ANALISIS MATEMATICO II

ALUMNO: Juan Vannelli

FECHA: 10/03

CURSO: Z 2007

8 (ocho)

B T1) a) Defina derivada direccional .

Siendo $f(x,y) = \frac{x^2y+y^2sen(x)}{x^2+y^2}$ $si\ (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = 0\ si\ (x,y) = (0,0)$, analice si existe $f´((0,0),\check{r})$ para distintos $\check{r} \in R^2$

R b) Siendo $x - y + z = 4$ la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $(2,1,z_0)$, halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de $f$ en $(2,1)$ indicando para cada caso, cual es el correspondiente valor de la derivada.

T2) a) B Sea el campo $f$ diferenciable en el punto $\bar{A} \in R^2$, demuestre que existe $f´(\bar{A},\check{r})$ para todo $\check{r} \in R^2$

$\phi$ b) La superficie $\Sigma$ tiene ecuación $z = h(x,y)$ donde $h(x,y) = f(xy, 2x^2)$ con $f \in C^1$, halle la ecuación del plano tangente a $\Sigma$ en $(1,1,z_0)$ sabiendo que $\nabla f(1,2) = (2,3)$ y que $f(1,2) = 4$

B P1) Dada $f(x,y)$ definida implícitamente por $x + zln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1 = 0$, calcule aproximadamente $f(0.3,1,9)$

B= P2) Dado $f(x,y) = a^2xy^2 - x^2y - 3ay$, halle $a$ para que $f´((1,1),\check{r})$ sea máxima si $\check{r} = \frac{\bar{r}}{\|r\|}$ con $\bar{r} = (2,1)$

B P3) Dada la superficie $\Sigma$ parametrizada por $\emptyset(\rho,\theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, \rho^2)$, verifique que $(\sqrt[2]{2}/_2, \sqrt[2]{2}/_2, 1)$ es punto regular de $\Sigma$ y si lo es halle la ecuación del plano tangente a $\Sigma$ en dicho punto y expréselo en forma cartesiana y paramétrica

B P4) Dada $z = x^2/y$ $si\ (x,y) \neq (x,0)$ y 0 en cualquier otro caso , analice continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad en el origen.

T1

(1)

a)

T1) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define derivada direccional de $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ en la dirección $\vec{v}$ al límite si existe y es finito:

$$f'(\bar{x_0}; \vec{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x_0} + h\vec{v}) - f(0,0)}{h}$$

Con $\vec{v} = (v_1, v_2) \wedge v_1^2 + v_2^2 = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y + \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\vec{n} = (n_1, n_2)$

$\cdot\, f'((0,0); \vec{n}) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(n_1; n_2)) - f(0,0)}{h}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h \cdot n_1 ; h \cdot n_2)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 n_1^2 h n_2 + \operatorname{sen}(h \cdot n_1)}{h \cdot (h^2 n_1^2 + h^2 n_2^2)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h^3} n_1^2 n_2 + \overbrace{\operatorname{sen}(h n_1)}^{\to 0}}{\cancel{h^3} \underbrace{(n_1^2 + n_2^2)}_{=1}} = n_1^2 n_2$$

Existen las derivadas direccionales de $f$ en $(0,0)$ y valen $n_1^2 n_2$ siendo $\vec{n} = (n_1; n_2)$

b) tg: $x - y + z = 4$ , $\bar{A} = (2,1)$

tg: $-x + y - z = -4$

$\bar{N} = (-1 ; 1 ; -1)$

$f'_x(2,1)$ $f'_y(2,1)$ $-1$ ✓ ✓

Luego

$\bar{\nabla} f(2,1) = (-1 ; 1)$ ✓

Derivada máxima

✓

$\|\bar{\nabla} f(2,1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ → Valor de D. máxima

$\check{v}_{max} = \dfrac{\bar{\nabla} f(2,1)}{\|\bar{\nabla} f(2,1)\|} = \dfrac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ✓

Derivada mínima

- Valor: $-\sqrt{2}$
- Dirección → $-\dfrac{\bar{\nabla} f(2,1)}{\|\bar{\nabla} f(2,1)\|} = -\dfrac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ✓

Derivada Nula

$\bar{\nabla} f(2,1) \cdot \check{v}_n = 0$

$(-1, 1) \cdot \check{v}_n = 0$

$\check{v}_n = (1,1)$ → Por artilugio de cambio de componente y un signo

→ no lo define !!

