01) Exprese $Df(X)$ y halle el conjunto W tal que Df sea continua en W.

~~a) $\bar{f}(t)=(t^2-2,\frac{t^2-1}{t+1},\frac{\cos(t)}{2t-\pi})$~~ ~~d) $\bar{f}(\bar{X})=\frac{k\bar{r}}{r^2}$ con $\begin{cases}\bar{r}=\bar{X}=(x,y,z)\\ r=\|\bar{r}\|\end{cases}$~~, $k=$ cte.

b) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ~~e) $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.~~

~~c) $\bar{f}(x,y,z)=(x^2+y,z\ln(x^2+z^2))$~~ ~~f) $f(x,y)=(x^2y^3,(y-x)^2)$~~

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

f es continua

$$Df = \bar{\nabla}f = (f'_x, f'_y) = \Bigg(\underbrace{\frac{y(x^2+y^2)-xy\,2x}{(x^2+y^2)^2}}_{f_1 \text{ continua}}, \underbrace{\frac{x(x^2+y^2)-xy\,2y}{(x^2+y^2)^2}}_{f_2 \text{ continua}}\Bigg) \Rightarrow f\in C^1$$

$$\text{Dom } \bar{\nabla}f = \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

$\bar{\nabla}f$ es continuo

$f\in C^1 \Rightarrow f$ es diferenciable

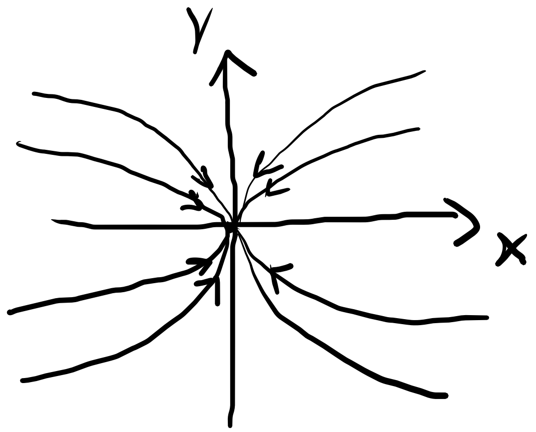
$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

05) Analice si la gráfica de f del ítem "01e" admite plano tangente en (0,0,0). $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en $(0,0)$

e) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

f diferenciable $\Rightarrow$ f continua $\equiv$ f no es continua $\Rightarrow$ f no es diferenciable

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$



$x = ay^2$

$y\to 0,\ x\to 0$

$$\lim_{y\to 0} f(ay^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{ay^2y^2}{a^2y^4+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{a\cancel{y^4}}{\cancel{y^4}(a^2+1)} =$$

$$= \frac{a}{a^2+1} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f no es continua en $(0,0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f no es diferenciable en $(0,0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ gráf de f no admite plano tang. en $(0,0,0)$

04) En los siguientes casos analice la derivabilidad en distintas direcciones y la diferenciabilidad de la función en el origen de coordenadas.

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Verifique que en (0,0) la función tiene dos direcciones de derivada direccional máxima y cuatro direcciones para las cuales la derivada resulta nula (cada dirección se especifica mediante el versor correspondiente).

$\check{r}=(r_x, r_y) \qquad r_x^2+r_y^2=1$

$$f'_{\check r}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\overbrace{(0,0)+t(r_x,r_y)}^{(tr_x,\,tr_y)})-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^2r_x^2\,tr_y}{t^2r_x^2+t^2r_y^2}-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^3}\,r_x^2\,r_y}{\cancel{t^3}\underbrace{(r_x^2+r_y^2)}_{=1}}=\boxed{r_x^2\,r_y}\Rightarrow f \text{ es derivable en toda dirección en } (0,0)$$

$\boxed{f \text{ diferenciable en } (0,0)} \Rightarrow f$ derivable en toda dirección en $(0,0)$ $\wedge$ $\boxed{f'_{\check r(0,0)}=\bar\nabla f_{(0,0)}\cdot\check r}$

$\bar\nabla f_{(0,0)}=(f'_x, f'_y)_{(0,0)}=(0,0) \to \bar\nabla f_{(0,0)}\cdot\check r=(0,0)\cdot(r_x,r_y)=0\neq r_x^2r_y \Rightarrow$

$f'_x=f'_{\check r}$ siendo $\check r=(1,0)$, $f'_y=f'_{\check r}$ siendo $\check r=(0,1)$ $\Big\}$ $\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$

f no es diferenciable $(0,0) \Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$

$$f'_{\check r(0,0)}=r_x^2r_y \xrightarrow[r_x=\pm\sqrt{1-r_y^2}]{r_x^2+r_y^2=1}(1-r_y^2)r_y=r_y-r_y^3=g(r_y)$$

