PRimer PARCIAL AM2

NACHO

Ecuaciones dif de primer orden

1- VARIABLES SEPARABLES (ausencia de sumas (casi siempre)) cuando hay muchas . or \

$y.y' = x^3$ $\quad y(2)=4$

$y.\frac{dy}{dx} = x^3$

$\int y\,dy = \int x^3\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + C$ → sol. gral

$\frac{4^2}{2} + \frac{2^4}{4} + C$

$8 = 4 + C$

$4 = C$

$\boxed{\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + 4}$ sol. particular

2- ecuación lineal de orden 1 : tiene la forma : $\boxed{y' + P(x).y = Q(x)}$

se resuelve así

$y = \underbrace{e^{-\int P\,dx}}_{u} . \underbrace{(k + \int e^{\int P\,dx} . Q\,dx)}_{v}$

Dicaro - tabla integrales

Wordpress - AM2 (Parcial)

Ejercicio:

$x.y' - y = x^2$

$y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{P} y = x \, Q$

$y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx} . (k + \int e^{\int -\frac{1}{x}dx} . x\,dx)$

$y = e^{\ln x} . (k + \int e^{-\ln x} . x\,dx)$

$y = x . (k + \int \frac{1}{x} . x\,dx)$

$y = x(k + x)$ $\quad \boxed{y = kx + x^2}$ → sol. gral

OBS

$e^{\ln x} = x$

$e^{-\ln x} = (e^{\ln x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Scanned by CamScanner

CASO PARTICULAR: orden 2 → reducible orden 1

$y'' + y' = 6$ $\qquad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ $\qquad$ Sustitución

$\underbrace{y''}_{g'} + \underbrace{y'}_{g}$

Reemplazamos... $k = -2$ $\quad c = 0$

$$\boxed{y = 2e^{-x} + 6x}$$

$g' + g = 6$

$P = 1 \quad Q = 6$

$g(x) = e^{-\int dx} \cdot \left(k + \int e^{\int dx} \cdot 6\, dx\right)$

$= e^{-x} \cdot (k + 6e^{x})$

$y' = g(x) = k e^{-x} + 6$

$y = \int (k \cdot e^{-x} + 6)\, dx$

$$\boxed{y = -ke^{-x} + 6x + c}$$

TRAYECTORIAS ORTOGONALES A UNA FAMILIA DE CURVAS

DADA LA FAMILIA: $x^2 + y^2 = k$, HALLAR SUS T. ortogonales

Algoritmo

1) derivar

$2x + 2y \cdot y' = 0$

2) $y' \longrightarrow -\dfrac{1}{y'}$

3) resolver

$2x + 2y\left(-\dfrac{1}{y'}\right) = 0$

$2x = \dfrac{2y}{y'}$

$x = \dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}$

$\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{x}$

$\ln y = \ln x + c$

$y = e^{\ln x + c}$

$y = e^{\ln x} \cdot \underbrace{e^{c}}_{A}$

$$\boxed{y = A \cdot x}$$ → t. ort

OBS: Acordate del fuego

le sentido

Al recorrer en círculos xq da la misma temperatura

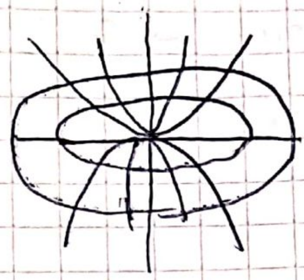
OBS: 2

casi siempre es V. separables

NACHO

CASO PARTICULAR en el que la variable no se vaya

$y = k x^2$



$\frac{y}{x^2} = k$

1) $y' = 2kx$

$y' = \frac{2y}{x^{\cancel{2}}} \cancel{x}$

$y' = \frac{2y}{x}$

2) $-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}$

$-\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{x}$

$\int -x \, dx = \int 2y \, dy$

$-\frac{x^2}{2} + c = y^2$

$\boxed{c = \frac{x^2}{2} + y^2} \rightarrow$ elipse

Scanned by CamScanner

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

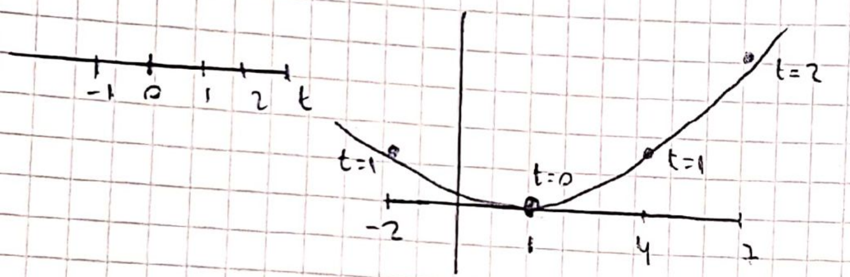
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2,3\ldots}$ f vectorial (curvas)

$f: \mathbb{R}^{2,3\ldots} \to \mathbb{R}$ campo escalar (superficies $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2$)

$f: \mathbb{R}^{2,3\ldots} \to \mathbb{R}^{2,3}$ campo vectorial

FUNCIÓN VECTORIAL (curvas)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(t) = (3t+1,\ t^2)$



OBS) NACHITO

SALÍS DE $\mathbb{R}$, OSEA tenés una recta y la llevás a $\mathbb{R}^2$ y se estira y se dobla

Derivada de una función vectorial

$f'(t) = (3,\ 2t)$

es el vector tangente a la curva en un punto

Ejercicio: hallar la RA$_g$ a la curva en el punto $(7,4)$

haces esto $f(t) = (\underbrace{3t+1}_{7},\ \underbrace{t^2}_{4}) \Rightarrow t=2$ (te daría eso en $t=2$)