T2)

(2)

T2) a) Si $f$ es diferenciable en el punto $\bar{A}$ entonces ...

$$f(\bar{A}+\bar{H}) = f(\bar{A}) + \vec{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \bar{H} + \varphi(\bar{H}) \cdot \|\bar{H}\| \quad (1)$$

Definición de $f'(\bar{A}; \breve{r})$

$$f'(\bar{A}; \breve{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A} + h \cdot \breve{r}) - f(\bar{A})}{h} \quad (2)$$

$$* \; f(\bar{A} + \bar{H}) = f(\bar{A} + h \cdot \breve{r}) \quad , \quad \bar{H} = h \cdot \breve{a}$$

→ reemplazo (1) en (2)

$$f'(\bar{A}; \breve{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(\bar{A})} + \vec{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \bar{H} + \varphi(\bar{H}) \cdot \|\bar{H}\| - \cancel{f(\bar{A})}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\vec{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \cancel{h} \cdot \breve{r}}{\cancel{h}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\varphi(\bar{H}) \cdot \|\bar{H}\|}{h}}_{(2)}$$

(1) $\lim_{h \to 0} \vec{\nabla} f(\bar{A}) \breve{r} = \vec{\nabla} f(\bar{A}) \breve{r}$ ✓

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h \cdot \breve{v}) \, \|h \cdot \breve{v}\|}{h} \overset{*}{=} \lim_{h \to 0} \overbrace{\varphi(h \cdot \breve{v})}^{0} \cdot \overbrace{\frac{|h|}{h}}^{F.A} = 0$

(*) si $h \to 0 \Rightarrow h \cdot \breve{v} \to 0 \Rightarrow \varphi(h \cdot \breve{v}) \to 0$ por ser infinitésimo

(*) $\|h \cdot \breve{v}\| = \|(hv_1; hv_2)\| = \sqrt{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \sqrt{h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2}$

$= \sqrt{h^2 \underbrace{(v_1^2 + v_2^2)}_{=1}} = |h|$ luego $-1 \leq \frac{|h|}{h} \leq 1$ } Acotada

función SIGNO

→

Luego

$$f'(\bar{A};\breve{r}) = \lim_{h \to 0} \bar{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \breve{r} + \frac{\varphi(h \cdot \breve{r}) \cdot \|h \cdot \breve{r}\|}{h} = \bar{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \breve{r}$$

Si $f$ es diferenciable en $\bar{A}$ existen todas las derivadas direccionales y se calculan $\bar{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \breve{r}$ siendo $\breve{r}$ el versor de la dirección.

Éxito

P1) y

P2)

(3)

P1) $f(x,y)=z$ definida implícitamente por

$$x + z\ln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1 = 0$$

$$F(x,y,z) = x + z\ln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1$$

Calcular aproximadamente → $f(0.3;\ 1.9)$

$$\nabla f(0,2) = ¿? = (f'_x(0,2);\ f'_y(0,2))$$

$$= \left(-\frac{F'_x(0,2,z_0)}{F'_z(0,2,z_0)};\ -\frac{F'_y(0,2,z_0)}{F'_z(0,2,z_0)}\right)$$

$$z_0 \Rightarrow 0 + z_0\ln(2z_0-5) + e^0 + 0 - 1 = 0$$

$$\underline{z_0 = 3}$$

- $F'_x = 1 + e^{xz}\cdot z + y \to F'_x(0,2,3) = 6$
- $F'_y = z\cdot\frac{1}{yz-5}\cdot z + x \to F'_y(0,2,3) = 9$
- $F'_z = \ln(yz-5) + z\cdot\frac{1}{yz-5}\cdot y + e^{xz}\cdot x \to F'_z(0,2,3) = 6$

<u>Luego</u>

$$\nabla f(0,2) = \left(-\frac{6}{6};\ -\frac{9}{6}\right) = \left(-1;\ -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \bar{N}(0,2) = \left(-1;\ -\frac{3}{2};\ -1\right)$$

tg: $((x,y,z)-(0,2,3))\cdot\left(-1;\ -\frac{3}{2};\ -1\right) = 0$

$$-(x-0) - \frac{3}{2}(y-2) - (z-3) = 0$$

$$-x - \frac{3}{2}y + 3 - z + 3 = 0$$

$$-x - \frac{3}{2}y + 6 = z$$

$\to f(0.3,\ 1.9) = -0.3 - \frac{3}{2}\,1.9 + 6 = \underline{2.85}$ → Rta

P2) $f(x,y) = a^2 xy^2 - x^2 y - 3ay$

hallar "a" para que $f'((1,1); \check{r})$ sea máxima

si $\check{r} = \frac{\bar{r}}{||\bar{r}||}$ , $\bar{r} = (2,1)$

· Para que $\check{r}$ sea máxima se debe cumplir que

$\check{r} = \frac{\bar{\nabla} f(1,1)}{||\bar{\nabla} f(1,1)||}$ , pero por enunciado $\rightarrow \bar{\nabla} f(1,1) \cancel{=} (2,1)$ es paralelo no igual