$g'(r_y)=1-3r_y^2=0$

$r_y^2=\frac{1}{3}\to r_y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$g''(r_y)=-6r_y \to g''(\sqrt{\tfrac{1}{3}})=-\frac{6}{\sqrt3}<0 \Rightarrow g$ tiene máx local en $r_y=\sqrt{\frac13}\to r_x=\pm\sqrt{\frac23}$

$g''(-\sqrt{\tfrac13})=\frac{6}{\sqrt3}>0 \Rightarrow g$ tiene mín local en $r_y=-\sqrt{\frac13}\to r_x=\pm\sqrt{\frac23}$

$f'_{\check r(0,0)}$ toma valores máx en $\left(\sqrt{\frac23},\sqrt{\frac13}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac23},\sqrt{\frac13}\right)$

$f'_{\check r(0,0)}$ " " mín en $\left(\sqrt{\frac23},-\sqrt{\frac13}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac23},-\sqrt{\frac13}\right)$

$f'_{\check r(0,0)}=0$ si $\check r=\underset{\substack{\uparrow\\ f'_x}}{(1,0)}\vee(-1,0)\vee\underset{\substack{\uparrow\\ f'_y}}{(0,1)}\vee(0,-1)$

06) Dada la superficie de ecuación $z = e^{(x-1)^2+y^2}$, determine en qué puntos tiene plano tangente horizontal y obtenga la ecuación de esos planos.

$f(x,y) = e^{(x-1)^2+y^2}$ tal que gráf de f : $z = e^{(x-1)^2+y^2}$

f diferenciable

plano tang. a la gráf. de f en $(a,b,f(a,b))$: $z = f(a,b) + \underbrace{f'_{x(a,b)}(x-a) + f'_{y(a,b)}(y-b)}_{=0}$

plano horiz : $\boxed{z = k}$ $\rightarrow$ f'_x y $f'_y = 0$

$f'_x = e^{(x-1)^2+y^2} \cdot 2(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$

$f'_y = e^{(x-1)^2+y^2} \cdot 2y = 0 \rightarrow y = 0$

$\rightarrow z = f(1,0) = e^0 = 1 \rightarrow \boxed{z = 1}$

$\boxed{(1,0,1)}$

09) Demuestre que en un entorno del origen $\underbrace{e^{x/(y+1)} + \ln(y+1)}_{f(x,y)} \cong x + y + 1$.

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \cong f(a,b) + f'_x(a,b)\,\Delta x + f'_y(a,b)\,\Delta y + \cancel{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}$$

$(a,b) = (0,0)$ $\qquad (\Delta x, \Delta y) = (x,y)$

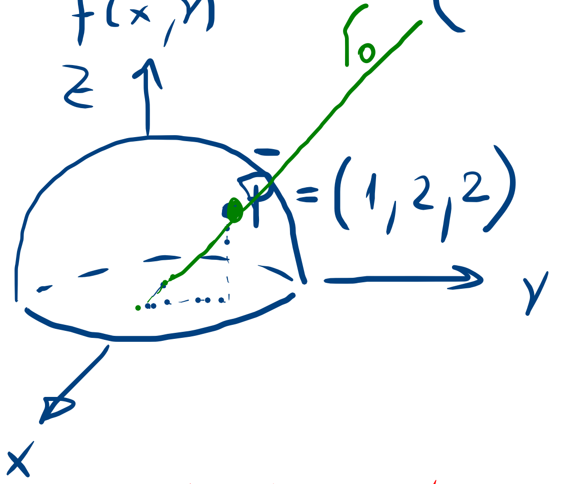
$$f(x,y) \cong f(0,0) + f'_x(0,0)\cdot x + f'_y(0,0)\cdot y$$

$$\boxed{f(x,y) \cong 1 + 1\cdot x + 1\cdot y}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y) = e^{\frac{x}{y+1}} + \ln(y+1) \\ f(0,0) = 1 + 0 = 1 \\ f'_x\big|_{(0,0)} = e^{\frac{x}{y+1}}\,\frac{1}{y+1}\Big|_{(0,0)} + 0 = 1 \\ f'_y\big|_{(0,0)} = e^{\frac{x}{y+1}}\cdot\left(-\frac{x}{(y+1)^2}\right) + \frac{1}{y+1}\Big|_{(0,0)} = 1 \end{array}\right.$$

12) Sea r_0 la recta normal a la superficie de ecuación $\boxed{z=\sqrt{9-x^2-y^2}}$ en $(1,2,z_0)$, analice si existe algún punto en el que r_0 interseca a la superficie cilíndrica de ecuación $z=x^2$.

