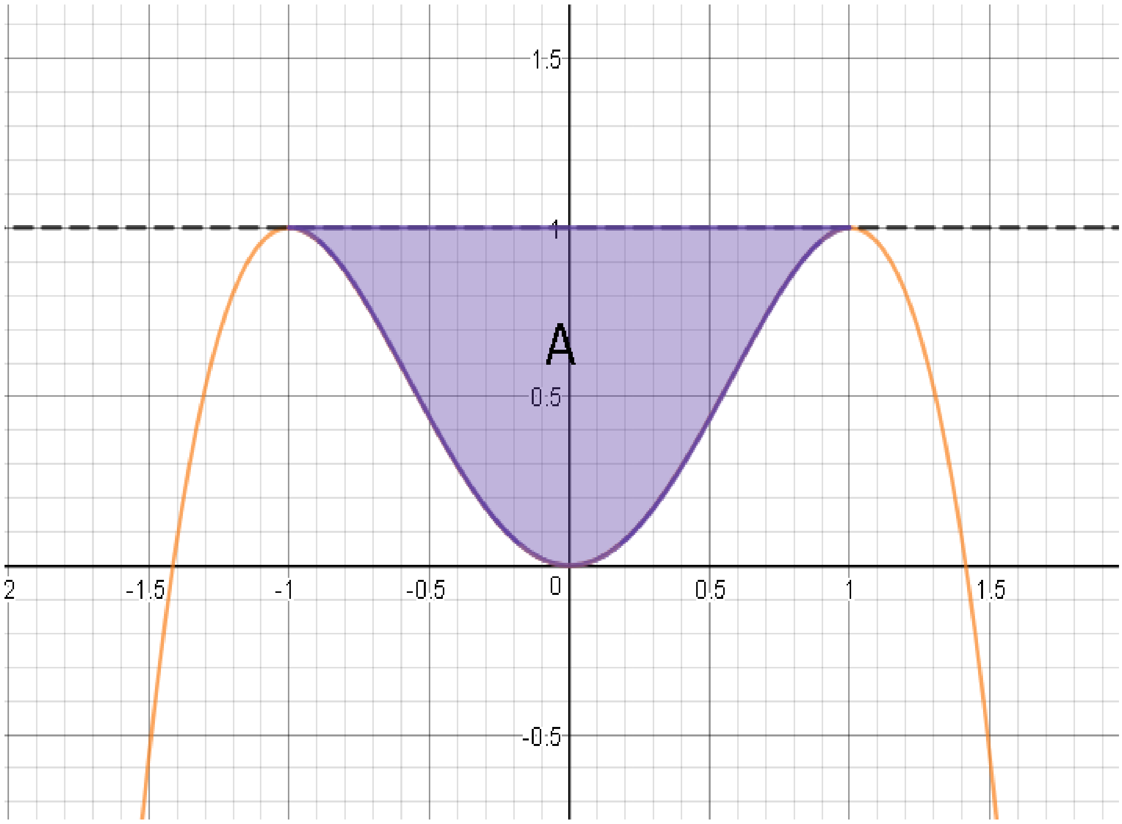
Utilizando el criterio de la derivada segunda puedo hallar los máximos y mínimos de f:

$f''(x) = 4 - 12x^2 \Rightarrow f''(0) > 0$ *Por lo tanto en* $(0,0)$ *Mínimo Relativo*

$f''(1) < 0$ *Por lo tanto en* $(1,1)$ *Máximo Relativo*

$f''(-1) < 0$ *Por lo tanto en* $(-1,1)$ *Máximo Relativo*

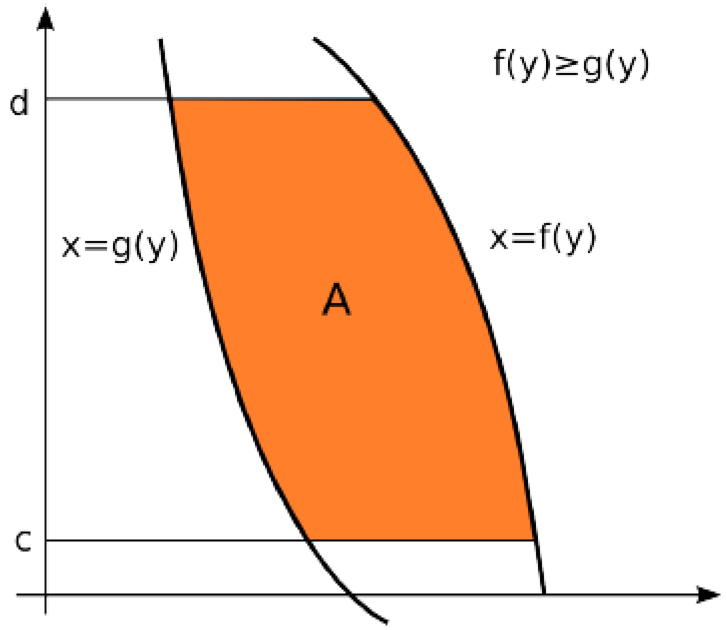
Los máximos están en $A = (-1,1)$ *y* $B = (1,1)$. *La recta que los une es* $y = 1$.



En este caso $y = 1$ es el techo, e $y = 2x^2 - x^4$ es el piso.

$$A = \int_{-1}^{1} [1 - (2x^2 - x^4)]dx = \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg]_{-1}^{1} = \mathbf{\frac{16}{5}}$$

3.2.5. Integración sobre el eje y



$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Ejemplo:

$Hallar\ el\ área\ de\ la\ región\ limitada\ por\ la\ curva\ y^2 = x + 2\ y\ la\ recta\ tg\ a\ la$

$a\ la\ función\ definida\ implícitamente\ por\ x^2y + x^3 + y^3 - 3x - y + 1 = 0\ en\ el$

$punto\ (1,1).$

$x^2y + x^3 + y^3 - 3x - y + 1 = 0$

$2xy + x^2.y' + 3x^2 + 3y^2y' - 3 - y' = 0$

$$y' = \frac{-2xy - 3x^2 + 3}{x^2 + 3y^2 - 1} \Rightarrow y'(1,1) = -\frac{2}{3}$$

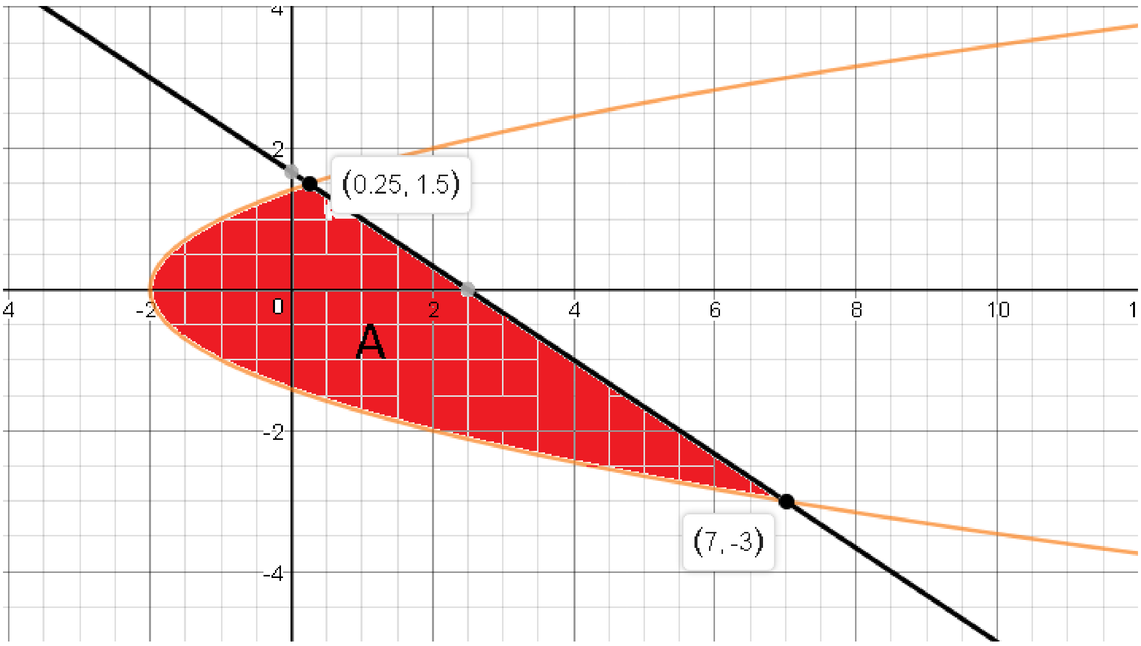
Recta tangente en (1,1): $y_T = y'(1)(x-1) + 1 \Rightarrow y_T = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

$$\begin{cases} y^2 = x + 2 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x + 2 \\ y = -\frac{2}{3}(y^2 - 2) + \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x + 2 \\ 2y^2 + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(y = -3 \ \vee \ y = \tfrac{3}{2}\right) \wedge y^2 = x + 2$$

Ahora expreso las funciones del comienzo en función de x:

$x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$ $\qquad\qquad$ $x = y^2 - 2$



$x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$ *es el techo y* $x = y^2 - 2$ *es el piso.*

Luego el área es:

$$A = \int_{-3}^{3/2} \left[\left(\frac{-3}{2}y + \frac{5}{2}\right) - (y^2 - 2)\right].dy = \mathbf{\frac{243}{16}}$$

Ejercicios generales:

1) *Calcular el área limitada por* $f(x) = -x^2 + 4x + 8$ *y la recta tangente a la curva de ecuación* $y = ln(x^2 - 3)$ *en* $x = 2$. *Graficar.*

Recta tangente de $y = ln(x^2 - 3)$ en $x = 2$:

$y' = \frac{2x}{x^2-3} \Rightarrow y'(2) = 4 \Rightarrow \boldsymbol{y_T = 4x - 8}$

Ahora tengo que hallar los puntos de intersección:

$-x^2 + 4x + 8 = 4x - 8$

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -4$

El techo es $y = -x^2 + 4x + 8$ y el piso $y = 4x - 8$.

Luego el área es:

$$A = \int_{-4}^{4} [(-x^2 + 4x + 8) - (4x - 8)].dx = \int_{-4}^{4} -x^2 + 16.dx = \mathbf{\frac{256}{3}}$$

2) $Dadas\ f(x) = 2x^2\ y\ g(x) = -ax^2 + 16a + 32\ determinar\ a > 0\ para\ que\ el$ $área\ de\ la\ región\ limitada\ por\ las\ gráficas\ de\ f(x)\ y\ g(x)\ sea$ 180.

Primero hallo las abscisas a y b, es decir, los límites de integración:

$$2x^2 = -ax^2 + 16a + 32$$

$$2x^2 + ax^2 - 16a - 32 = 0$$

$$(a+2).(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow a = -2, x_1 = 4, x_2 = -4$$

Me interesan esos dos valores, dado que serán los límites de integración.

$$A = \int_{-4}^{4} [(-ax^2 + 16a + 32) - (2x^2)].dx = \left(-\frac{ax^3}{3} + 16ax + 32x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big]_{-4}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{a.4^3}{3} + 16a.4 + 32.4 - \frac{2.4^3}{3}\right) - \left(-\frac{a.(-4)^3}{3} + 16a.(-4) + 32.(-4) - \frac{2.(-4)^3}{3}\right)$$

$$= 128\,a + \frac{-128a - 256}{3} + 256$$

$$A = 128\,a + \frac{-128a - 256}{3} + 256$$

Como el enunciado dice que el área tiene que ser 180:

$$180 = 128\,a + \frac{-128a - 256}{3} + 256 \Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{7}{64}}$$

3) $Determine\ el\ valor\ de\ a\ para\ que\ el\ área\ de\ la\ región\ limitada\ por\ la\ función$ $y = x^3, -1 \le x \le a\ y\ el\ eje\ x\ sea\ igual\ a\ A = \frac{33}{4}. Realice\ un\ gráfico\ donde\ se$ $muestre\ la\ región\ del\ problema.$

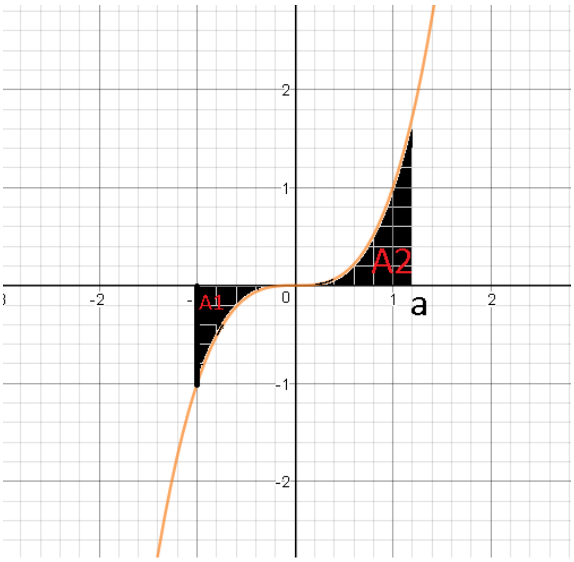
$$A = |A_1| + A_2 = \left|\int_{-1}^{0} x^3.dx\right| + \int_{0}^{a} x^3.dx$$

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{0} x^3.dx\right| = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big]_{-1}^{0} = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{a} x^3.dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big]_{0}^{a} = \frac{a^4}{4}$$

$$A = |A_1| + A_2 \Rightarrow \frac{33}{4} = \frac{1}{4} + \frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow a^4 = 32 \Rightarrow a = \sqrt[4]{32} = \boldsymbol{2\sqrt[4]{2}}$$



3.3. Integral impropia

3.3.1. 1° especie

Se presentan 3 casos:

1) $\boldsymbol{f\ es\ continua\ en}\ [a;+\infty)$

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x).dx}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Si\ \ lim\ \text{ finito} => \boldsymbol{Convergente}\ (\boldsymbol{CV}) \\ Si\ lim\ infinito => \boldsymbol{Divergente}\ (\boldsymbol{DV}) \\ \nexists\ lim => \boldsymbol{Oscilante} \end{array}}$$

2) $\boldsymbol{f\ es\ continua\ en}\ (-\infty;b]$

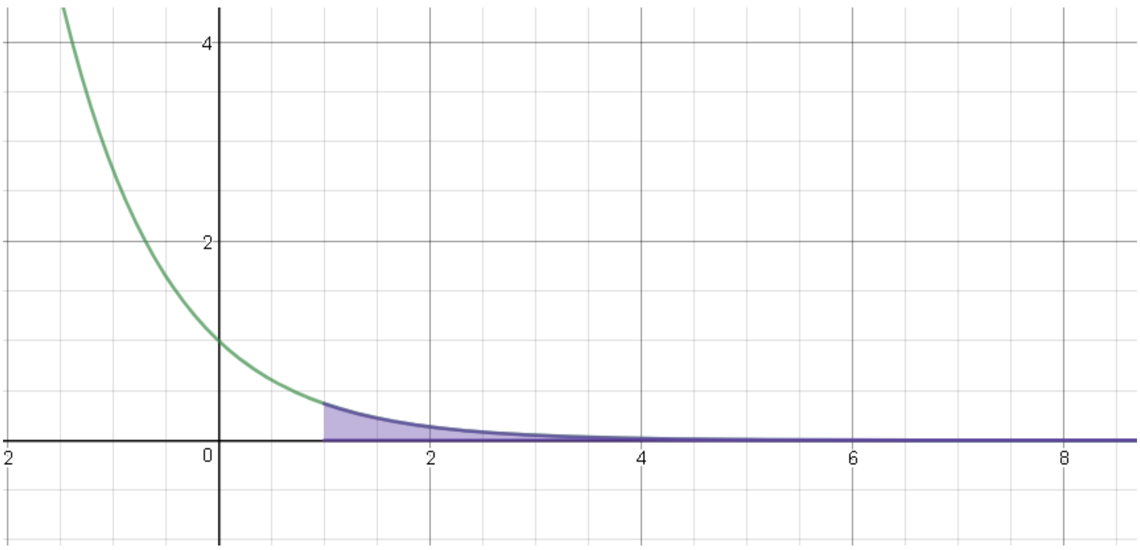
$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x).dx}$$

3) $\boldsymbol{f\ es\ continua\ en}\ \mathbb{R}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}\ \mathbf{y}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x).dx}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x).dx + \lim_{t'\to+\infty}\int_{c}^{t'} f(x).dx}$$

Ejemplos:

$$1)\int_{1}^{+\infty} e^{-x}.dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t} e^{-x}.dx = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-x})]_{1}^{t} = \lim_{t\to+\infty}(\overbrace{-e^{-t}}^{0} + e^{-1}) = \frac{1}{e}\ \ CV$$



Entonces para resolver una integral impropia primero se integra la función, luego Barrow y por último se resuelve el límite.

