Primer Parcial
de Análisis Matemático II

Tema 1

11 de Mayo de 2018

E1)

Considere el campo escalar $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$

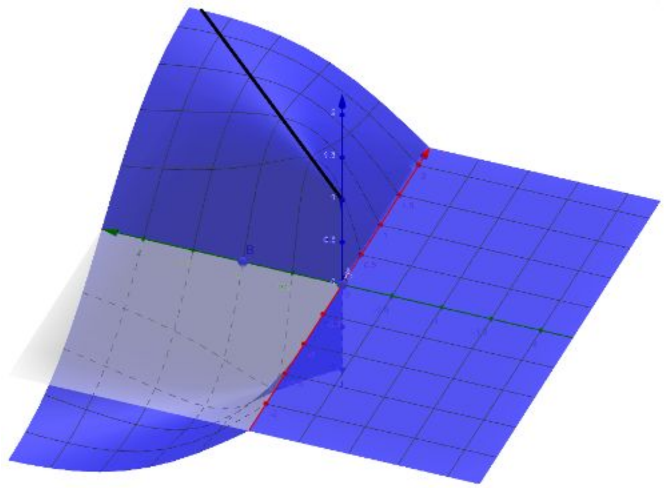
¿Se puede trazar un plano tangente a la gráfica de f en $(0,0,0)$? ¿Y en $(0,1,0)$? Justifique sus respuestas.

Solución

La pregunta equivale a ver si f es diferenciable en dichos puntos.

En el origen no, porque no es ni siquiera continua, porque el límite por la región $y \leq 0$ da cero, pero el límite por la recta $y = x$ con $y > 0$ da 1.

En $(0,1,0)$ **sí**, porque en un entorno de dicho punto la función equivale a un cociente de polinomios tal que no se anula el denominador.



E2)

Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en $(1,-1)$ de cierto campo escalar $f(u,v)$ es $p_2(u,v) = 3 - u + v + u^2 - 2uv$. Si $\vec{h}(x,y) = (x + y, -e^{xy})$, halle la dirección de máxima derivada direccional de $g(x,y) = (f \circ \vec{h})(x,y)$ en $(0,1)$. Justifique todos sus cálculos.

Solución

Veamos primero si puedo aplicar la regla de la cadena. ¿$\vec{h}$ es diferenciable en $(0,1)$? Si, porque sus coordenadas son polinomios, o exponenciales, o alguna composición de esas cosas. ¿f es diferenciable en $\vec{h}(0,1) = (1,-1)$? Sí, porque ahí admite Taylor de orden dos (alcanzaba con orden uno).

Entonces podemos usar la regla de la cadena, así que g es diferenciable en $(0,1)$ y además

$\nabla g(0,1) = \nabla f(1,-1) \cdot D\vec{h}(0,1)$

Las derivadas parciales de f y de p en $(1,-1)$ coinciden, así que las calculamos

$p'_u = -1 + 2u - 2v$

$p'_v = 1 - 2u$

$p'_u(1,-1) = 3$

$p'_v(1,-1) = -1$

Luego $\nabla f(1,-1) = (3,-1)$

Ahora calculamos la jacobiana de $\vec{h}$

$D\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -ye^{xy} & -xe^{xy} \end{pmatrix}$

Nos queda que

$\nabla g(0,1) = (3,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (4,3)$

Por último, como g es diferenciable en $(0,1)$, la dirección de máxima derivada direccional ahí es

$\boxed{v_{max} = \frac{\nabla g(0,1)}{||\nabla g(0,1)||} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}$

E3)

Dada la curva C, definida por la intersección de las superficies $S_1 : z = x^2 + y$ y $S_2 : y = 2x^2 + 1$, halle el punto de intersección entre su recta tangente en $(1,3,4)$ y el plano tangente en $(1,1,1)$ a la superficie imagen $\vec{\Gamma}(u,v) = (u+v^2, u^2, u-v)$, con $(u,v) \in [0,2] \times [-1,1]$.

Solución

Parametrizamos C con $g(t) = (t, 2t^2+1, 3t^2+1)$. Busco el t_0 tal que $g(t_0) = A = (1,3,4)$. Fácil, $t_0 = 1$. Ahora hacemos $g'(t) = (1, 4t, 6t)$, $g'(1) = (1,4,6)$. Así que la recta tangente es

$\boxed{(x,y,z) = (1,3,4) + \lambda(1,4,6)}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ahora buscamos el plano tangente a la superficie.