$$z=\underbrace{\sqrt{9-x^2-y^2}}_{f(x,y)} \rightarrow \begin{cases} z^2 = 9-x^2-y^2 \\ z\geq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z\geq 0\end{cases}$$



$$r_0: \quad (x,y,z) = \underbrace{(a,b,f(a,b))}_{(1,2,2)} + t\,\overbrace{(-f'_x, -f'_y, 1)_{(a,b)}}^{\bar{n}=(\frac{1}{2},1,1)} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\bar{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)_{(1,2)} = \left(\cancel{-}\frac{\cancel{+2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2-y^2}}, \cancel{-}\frac{\cancel{+2}y}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right)_{(1,2)} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

$$r_0: \quad (x,y,z) = (1,2,2) + t\left(\frac{1}{2},1,1\right) \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 1+\frac{t}{2} \\ y = 2+t \\ z = 2+t \end{cases}$$

$$z = x^2$$

$$2+t = \left(1+\frac{t}{2}\right)^2 \rightarrow 2+\cancel{t} = 1+\cancel{t}+\frac{t^2}{4} \rightarrow \frac{t^2}{4} = 1 \rightarrow t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

si $t=2 \rightarrow$ $(2,4,4)$

si $t=-2 \rightarrow$ $(0,0,0)$

13) Halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de las siguientes funciones en el punto $\overline{A}$:

a) $f(x,y)=x^2-xy^2$, $\overline{A}=(1,3)$. ~~b) $f(x,y,z)=x^2-yz^2$, $\overline{A}=(3,2,0)$.~~

$$\bar{\nabla} f_{(1,3)} = \left(2x-y^2, -2xy\right)_{(1,3)} = (-7,-6)$$

$$\|\bar{\nabla} f_{(1,3)}\| = \sqrt{(-7)^2+(-6)^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$$

f diferenciable $\Rightarrow f'_{\check{r}}(1,3) = \bar{\nabla} f_{(1,3)} \cdot \check{r}$

máx $f'_{\check{r}}(1,3) = \|\bar{\nabla} f\|_{(1,3)} = \sqrt{85} \rightarrow \boxed{\check{r} = \frac{(-7,-6)}{\sqrt{85}}}$

mín $f'_{\check{r}}(1,3) = -\|\bar{\nabla} f\|_{(1,3)} = -\sqrt{85} \rightarrow \boxed{\check{r} = \frac{(7,6)}{\sqrt{85}}}$

$f'_{\check{r}}(1,3) = 0$ si $\check{r} \perp \bar{\nabla} f_{(1,3)} \rightarrow \boxed{\check{r} = \frac{(6,-7)}{\sqrt{85}} \text{ y } \check{r} = \frac{(-6,7)}{\sqrt{85}}}$

16) La temperatura en ºC en cada punto (x,y,z) de un cuerpo es $T(x,y,z)=e^{2x+y+3z}$, ¿en qué dirección desde el origen se produce el mayor incremento de temperatura?.

$$\text{máx } f_{\check{r}}(0,0) \longrightarrow \check{r} = \frac{\bar{\nabla} f(0,0,0)}{\|\bar{\nabla} f(0,0,0)\|}$$

$$\vec{\nabla} T_{(0,0,0)} = \left(e^{2x+y+3z}\, 2,\ e^{2x+y+3z},\ e^{2x+y+3z} \cdot 3 \right)\Big|_{(0,0,0)} = (2,1,3)$$

$$\check{r} = \frac{(2,1,3)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \boxed{\frac{(2,1,3)}{\sqrt{14}}}$$

17) Sea $f \in C^1$, si $f'(\bar{A},(3,4)) = 4$ y $f'(\bar{A},(2,7)) = -6$.

a) Calcule $f'(\bar{A},(5,9))$.

b) Determine el valor de la derivada direccional máxima de f en $\bar{A}$.

c) Sabiendo que $f(\bar{A}) = 3$, calcule en forma aproximada $f(\bar{A}+(0.01,-0.02))$.