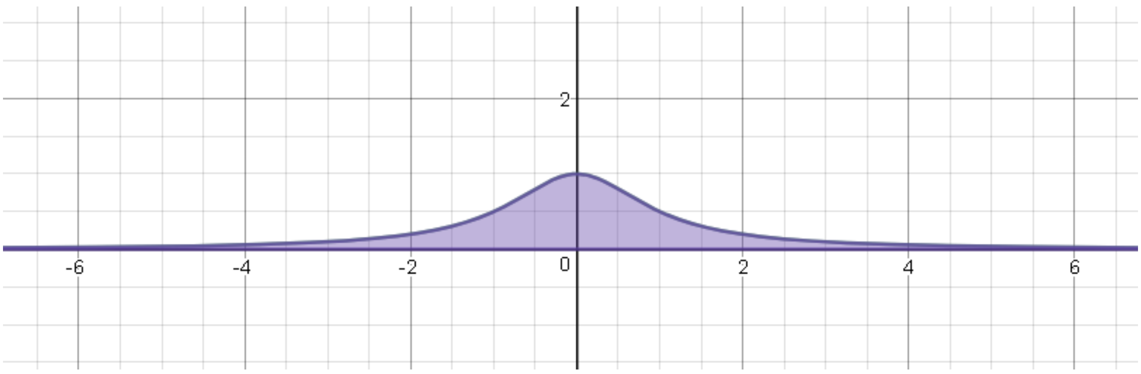
2) $\int_{-\infty}^{0} e^x.dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} e^x.dx = \lim_{t\to-\infty} (e^x)]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} (e^0 - e^t) = 1 \;=>\; CV$

0

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2}.dx + \lim_{t'\to+\infty} \int_{0}^{t'} \frac{dx}{1+x^2}.dx =$

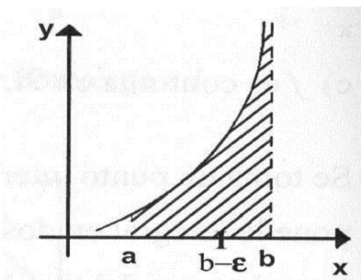
$= \lim_{t\to-\infty} (arctg\ x)]_t^0 + \lim_{t'\to+\infty} (arctg\ x)]_0^{t'} =$

$= \lim_{t\to-\infty} [(arctg\ (0) - arctg\ (t)] + \lim_{t'\to+\infty} [(arctg\ (t') - arctg(0)] = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$



3.3.2 2° especie

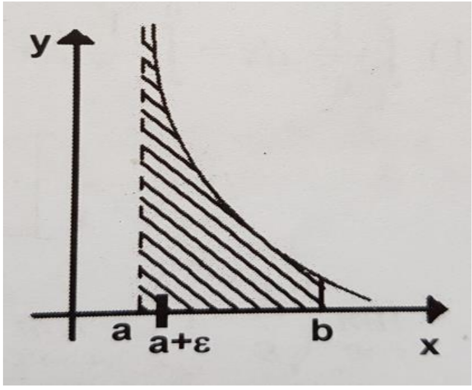
1) ***La discontiniuidad está en el extremo superior***



$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty}$$

$$\boxed{\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x).dx} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} \boldsymbol{f(x).dx}}$$

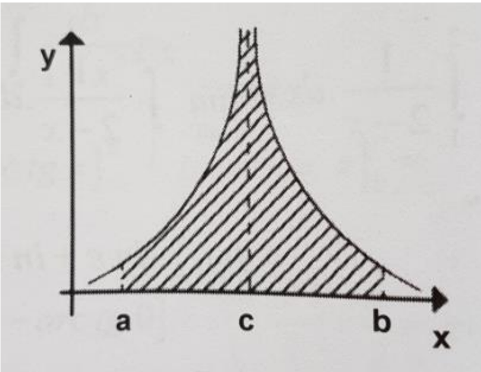
2) $\boldsymbol{La\ discontiniuidad\ est}$á $\boldsymbol{en\ el\ extremo\ inferior}$



$$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x).dx}$$

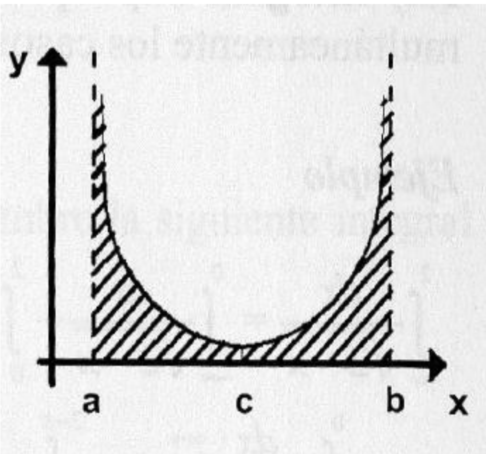
3) $\boldsymbol{La\ discontiniuidad\ est}$á $\boldsymbol{en\ un\ punto\ c\ interior\ a}$ $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$



$$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x \to c} f(x) = \infty \;\; y \;\; c \in (a;b)$$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx}$$

4) $\boldsymbol{La\ discontiniuidad\ est}$á $\boldsymbol{en\ ambos\ extremos}$



$$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \;\; y \;\; \lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$$

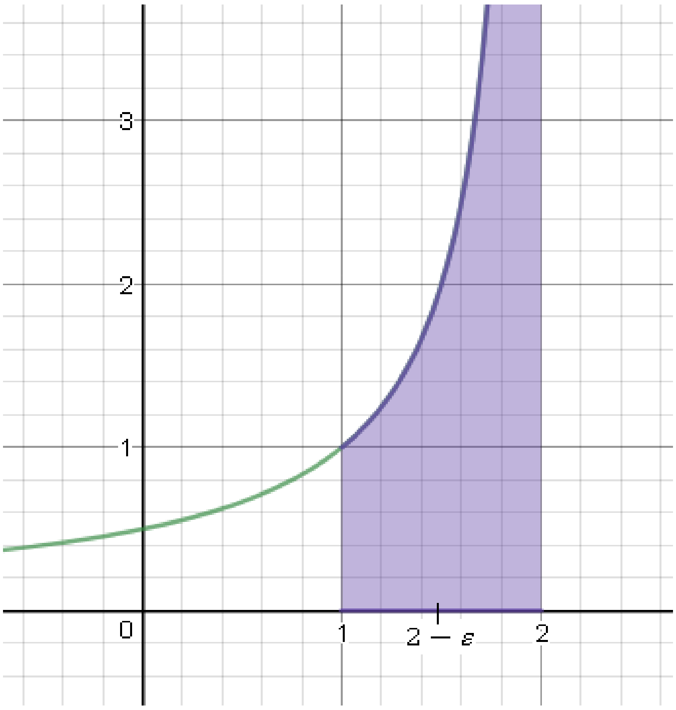
$$\boldsymbol{\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx}$$

Se toma un punto c interior a $[a;b]$ y luego se resuelve como una integral impropia del tipo 3).

Ejemplos:

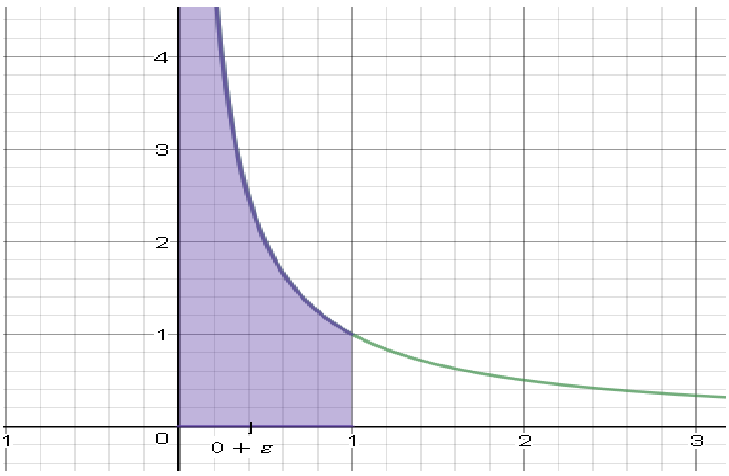
1) $\int_{1}^{2} \frac{1}{2-x}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1}^{2-\varepsilon} \frac{1}{2-x}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-ln|2-x|)]_{1}^{2-\varepsilon} =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [(-ln|2-(2-\varepsilon)|) - (-ln|2-1|)] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-ln\,\varepsilon + ln\,1) = +\infty \;=>\; DV$



La integral es divergente, es decir que cuanto más se acercan los valores de x a 2, mayor es el valor de la integral.