$f'(2) = (3,4)$ dir de la recta

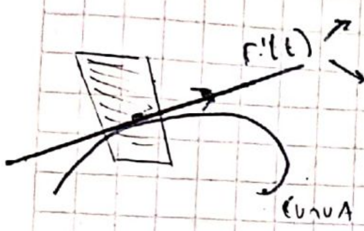
$r: (x,y) = (7,4) + \lambda(3,4)$

$f(2) + \lambda f'(2)$

NACHO

Recta tg \ Plano normal

Recta tangente y plano normal a una curva en $\mathbb{R}^3$



Obs: las curvas siempre van a tener una recta tg y un plano normal

Ej: Hallar Rtg y plano normal de la curva

$C: F(t) = (t^2+1, e^t, 2t+8)$; $t=0$ en $P: (1,1,3)$

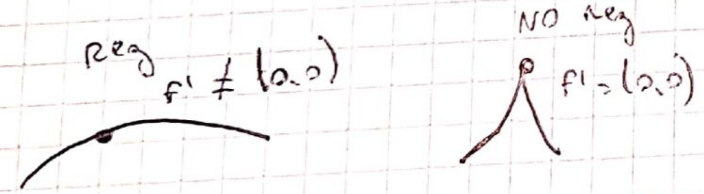
$F'(t) = (2t, e^t, 2)$

$F'(0) = (0,1,2) \rightarrow$ direccion $\rightarrow$ normal

$F: (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(0,1,2)$

$\pi: 0.x + y + 2z + D = 0$

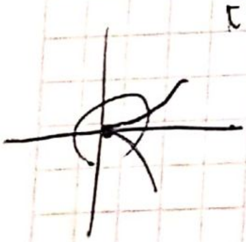
Punto regular de una curva: se dice así cuando la derivada no es nula o el vector nulo



$F(t) = (t^2, t^3)$

$F'(t) = (2t, 3t^2) = (0,0)$

$t=0$



Scanned by CamScanner

CAMPOS ESCALARES

CAMPOS ESCALARES

Dominio, curva de nivel y gráfica de un campo escalar

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; \underbrace{f(x,y)}_{z} = \sqrt{4-x^2-y^2} \longrightarrow z^2 = 4-x^2-y^2$

$x^2+y^2+z^2=4$

$z = f(x,y)$

GRÁFICA

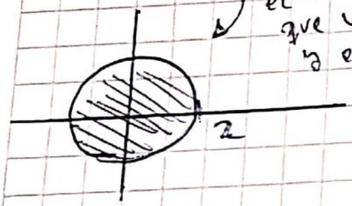
esfera

DOMINIO

$4-x^2-y^2 \geq 0$

$x^2+y^2 \leq 4$

el menor hace que vaya adentro y el igual arma el contorno



CURVAS DE NIVEL

se obtienen igualando la función a una constante

$z=0 \quad \sqrt{4-x^2-y^2}=0$

$4-x^2-y^2=0$

$x^2+y^2=4$

$z=1$

$\sqrt{4-x^2-y^2}=1$

$x^2+y^2=3$

$z=2$

$\sqrt{4-x^2-y^2}=2$

$x^2+y^2=0 \quad P(0,0,2)$

$z=3$

$\sqrt{4-x^2-y^2}=3$

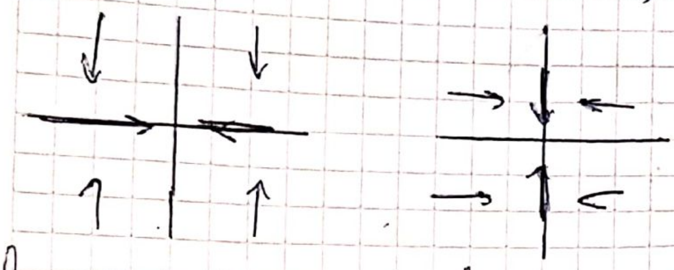
$x^2+y^2=-5 \quad \nexists$

NACHO

Limites - criterio 1\2

LIMITES en varias variables: si por dos caminos el limite difiere, diremos que no existe, si dan igual no sabemos

Criterio 1: Acercamiento x los ejes



OBS:

Apuntas los ejes y los acercas al origen.

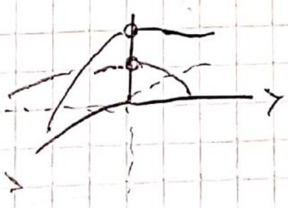
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim_{y\to 0} f(0,y)$$

$\nexists$ lim 2

Ejercicio: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x+2y}{x+y}$ / eje x $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3 \neq 2 = \lim_{y\to 0} \dfrac{2\cancel{y}}{\cancel{y}}$

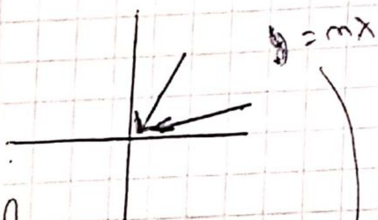
$\nexists \lim$

OBS: es importante acercarse a un punto x dos caminos a la vez y mejor cuando es dom es el acento



Criterio 2: Acercamiento x rectas (radiales)

$y = mx$



OBS: si el limite depende de m diremos que no existe

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x.y}{x^2+y^4}$$

1) eje $x \to 0$
eje $y \to 0$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x.mx}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}.m}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)} = m \to \nexists \lim$

OBS: - Imposible para afirmar la existencia porque deberíamos probar todos los caminos (infinitos)

Limites - Criterio 3A)

CRITERIO 3A): $0 \times \text{Acot} = 0$ ($\exists$ limite)

$-1 \leq \begin{matrix} \text{sen} \\ \cos \end{matrix} \leq 1$

$0 \leq \dfrac{x^2}{x^2 + y^4} \leq 1$ → potencias pares

$0 \leq \dfrac{y^6}{x^{14} + y^6} \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

Ejer: $0 \cdot \text{Acot}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2} = 0$ ($\exists$ limite)

$y^2 \leq x^2 + y^2$

$\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ } demostración de infire

OBS: Agamos los acotados (potencias) y x es lo 0

1) ?

2) Eolio tmo

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \cancel{x^2} \cdot m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)}$ $\boxed{0}$

Limites - criterio 3B

NACHO

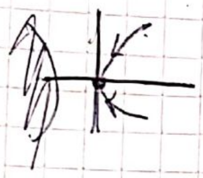
<u>Criterio 3B</u>: Acercamiento x curvas (destructivo)

Se toma una curva que pase x el origen de modo que el lim de distinto a los anteriores.