$\vec{\Gamma}'_u = (1, 2u, 1)$

$\vec{\Gamma}'_v = (2v, 0, -1)$

Buscamos el (u,v) tal que $\vec{\Gamma}(u,v) = B = (1,1,1)$.

$$\begin{array}{ll} u + v^2 = 1 & (1) \\ u^2 = 1 & (2) \\ u - v = 1 & (3) \end{array}$$

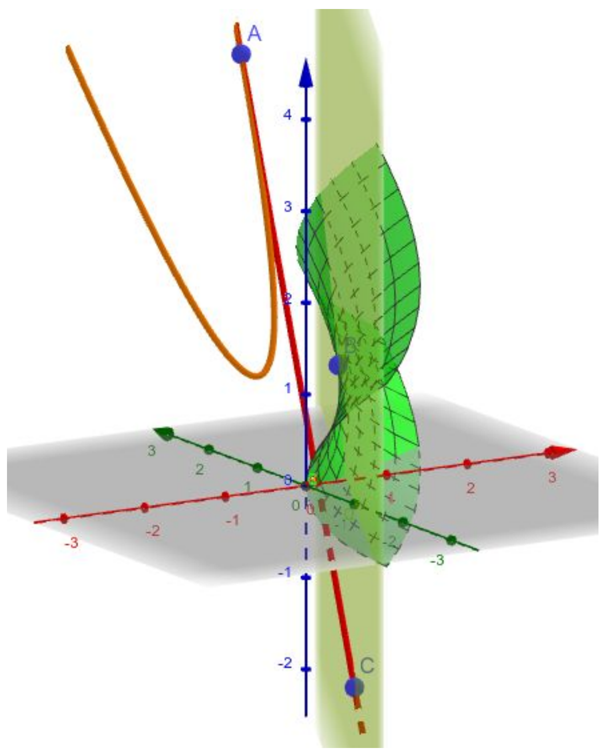
De (2) si $u = 1$ en (1) $v = 0$ y verifica (3), así que $(u,v) = (1,0)$ cumple todo.

De (2) si $u = -1$ en (3) $v = -2$, pero en (1) queda absurdo así que ese no va. Además, por el dominio de $\vec{\Gamma}$, debe cumplir $u \in [0,2]$.

$\vec{\Gamma}'_u(1,0) = (1,2,1)$

$\vec{\Gamma}'_v(1,0) = (0,0,-1)$

$(\vec{\Gamma}'_u \times \vec{\Gamma}'_v)(1,0) = (-2,1,0)$
Luego el plano tangente es
$(x-1, y-1, z-1) \cdot (-2,1,0) = 0$
$-2x + 2 + y - 1 = 0$
$\boxed{2x - y = 1}$
Buscamos λ para ver si hay intersección
$2(1+\lambda) - (3+4\lambda) = 1$
$2 + 2\lambda - 3 - 4\lambda = 1$
$-2\lambda = 2$
$\lambda = -1$
Luego se intersectan en $(1-1, 3-4, 4-6) = \boxed{(0,-1,-2)}$
En teoría acá se ve todo claro

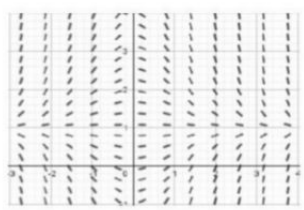


E4)

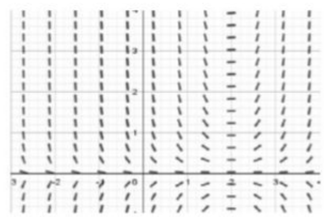
Considere la ecuación diferencial $y' = 2(x-2)y$.

a) ¿Cuál de los siguientes campos de direcciones le corresponde? Justifique su respuesta.

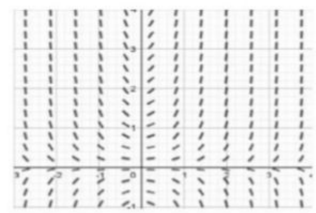
i)



ii)



iii)



b) Halle la solución que pasa por $(1,1)$ y grafíquela en el campo de direcciones elegido.