$$f \in C^1 \Rightarrow f \text{ diferenciable} \Rightarrow f'(\bar{A},\bar{r}) = \bar{\nabla} f(\bar{A}) \cdot \vec{r}$$

$$f'(\bar{A},(3,4)) = (f'_x, f'_y)_{(\bar{A})} \cdot (3,4) = f'_{x(A)}\, 3 \cdot 7 + f'_{y(A)} \cdot 4 \cdot 7 = 4 \cdot 7$$

$$f'(\bar{A},(2,7)) = f'_{x(\bar{A})}\, 2 \cdot 4 + f'_{y(\bar{A})} \cdot 7 \cdot 4 = -6 \cdot 4$$

$$f'_{x(\bar{A})} \cdot 13 = 52 \rightarrow f'_{x(\bar{A})} = 4$$

$$f'_{y(A)} = \frac{4 - 4 \cdot 3}{4} = -2 = f'_{y(\bar{A})}$$

$$f'(\bar{A},(5,9)) = f'_{x(A)} \cdot 5 + f'_{y(\bar{A})} \cdot 9 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 9 = \boxed{2}$$

$$\text{máx } f'_{\bar{r}}(\bar{A}) = \|\bar{\nabla} f_{(\bar{A})}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{20}}$$

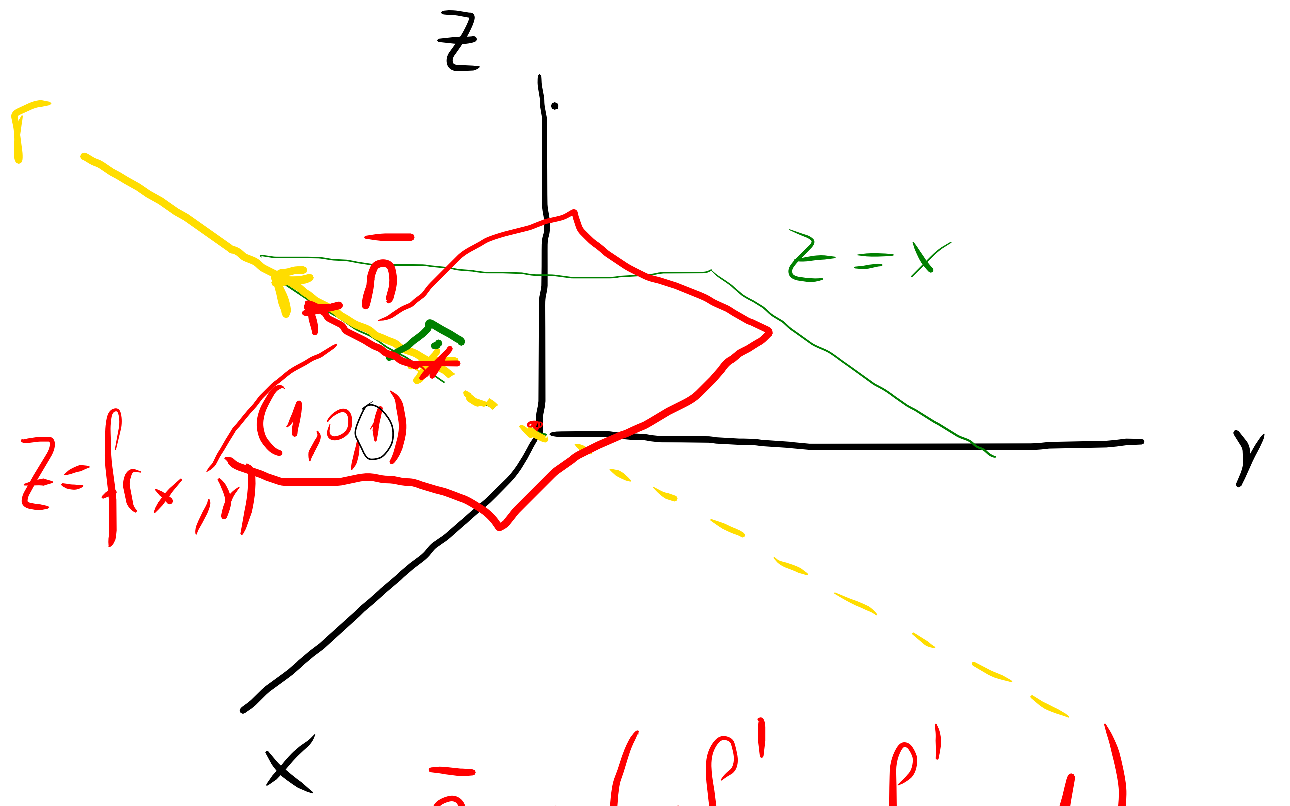
$$f(\bar{A}+(0{,}01;-0{,}02)) \cong f(\bar{A}) + f'_{x(\bar{A})} \cdot 0{,}01 + f'_{y(\bar{A})} \cdot (-0{,}02) = 3 + 4 \cdot 0{,}01 - 2 \cdot (-0{,}02) =$$

$$\cong 3 + 0{,}04 + 0{,}04 = \boxed{3{,}08}$$

18) La recta determinada por la intersección de las superficies de ecuaciones $y^2 = x^2 - z^2$ y $z = x$ es normal a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,0,1)$, calcule aproximadamente $f(0.98, 0.01)$.