Para elegir la curva se busca que grado denominador y numerador sean iguales

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x+y^2}$$

$$y^2 = -x+x^2$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-x+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \to \nexists \lim$$

<u>Otra forma de elegir una curva</u>. es igualar la función a una constante distinta de la que te dio antes $(0\ 0)$

$$\frac{x^2}{x+y^2} = 1$$

$$x^2 = x+y^2$$

$$-x+x^2 = y^2$$

<u>D??</u>

$$\lim \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = x\,\frac{x^2}{x^2+y^2} + y\,\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$0\cdot 1 = 0$

CASO PARTICULAR: SI NO tiende AL ORIGEN

$\lim_{\not\to (0,0)}$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} \frac{\overbrace{(x-2)}^{z} \cdot \overbrace{(y-3)}^{w}}{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

OBS: si lo dejamos así, no podríamos usar mx en el criterio 2, pues 2m-3 es la recta que pasa por (2,3)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ w\to 0}} \frac{z \cdot w}{z^2+w^2}$$

$w = mz$

$\downarrow$

$\vdots$

m

$\nexists \lim$

OBS: $\frac{g}{Q}$ si el grado de g es mayor seguramente haya límite,

si $g(g) = Q(g)$ seguramente no

NACHO

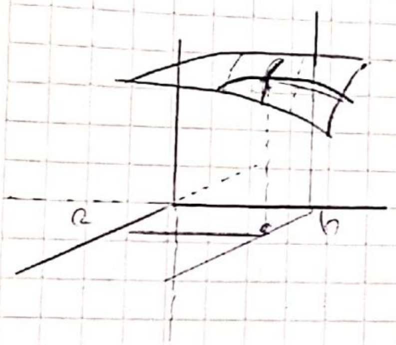
CONTINUIDAD

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4+y^4} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \overset{0}{x} \cdot \frac{x^4}{x^4+y^4} \text{ Acot} = 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f es continua en $(0,0)$

DERIVADAS PARCIALES



Deriv. por def.

$$f_x'(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \neq \infty$$

$$f_y'(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \neq \infty$$

Geometricamente f'_x es la pendiente de la recta t_g a la superficie que esta incluida en un plano paralelo al XZ

Ejemplo: dada la $f(x,y) = x^2 \cdot y + 3x + 2y$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Calcular $f'_x(2,1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 \cdot 1 + 3(2+h) + 2 \cdot 1 - 12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4+h+3)}{\cancel{h}}$$

Obs: se tiene que cancelar el t. independ.

$= 7$

DERIVADAS PARCIALES x REGLA: al derivar respecto a una variable se considera a las demás constantes

$f(x,y) = x^2 \cdot y + 3x + zy$

$f'_x(x,y) = 2x \cdot y + 3$

$f'_y(x,y) = x^2 + z$

GRADIENTE de un C. ESCALAR: es el vector formado x las derivadas parciales

$\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y)$

$\nabla f(x,y) = (2xy + 3, x^2 + z)$

es: hallar gradiente del campo $f(x,y,z) = e^{x \cdot y} + z^2$

$\nabla f(x,y,z) = (e^{x \cdot y} \cdot y, e^{x \cdot y} \cdot x, 2z)$

NOTA: solo seguiremos usando la def de derivada parcial si la función es x TRAMOS (partida)

Ej: Analizar continuidad y derivada parcial en $\underset{\text{origen}}{(0,0)}$ para:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2}, & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

cont:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x^2+y^2}$$

eje x $\rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1x}{x^2} = \infty$ $\nexists$ $\lim$ (1x)

eje y $\rightarrow \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$

$\nexists \lim$

$\Rightarrow$ f no es cont en (0,0)

deriv. parcial

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} = \infty \quad \nexists f'_x(0,0)$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{\frac{0}{0^2+k^2} - 0}{k} = \boxed{0}$$

obs: Alrededor del eje hay una recta

obs: No existe relación entre continuidad y derivabilidad

NACHO

extremos

$+2xy$

DERIVADA DIRECCIONAL : además de la función o superficie y el punto necesitamos una dirección de derivación dada por un versor

$\bar{v} = (3,4)$

(derivada direc. x dir.)

$\bar{v} = (m,v) \rightarrow m^2 + v^2 = 1$

$$f'((a,b),\bar{v}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda m, b+\lambda v) - f(a,b)}{\lambda} \not\equiv \infty$$

NORMAL VECTOR : $\sqrt{a^2+b^2}$

vector a versor $\Rightarrow \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(a,b)$$

Ejemplo. $f(x,y) = x.y + 2x$

Calcular $f'x\left((3,1)\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)\right)$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(3+\frac{4}{5}\lambda, 1+\frac{3}{5}\lambda\right) - f(3,1)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\left(3+\frac{4}{5}\lambda\right).\left(1+\frac{3}{5}\lambda\right) + 2\left(3+\frac{4}{5}\lambda\right) - 9}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\cancel{\lambda}\left(\frac{13}{5} + \frac{12}{25} + \frac{8}{5}\right)}{\cancel{\lambda}}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} = \boxed{\frac{21}{5}}$$

Rápido:

$\nabla f(x,y) = (y+2, x)$

$\nabla f(3,1) = (3,3)$

$(3,3).\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{5} + \frac{9}{5}$

$= \boxed{\frac{21}{5}}$

fórmula

si f es diferenciable $\rightarrow f((a,b)\bar{v}) = \nabla f(a,b).\bar{v}$

- solo utilizaremos la definición si la función es partida

OBS: NACHITO

de la última fórmula se deduce que las derivadas parciales son casos particulares de la direccional cuando los versores son los canónicos: $(1,0)$ y $(0,1)$

$F(x,y) = x^y$

$F'((1,3),(\frac{5}{13},\frac{12}{13})) = \nabla f(1,3) \cdot \vec{v}$

$= (3,0) \cdot (\frac{5}{13},\frac{12}{13}) = \boxed{\frac{15}{13}}$

$\nabla f(x,y) = (y \cdot x^{y-1}, x^y \cdot \ln x)$

escalfinales

ANALIZAR DERIVABILIDAD en distintas direcciones en el origen para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

OBS

$\boxed{u^2+v^2=1}$

$$F'((0,0),(u,v)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^2 u^2}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2 \cdot u^2}{\lambda \cdot \lambda^2 \underbrace{(u^2+v^2)}_{\boxed{1}}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{u^2}{\lambda} = \begin{cases} \nearrow \infty & \nexists \text{ si } u \neq 0 \\ \searrow 0 & \exists \text{ si } u = 0 \end{cases}$$

$\cancel{u^2} + v^2 = 1$

$v^2 = 1$

$v = \pm 1$

F derivable en $(0,0)$ con $\bar{v} = (0, \pm 1)$

CASOS

+ ARRIBA $\lim_{\lambda \to 0} \frac{u \cdot v}{\lambda}$ $\quad u=0$ or $v=0$
$\lim_{\lambda \to 0} u^2 + v$ $\quad \exists \forall$ dirección
$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \cdot u \cdot v = 0$ $\quad \exists \forall$ dirección

Scanned by CamScanner

NACHO

Idem de ejercicio Anterior

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-y^2} & , x^2-y^2 \neq 0 \\ 2x+3y & x^2-y^2=0 \end{cases}$$

$$F'((0,0),(u,v)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda}$$

~~$(u,v) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$~~ ~~$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$~~

$u^2-v^2 \neq 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^2 u^2}{\lambda^2 u^2 - \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2 . u^2}{\lambda . \lambda^2 (u^2-v^2)}$$

$u=0$

$\downarrow$

$v = \pm 1$

F derivable en $(0,0)$, $\vec{v} = (0; \pm 1)$

$u^2-v^2=0$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{2\lambda u + 3\lambda v - 0}{\lambda}$$

$= 2u+3v$

$\exists \forall$ direcc

$u^2-v^2=0 \longrightarrow u^2 = v^2$

$u^2+v^2=1$

$2u^2=1$

$u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

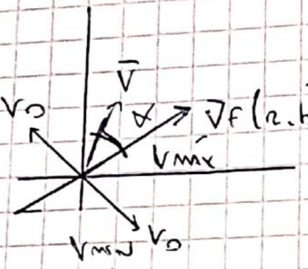
$v = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

DERIVADA DIRECCIONAL (MÁXIMA, MÍNIMA, NULA)

$F'((a,b),\bar{v}) = \nabla f(a,b) \cdot \bar{v} = |\nabla f(a,b)| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\alpha$

$|\bar{v}|$ ↳ es 1

MAX. $\alpha = 0° \rightarrow V_{max} = \dfrac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, $F'_{max} = |\nabla f(a,b)|$



MIN. $\alpha = \pi \rightarrow V_{min} = \dfrac{-\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, $f'_{min} = -|\nabla f(a,b)|$

NULA. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi = \bar{v} \perp \nabla f(a,b)$, $f' = 0$

OBS: este tema es sobre que tan rápido subas algo, es una montaña

MAX: más rápido
MIN: bajás más rápido
NULA: vas para el costado

1) Hallar derivada y dirección (max, min, nula) para

$f(x,y) = x \cdot y^2$ con $P:(1,3)$

$\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy)$

$\nabla f(1,3) = (9,6)$

MAX. $\bar{v} = \dfrac{(9,6)}{\sqrt{127}}$, $f'_{max} = \sqrt{127}$

MIN. $v = \dfrac{-(9,6)}{\sqrt{127}}$, $f'_{min} = -\sqrt{127}$

NULA $\bar{v} \perp (9,6) \rightarrow \bar{v} = \dfrac{(-6,9)}{\sqrt{127}}$, $f' = 0$

$\bar{v} = \dfrac{(6,-9)}{\sqrt{127}}$

Scanned by CamScanner

NACHO

*) Hallar versor máximo en el origen para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

$$f'((0,0);(u,v)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\dfrac{\lambda^2 u^2 \cdot \lambda \cdot v}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\cancel{\lambda^3} \cdot u^2 \cdot v}{\cancel{\lambda^3}\underbrace{(u^2+v^2)}_{1}} = u^2 \cdot v \quad \text{es MAX?}$$

$$u^2 + v^2 = 1$$

$$u^2 = 1 - v^2$$

$$\Rightarrow (1-v^2) \cdot v = v - v^3 = g(v)$$

$$g'(v) = 1 - 3v^2 = 0$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$g''(v) = -6v \qquad g''\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) < 0 \qquad g''\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) > 0$$

MAX   min

$$v = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$u^2 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\bar{V}_{MAX} = \left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} ; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}$$

Obs: tomas la derivada como una nueva función de una variable

Scanned by CamScanner

DIFERENCIABILIDAD (existencia de plano tangente)

f es dif en (a,b) si:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(a+h,\ b+k) - f(a,b) - \overbrace{h.f'_x(a,b) - k.f'_y(a,b)}^{T.L}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad (*)$$

(siempre límite de esta en diferenciabilidad)

1) f no continua → No dif

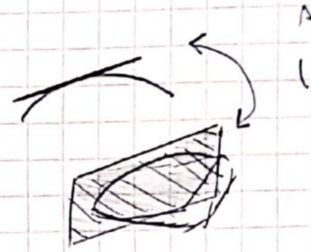
2) $\nexists$ f'_x o f'_y o direc → No dif

3) f cont y derivable $\forall$ direc → (*)

4) si $f' = u^2+v$ (no lineal) → No dif
$u.v$
$u.v^2$

5) si $\exists$ 2 deriv max o 2 min o 3 nulas → no dif

6) si $f \in C^1$ → es dif



Analogos (si no ves de costado)

(I) ejercicio: analizar diferenciab en el origen para

cont

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y^2}{x^2+y^2} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

si arriba tenes un grado mas seguro es continua
$x.y^2 = 3$

1) cont en (0,0)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\, y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

f es cont en (0,0)

2) derivadas direccionales en (0,0)

$$f'((0,0)(u,v)) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0+\lambda u,\ 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{\lambda u\, \lambda^2 v^2}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda} = u.v^2 \Rightarrow f \text{ es derivable en } (0,0)\ \forall \text{ direc}$$

pero $u.v^2$ no es LINEAL

→ f no es dif en (0,0)