Solución

a) Como $y' = 2(x-2)y$, se anula cuando $x = 2$ o $y = 0$. Por lo tanto parece ser el dibujito ii) porque en los otros no parece que sobre la recta $x = 2$ la pendiente sea horizontal.

b) $y' = (2x-4)y$

Separando variables

$\int \frac{dy}{y} = \int 2x - 4dx$

$\ln|y| = x^2 - 4x + C$

$|y| = e^{x^2-4x+C}$

$y = Ke^{x^2-4x}$

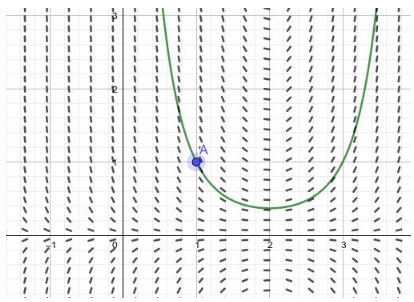
Para que pase por $(1,1)$

$1 = Ke^{-3}$

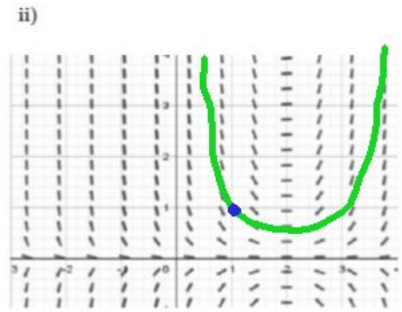
$K = e^3$

Luego la SP buscada es

$\boxed{y = e^{x^2-4x+3}}$



Con geogebra



A pulso con el mouse

T1)

a) Indique condiciones suficientes para que una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ defina implícitamente alguna de las variables (x, y ó z) en función de las otras dos, en un entorno de cierto punto (x_0, y_0, z_0) del dominio de F.

b) Analice si la ecuación $z^3 y \cos(x - y) = 0$ define $y = g(x, z)$ en un entorno de $(1, 1, 0)$.

Solución

a) Es suficiente con que se cumplan las hipótesis del Teorema de la Función Implícita.

b) Sea $G(x, y, z) = z^3 y \cos(x - y)$. Entonces $G(1, 1, 0) = 0$.

$G'_x = -z^3 y \sin(x - y)$

$G'_y = z^3 \cos(x - y) + z^3 y \sin(x - y)$

$G'_z = 3z^2 y \cos(x - y)$

Son continuas por lo que $G \in C^1$.

$G'_y(1, 1, 0) = 0$. Que macana, no puedo usar el Teorema de la Función Implícita. Y despejar la y analíticamente tampoco me sale.

Ahora que lo pienso, si $z = 0$ entonces x e y pueden valer cualquier cosa y la ecuación se cumple, así que no puede definir a $y = g(x, z)$ porque ¿cual sería el valor de $g(1, 0)$? Por mas que nos restringamos a un entorno del $(1,1,0)$ no define una función porque puedo tomar cualquier valor para y.

T2)

a) ¿Qué significa, geométrica y analíticamente, que un campo $f(x,y)$ sea derivable en un punto (a,b) en cierta dirección $v=(v_1,v_2)$?

b) ¿V o F? Justifique. *El campo escalar* $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$ *sólo es derivable, en* $(0,0)$*, en las direcciones de los versores* $(1,0)$*,* $(-1,0)$*,* $(0,1)$ *y* $(0,-1)$.

Solución

a) Geométricamente significa que si la gráfica de f fuera una montaña, y que si yo fuera una hormiga infinitesimal parada en las coordenadas (a,b) del mapa topográfico visto desde arriba, entonces si diese un paso en la dirección de (v_1,v_2), la derivada sería la pendiente que voy a tener en ese momento.

Analíticamente significa que existe $f'((a,b),(v_1,v_2))=\lim_{h\to 0}\frac{f((a,b)+h(v_1,v_2))-f(a,b)}{h}$

b) $f'((0,0),(a,b))=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hahb}{h^2a^2+h^4b^4}\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ab}{a^2+h^2b^4}\frac{1}{h}$

Ese límite se va a ∞ salvo que $ab=0$. Por lo tanto es **verdadero**, sólo es derivable en las direcciones $(\pm1,0)$ y $(0,\pm1)$.

Se que los puntos teoricos están un poco flojos, así que los compenso con este simpático dibujo de Pikachu: