RESUMEN ANÁLISIS MATEMÁTICO II - 1° PARCIAL (12/08/22)

UNIDAD 1°: ECUACIONES DIFERENCIALES

$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}} \Rightarrow y' \cdot dx = dy$

ECUACIÓN DIFERENCIAL = Ecuación que contiene una variable independiente y derivadas de una variable dependiente (ED ordinaria)

ORDEN: Orden de la derivada "más alta". El orden determina la cantidad de constantes de la SG.
GRADO: Potencia (grado) de la derivada "más alta".

SOLUCIÓN DE UNA EDO: Función que satisface la ecuación.
- GENERAL (SG) = Familia / haz de curvas. Solución genérica con N constantes (siendo N el orden de la EDO)
- PARTICULAR (SP) = Curva particular de la familia de la SG que se deduce de asignarle valores a las constantes de la SG.
- SINGULAR (SS) = Curva que verifica la ecuación pero que no se obtiene de la SG.

• **ENCONTRAR EDO DADO UN HAZ DE CURVAS** [NO DEBE QUEDAR NINGUNA CONSTANTE]
- La cantidad de constantes de la familia de curvas indica el orden de la EDO.
- Si hay N constantes, se deriva N veces la familia y se obtiene EDO de N° orden.

Hallar ED correspondiente a la familia de curvas $y^2 = 4ax$

$(y^2)' = (4ax)'$
$\Rightarrow 2y \cdot y' = 4a$
$\boxed{y \cdot y' = 2a}$

Para eliminar la cte despejamos a de la familia de curvas: $y^2 = 4ax$, $\frac{y^2}{4x} = a$

$\Rightarrow y \cdot y' = 2a$
$y \cdot y' = 2 \cdot \frac{y^2}{4x} \Rightarrow$ RTA $\boxed{y' = \frac{y}{2x}}$

ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES → Se separan las variables y se integra M.A.M. [Puede haber SS]

$y' = H(x) \cdot G(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = H(x) \cdot G(y) \Rightarrow \frac{dy}{G(y)} = H(x)\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{G(y)} = \int H(x) \cdot dx$

Hay que chequear si $y=0$ es SS viendo si verifica la EDO

ECUACIONES LINEALES → NO TIENEN SOLUCIONES PARTICULARES

$\boxed{y' + P(x) \cdot y = R(x)}$ FORMATO

$\boxed{e^{\int P(x) dx}}$ FACTOR INTEGRANTE → Se multiplica M.A.M por el factor integrante

$e^{\int P(x)dx} \cdot y' + e^{\int P(x) dx} \cdot P(x) \cdot y = e^{\int P(x) dx} \cdot R(x)$
$[y \cdot e^{\int P(x) dx}]' = e^{\int P(x) dx} \cdot R(x)$
$\int [y \cdot e^{\int P(x) dx}]' dx = \int e^{\int P(x) dx} \cdot R(x)\, dx$
$y \cdot e^{\int P(x) dx} = C + \int e^{\int P(x) dx} \cdot R(x) \cdot dx$
$\boxed{y = C \cdot e^{-\int P(x) dx} + \int e^{\int P(x) dx} \cdot R(x) \cdot dx \cdot e^{-\int P(x) dx}}$ SOLUCIÓN GENERAL DE UNA LINEAL

EJ) $y' = x \cdot y + x - 2y - 2$
$y' + y \cdot (2-x) = x - 2$

$e^{\int 2-x\, dx} = e^{2x - \frac{x^2}{2}}$ } FACTOR INTEGRANTE

$y' \cdot e^{2x - \frac{x^2}{2}} + y \cdot (2-x) \cdot e^{2x-\frac{x^2}{2}} = (x-2) \cdot e^{2x - \frac{x^2}{2}}$
$(y \cdot e^{2x - \frac{x^2}{2}})' = (x-2) \cdot e^{2x-\frac{x^2}{2}}$
$\int (y \cdot e^{2x-\frac{x^2}{2}})' dx = \int (x-2) \cdot e^{2x-\frac{x^2}{2}} dx$
$y \cdot e^{2x-\frac{x^2}{2}} = C - e^{2x - \frac{x^2}{2}}$
$y = \frac{C}{e^{2x-\frac{x^2}{2}}} - \frac{e^{2x-\frac{x^2}{2}}}{e^{2x-\frac{x^2}{2}}}$
$\boxed{y = C \cdot e^{-2x+\frac{x^2}{2}} - 1}$