→ $\nexists$ plano tangente en (0,0,0)

NACHO

OBS NACHITO: (ver de otro una f diferenciable)

$\dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2}$ $\xrightarrow{} 4$ / $\to 2$ ⊖ → 2 → dif

$\dfrac{\sqrt{x^3} \cdot y^2}{x^2+y^2}$ $\to 3.5$ / $\to 2$ ⊖ → 1.5 → dif

Si la diferencia entre grados numerador y denominador es >1 quizás es diferenciable

$\dfrac{x^3}{x+y}$ $\to 3$ / $\to 1$ ~~⊖ → 2~~

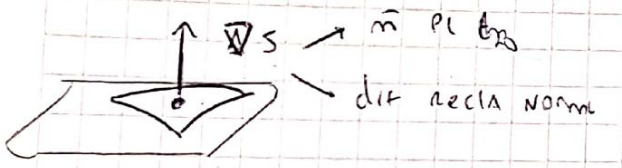
↳ F no contin → No dif

funciones del tipo:

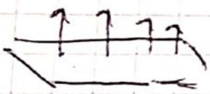
⇒ $x^3 \cdot y$ ⇒ $e^{x \cdot y}$

⇒ $\ln x$ ⇒ $\operatorname{sen}(x+y)$ son diferenciables en todo punto de su dominio por sen C^1 (tienen derivadas parciales primeras continuas)

PLANO tg y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE DIFERENCIABLE EN UN PUNTO



PROPIEDAD DEL GRADIENTE: es el vector normal a la superficie en un punto dado

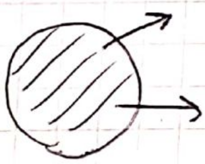


$\Pi: 3x + 2y + z = 0$

$\bar{m} = (3, 2, 1)$

$\nabla S = (3, 2, 1)$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$



$\nabla S = (2x, 2y, 2z)$

Acá la recta normal varía x ser esfera y en el plano es siempre la misma

(I) HALLAR PLANO t_g y recta normal a la superficie

$S: x^3y + z^2 = 9$ en $P: (2,1,1)$

en $P: (2,1,1)$

$\nabla f(x,y,z) = (3x^2y\ ,\ x^3\ ,\ 2z)$

$\nabla f(2,1,1) = (12,8,2)$ → $\bar{n}$ → dir

r normal : $(x,y,z) = (2,1,1) + \lambda(12,8,2)$

∩ con eje x? $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\pi\ t_g$: $12x + 8y + 2z + D = 0$

∩ con plano xy? → $z=0$

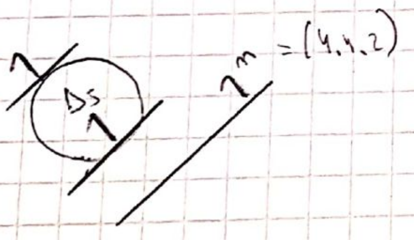
Implicita : $x^3y + z^2 = 9$

siempre

Explicita : $\underbrace{f(x,y)}_{z} = x.y^2 \Rightarrow x.y^2 - z = 0 \Rightarrow \bar{n} = (y^2, 2xy, -1)$

- si la
- superficie viene en forma explicita $z = xy$ la tercer componente de la normal es (-1)

ejercicio : hallar los puntos de la superficie $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en donde el plano t_g es paralelo al siguiente $\pi: 4x + 4y + 2z = 0$



$\nabla S \approx \bar{n}$

$(2x, 2y, 2z) = k.(4,4,2)$

$\begin{cases} 2x = 4k \\ 2y = 4k \\ 2z = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}$ $= (2k)^2 + (2k)^2 + k^2 = 9$

$9k^2 = 9$

$k = \pm 1$

$P: (2,2,1)$

$Q: (-2,-2,-1)$

$\frac{2}{3}x^3 -$

NACHO

(V) DADA LA CURVA $C: \begin{cases} x^2 + y - z = 0 \\ z = 3x - y \end{cases}$ → P/de t

(intersección de 2 sup.) ⇓ DA UNA RECTA

hallar la recta tg en el punto : $(2,1,5)$

1) parametrizar C

$x = t$

$\begin{cases} t^2 + y - z = 0 \\ z = 3t - y \end{cases}$

$t^2 + y - 3t + y = 0$

$2y = -t^2 + 3t$

$y = \dfrac{-t^2 + 3t}{2}$

$z = 3t - \dfrac{-t^2+3t}{2} = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{2}t = \dfrac{t^2+3t}{2}$

$C: f(t) = \left(t \,;\, \dfrac{-t^2+3t}{2} \,;\, \dfrac{t^2+3t}{2} \right) \rightarrow t = 2$

$f'(t) = \left(1, \dfrac{-2t+3}{2}, \dfrac{2t+3}{2}\right)$

$f'(2) = \left(1 ; -\dfrac{1}{2} ; \dfrac{7}{2}\right)$

$R_{tg}: (x,y,z) = (2,1,5) + \lambda\left(1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

2) USANDO LOS GRADIENTES

$\nabla S_1 \times \nabla S_2 = r$

múltiplos

$\nabla S_1 = (2x, 1, -1) \qquad \nabla S(2,1,5) = (4,1,-1)$

$\nabla S_2 = (3,-1,-1)$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{(2,-1,7)}$

Scanned by CamScanner

Fijate cuanto tienen que valer u y v para ese punto

Superficie en forma paramétrica

Dada la superficie en forma paramétrica $S: f(u,v) = \left(\frac{u}{3} ; u.v ; u^2 + v\right)$ dar su plano tg en el punto $P: (1,6,11)$

1) llevar S a cartesiana

$x = \frac{u}{3}$

$3x = u$

$$\begin{cases} y = 3x\, v \\ z = (3x)^2 + v \longrightarrow v = z - 9x^2 \end{cases}$$