$\rightarrow ||\bar{\nabla} f(1,1)|| = \sqrt{5}$

$\rightarrow \bar{\nabla} f(1,1) = (2,1) = (f'_x(1,1) ; f'_y(1,1))$

· $f'_x = a^2 y^2 - 2xy \rightarrow f'_x(1,1) = a^2 - 2 = 2$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{4}$

$|a| = 2$

$a = 2$ $\quad$ $a = -2$

· $f'_y = 2a^2 xy - x^2 - 3a \Rightarrow f'_y(1,1) = 2a^2 - 1 - 3a = 1$

$2a^2 - 3a - 2 = 0$

$a = 2$ , $a = -\frac{1}{2}$

$\boxed{a = 2}$ → Satisface ambas ecuaciones

P3)

(4)

P3) $\Phi(\rho;\theta) = (\rho\cos(\theta);\ \rho\,\text{sen}(\theta),\ \rho^2)$, $\bar{A} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$

→ Ver si $\bar{A}$ es punto regular de la sup, hallar el plano tg y expresarlo en forma cartesiana y paramétrica

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho\cos(\theta) & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho\,\text{sen}(\theta) & (2) \\ 1 = \rho^2 & (3) \end{cases}$$

(3) $\sqrt{\rho^2} = \sqrt{1}$

$|\rho| = 1$

$\rho = 1 \quad \rho = -1$

$\rho = 1 \rightarrow (2)\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}(\theta)$

$\theta = 45°$

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45°)$ ✓

$\rho = -1 \rightarrow (2)\ \frac{\sqrt{2}}{2} = -\text{sen}(\theta)$

$\theta = -45°$

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos(-45)$

↳ FALSO

Luego

$(\rho_0, \theta_0) = (1;\ 45°)$

• $\Phi'_\rho = (\cos(\theta);\ \text{sen}(\theta);\ 2\rho) \rightarrow \Phi'_\rho(1;45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right) = \bar{T_1}$

• $\Phi'_\theta = (\rho(-\text{sen}(\theta)),\ \rho\cos(\theta),\ 0) \rightarrow \Phi'_\theta(1;45°) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right) = \bar{T_2}$

$$\bar{N} = \bar{T_1} \times T_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 1)$$

## Plano tg en forma cartesiana

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \vec{N} = 0$$

$$\left((x, y, z) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)\right) \cdot \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; -1\right) = 0$$

$$\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (z - 1) = 0$$

$$\sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}y - \cancel{1} - z + \cancel{1} = 0$$

$$\underline{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1 = z}$$

## Plano tg en forma paramétrica

$$\pi: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(\vec{T_1}) + \beta(\vec{T_2})$$

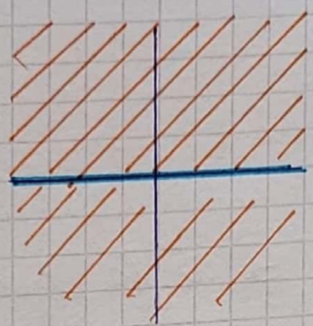
$$\boxed{\pi: (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right) + \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) + \beta\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} - \beta\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases}$$

P4)

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Continuidad</u> en (0,0)



- $0 = f(x,y)$
- $\frac{x^2}{y} = f(x,y)$

- $f(0,0) = 0$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$

<u>Camino $y = mx$</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{m\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{m} = 0$$

<u>Camino $y = x^2$</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$\nexists \lim_{(x,y)} \Rightarrow f$ no es Continua en el (0,0)

* como $f$ no es continua en (0,0) entonces no es diferenciable en (0,0)

## Derivabilidad

$$f'((0,0),\vec{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(v_1,v_2)) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1 ; hv_2)}{h}$$

si $v_2 = 0 \Rightarrow h\cdot v_2 = 0 \to$ rama abajo

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1 ; 0)}{h}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow$ si la segunda componente del vector de la dirección es 0 $\Rightarrow$ las derivadas direccionales de $f$ en $(0,0)$ valen 0

$v_2 = 0 \to (1,0)$, $\to (-1,0)$ } direcciones

si $v_2 \neq 0 \Rightarrow h\cdot v_2 \neq$ , $(h\neq 0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 v_1^2}{h\cdot h v_2}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2} v_1^2}{\cancel{h^2} v_2} = \frac{v_1^2}{v_2} \to$ expresión definida por $v_2 \neq 0$

$\to$ si $v_2 \neq 0 \to$ las derivadas direccionales de $f$ en $(0,0)$ tienen el valor de $\frac{v_1^2}{v_2}$ siendo $\vec{v} = (v_1 ; v_2) \wedge v_1^2 + v_2^2 = 1$