11. Teoremas integrales (Green, Gauss, Stokes)

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- $\nabla f \equiv \mathrm{grad}(f)$ simboliza al ***gradiente*** del campo escalar f.
- Dado el campo vectorial $\bar{f} : D \subset \Re^3 \to \Re^3 / \bar{f}(x,y,z) = (P(x,y,z)\ ,\ Q(x,y,z)\ ,\ R(x,y,z))$

  $\nabla \cdot \bar{f} \equiv \mathrm{div}(\bar{f})$ simboliza a la ***divergencia*** de $\bar{f}$, $\mathrm{div}(\bar{f}) \doteq P'_x + Q'_y + R'_z$.

  $$\nabla \wedge \bar{f} \equiv \mathrm{rot}(\bar{f}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \doteq (R'_y - Q'_z\ ,\ P'_z - R'_x\ ,\ Q'_x - P'_y)$$ es el ***rotor*** de $\bar{f}$.

- Un campo es: $\begin{cases} \textbf{\textit{solenoidal,}} \text{ si su divergencia es nula en todo punto.} \\ \textbf{\textit{irrotacional,}} \text{ si su rotor es nulo en todo punto.} \\ \textbf{\textit{armónico,}} \text{ si su } \textit{laplaciano } \nabla^2 f \doteq \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) \text{ es nulo en todo punto.} \end{cases}$

Nota: sea $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$, $f \equiv a$ (constante) indica que $f(X) = a\ \forall X \in D$.

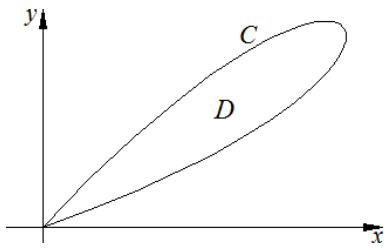
01) Sea $\bar{f} \in C^1 / \bar{f}(x,y) = (P(x,y)\ ,\ Q(x,y))$ con $Q'_x - P'_y \equiv k \neq 0$ (k constante). Aplicando el teorema de Green demuestre que $\text{Área}(D) = \frac{1}{k}\oint_{\partial D^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ con ∂D frontera de $D \subset \Re^2$.

Proponga alguna fórmula para el cálculo del área de regiones planas mediante integrales de línea y aplíquela para calcular el área de las regiones definidas por:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\ \ a,b \in \Re^+$. b) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. c) $x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 2x,\ x \geq 0$.

02) Calcule el área de la región plana D de la figura, sabiendo que su curva frontera C admite la ecuación vectorial:

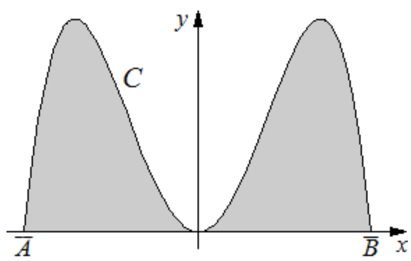
$$\bar{X} = (u - u^2, u - u^4) \text{ con } 0 \leq u \leq 1$$



03) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y) = (x^2 + y^2, 3xy + \ln(y^2 + 1))$ a lo largo de la frontera de la región definida por $4x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ recorrida en sentido positivo.

04) Verifique el teorema de Green con $\bar{f}(x,y) = (x^2\, y\ ,\ y^2)$, en la región plana $D = D_1 - D_2$ donde $D_1 = [-2,2] \times [-2,2]$ y $D_2 = [-1,1] \times [-1,1]$.

05) La región plana D sombreada en la figura tiene como frontera el segmento $\overline{AB}$ y el arco de curva C de ecuación $y = x^2 - x^4$. Dado $\bar{f} = (P,Q) \in C^1$ con matriz jacobiana $D\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P'_x(x,y) & 3x-1 \\ 3x+2 & Q'_y(x,y) \end{pmatrix}$, calcule la circulación de $\bar{f}$ desde $\bar{A}$ hasta $\bar{B}$ a lo largo de C sabiendo que a lo largo del segmento resulta $\int_{\overline{AB}} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 17$.