$y = 3x\left(z - 9x^2\right)$

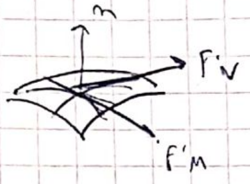
$$\boxed{S: 3xz - 27x^3 - y = 0}$$

$\nabla s = (3z - 81x^2 ; -1 ; 3x)$

$\nabla s\,(1,6,11) = (-48 , -1 , 3) = \bar{n}$

$\pi: -48x - y + 3z + D = 0$

2) usando f'_u , f'_v



$f'_u = \left(\frac{1}{3} ; v ; 2u\right)$

$f'_v = (0, u, 1)$

$$f'_u \times f'_v = \bar{n} = \nabla S$$

$f'_u(3,2) = \left(\frac{1}{3} , 2 , 6\right)$

$f'_v(3,2) = (0,3,1)$

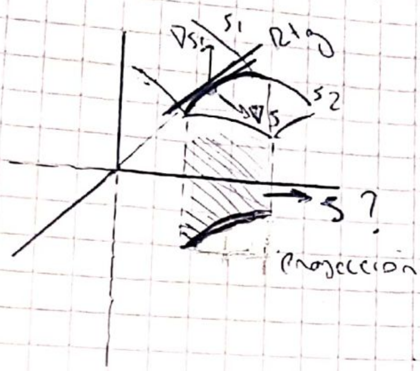
$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left(-16 , \frac{-1}{3} , 1\right)$

Punto regular de una superficie: es cuando el producto vectorial fundamental $f'_u \times f'_v$ sea distinto de $(0,0,0)$ (lo mismo que punto diferenciable)

Scanned by CamScanner

NACHO

Ejercicio: sea $S_1: x^2 + 2y + z^2 = 0$ y S_2 otra superficie que corta a S_1 formando una curva C, cuya proyección al plano xy es la curva $C_1: y - x^3 = 0$. Hallar la R_{tg} a la curva C en el P $(-1,-1,1)$



$\rightarrow S: y - x^3$

Obs: tomo la curva como una superficie en $\mathbb{R}^3$

$\nabla S_1 \times \nabla S = dir$

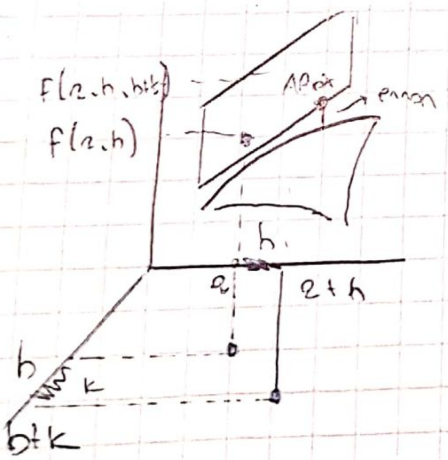
$\nabla S_1(-1,-1,1) = (-2,2,2)$

$\nabla S(-1,-1,1) = (-3,1,0)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-6,4)$$

$R_{tg}: (x,y,z) = (-1,-1,1) + \lambda(-2,-6,4)$

formula de Aproximación x el Diferencial (Aproximación x el plano tg)



$f(x,y)$

$$f(a+h, b+k) \simeq f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (h,k)$$

ejem: Aproximar x dif

$f(2.1 ; 1.4)$ $\quad f(x,y) = x \cdot y^2$

$(a,b) = (2,1)$

$(h,k) = (0.1 ; 0.4)$ $\quad \nabla f = (y^2 ; 2xy)$

$\approx f(2,1) + \nabla f(2,1) \cdot (0.1 ; 0.4)$

$\approx 2 + (1,4) \cdot (0.1 ; 0.4)$

$\approx 3,7$

obs

$\sqrt[3]{26.4}$

$a = 27$

$h = -0.6$

ejem 2: Aprox $2.3^2 + 4.5^3 + 2.3 \cdot 4.5$

te armas vos la función

$f(x,y) = x^2 + y^3 + x \cdot y$ $\quad \nabla f(x,y) = (2x + y , 3y^2 + x)$

$(a,b) = (2,4)$

$(h,k) = (0.3 ; 0.5)$

reemplazas en la formula y chau

MATRIZ JACOBIANA DE UN CAMPO VECTORIAL: dicha matriz se forma colocando los gradiente de cada componente en fila

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y,z) = (x^3 + y \cdot z , x^2 \cdot z)$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & z & y \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{matrix}$$

2×3

obs: es lo inverso de

dominio $\to$ imagen

Scanned by CamScanner

NACHO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = x.y$

$\nabla f(x,y) = (y \;,\; x)$

1×2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;/\; f(t) = (t^2 \,, t^3)$

$f'(t) = (2t \;,\; 3t^2)^t = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

$1 \times 2 \qquad\qquad 2\times 1$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA (regla de la cadena en forma matricial)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f(u,v) = u.v \longrightarrow \nabla f$ Grad.

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;/\; g(x,y,z) = (x.z + y \;,\; x.z^2) \longrightarrow D_f$ matriz.

$h = f\circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \nabla h$

$$\boxed{\nabla h(x,y,z) = \nabla f(u,v) \,.\, D_f(x,y,z)}$$

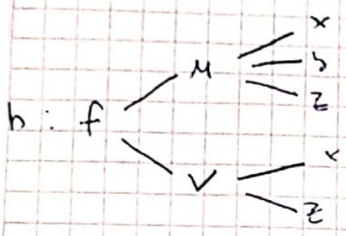
Componemos al final

$$\nabla h(x,y,z) = (v \quad u) \,.\, \begin{pmatrix} z & 1 & x \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix}$$

$$\nabla h(x,y,z) = (\underbrace{vz + uz^2}_{h'_x} \;,\; \underbrace{v}_{h'_y} \;,\; \underbrace{vx + 2xuz}_{h'_z})$$

Scanned by CamScanner

OTRO MODO DE APLICAR LA REGLA DE LA CADENA ES UTILIZANDO EL SIG. DIAGRAMA DE ARBOL



$h'_x(x,y,z) = f'_u(u,v) \cdot u'_x(x,y,z) + f'_v(u,v) \cdot v'_x(x,y,z)$

$h'_y = f'_u \cdot u'_y$

$h'_z = f'_u \cdot u'_z + f'_v \cdot v'_z$

OBSERV.: LA 1ERA forma se utiliza cuando el resultado final es una JACOBIANA

LA 2DA para ejercicios del tipo COMPUESTA + IMPLICITA

Aprox. de para campos vectoriales

$$\boxed{f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + D_f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \; / \; f(t) = (t, t^2, t^3)$ f vect. $f'(t)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; / \; g(x,y) = x \cdot y$ ∇g

$h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, D_h

$D_h(x,y) = f'(t) \cdot \nabla g(x,y)$

$$D_h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2ty & 2tx \\ 3t^2 y & 3t^2 x \end{pmatrix}$$

dim 3×2

Scanned by CamScanner

NACHO

DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA (teorema de Cauchy – Dini)

$F(x, y, z) = x \cdot z^3 + e^{y-z} = 3$ $z(x, y)$

$z'_x(2,1)$, $z'_y(2,1)$?