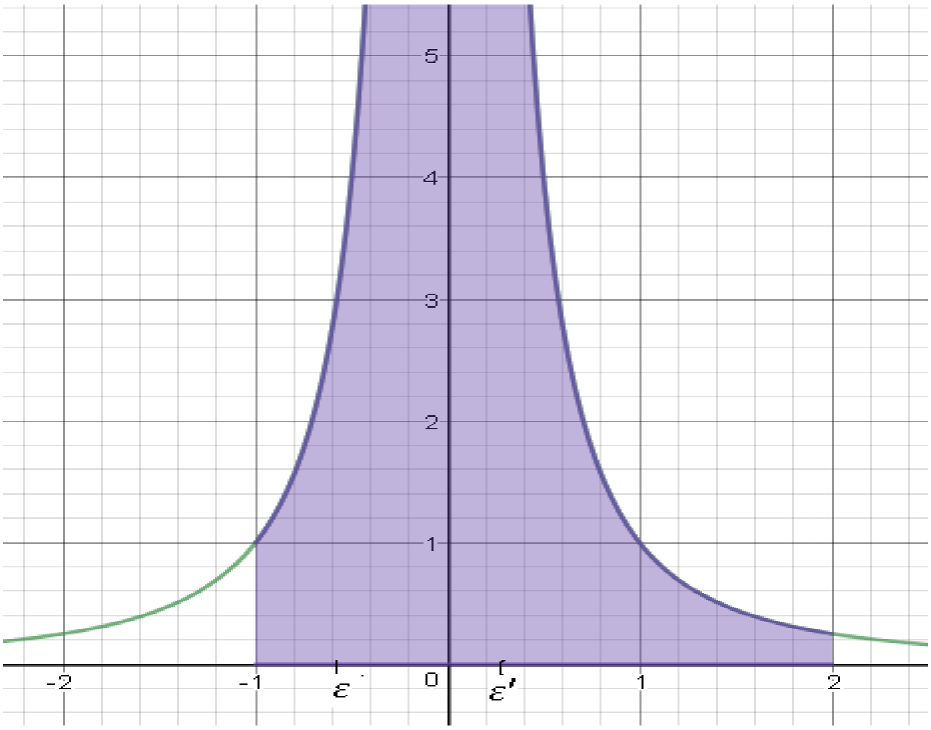
2) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (ln\,|x|)]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (ln\,1 - ln\,\varepsilon) = -(-\infty) = +\infty => DV$



La integral es divergente, es decir que cuanto más se acercan los valores de x a 0 mayor es el valor de la integral.

3) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}.dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}.dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}.dx + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{0+\varepsilon'}^{2} \frac{1}{x^2}.dx =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} -\frac{1}{x}\Big]_{\varepsilon'}^{2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon' \to 0^+}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \infty + \infty = \infty \ DV$

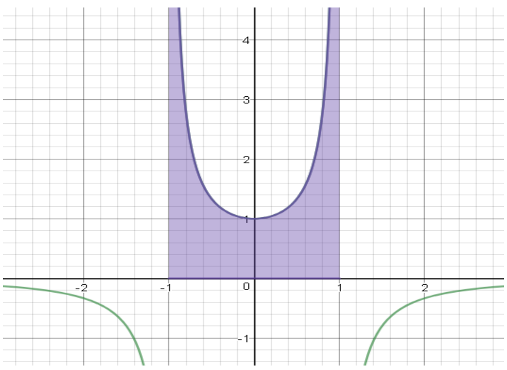


4) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}.dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{1}{1-x^2}.dx + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon'} \frac{1}{1-x^2}.dx =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\frac{1}{2} ln|x+1| - \frac{1}{2} ln\,|1-x|\right)\Big]_{-1+\varepsilon}^{0} + \lim_{\varepsilon' \to 0^+}\left(\frac{1}{2} ln|x+1| - \frac{1}{2} ln\,|1-x|\right)\Big]_{0}^{1-\varepsilon'} =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big]_{-1+\varepsilon}^{0} + \lim_{\varepsilon' \to 0^+} \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big]_{0}^{1-\varepsilon'} =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\frac{1}{2} ln\,1 - \frac{1}{2} ln\frac{\varepsilon}{2-\epsilon}\right) + \lim_{\varepsilon' \to 0^+}\left(\frac{1}{2} ln\frac{2-\varepsilon'}{\varepsilon'} - \frac{1}{2} ln\,1\right) = -(-\infty) + \infty = \infty \ \ DV$



3.3.3. Criterio de comparación

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \ \in [a;+\infty) \ \ y \int_a^{+\infty} g(x).dx \ es\ CV, entonces \int_a^{+\infty} f(x).dx\ es\ CV$$

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \ \in [a;+\infty) \ \ y \int_a^{+\infty} f(x).dx \ es\ DV, entonces \int_a^{+\infty} g(x).dx\ es\ DV$$

Ejercicios integradores:

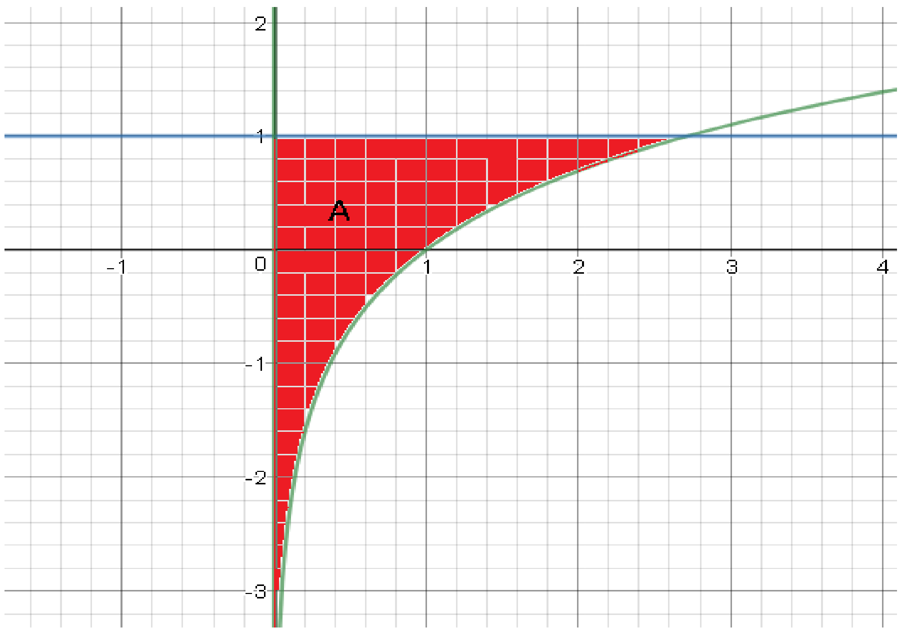
$1)\ Probar\ que \int_1^{+\infty} e^x.dx\ es\ CV$

Considero la función $f(x) = e^{-x}/e^x \le e^{-x}\ \forall x \ \in \ [1;+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}.dx \ = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t e^{-x}.dx = \lim_{t\to+\infty} (-e^{-x})]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) \ = \frac{1}{e}$$

Es convergente, por lo tanto la integral dada también es convergente.

$2)\ Hallar\ el\ área\ limitada\ por\ las\ gráficas\ de \begin{cases} y = ln\ x \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$



Como es un problema de área, lo primero que tengo que hacer es hallar los puntos de intersección:

$$\ln x = 1$$

$$e^{\ln x} = e^1$$

$$x = e$$

Por lo tanto hay que hallar el área entre 0 y e. El techo es y = 1 y el piso $\ln x$.

$$A = \int_0^e (1 - \ln x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^e (1 - \ln x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2x - x . \ln x)]_\varepsilon^e =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [(2e - e . \ln e) - (2\varepsilon - \varepsilon . \ln \varepsilon)] = e - 0 = e$$

$$A = e$$

Queda indeterminado, lo resuelvo aparte:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon . \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} =^{L'H} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\varepsilon) = 0$$

4. SUCESIONES

$S : N \to R \ / \ \forall n \in N: S(n) = a_n$

$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \ n \in N$

Ejemplos:

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$

$(b_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$

4.1. Igualdad

Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden ordenadamente.

Ejemplos:

$(a_n) = \left(\frac{2}{n}\right) = \left(2, 1, \frac{2}{3}, \dots\right)$

$(b_n) = \left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \left(2, 1, \frac{2}{3}, \dots\right)$

$$\boxed{(a_n) = (b_n) \ \leftrightarrow \ \forall n \in N: a_n = b_n}$$

4.2. Sucesiones acotadas

$k \in \mathbb{R}$ es una Cota Superior de la sucesión $(a_n) \leftrightarrow \forall n\colon\ a_n \leq k$

$k \in \mathbb{R}$ es una Cota Inferior de la sucesión $(a_n) \leftrightarrow \forall n\colon\ a_n \geq k$

Ínfimo: mayor de las Cotas Inferiores.

Supremo: menor de las Cotas Superiores.