SOLUCIÓN GENERAL

C.A
$\int e^{2x-\frac{x^2}{2}} \cdot (x-2)$
• $u = 2x - \frac{x^2}{2}$
• $du = 2 - x$
$-du = -2 + x$
$\int e^u \cdot -du$
$-e^u \rightarrow -e^{2x-\frac{x^2}{2}}$

Con $y(0) = 2$
$2 = C \cdot e^{-2 \cdot 0 + \frac{0}{2}} - 1$
$2 = C \cdot e^0 - 1$
$3 = C$
$\boxed{y = 3 \cdot e^{-2x + \frac{x^2}{2}} - 1}$

SOLUCIÓN PARTICULAR

TRAYECTORIAS / HACES DE CURVAS ORTOGONALES

- Dos curvas son ORTOGONALES en un punto si las tangentes de cada una de las curvas en el punto son ORTOGONALES
- Si dos familias de curvas, cada una de las curvas es ORTOGONAL a las curvas de la otra familia, son

[HALLAR LA FAMILIA DE CURVAS ORTOGONAL A UNA FAMILIA DADA]

1) Derivar el haz de curvas original eliminando constantes para obtener la ED de la familia original.
2) Cambiamos y' por $-1/y'$ para obtener la ED de la familia ortogonal.
3) Resolvemos la ED obtenida (integrando) para obtener la familia ortogonal.

ECUACIONES DE BERNOULLI

$$\boxed{y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^N}$$

→ $N=0$ – EDO LINEAL
→ $N=1$ – VARIABLES SEPARABLES

$$y'\cdot y^{-N} + P(x)\cdot y\cdot y^{-N} = Q(x)\cdot y^N\cdot y^{-N}$$

$$\underbrace{y'\cdot y^{-N}} + P(x)\cdot y^{1-N} = Q(x)$$

SUSTITUCIÓN: $Z = y^{1-N}$ $\quad Z' = (1-N)\cdot y^{1-N-1}\cdot y'$

$$Z' = (1-N)\cdot y^{-N}\cdot y'$$

$$\frac{Z'}{1-N} = \underbrace{y'\cdot y^{-N}}_{\text{* es lo mismo}}$$

$$\boxed{(V^N)' = N\cdot V^{N-1}\cdot V'}$$

$$\boxed{e^{\int (1-N)\cdot P(x)\,dx}}$$

FACTOR INTEGRANTE

↓ (DESPUÉS DE SUSTITUIR)

$$\frac{Z'}{1-N} + P(x)\cdot Z = Q(x) \Big\}\text{ LINEAL}$$

$$\boxed{Z' + P(x)\cdot(1-N)\cdot Z = Q(x)\cdot(1-N)}$$

Con el valor obtenido de la función lineal volvemos a la original y resolvemos (Reemplazamos las Z por y)

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Una función $f(x,y)$ es HOMOGÉNEA de grado N si $\boxed{f(tx,ty) = t^N\cdot f(x,y)}$ $\quad t \neq 0$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy \Rightarrow f(tx,ty) = t^2x^2 + 2tx\cdot ty \Rightarrow f(tx,ty) = t^2\cdot\underbrace{(x^2+2xy)}_{f(x,y)}$$ } HOMOGÉNEA DE GRADO 2

La ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ es HOMOGÉNEA si $f(x,y)$ es HOMOGÉNEA DE GRADO 0

La ecuación diferencial $\underbrace{M(x,y)dx + N(x,y)dy}_{\text{DEBE}} = 0$ es HOMOGÉNEA si M y N son HOMOGÉNEAS DEL MISMO GRADO

PARA RESOLVER LA HOMOGÉNEA SE SUSTITUYE Y SE RESUELVE CON VARIABLES SEPARABLES $\boxed{Z = \frac{y}{x}}$ $\quad y = x\cdot Z$, $\quad y' = Z'\cdot x + Z$ $\quad$ o $\quad Z = \frac{x}{y}$

$\boxed{y' = f(x,y)}$ EXPLÍCITA $\qquad \boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$ FORMA DIFERENCIAL

EXPLÍCITA ⇒ FORMA DIFERENCIAL

$$y' = x^2\cdot y^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2\cdot y^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot dx = x^2\cdot y^3\cdot dx \Rightarrow dy = x^2y^3dx \Rightarrow 0 = x^2y^3dx - dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} M(x,y)\,dx &= x^2y^3 \\ N(x,y)\,dy &= -1 \end{aligned}}$$

FORMA DIFERENCIAL ⇒ EXPLÍCITA

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Rightarrow N(x,y)dy = -M(x,y)dx \Rightarrow N(x,y)\cdot y'\cdot \cancel{dx} = -M(x,y)\cancel{dx}$$

$$N(x,y)\cdot y' = -M(x,y)$$

$$\boxed{y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}}$$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

- Si $N = M = 1$ ⟶ FUNCIÓN ESCALAR
- Si $N = 1$ y $M > 1$ ⟶ FUNCIÓN VECTORIAL
- Si $N > 1$ y $M = 1$ ⟶ CAMPO ESCALAR
- Si $N > 1$ y $M > 1$ ⟶ CAMPO VECTORIAL

UNIDAD 2° - NOCIONES DE TOPOLOGIA - FUNCIONES

NORMA DE UN VECTOR EN $\mathbb{R}^N$

$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$

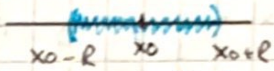
$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ \|\bar{x}\| \geq 0 & \bullet\ \|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \\ \bullet\ \|\bar{x}\| = 0 \leftrightarrow \bar{x} = \bar{0} & \bullet\ \|\bar{x} \cdot \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \end{array}}$$

$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_N-y_N)^2}$

TOPOLOGÍA

ENTORNO ($\mathbb{R}$)

- $\boxed{E(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < R\}}$ $\quad |x - x_0| < R \leftrightarrow -R < x - x_0 < R \leftrightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$



Centro x_0 y radio R

BOLA ABIERTA ($\mathbb{R}^N$)

$\boxed{B(\bar{x_0}, R) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N / \|\bar{x} - \bar{x_0}\| < R\}}$

BOLA CERRADA ($\mathbb{R}^N$)

$\boxed{B(\bar{x_0}, R) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N / \|\bar{x} - \bar{x_0}\| \leq R\}}$

BOLA REDUCIDA ($\mathbb{R}^N$)

$\boxed{B^*(\bar{x_0}, R) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^N / 0 < \|\bar{x} - \bar{x_0}\| < R\}}$

El punto x_0 no pertenece a la bola

PUNTO INTERIOR

$\bar{x_0} \in A$ es PUNTO INTERIOR $\leftrightarrow$ $\boxed{\exists R > 0 ; B(\bar{x_0}, R) \subset A}$

"Existe al menos una bola abierta con centro $\bar{x_0}$ y radio R completamente incluida en A"

CONJUNTO INTERIOR (A°): conjunto formado por todos los puntos interiores $\leftrightarrow A^\circ = \{\bar{x} \in A / \bar{x}$ es punto interior$\}$

PUNTO EXTERIOR

$\bar{x_0} \notin A$ es PUNTO EXTERIOR $\leftrightarrow$ $\boxed{\exists R > 0 ; B(\bar{x_0}, \delta) \cap A = \emptyset}$

"Existe al menos una bola abierta con centro $\bar{x}$ y radio R cuya intersección con el conjunto A es vacía"

CONJUNTO EXTERIOR: Conjunto de los puntos exteriores de A

PUNTO FRONTERA

PUNTO FRONTERA $\rightarrow$ x_0 puede o no pertenecer a A

$\bar{x_0}$ es PUNTO FRONTERA $\leftrightarrow$ $\boxed{\forall R ; B(\bar{x_0}, R) \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ B(\bar{x_0}, R) \cap A^c \neq \emptyset}$

"Todas las bolas tienen intersección vacía con A y con el complemento de A"

(∂A) CONJUNTO FRONTERA: Conjunto de los puntos fronteras de A

Si x_0 no es interior ni exterior es FRONTERA

PUNTO AISLADO

PUNTO AISLADO $\rightarrow$ Todos los puntos aislados son frontera

$\bar{x_0} \in A$ es PUNTO AISLADO $\leftrightarrow$ $\boxed{\exists R > 0 : B(\bar{x_0}, R) \cap A = \{\bar{x_0}\}}$

"Existe al menos una bola tal que su intersección con el conjunto A sea solamente ese punto"

PUNTO DE ACUMULACIÓN

PUNTO DE ACUMULACIÓN $\rightarrow$ Opuesto de punto aislado

x_0 es PUNTO DE ACUMULACIÓN $\leftrightarrow$ $\boxed{\forall R > 0 : B^*(\bar{x_0}, R) \cap A \neq \emptyset}$

"Todas las bolas reducidas tienen intersección no vacía con A"

CONJUNTO DE ACUMULACIÓN/DERIVADO (A' / $D(A)$): Conjunto de puntos de acumulación de A

Los puntos interiores y los puntos fronteras NO AISLADOS son de acumulación

ADHERENCIA / CLAUSURA $\boxed{Cl(A) = A \cup A'}$

CLASIFICACIÓN DE CONJUNTOS

- CONJUNTO ABIERTO: Todos sus puntos son interiores ($A = A^\circ$)
- CONJUNTO CERRADO: El conjunto de puntos frontera está incluido en A ($\partial A \subset A$)
- CONJUNTO ACOTADO: $\exists R > 0 : A \subset B(\bar{0}, R)$ $\{$ Existe una bola con RADIO FINITO y centro en el origen que incluya al conjunto A.
- CONJUNTO COMPACTO: A es CERRADO Y ACOTADO
- CONJUNTO CONVEXO: Para todo par de puntos del conjunto, el segmento determinado por dichos puntos está totalmente contenido en el conjunto.

- $A = [1, 2]$ convexo
- $B = [-1, 0] \cup [1, 2]$ no convexo

$\}$ Si el conjunto está compuesto por varias "piezas" no es convexo

FUNCIONES VECTORIALES — Sus imágenes son vectores $[F: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M]$

$\boxed{\bar{F}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M \,/\, \bar{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_M(t))}$

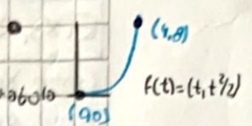
Cada una de las funciones F_i son funciones escalares llamadas FUNCIONES COMPONENTES

- Dom $\bar{F}$: Dom $F_1 \cap$ Dom $F_2 \cap \dots \cap$ Dom F_M — El dominio de $\bar{F}$ tiene en cuenta todas las restricciones de las funciones componentes
- La IMAGEN de las funciones vectoriales, representan CURVAS en $\mathbb{R}^M$

$\bar{F}: [0,4] \to \mathbb{R}^2 / \bar{F}(t) = (t, t^2/2)$ — Para obtener la curva que describe su imagen eliminamos el parámetro.

$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2/2 \end{array}\right. \to \left. y = \dfrac{x^2}{2} \right\}$ parábola

Como $t \in [0,4]$, $x \in [0,4]$ el conjunto imagen será un arco de parábola



- Punto inicial $\bar{F}(0) = (0,0)$ • Punto final $\bar{F}(4) = (4,8)$

CAMPOS ESCALARES $[F: U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}]$

Z se relaciona con la imagen y X, Y con el dominio

Para campos escalares de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ importa la gráfica, que es una superficie en $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{Gráfica } f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = F(x,y) \wedge (x,y) \in \text{Dom } F\}}$

Ej: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = x^2 + y^2$ • gráfica de F: $z = f(x,y) \to z = x^2 + y^2$