$$S_1 : \begin{cases} y^2 = x^2 - z^2 \\ \end{cases}$$
$$S_2 : \quad z = x$$

$$\rightarrow r \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$



$$r: \quad (x,y,z) = (1,0,1) + t(1,0,1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\bar{n} = (-f'_x, f'_y, 1)$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$(1,0,1) = k(-f'_x, -f'_y, 1)_{(1,0)} \rightarrow k = 1 \rightarrow 1 = -f'_x \rightarrow f'_{x(1,0)} = -1$$
$$0 = -f'_y \rightarrow f'_{y(1,0)} = 0$$

$$f(0{,}98; 0{,}01) \simeq f(1,0) + f'_{x(1,0)} \cdot (-0{,}02) + f'_{y(1,0)} \cdot (0{,}01) =$$
$$\simeq 1 + (-1)(-0{,}02) + 0\,(0{,}01) = 1 + 0{,}02 = \boxed{1{,}02}$$

19) Dada la superficie Σ de ecuación $z e^{y-2x} - 5 = 0$, halle una ecuación cartesiana para el plano tangente a Σ en $(1,2,z_0)$; con esta última calcule aproximadamente z_1 sabiendo que $(1.01, 1.97, z_1) \in \Sigma$.

$$S: \quad z = 5 \cdot e^{2x-y}$$

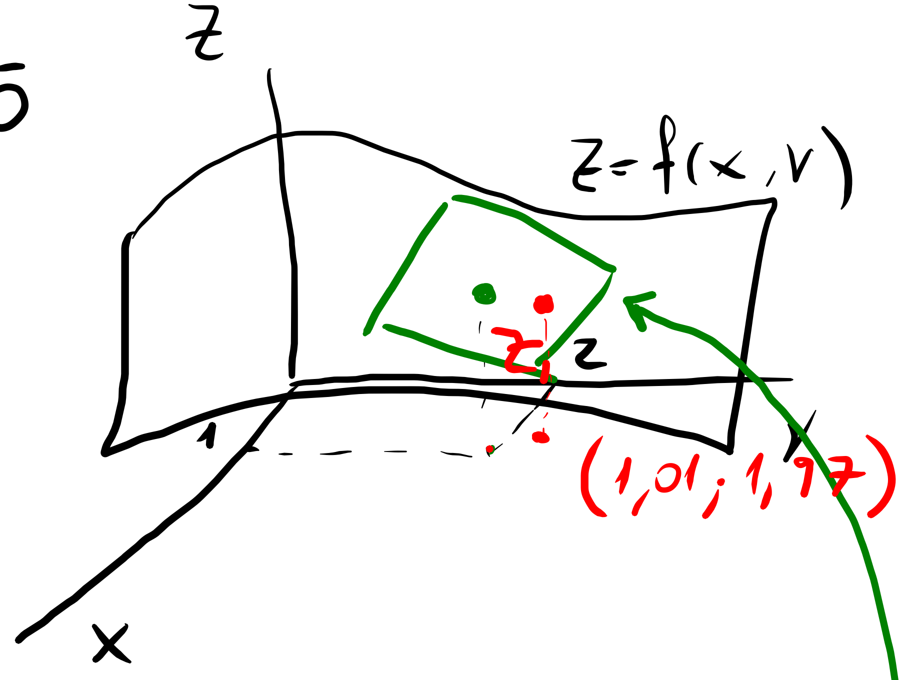
$$z = \frac{5}{e^{y-2x}} = 5\, e^{-y+2x}$$

$$f(x,y) = 5\, e^{2x-y}$$

$$z_0 = f(1,2) = 5 \cdot e^{2\cdot 1 - 2} = 5$$

$$f'_x(1,2) = 5 \cdot 2 e^{2x-y}\Big|_{(1,2)} = 10$$

$$f'_y(1,2) = -5 \cdot e^{2x-y}\Big|_{(1,2)} = -5$$



plano tang a la gráf de f en (1,2,5) : $z = f(1,2) + f'_x(1,2)\,(x-1) + f'_y(1,2)\,(y-2)$

$$\boxed{z = 5 + 10\,(x-1) - 5\,(y-2)}$$

$$z_1 = 5 + 10\,(1{,}01 - 1) - 5\,(1{,}97 - 2) \cong f(1{,}01;\, 1{,}97)$$

$$= 5 + 10 \cdot 0{,}01 - 5\,(-0{,}03) = 5 + 0{,}1 + 0{,}15 = \boxed{5{,}25}$$