Una sucesión está acotada si tiene cota superior e inferior

Ejemplos:

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad 0\ es\ cota\ inferior\ e\ ínfimo$

$1\ es\ cota\ superior\ y\ supremo$

$(b_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ $\quad 0\ es\ cota\ inferior\ e\ ínfimo$

$\frac{1}{3}\ es\ cota\ superior\ y\ supremo$

4.3. Sucesión convergente

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = l}$$

Ejemplo: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{CV}$

Propiedades:

1) $Si\ (a_n)\ converge, entonces\ \lim_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} a_n\right|$

2) $Si\ (a_n)\ y\ (b_n)\ convergen\ y\ a_n \geq b_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \geq \lim_{n\to+\infty} b_n$

3) $Si\ (a_n)\ y\ (c_n) convergen\ al\ mismo\ límite\ l\ y\ a_n \leq b_n \leq c_n\ entonces$

$(b_n)\ converge\ con\ el\ mismo\ límite.$

4) $Toda\ sucesión\ CV\ está\ acotada.$

4.4. Sucesión Divergente

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$$

Ejemplo: $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \Rightarrow \boldsymbol{DV}$

4.5. Sucesión oscilante

$$\boxed{\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n}$$

Ejemplo: $(a_n) = (-1)^n = (-1,1,-1,\dots,(-1)^n,\dots)$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \nexists$$

4.6. Sucesiones monótonas

Sucesión Creciente: $\forall n \in N: a_n \leq a_{n+1}$

Sucesión Decreciente: $\forall n \in N: a_n \geq a_{n+1}$

Una sucesión es monótona si es decreciente ó creciente

Ejemplos:

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ *es monótona decreciente*

$(b_n) = (2^n) = (2,4,8,\dots,2^n,\dots)$ *es monótona creciente*

4.7. Criterio de D'Alambert

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos, si:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \;=>\; a_n \quad \boldsymbol{CV\ a\ 0} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \;=>\; a_n \quad \boldsymbol{DV} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\right)$$

Ejemplo:

$$(a_n) = \left(\frac{n}{3^n}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \dots, \frac{n}{3^n}, \dots\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n}{3^n}}{\frac{n-1}{3^{n-1}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}.n}{3^n.(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}.3^{-1}.n}{\cancel{3^n}.(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1).3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n} - \frac{3}{n}} = \frac{1}{3} < 1 \;=>\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$$

Por lo tanto, por D'Alambert, la sucesión es **CV**.

4.8. L'Hopital con sucesiones

$Sea\ f(x)/\ f: [1; +\infty) \to \mathbb{R}, continua\ y\ derivable\ hasta\ el\ orden\ necesario\ en$

$[1; +\infty)\ y\ \ a_n = f(n), entonces\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n.$

Esta propiedad permite aplicar L'Hopital para resolver límites de sucesiones, pero la regla se aplica **siempre** sobre $f(x)$.

Ejemplo:

$$(a_n) = \left(\frac{n^2}{e^n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} =^{L'H} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} =^{L'H} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

Ejercicio integrador:

$$Dada\ la\ sucesión\ (a_n)/ \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^3 + n - 2} \leq a_n \leq \frac{3^n}{n!} \quad Estudiar\ la\ convergencia\ de\ a_n.$$

Primero calculo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^3 + n - 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\overset{0}{\frac{2n}{n^3}} + \overset{0}{\frac{3n}{n^3}} + \overset{0}{\frac{1}{n^3}}}{\underset{0}{\frac{3n^3}{n^3}} + \cancel{\frac{n}{n^3}} - \underset{0}{\frac{2}{n^3}}} = 0 \quad Por\ lo\ tanto, es\ \boldsymbol{CV}$$

$$Para\ \left(\frac{3^n}{n!}\right)\ uso\ D'alambert:$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n . (n-1)!}{n! . 3^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{3^n} . (n-1)!}{n!\, \cancel{3^n} . 3^{-1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!} . n . \frac{1}{3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 0 \quad Por\ lo\ tanto, \boldsymbol{CV}$$

Ambas sucesiones convergen a 0, finalmente aplicando el teorema de la intercalación se puede afirmar que (a_n) también converge a 0.

Recordar: $n! = (n-1)! . n\ ,\ (n+3)! = (n+3) . (n+2)!$ $(n+1)! = (n+1) . n!$

Los factoriales aparecen mucho en sucesiones y series.

5. SERIES

Dada una sucesión de números reales $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ si obtengo las sumas parciales:

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Se denomina serie numérica a la sucesión de sumas parciales.

$(S_n) = (S_1; S_2; \dots; S_n; \dots)$

5.1. Clasificación

$$Si \lim_{n \to +\infty} S_n = S \text{ } la\ serie\ es\ \boldsymbol{CV}$$

$$Si \lim_{n \to +\infty} S_n = \infty \text{ } la\ serie\ es\ \boldsymbol{DV}$$

$$Si \lim_{n \to +\infty} S_n \nexists \text{ } la\ serie\ es\ \boldsymbol{OSCILANTE}$$

Para denotar a una serie se utiliza la notación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots +$$

De lo cual se deduce que S = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n$

5.2. Serie Geométrica

Tienen la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 . q^n = a_1 + a_1 . q + a_1 . q^2 + a_1 . q^3 + \cdots + a_1 . q^{n-1} + \cdots + \quad con\ a_1 \neq 0$$

Cada término de la serie se obtiene de multiplicar al anterior por una constante llamada razón q.

Convergencia de Series Geométricas

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to \infty} a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow \begin{cases} Si\ |q| < 1\ CV\ a\ \frac{a_1}{1-q} \\ Si\ |q| \geq 1\ DV \\ Si\ q = -1\ Oscilante \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{2^{n-1}} + \cdots$

$q = \frac{1}{2}, a = 3.$ $Como\ |q| < 1 => S = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} => \boldsymbol{S = 6} \quad \therefore \boldsymbol{CV\ a\ 6}$

2) $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1} \qquad q = 3 => \boldsymbol{DV} \qquad \boldsymbol{S} = +\infty$

5.3. Series p

Se denoniman así a las series del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Convergencia de las Series p

$Si\ \ p > 1 => CV$
$Si\ \ p \leq 1 => DV$

Si $p = 1$ se obtiene la **serie armónica**:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad Esta\ serie\ es\ DV.$

5.4. Series Alternadas

Si los términos de una serie son alternadamente positivos y negativos la serie es alternada.

Hay dos tipos de series alternadas:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n} a_n$

Convergencia de las series alternadas

Para analizar la convergerncia de estas series se utiliza el criterio de Leibniz.

5.5. Condición necesaria de convergencia

$Una\ serie\ es\ convergente => \lim_{n\to\infty} a_n\ = 0\ \ (el\ recíproco\ no\ es\ válido)$

$Si\ \lim_{n\to\infty} a_n\ \neq 0 => la\ serie\ no\ CV$

5.6. Criterio de D'Alambert

$$Si\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ es\ una\ serie\ de\ términos\ positivos\ y\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l$$

$Si\ l < 1\ CV$

$Si\ l > 1\ DV$

$Si\ l = 1\ No\ se\ sabe$

5.7. Criterio de la raíz de Cauchy

$$Si\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ es\ una\ serie\ de\ términos\ positivos\ y\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

$Si\ l < 1\ CV$

$Si\ l > 1\ DV$

$Si\ l = 1\ No\ se\ sabe$

5.8. Criterio de Leibniz

$Sea\ (a_n)\ una\ sucesión\ de\ términos\ positivos.$

$Una\ serie\ alternada\ es\ CV\ si\ y\ solo\ si$:

1) $Es\ estrictamente\ decreciente\ en\ valor\ absoluto$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \qquad 1)\ Es\ e.dcte\ \ 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ = 0 \quad \therefore\ \boldsymbol{CV}$$

5.9. Criterio de la Integral de Cauchy

$Sea\ f\ una\ función\ continua, positiva\ y\ estrictamente\ decreciente\ en\ [1; +\infty)$

$y\ además\ f(n) = a_n, entonces:$

$$\int_1^{+\infty} f(x).dx \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ tienen\ el\ mismo\ comportamiento.\ O\ son\ las\ dos\ CV\ ó\ DV.$$

5.9. Convergencia absoluta

$Se\ dice\ que\ la\ serie\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ es$ absolutamente convergente $si\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\ CV$

$Si\ una\ serie\ es\ convergente\ pero\ no\ es\ absolutamente\ convergente,$

$se\ dice\ que\ es$ *condicionalmente convergente*.

Ejemplo:

$Analizar\ convergencia\ condicional\ o\ absoluta\ de$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$

Analizo la convergencia de la serie en valor absoluto aplicando el criterio de la raíz de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2+\left(\frac{1}{n}\right)}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2} = 0 < 1 => \boldsymbol{CV}$$

Por lo tanto, por el teorema, la serie alternada es CV y absolutamente CV.

5.10. Criterio de comparación de Gauss

$Sean\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ dos\ series\ numéricas\ de\ términos\ positivos$

$1)\ Si\ a_n \le b_n\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ CV\ => \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ CV$

$2)\ Si\ a_n \ge b_n\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ DV\ => \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ DV$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \mathit{converge\ por\ ser\ una\ serie\ geométrica\ de\ razón}\ q = \frac{1}{2}.$$

Como $a_n \leq b_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \mathit{también\ es\ CV}$$

Analizar CV con algún criterio:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!.n!.3^n} =^{D'AL} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+3)!}{3!.n!.3^n}}{\frac{(n-1+3)!}{3!\,n-1!\,3^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!\,.3!.(n-1)!\,3^{n-1}}{3!.n!.3^n.(n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!\,.\cancel{3!}.(n-1)!.\cancel{3^n}.3^{-1}}{\cancel{3!}.n!.\cancel{3^n}.(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!.\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}.n(n+2)!\,3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3).\cancel{(n+2)!}}{n.3\cancel{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3} < 1\ \boldsymbol{CV}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{NO\ CV}\ \mathit{por\ Condición\ Necesaria\ Converg.}$$

6. SERIES DE POTENCIA

Son de la forma:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n}$$

6.1. Radio de convergencia

$$\boldsymbol{.D'Alambert}\text{: } R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n (x-a)^n}{a_{n-1}(x-a)^{n-1}}\right| \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.|x-a| < 1$$

$$\boldsymbol{.Cauchy}\text{: } R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.|x-a| < 1$$

$Si\ \ R = 0 \quad => \ I = (-\infty; +\infty)$

$Si\ \ luego\ de\ reemplazar\ x\ en\ la\ serie\ de\ potencias\ obtengo\ una\ serie\ \boldsymbol{CV}$

- $I = [x \quad Es\ decir, x\ pertence\ al\ Intervalo\ de\ CV$

$Si\ \ luego\ de\ reemplazar\ x\ en\ la\ serie\ de\ potencias\ obtengo\ una\ serie\ \boldsymbol{NO\ CV}$

- $I = (x \quad Es\ decir, x\ no\ pertence\ al\ Intervalo\ de\ CV$

1) $Hallar\ intervalo\ de\ convergencia$:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.2^n}$$

Aplico D'Alambert:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{n.2^n}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1).2^{n-1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n.(n-1).2^{n-1}}{x^{n-1}.n.2^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1).2^{n-1}}{n.2^n}.\left|\frac{x^n}{x^{n-1}}\right| < 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1).\cancel{2^n}}{n.\cancel{2^n}.2}.|x| < 1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}.|x| < 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}.|x| < 1 = \frac{1}{2}.|x| < 1 =$$

$$= |x| < 2 \qquad\qquad -2 < x < 2$$

Por lo tanto, hay que analizar que ocurre cuando reemplazo $x = -2$ y $x = 2$ en la serie.

$\boldsymbol{x = 2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{2^n}}{n.\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad Esta\ serie\ es\ \boldsymbol{DV}\ por\ ser\ la\ serie\ armónica. => x = 2 \notin I$$

$\boldsymbol{x = -2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\cancel{2})^n}{n.\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \quad Es\ una\ serie\ alternada.$$

$Aplico\ Leibniz$:

1) $Es\ estrictamente\ decreciente$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Al cumplir 1) y 2), la series es $\boldsymbol{CV}$ => $x = -2 \in I$

$$\boxed{I = [-2; 2)}$$

$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

Aplico Cauchy:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}.|x-1| < 1 => |x-1| < 1$$

$$-1 < x-1 < 1 => 0 < x < 2$$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad Por\ Leibniz\ es\ \boldsymbol{CV} => x = 0 \in I$

$\boldsymbol{x = 2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \boldsymbol{DV}\ por\ ser\ la\ serie\ armónica => \ x = 2 \notin I$

Luego el intervalo de convergencia es:

$$\boxed{I = [0;2)}$$

2) $Dada\ la\ serie\ de\ potencias\ \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(x+2)^4}{16.2} + \frac{(x+2)^6}{64.3} - \frac{(x+2)^8}{256.4} + \cdots determinar$ $el\ intervalo\ de\ convergencia.$

Primero que hay que hallar la fórmula de la serie. Se obtiene probando, hasta dar con la serie que “genere” a los términos del enunciado.

Se puede ver que la serie es alternada, y que primero es positiva, negativa, positiva, etc.

Por lo tanto lo primero será esto: $(-1)^{n+1}$

En el denominador: $4^n.n \quad Si\ \boldsymbol{n = 1 \to 4, n = 2 \to 16.2, n = 3 \to 64.3}, \ldots$

En el numerador: $(x+2)^{2n} \quad Si\ \boldsymbol{n = 1 \to (x+2)^2, n = 2 \to (x+2)^4}$ ....

Por lo tanto la serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{(x+2)^{2n}}{4^n.n}$$

Aplico D’Alambert: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{2n}}{4^n.n}}{\frac{(x+2)^{2.(n-1)}}{4^{n-1}.(n-1)}} \right| =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{2n}.4^{n-1}.(n-1)}{4^n.n.(x+2)^{2n-2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n}.4^{-1}.(n-1)}{\cancel{4^n}.n} .|(x+2)^2| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{4n} .|(x+2)^2| < 1 = \frac{1}{4} .|(x+2)^2| < 1 = |(x+2)^2| < 4$$

$$-4 < (x+2)^2 < 4 => -\sqrt{4} < x+2 < \sqrt{4} => -4 < x < 0$$

$\boldsymbol{x = -4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{(-2)^{2n}}{4^n.n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{\cancel{(-2)^n}.\cancel{(-2)^n}}{\cancel{4^n}.n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{(-1)^n.(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n+1}.\frac{1}{n} \quad \mathit{Por\ Leibniz\ es}\ \boldsymbol{CV}\ x = -4 \in I$$

$\boldsymbol{x = 0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{4^n}.n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{1}{n} \quad \mathit{Por\ Leibniz\ es}\ \boldsymbol{CV} \ => \ x = 0 \in I$$

$2^{2n} = 4^n$

Luego el intervalo de convergencia es:

$$\boxed{I = [-4; 0]}$$

7. SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

MacLaurin

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}.x^n}$$

Taylor

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n}$$

1) *Desarrollar en series de potencias de x y calcular el intervalo de convergencia si $f(x) = sen\ x$.*

Calculo las derivadas sucesivas en el origen para obtener la serie correspondiente.

$$f'(x) = \cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) => f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -sen\ x = sen\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) => f''(0) = \ 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = sen\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) => f'''(0) = -1$$

$$f^{iv}(x) = sen\ x = sen\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) => \ f^{iv}(0) = 0$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$f^{n}(x) = sen\ \left(x + \frac{n\pi}{2}\right) => \ f^{n}(0) = sen\ \frac{n\pi}{2}$$

Reemplazando en la fórmula de MacLaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\ \frac{n\pi}{2}}{n!} . x^{n}$$

$$f(x) = sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{x^{2.(n-1)+1}}{2(n-1)+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1} . (2n-1)!}{(2n+1)! . x^{2n-1}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n-1)!}}{(2n+1). n. \cancel{(2n-1)!}} . |x^2| < 1 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n+1). n}}_{0} . |x^2| < 1$$

Queda $0. |x^2| < 1 => \mathrm{R} = 0$ .Luego el Intervalo de convergencia es:

$$\boxed{I = (-\infty; +\infty)}$$

8. OTRAS FORMAS DE OBTENER DESARROLLOS EN SERIE

8.1. Teorema de Derivación

A partir del desarrollo en serie de $f(x)$ se puede obtener, derivando la serie, el desarrollo en serie de $g(x)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n \quad => \quad f'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n.(x-a)^{n-1}$$

Ejemplo:

$$f(x) = sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si quiero hallar el desarrollo en serie de $g(x) = cos\,x$:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.2n+1.x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\cancel{(2n+1)}.x^{2n}}{\cancel{(2n+1)}.2n!}$$

$$g(x) = cos\,x = (sen\,x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!}$$

8.2. Teorema de Integración

A partir del desarrollo en serie de $f(x)$ se puede obtener, integrando la serie, el desarrollo en serie de $g(x)$.

Ejemplo:

$$Sea\ f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.x^n \ \ puedo\ obtener\ el\ desarrollo\ en\ serie\ de$$

$g(x) = ln|1+x|$.

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}.dt = ln|1+x|$$

$$ln|1+x| = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.t^n.dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n.t^n + \cdots).dt =$$

$$ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots (-1)^n.\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

9. EJERCICIOS GENERALES

$$1)\ Dada\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots$$

$a)\ Analizar\ la\ concavidad\ de\ f\ en\ el\ origen.$

$b)\ Hallar\ f'''(0).$

$a)\ Comparando\ con\ la\ serie\ de\ MacLaurin\ se\ tiene\ que:$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}.x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}.x^n$$

Si quiero hallar $\frac{f''(0)}{2!}$:

$$\frac{f''(0)}{2!}.x^2 = \frac{x^2}{4} => \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{4} => f''(0) = \frac{1}{2} > 0, entonces\ f\ es\ cóncava\ en\ el\ orígen$$

$$b)\ \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{9} => f'''(0) = \frac{2}{3}$$

$$2)\ Dada\ la\ siguiente\ inecuación\ \frac{2n^2+4}{2n^3-n+4} \leq 3 - 2a_n \leq \frac{n}{3^n}$$

$¿Es\ cierto\ que\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0?$

Aplico lim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4}{2n^3-n+4} \leq \lim_{n\to\infty} (3-2a_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$$

0 0

Por lo tanto, para que se cumpla el teorema de intercalación, a_n tiene que valer 3/2.

Porque $\lim_{n\to\infty} \left(3 - 2.\frac{3}{2}\right) = 0$. Por lo tanto, FALSO.

3) $Para\ la\ función\ definida\ por\ f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} sen(t^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, analice\ la$

$continuidad\ y\ derivabilidad\ en\ el\ origen. Es\ F\ derivable\ en\ el\ punto\ x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}?$

$Fundamente\ la\ respuesta, y\ si\ es\ posible\ calcule\ F'(x_0).$

$\boldsymbol{Continuidad\ en\ x = 0}$

1) $F(0) = 0$

2) $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \int_x^{2x} sen(t^2)dt = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^-} F(x) = 0$

3) $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$

Por lo tanto, $F(x)$ es continua en $x = 0$.

$\boldsymbol{Derivabilidad\ en\ x \neq 0}$

Aplico TFCI:

$F'(x) = sen(2x)^2.2 - sen(x^2).1$

$F'(x) = 2.sen(4x^2) - sen(x^2)$

$\boldsymbol{Derivabilidad\ en\ x = 0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x} sen(t^2)\ -0}{x-0} = \frac{\to 0}{\to 0} =^{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)^2.2 - sen(x^2)}{1} =$$

$= \frac{\to 0}{1} = 0 \quad \Rightarrow F'(0) = 0$

$$F'(x) = \begin{cases} 2sen(4x^2) - sen(x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $F(x)$ es continua y derivable en el origen.

$¿F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)?$

$$F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 2sen\left(4\left(\cancel{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right)^{\cancel{2}}\right) - sen\left(\left(\cancel{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right)^{\cancel{2}}\right)$$

$$F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 2sen\left(4.\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2sen(2\pi) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.0 - 1$$

$$\boldsymbol{F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -1}$$

$4)\ Para\ la\ función:\quad h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{4^n}$

$a)\ Obtenga\ el\ dominio\ de\ la\ función\ (intervalo\ de\ convergencia).$

$b)\ Hallar\ la\ suma\ y\ graficar.$

$a)\ \boldsymbol{I}=(\mathbf{1},\mathbf{5}).\ Demostrar.$

$$b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{4^n}=\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(x-3)^4}{16}+\cdots+\frac{(x-3)^{2n}}{4^n}+\cdots$$

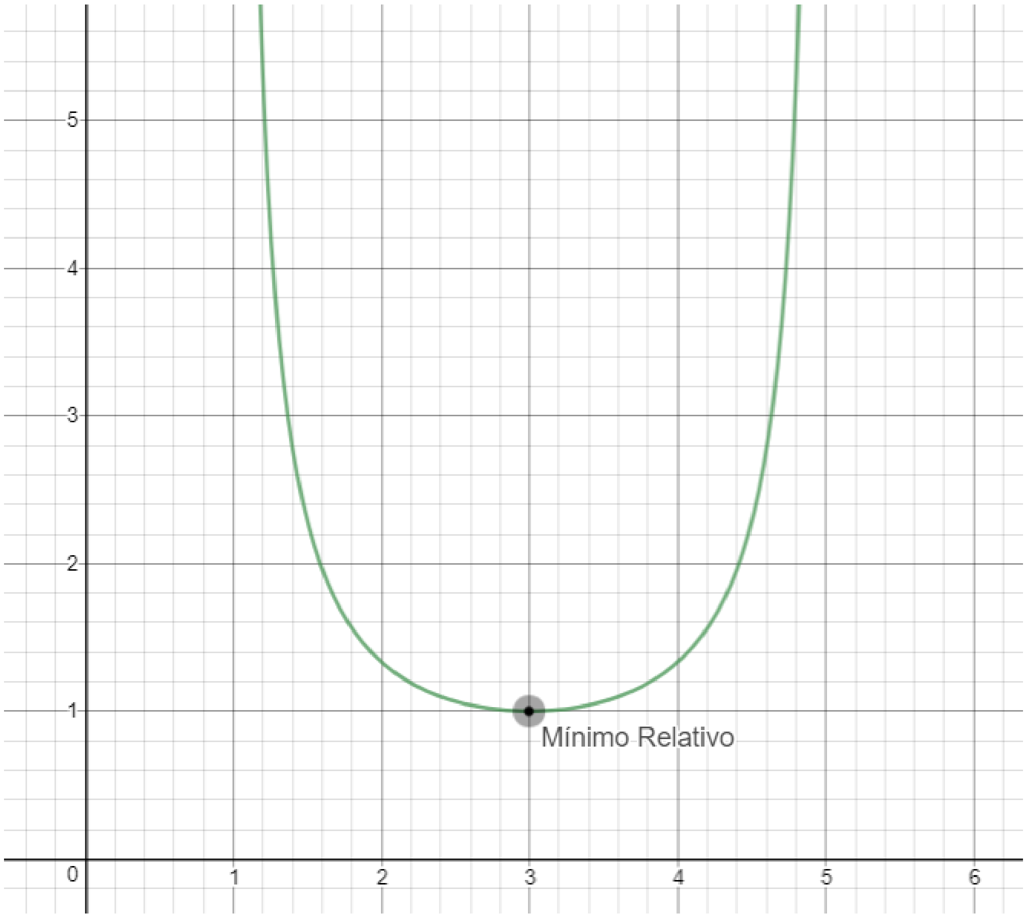
Es una serie geométrica, por lo tanto:

$$q=\frac{(x-3)^2}{4}\quad => h(x)=\frac{1}{1-\frac{(x-3)^2}{4}}=\frac{4}{4-(x-3)^2}=\frac{4}{-x^2+6x-5}$$

$El\ dominio\ de\ la\ función\ fue\ hallado\ en\ el\ inciso\ a, \boldsymbol{Dh}=(\mathbf{1},\mathbf{5}).$

Entonces, la función tiene dos asíntotas verticales: $x=1$ y $x=5$.

$$h'(x)=-\frac{4(-2x+6)}{(-x^2+6x-5)^2}=0\quad =>\quad x=3\ Mínimo\ Relativo$$



5) $Obtener\ el\ polinomio\ de\ MacLaurin\ de\ mayor\ grado\ posible\ asociado\ a$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + 2, & x \leq 0 \\ -x^3 + 5x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 2$$

$$f'(0)^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^3+5x+2-2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^3+5x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(-x^2+5)}{\cancel{x}} = 5$$

$$f'(0)^- = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3+5x+2-2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3+5x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(x^2+5)}{\cancel{x}} = 5$$

$$f'(0)^+ = f'(0)^- \Rightarrow \exists f'(0) = 5$$

Como existe $f'(0)$, derivo por regla y luego vuelvo a derivar por definición:

$$f''(0)^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{-3x^2+5-5}{x} = 0$$

$$f''(0)^- = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x^2+5-5}{x} = 0$$

$$f''(0)^+ = f''(0)^- \Rightarrow \exists\ f''(0) = 0$$

Nuevamente, derivo por regla y luego por definición:

$$f'''(0)^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{-6x-0}{x} = -6$$

$$f'''(0)^- = \lim_{x \to 0^-} \frac{6x-0}{x} = 6$$

$$f'''(0)^+ \neq f'''(0)^- \Rightarrow \nexists f'''(0)$$

Por lo tanto, el polinomio de mayor grado posible es:

$$\boxed{\boldsymbol{P_1(x) = 2 + 5x}}$$

6) $Hallar\ y = f(x)\ que\ verifica: (1 + x^3).y' = x^2\ y.\ Además, hallar\ la\ curva$

$que\ pasa\ por\ (0,2).$

$$(1 + x^3).y' = x^2\ y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{x^2}{1 + x^3} dx$$

Integrando en ambos miembros:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x^2}{1 + x^3} dx$$

Para resolver la integral de la derecha utilizo sustitución.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \int \frac{\cancel{x^2}}{u}\frac{du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|u| + C \ = \boldsymbol{\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right| + C}$$

$u = 1 + x^3$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 => dx = \frac{du}{3x^2}$$

Entonces:

$$ln|y| = \frac{1}{3}ln|1+x^3| + C$$

$$e^{ln|y|} = e^{\frac{1}{3}ln|1+x^3|+C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^{-\ln(x)} \neq -x}}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{3}ln|1+x^3|}.e^{c}$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^{-\ln(x)} = e^{\ln(x)^-} = x^{-1}}}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{3}ln|1+x^3|}.k$$

$$|y| = e^{ln|1+x^3|^{\frac{1}{3}}}.k$$

$$|y| = k.|1+x^3|^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{y = k(1+x^3)^{\frac{1}{3}} \quad S.G}$$

Para hallar la solución particular que pasa por $(0,2)$:

$$2 = k(1+0)^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{2 = k}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{RTA: \ y = 2(1+x^3)^{\frac{1}{3}} \quad S.P}$$

$7)\ Si\ f(x) \in C^1\ en\ x > 0, f(1) = 2 \wedge \forall x > 0:\ x[f(x)-1] = 5 - 2f(x) + \int_1^x f(t)dt.$

$Hallar\ f(4).$

$$x[f(x)-1] = 5 - 2f(x) + \int_1^x f(t)dt.$$

$$xf(x) - x = \ 5 - 2f(x) + \int_1^x f(t)dt.$$

Ahora tengo que aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral y derivar todo lo demás.