$2z^3 + e^{1-z} = 3$

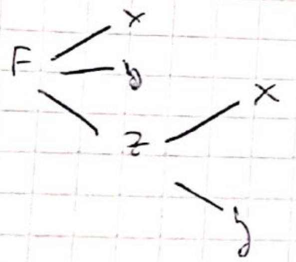
$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$

$z = 1$, pues

Acordate de e^{algo} siempre tiene que ser 1

teorema de estos dos pasos (C-D)

$$\begin{cases} z'_x(x,y) = \dfrac{-F'_x(x,y,z)}{F'_z} \\[2ex] z'_y = \dfrac{-F_y'}{F'_z} \end{cases}$$



$F'_x = z^3$

$F_y' = e^{y-z}$

$F_z' = 3xz^2 - e^{y-z}$

$z'_x(2,1) = -\dfrac{1}{5}$

$z'_y(2,1) = -\dfrac{1}{5}$

$\nabla z(2,1) = \left(-\dfrac{1}{5} ; -\dfrac{1}{5}\right)$

Hipótesis de Cauchy – Dini

1) $F(2,1,1) = 3$

2) F dif en $(2,1,1)$ por ser C^1

3) $F'_z(2,1,1) = 5 \neq 0$

Scanned by CamScanner

Ejercicio: Sean las funciones

FINAL

$f(u,v) = u.v + 4$

$u = x.y + 6$

v definida implícitamente con $x v^3 + y v^5 = 3 \rightarrow v(x,y)$

resulta $f(u,v) = h(x,y)$

$\nabla h(2,1)$?

$2 v^3 + 1.v^5 = 3$

$v = 1$

$h'_x(x,y) = f'_u(u,v) . u'_x(x,y) + f'_v(u,v) . v'_x(x,y)$

$h'_y = f'_u . u'_y + f'_v . v'_y$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & x \\
 & u \arrow[ur] \arrow[r] & y \\
h = f \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[r] \arrow[dr] & x \\
 & & y
\end{tikzcd}$$

$f'_u = v$

$f'_v = u$

$u'_x = y$

$u'_y = x$

$$v'_x = -\frac{F'_x}{F'_v} = -\frac{v^3}{3xv^2 + 5yv^4}$$

$$v'_y = \frac{-F'_y}{F'_v} = \frac{-v^5}{3xv^2 + 5yv^4}$$

$$h'_x(2,1) = 1.1 + 8\left(-\frac{1}{11}\right) = 3/11$$

$$h'_y(2,1) = 1.2 + 8\left(-\frac{1}{11}\right) = \frac{14}{11}$$

$$\boxed{\nabla h(2,1) = \left(3/11 , 14/11\right)}$$

NACHO

luego Aproximar x el diferencial $h(2{,}3\ ;\ 1{,}4) \approx h(2;1) + \nabla h(2,1) \cdot (0{,}3\ ;\ 0{,}4)$

$\approx 12 + \left(\frac{3}{11} ; \frac{14}{11}\right) \cdot (0{,}3 ; 0{,}4)$

Obs $f(u,v) = h(x,y)$

$\Rightarrow f(2;1) = 8 \cdot 1 + 4 = 12 = h(2,1)$

ejercicio parcial 68 nacho

$w = u^2 \cdot v + v$

$u = x \cdot y$

$v = v(x,y)$ def implicitamente en $vx + e^{vy} = 2$ $\rightarrow v \cdot 1 + e^{0} = 2$

$w(x,y)$ en $(1,0)$ deriv max?

$F(x,y,v)$ Obs: nunca hacer la formula

$v'_x = \frac{-F'_x}{F'_v} = \frac{-v}{x + e^{vy} \cdot y}$

w: u (x, y); v (x, y)

para

$v'_y = \frac{-F'_y}{F'_v} = -\frac{e^{vy} \cdot v}{x + e^{vy} \cdot y}$

$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = 2uv \cdot y + (u^2+1) \cdot \left(\frac{-v}{x + e^{vy} \cdot y}\right)$

$w'_y = w'_u \cdot v'_y + w'_v \cdot v'_y = 2uv \cdot x + (u^2+1) \cdot \left(\frac{-e^{vy} \cdot v}{x + e^{vy} \cdot y}\right)$

$w'_x(1,0) = 0 + 1(-1) = -1$

$w'_y(1,0) = 0 + 1(-1) = -1$

$\nabla w(1,0) = (-1 ; -1)$

$\rightarrow$ versor max $= \frac{(-1 ; -1)}{\sqrt{2}}$ $w'((1,0), \bar{v}) = \sqrt{2}$

Scanned by CamScanner

Polinomio de taylor orden 2

sea $f(x,y) \in C^2$, su Pol taylor en $\underbrace{(a,b)}_{\text{centro}}$

$$P(x,y) = f(a,b) + \frac{f'_x(a,b).(x-a) + f'_y(a,b).(y-b)}{1!} + \frac{f''_{xx}(a,b).(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b).(x-a).(y-b) + f''_{yy}(a,b).(y-b)^2}{2!}$$