$\left\{\begin{array}{l} z = 4 — x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 — x^2 + y^2 = 2 \\ z = c — x^2 + y^2 = c \end{array}\right.$ CURVAS DE NIVEL

CURVAS DE NIVEL
- N=2 LÍNEA DE NIVEL
- N=3 SUPERFICIE DE NIVEL

INTERSECCIONES CON PLANOS PARALELOS AL EJE XY $(z = k)$

$\boxed{S_k = \{\bar{X} \in \text{Dom } F \,/\, F(\bar{X}) = k \wedge k \in \text{Im } F\}}$ Ecuación de curvas de nivel
- $N=2$ — $F(x,y) = k$
- $N=3$ — $F(x,y,z) = k$

UNIDAD 3°: LÍMITES – CONTINUIDAD

LÍMITES

PROPIEDADES $F: \text{Dom } F \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $\bar{X}_0$ punto de acumulación de Dom F

- $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \|F(\bar{x})\| = \|\bar{L}\|$ • $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} k.\bar{F}(\bar{x}) = k.\bar{L}$ • $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F(\bar{x}) \pm G(\bar{x}) = \bar{L}_1 \pm \bar{L}_2$ • $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F(x) \circ G(x) = L_1 \circ L_2$

- ANALIZAR LÍMITES COMPONENTE A COMPONENTE

$\boxed{\exists \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F(\bar{x}) = \bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_M) \leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to \bar{x}_0} f_i(\bar{x}) = L_i}$

Existe el límite de una función vectorial solamente si existe el límite de cada componente (vector límite)

- LÍMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \to \boxed{\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4 + 2y^2)}{x^4 + 2y^2} = 1}$

- LÍMITE QUE TIENDE A e

$\boxed{\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \left(1 + \dfrac{1}{x^3 y}\right)^{x^3 y} = e}$

LÍMITES ITERADOS

Primero se fija una variable (actúa como constante) y calcular el límite simple para la otra. Este límite define una nueva función para la variable fijada, cuyo límite se calcula finalmente

$F: \text{Dom } f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / z = F(x,y)$, con (x_0, y_0)

$\boxed{\text{Si } L_{12} \neq L_{21} \Rightarrow \nexists \text{ LÍMITE}}$

$\boxed{L_{12} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)\right]}$ $\boxed{L_{21} = \lim\limits_{y \to y_0} \left[\lim\limits_{x \to x_0} F(x,y)\right]}$

$\boxed{\text{Si alguno de los límites iterados es infinito} \Rightarrow \nexists \text{ LÍMITE DOBLE}}$

Primero se evalúa en Y con X constante

- Si alguno de los límites iterados no existe
- Si los límites iterados son iguales → No se puede asegurar nada

$\boxed{\exists L \wedge \exists L_{12} \wedge \exists L_{21} \Rightarrow L = L_{12} = L_{21}}$

EJEMPLO

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ $\quad l_{12} \neq l_{21} \Rightarrow \nexists L$

$l_{12} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$ $\quad l_{21} = \lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^3}{y^2} = \boxed{0}$

(5)

LÍMITES RESTRINGIDOS

Se define un conjunto μ que pertenece al dominio. Se reemplaza en la función original, quedando así el límite en función de una variable

$\begin{cases} F: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \\ \mu = \{(x,y) \in A\} \end{cases}$ Si al restringir la función con dos curvas distintas los límites son distintos $\to \nexists \lim$
Si el límite depende de un parámetro $\to \nexists \lim$

$\boxed{\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F/\mu = L_M}$

- $\mu = \{(x,y) \in A \,/\, y = m.x\} \to$ LÍMITES DIRECCIONALES/RADIALES
- $\mu = \{(x,y) \in A \,/\, y = ax^2 + bx + c\} \to$ LÍMITES PARABÓLICOS

EJ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow [y = m.x] \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.m.x}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2.m}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \Rightarrow \nexists \lim$

TIP: IGUALAR NUMERADOR Y DENOMINADOR
↳ La curva debe poder definirse (despejar y en función de x o viceversa)