$f(\cancel{x}) + xf'(x) - 1 = -2f'(x) + f(\cancel{x})$

$xf'(x) - 1 = -2f'(x)$

$xf'(x) + 2f'(x) = 1$

$(x + 2)f'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x + 2}$

$dy = \dfrac{1}{x + 2}dx$

Integro a ambos lados de la igualdad:

$\int dy = \int \dfrac{1}{x + 2}dx$

$y = ln|x + 2| + C \quad \boldsymbol{S.G}$

¿Terminé? **NO**. Ahora tengo que hallar la solución particular que cumple: $f(1) = 2$.

$2 = ln|1 + 2| + C$

$\boldsymbol{C = 2 - \ln 3}$

Entonces, la función pedida es:

$f(x) = ln|x + 2| + 2 - \ln 3$

$\boldsymbol{f(x) = ln\left(\dfrac{|x + 2|}{3}\right) + 2}$

¿$f(4)$?

$f(4) = ln\left(\dfrac{|4 + 2|}{3}\right) + 2 => \boldsymbol{f(4) = ln\, 2 + 2 \quad RTA}$

4) $Determinar\ la\ función\ y = f(x)\ tal\ que\ la\ pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ a$ $su\ gráfica\ en\ todo\ punto\ sea\ igual\ al\ doble\ de\ la\ abscisa\ menos\ 4\ y\ además\ que$ $f(0) = 1.$

$f'(x) = 2x - 4$

$\dfrac{dy}{dx} = 2x - 4$

$dy = (2x - 4).dx$

$$\int dy = \int (2x - 4).\,dx$$

$$y = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - 4x + C$$

$$y = x^2 - 4x + C \quad \boldsymbol{S.G}$$

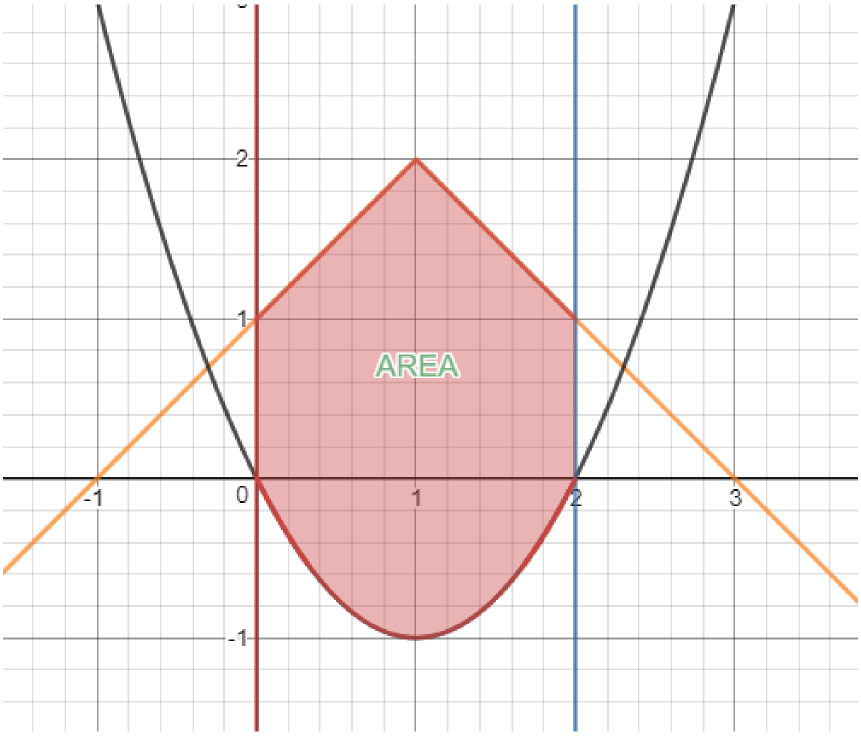
Además, debe verificar $f(0) = 1$:

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{C}$$

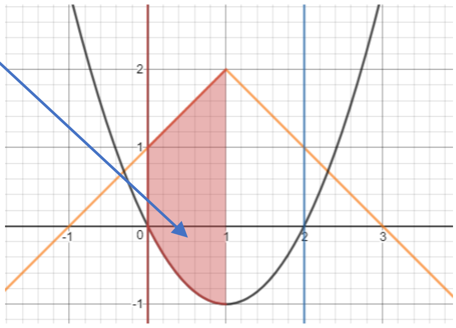
$\boldsymbol{RTA}$: $\boldsymbol{y = x^2 + 4x + 1 \quad S.P}$

5) $Determinar\ el\ área\ comprendida\ entre\ los\ gráficos\ de\ las\ funciones$
$f(x) = 2 - |x - 1|\ y\ g(x) = x^2 - 2x\ y\ las\ rectas\ de\ ecuación\ x = 0\ y\ x = 2.$

Para este ejercicio es imprescindible realizar un gráfico aproximado de la función:



Puede verse que el área es simétrica, entonces recordando una de las propiedas de la integral definida:

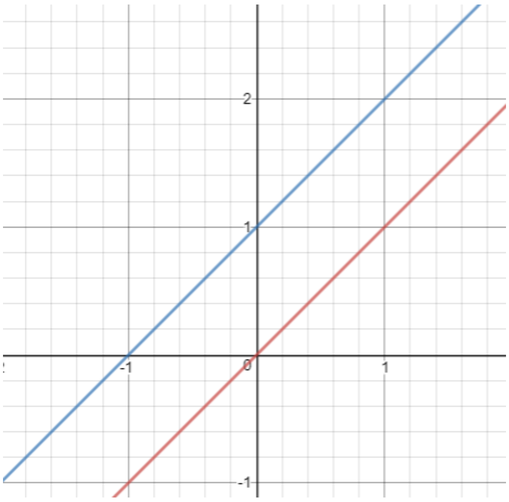


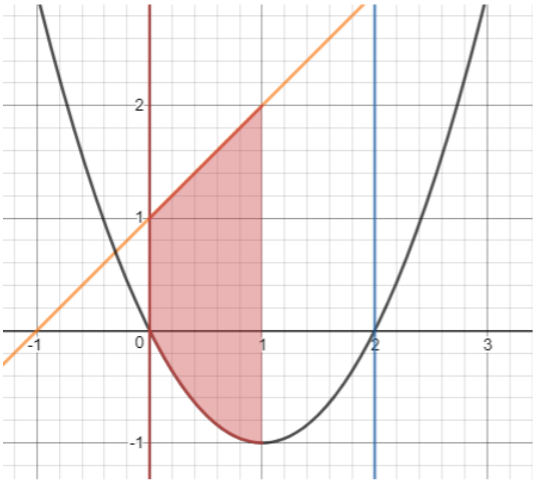
$$A = 2\int_0^1 Techo - Piso$$

¿Quién hace de **techo**?

¿Quién hace de **piso**?

La función que hace de techo es $\boldsymbol{y = x + 1}$. Si a simple vista no se ve, una forma de verlo es imaginarse a la función $y = x$ desplazada hacia arriba.





Por lo tanto, $\boldsymbol{y = x^2 - 2x}$ hace de piso. El área, entonces, es:

$$A = 2\int_0^1 [x + 1 - (x^2 - 2x)]dx = \boldsymbol{\frac{13}{3}}$$

$6)\ Hallar\ los\ valores\ de\ a \in \mathbb{R}\ para\ que\ la\ serie\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)^n}{n}(x-2)^n\ tenga$

$radio\ de\ convergencia\ igual\ a\ 2.$

Aplico D'alambert:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(1+a)^n}{n}(x-2)^n}{\frac{(1+a)^{n-1}}{n-1}(x-2)^{n-1}} \right| < 1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n-1)(1+a)^n(x-2)^n}{n(1+a)^{n-1}(x-2)^{n-1}} \right| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1} |(1+a)(x-2)| < 1 = |(1+a)(x-2)| < 1$$

$$|(1+a)(x-2)| < 1 = |1+a|.|x-2| < 1 = |x-2| < \frac{1}{|1+a|}$$

Para que el radio sea igual a 2:

$$R = \frac{1}{|1+a|} \Rightarrow 2 = \frac{1}{|1+a|} \Rightarrow |1+a| = \frac{1}{2}$$

$$1 + a = \frac{1}{2} \vee 1 + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{a = -\frac{1}{2}} \vee \boldsymbol{a = -\frac{3}{2}}$$

BIBLIOGRAFÍA

- GARCIA VENTURINI, A. E y SCARDIGLI, M. (2016). *Análisis Matemático I para Estudiantes de Ingeniería*. Buenos Aires. Editorial Ediciones Cooperativas.
- Apuntes de la materia Análisis Matemático (28) del Ciclo Básico Común. Diponibles en: http://www.mate.cbc.uba.ar/28/teoricas.htm
- Parciales y finales tomados entre los años 2016 y 2018 en la UTN FRBA.