$f = x^2.y^3$

$f'_x = 2xy^3 \rightarrow f''_{xy} = 6xy^2$

$f'_y = 3x^2y^2 \rightarrow f''_{yx} = 6xy^2$

T. Schwartz

si $f \in C^2 \rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$

ejercicio: hallar taylor de grado 2 $\quad f(x,y) = x^2.y \quad (a,b) = (1,2)$

$f(1,2) = 2$

$f'_x = 2xy \qquad f'_x(1,2) = 4$

$f'_y = x^2 \qquad f'_y(1,2) = 1$

$f''_{xx} = 2y \qquad f''_{xx}(1,2) = 4$

$f''_{xy} = 2x \qquad f''_{xy}(1,2) = 2$

$f''_{yy} = 0 \qquad f''_{yy}(1,2) = 0$

> tener en cuenta que $f(x,y)$ y $P(x,y)$ coinciden en el centro (a,b) hasta sus derivadas segundas inclusive

$$P(x,y) = 2 + 4(x-1) + (y-2) + \frac{4(x-1)^2 + 2.2(x-1)(y-2)}{2}$$

$P(x,y) = 2 + 4x - 4 + y - 2 + 2x^2 - 4x + 2 + 2xy - 2y - 4x + 4$

$P(x,y) = 2 - 4x - y + 2xy + 2x^2$

$P(1,2) = 2$

$P'_x = -4 + 2y + 4x$

$P'_x(1,2) = 4 = f'_x(1,2)$

⋮

$P''_{yy}(1,2) = 0 = f''_{yy}(1,2)$

NACHO

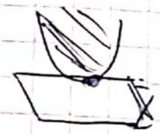
EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES (igualan todo a 0)

Derives en donde derives da 0

max local

Cond necesaria de extr

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Ptos críticos}$$



min local

Cond suficiente

Hessiano

$$H(f(x,y)) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

- $+$ → si f''_{xx} $(+)$ min; si f''_{xx} $(-)$ máx
- $-$ → silla
- 0 → ? usar def.

Pto. ensilladura

caballo de

ej. ① Clasificar extremos del campo escalar

$$f(x,y) = x^2y - xy$$

$$\begin{cases} f'_x = 2xy - y = 0 \\ f'_y = x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$x=0$	$x=1$
$-y=0$	$2y-y=0$
$y=0$	$y=0$
$P:(0,0)$	$Q:(1,0)$

$f''_{xx}(x,y) = 2y$

$f''_{xy} = 2x-1$

$f''_{yy} = 0$

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Hf(1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

f posee punto de ensilladura en $(1,0,f(1,0))$

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

f posee punto de ensilladura en $(0,0,f(0,0))$

Scanned by CamScanner

(IV) clasificar extremos) $f(x,y) = x^2+y^2$

$f'_x = 2x = 0 \longrightarrow x = 0$

$f'_y = 2y = 0 \longrightarrow y = 0$

$P: (0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \oplus$$

$\Rightarrow$ f tiene mínimo relativo en $(0,0,0)$

es tmb. extremo:

$f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(0,0) = 0 \longrightarrow$ " " " Absoluto en $(0,0,0)$

(V) $f(x,y) = x^4+y^2$

$f'_x = 4x^3 = 0 \longrightarrow x = 0$

$f'_y = 2y = 0 \longrightarrow y = 0$

$P: (0,0) \rightarrow$ punto crítico

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ?$$

no sabes $\Rightarrow$ (BASADO)

$f: x^4+y^2 \geq 0 \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , f(0,0) = 0$

$\longrightarrow (0,0,0)$ mín abs

(Vi) $f(x,y) = x^3+y^2$

$f'_x = 3x^2 = 0 \longrightarrow x = 0$

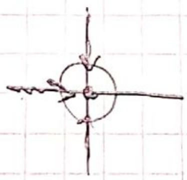
$f'_y = 2y = 0 \longrightarrow y = 0$

$P: (0,0)$

$$Hf = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ?$$

Análisis



eje y: $f(0,y) = y^2 \geq 0$

eje x: $f(x,0) = x^3 \lessgtr 0$

$\longrightarrow (0,0,0)$ punto ensilladura

NACHO

TABULADA

x^2+y^2, x^4+y^6	mín abs
$-x^2-y^2$	máx abs
x^2-y^2, x^3+y^2	ensilladura

ejercicio by parcial:

$f(x,y) = 4y^3 - x^3 + 3x^2y + 2y^2$

$$\begin{cases} f'_x = -3x^2 + 6xy = 0 \\ f'_y = 12y^2 + 3x^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$x.(-3x+6y) = 0$

$x = 0$ | $-3x+6y=0$

$12y^2 + 4y = 0$ | $6y = 3x$

$y=0 \quad y = -\frac{1}{3}$ | $2y = x$

$P: (0,0)$ | $12y^2 + 3.4y^2 + 4y = 0$

$Q: (0, -\frac{1}{3})$ | $24y^2 + 4y = 0$

$y=0$, $x=0$ | $y = -\frac{1}{6}$, $x = -\frac{1}{3}$

$R: (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$

y a (0,0) ya lo

evalúa

(V) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$f'_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \to x = 0$

$f'_y = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \to y = 0$

$P: (0,0)$

pero $(0,0) \notin$ dom f'_x, f'_y

?

$f = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^2, \ f(0,0) = 0$

$\to (0,0,0)$ mín abs

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} -6x+6y & 6x \\ 6x & 24y+4 \end{vmatrix}$$

$$Hf(0, -\tfrac{1}{3}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \ (+)$$

max rel en $(0, -\frac{1}{3}, f(0, -\frac{1}{3}))$

$$H_f(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{6}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

ensilladura en $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}))$

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 ?$$

$f(x^+, 0) = -x^3 \leq 0$

$f(x^-, 0) = -x^3 \geq 0$

$\to (0,0,0)$ pto ensilladura

Scanned by CamScanner

con taylor resuelto

sea $f(x,y)$ con taylor en $(a,b) = (2,1)$

$P(x,y) = \cancel{\quad} = x^2 - 4x + y^2 - 2y$

Analizar extremos de f en (2,1) ?

$P'_x = 2x - 4$ $\qquad$ $P'_y = 2y - 2$

$P'_x(2,1) = F'_x(2,1) = 4 - 4 = 0$ ✓

$P'_y(2,1) = F'_y(2,1) = 2 - 2 = 0$ ✓

$HP(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$HP(2,1) = Hf(2,1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4^{(+)}$

$\Rightarrow$ f tiene en (2,1) un min local