06) Calcule la circulación en sentido positivo de $\bar{f} \in C^1$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x + y \le 2$, $2x + y \ge 2$, 1° cuadrante, siendo:

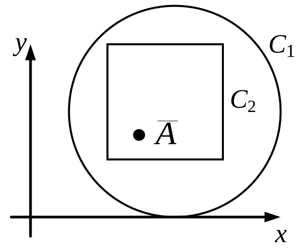
a) $\bar{f}(x,y) = (2y - g(x)\,,\, 5x - h(y))$. b) $\bar{f}(x,y) = (2y + g(x-y)\,,\, 2x - g(x-y))$.

07) Calcule $\oint_{\partial D^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$, con: $D = [-2,2] \times [-3,3]$, $\bar{f}(x,y) = (1-y, h(x))$, h par, h' continua.

08) Sea $\bar{f} = (P,Q) \in C^1$ en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$ tal que $Q'_x - P'_y \equiv 5$, dadas las curvas C_1: $x^2 + 9y^2 = 36$ y C_2: $x^2 + y^2 = 4$, calcule $\oint_{C_2^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $\oint_{C_1^+} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 7\pi$.

09) Dado $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{A}\} \to \Re^2 \,/\, \bar{f} = (P,Q)$; suponga matriz jacobiana continua con $Q'_x - P'_y \equiv 6$.

Calcule $\oint_{C_1^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $\oint_{C_2^+} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 12$, C_1 es una circunferencia de radio 8, C_2 es un cuadrado de lado 5.



10) Sea $\bar{f} : \Re^2 \to \Re^2$ con matriz jacobiana continua y simétrica, demuestre que para toda C en $\Re^2$ resulta $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0$; indique hipótesis para C.

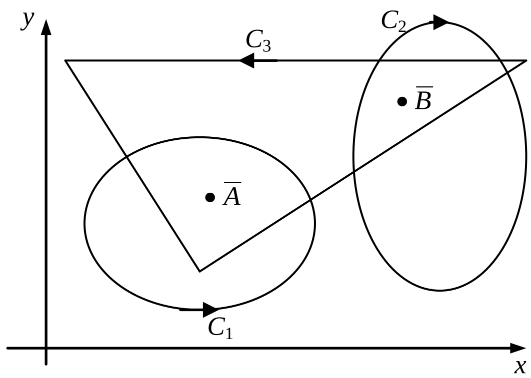
11) Dado $\bar{f}(x,y) = (9x^2 + 2y + y^2, 2x + 2xy)$, demuestre que $\bar{f}$ admite función potencial ϕ en $\Re^2$. Suponiendo $\phi(0,0) = 2$, analice la existencia de extremos locales de $\phi(x,y)$ clasificándolos y calculándolos.

12) Sea $\bar{f}$ con $D\bar{f}$ continua y simétrica en todo el plano salvo en los puntos $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

Calcule $\oint_{C_3} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que

$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 12\pi$ y $\oint_{C_2} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 16\pi$.

Se entiende que cada circulación se realiza con la orientación indicada en la figura, C_3 es la frontera del triángulo.



13) Sea $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{A}\} \to \Re^2$ con $D\bar{f}$ continua y simétrica en D. Demuestre que $\bar{f}$ es campo de gradientes en D si, y sólo si, $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0$ con C cualquier curva simple y suave a trozos que rodea al punto $\bar{A}$.

14) Analice si $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{0}\} \to \Re^2 \,/\, \bar{f}(x,y) = (x,y) + (y,-x)/(4x^2 + y^2)$ admite función potencial en su dominio.

15) Sea $\bar{f} : \Re^3 - \{\bar{A}\} \to \Re^3$ con $D\bar{f}$ continua y rotor nulo en su dominio, aplique el teorema del rotor para demostrar que $\bar{f}$ admite función potencial en dicha región del espacio.(&)

(&) Observe que $\Re^3 - \{\bar{A}\}$ es un conjunto simplemente conexo de $\Re^3$, pero $\Re^2 - \{\bar{A}\}$ no lo es en $\Re^2$.

16) Demuestre que $\bar{E}(\bar{r}) = kq\,\bar{r}/r^3$ con $\bar{r} = (x,y)$, $r = \|\bar{r}\|$, k,q constantes(*) admite función potencial en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$. Halle $U(x,y)$ tal que $\bar{E} = -\nabla U$ con $U(\infty,\infty) = 0$.

<u>Nota</u>: Se utiliza $U(\infty,\infty)$ para simbolizar el $\underset{(x,y)\to(\infty,\infty)}{lím} U(x,y)$.

Esta es una nomenclatura que suele figurar en algunos libros de física y de electromagnetismo. Es más, es común hablar del "potencial en el infinito" sin dejar de entender que se trata de un límite.

17) Resuelva el ítem anterior en $\Re^3 - \{\bar{0}\}$: dado $\bar{E}(\bar{r}) = kq\,\bar{r}/r^3$ con $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\bar{r}\|$ analice la existencia de función potencial; halle $U(x,y,z)$ tal que $\bar{E} = -\nabla U$ con $U(\infty,\infty,\infty) = 0$.

18) Analice si $\bar{f}$ admite función potencial en su dominio natural; en "c" y "d" suponga $\varphi \in C^1$:

a) $\bar{f}(x,y) = (\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2})$ c) $\bar{f}(x,y,z) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, \varphi(z))$

b) $\bar{f}(x,y) = (\frac{-6y}{4x^2+9y^2}, \frac{6x}{4x^2+9y^2})$ d) $\bar{f}(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \varphi(z))$

19) En $\Re^3$, demuestre que:

a) $rot(\bar{f}) \equiv \bar{0} \Leftrightarrow D(\bar{f})$ simétrica.

b) $\bar{f} \in C^2 \Rightarrow div(rot(\bar{f})) \equiv 0$.

c) $\bar{f} = \nabla\phi \in C^1 \Rightarrow rot(\bar{f}) \equiv \bar{0}$.

d) Con a,b constantes: $div(a\bar{f} + b\bar{g}) = a\,div(\bar{f}) + b\,div(\bar{g})$,

$rot(a\,\bar{f} + b\,\bar{g}) = a\,rot(\bar{f}) + b\,rot(\bar{g})$.

e) Con f escalar: $div(f\,\bar{g}) = f\,div(\bar{g}) + \nabla f \cdot \bar{g}$, $rot(f\bar{g}) = f\,rot(\bar{g}) + \nabla f \wedge \bar{g}$.

f) $div(\bar{f} \wedge \bar{g}) = rot(\bar{f}) \cdot \bar{g} - \bar{f} \cdot rot(\bar{g})$.

20) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x-y\,,\,x+y\,,\,z-x-y)$ a lo largo de la curva intersección del plano $x+2y+3z = 6$ con los planos coordenados aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

21) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (xy\,,\,y-x\,,\,yz^2)$ a lo largo de la curva intersección de $x^2+y^2+z^2 = 8$ con $x = \sqrt{y^2+z^2}$ aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

22) Siendo $\bar{f} \in C^1$, $\text{rot}(\bar{f}(x,y,z)) = (3,1,2y)$, calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo del arco de curva de ecuación $\bar{X} = (0\,,2\cos(u),2\,\text{sen}(u))$ con $u \in [0,\pi]$, sabiendo que la circulación de $\bar{f}$ por el segmento desde $(0,-2,0)$ hasta $(0,2,0)$ es igual a 16/3.

23) Verifique el teorema de la divergencia con el campo $\bar{f}(x,y,z) = (xy\,,\,yz\,,\,xz)$ y la superficie frontera del paralepípedo $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$.

(*) Distribución plana de campo electrostático creado por una carga eléctrica q puntual ubicada en (0,0).

24) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x-y-z\ ,\ y-x-z,\ g(x,y))$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $2x+3y+4z \le 12$ en el 1° octante. Indique la orientación del versor normal que considera y las hipótesis que supone para el campo escalar *g*.

25) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x^2z^2, 1+xyz^2, 1-xz^3)$ a través del trozo *S* de paraboloide de ecuación $y = x^2 + z^2$ con $y < 4$ aplicando convenientemente el teorema de la divergencia. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a *S*.

26) Suponga $\varphi : \Re \to \Re$, $\varphi \in C^1$, $\bar{f}(x,y,z) = (x\,\varphi(xz)\,,\, y^2 + x\,\varphi(xz)\,,\, y - z\,\varphi(xz))$; **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de una superficie esférica *S* de radio *R* con centro en el origen aplicando el teorema de la divergencia, indique gráficamente la orientación del versor normal a *S*.

27) Calcule el flujo de $\bar{f} \in C^1$ a través de la superficie de ecuación $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sabiendo que $\bar{f}(x,y,0) = (x\ ,\ y\ ,\ x^2)$, siendo $\operatorname{div}(\bar{f}(x,y,z)) = 2\,(1+z)$.

28) Sea $\bar{f} : \Re^3 - \{\bar{A}\} \to \Re^3$ con derivadas continuas y divergencia nula en su dominio. Aplique el teorema de la divergencia para demostrar que el flujo de $\bar{f}$ a través de una superficie *S* cerrada sólo depende de si S encierra o no al punto $\bar{A}$. Se supone $\bar{A} \notin S$, $\breve{n}$ saliente.

29) Sea $\bar{E}(x,y,z) = kq\,\bar{r}/r^3$ con $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\,\bar{r}\,\|$. Calcule el flujo de $\bar{E}$ a través de una superficie esférica de radio *R* con centro en el origen. Aplique lo indicado en el ítem 28 y concluya sobre el valor de dicho flujo a través de otras superficies que encierren al origen.

30) Si $\bar{f} = \operatorname{rot}(\bar{g})$, se dice que $\bar{g}$ es el ***potencial vectorial*** de $\bar{f}$. Demuestre que es nulo el flujo a través de cualquier superficie cerrada S de todo campo C^1 que admita potencial vectorial (se supone *S* suave a trozos).

31) Sean $\varphi \in C^2$ armónico, ∂H suave a trozos la superficie frontera del cuerpo *H* y el campo vectorial $\bar{f} = \varphi\nabla\varphi$. Demuestre que $\oiint_{\partial H} \bar{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma \ge 0$, siendo $\breve{n}$ saliente de *H*.

32) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (g(y,z),\ h(x,z),\ 3x^2)$ a través de la superficie Σ abierta de ecuación $z = 5 - x^2 - y^2$ con $z \ge 1$; suponga $\bar{f} \in C^1$, indique la orientación que eligió para el $\breve{n}$ de Σ.

33) Sea $\bar{f}(x,y,z) = (x + g(x,y),\ y + g(x,y),\ g(x,y) - 2z)$ calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 \le 4$ con $-1 \le z \le 1$, si $\nabla g(x,y) = (x+y\,,\, x-y)$.

34) Sea $\bar{f} \in C^1 \,/\, \bar{f}(x,y,z) = (z + x\,g(2xy)\ ,\ y\,g(2xy)\ ,\ zxy - 2z\,g(2xy))$, halle la expresión de $\bar{f}$ sabiendo que el campo es solenoidal y que $\bar{f}(1,1,1) = (3, 2, -3)$.

35) Calcule el flujo de $\bar{f} = \nabla(g+h)$ a través de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, siendo *g* armónico y *h* una solución de la ecuación diferencial $\nabla^2 h = x^2 + y - z$. Suponga $\bar{f} \in C^1$.

36) Dados $\bar{f}(x,y,z) = (6a^3x,\ 6aby, b^2z)$ con *a*, *b* constantes y la superficie Σ frontera del cuerpo D definido por $x^2 + y^2 \le 4$ con $1 \le z \le 4$. Halle a y b tales que el flujo de $\bar{f}$ a través de Σ sea un extremo local; clasifique dicho extremo suponiendo Σ orientada hacia el exterior de D .