CON DESIGUALDADES

$\boxed{0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$

$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$

$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$

$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$

$0 \leq \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ACOTADA}} \leq 1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x}_{\text{INFINITÉSIMO}} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ACOTADA}} = 0$

$\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{1} \to \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

OTRA FUNCIÓN ACOTADA QUE PODRÍA APARECER

CONTINUIDAD

$F: \text{Dom } F \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $\bar{x_0}$ punto de acumulación de Dom F

$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \exists \bar{F}(\bar{x_0}) \\ 2)\ \exists \lim_{x\to \bar{x_0}} \bar{F}(\bar{x}) = \bar{L} \\ 3)\ \bar{L} = \bar{F}(\bar{x_0}) \end{array}} \Leftrightarrow F$ es continua en $\bar{x_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{\bar{x}\to \bar{x_0}} F(\bar{x}) = F(\bar{x_0})}$

DISCONTINUIDAD NO EVITABLE: No existe el límite en el punto $\Rightarrow \nexists \lim_{x\to \bar{x_0}} F(\bar{x})$

DISCONTINUIDAD EVITABLE: Existe el límite y es finito $\to \exists \lim_{x\to \bar{x_0}} F(\bar{x}) = L$

- ↳ Puede no existir imagen para $\bar{x_0}$ (No estar en el dominio) $\to \nexists F(\bar{x_0})$
- ↳ Puede no coincidir el valor del límite en $\bar{x_0}$ y la imagen en $\bar{x_0} \to F(\bar{x_0}) \neq L$

Se puede redefinir F • $\lim_{x\to x_0} F(\bar{x}) = L$ • $F^* \begin{cases} F(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \neq \bar{x_0} \\ L & \text{si } x = \bar{x_0} \end{cases}$

en $\mathbb{R}^3$ la imagen es una superficie

CURVA DE $\mathbb{R}^N$: Sea $F: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ si D es un CONJUNTO CONEXO y F es CONTINUA en D
Entonces el conjunto imagen de F es una CURVA DE $\mathbb{R}^N$

UNIDAD 4: DERIVABILIDAD

DERIVADA DE FUNCIÓN VECTORIAL EN UN PUNTO

$\boxed{F'(x_0) = \lim_{H\to 0} \frac{F(x_0+H) - F(x_0)}{H}}$ $F: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ La derivada en el punto x_0, si existe, es un vector de $\mathbb{R}^N$.

Existe la derivada en x_0 SOLO si existe la derivada en cada componente.
$\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N / F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x))$ $\boxed{\exists \bar{F}'(x_0) \Leftrightarrow \exists F_i'(x_0)}$ $\forall i,\ 1 \leq i \leq N$

Las funciones vectoriales tienen asociado a su imagen una curva.
El vector derivado $F'(x_0)$ es un VECTOR TANGENTE a la curva C en el punto $F(x_0)$

PUNTO REGULAR DE UNA CURVA

Sea $\bar{F}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ asociada a la curva C

Si se cumple $\begin{cases} \exists \bar{F}'(x_0) & \text{- Existe el vector derivado en } x_0 \\ F'(x_0) \neq \bar{0} & \text{- El vector derivado en } x_0 \neq \text{vector nulo} \end{cases} \Leftrightarrow \bar{F}(x_0) = T_0$
T_0 es un punto regular de C

RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO

$\boxed{\bar{X} = \bar{F}(x_0) + h \cdot \bar{F}'(t_0)}$ $\bar{F}: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ asociada a la curva C y sea t_0 un punto interior a D

Sea $\bar{F}(x_0)$ un punto regular de C $\quad \bar{X} = (x, y, z)$ } punto genérico

PLANO NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

$\boxed{(\bar{X} - \bar{F}(x_0)) \cdot F'(x_0) = 0}$ $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ Siendo $F'(x_0) = (A, B, C)$ el vector normal al plano (vector tg)

Ej) Se define la curva como intersección de superficies. PARAMETRIZAR la curva y obtener recta y plano tg. en $(2, 4, 1)$

$\begin{cases} y = x^2 \\ y + z = 5 \end{cases} \to \begin{matrix} y = x^2 \\ z = 5 - y \end{matrix} \to \begin{matrix} y = x^2 \\ z = 5 - x^2 \end{matrix}$ $\quad F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / F(t) = (t, t^2, 5 - t^2)$

$F'(t) = (1, 2t, -2t)$

$F(t_0) = (2, 4, 1) \to t_0 = 2$

$F'(t_0) = F'(2) = \underline{(1, 4, -4)}$ vector tg / director

RECTA TG en $t_0 = 2$

$\boxed{(x, y, z) = (2, 4, 1) + h \cdot (1, 4, -4)}$

$(\underset{A}{1}, \underset{B}{4}, \underset{C}{-4})$

PLANO TG

$Ax + By + Cz + D = 0$

$1 \cdot x + 4 \cdot y - 4z + D = 0$

$1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + D = 0$

$D = -14$

$(2, 4, 1)$] pasa por

$[(x, y, z) - (2, 4, 1)] \cdot (1, 4, -4) = 0$

$(x - 2, y - 4, z - 1) \cdot (1, 4, -4) = 0$

$x - 2 + 4y - 16 - 4z + 4 = 0$

$\boxed{x + 4y - 4z - 14 = 0}$

DERIVADAS DE CAMPOS ESCALARES

DERIVADA DIRECCIONAL (RESPECTO DE UN VERSOR) EN UN PUNTO

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \check{v}}(\bar{x}_0) = f'(\bar{x}_0, \check{v}) = \lim_{H \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + H \cdot \check{v}) - f(\bar{x}_0)}{H}}$$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad \|\check{v}\| = 1$

$\bar{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in A^0$

- La derivada direccional siempre debe ser respecto de un VERSOR.
- Si hago la derivada respecto de un vector, se divide por su módulo y se obtiene la derivada direccional
- Si piden analizar las derivadas en todas las direcciones se usa un versor genérico (a, b) donde $a^2 + b^2 = 1$

DERIVADAS PARCIALES → Derivadas con respecto a los versores de la base canónica

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / z = f(x, y), \quad \bar{x}_0 = (a, b)$

DERIVADA PARCIAL CON RESPECTO A X $(1, 0)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{H \to 0} \frac{f((a, b) + H \cdot (1, 0)) - f(a, b)}{H} = \lim_{H \to 0} \frac{f((a, b) + (H, 0)) - f(a, b)}{H} = \boxed{\lim_{H \to 0} \frac{f(a + H, b) - f(a, b)}{H}}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{H \to 0} \frac{f((a, b) + H(0, 1)) - f(a, b)}{H} = \lim_{H \to 0} \frac{f((a, b) + (0, H)) - f(a, b)}{H} = \boxed{\lim_{H \to 0} \frac{f(a, b + H) - f(a, b)}{H}}$

DERIVADA PARCIAL RESPECTO DE Y

La derivada parcial POR DEFINICIÓN se utiliza cuando

- el punto no pertenece al dominio de la función
- la función está partida en el punto

La derivada parcial $f'_x(a, b)$ es la pendiente de la recta tg en el punto $A = (a, b, f(a, b))$ a la curva plano intersección de la superficie gráfico de ecuación $z = f(x, y)$ con el plano de ecuación $y = b$

DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS

$\boxed{f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$

DERIVADAS SUCESIVAS PURAS

f''_{xy}: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$ $\quad f''_{yx}$: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$

DERIVADAS SUCESIVAS MIXTAS / CRUZADAS

TEOREMA DE SCHWARTZ — CONDICIONES SUFICIENTES PERO NO NECESARIAS

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sea (a, b) punto interior de A

$\boxed{\text{Si } \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial yx} \text{ y son continuas en } (a, b) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(a, b)}$

Si f admite derivadas parciales primeras continuas en una bola de centro (a, b) y admite también derivadas segundas mixtas continuas en $(a, b) \Rightarrow$ las derivadas segundas mixtas son iguales.

- Si las derivadas mixtas existen y SON DISTINTAS hay alguna derivada que no es continua
- Si las derivadas mixtas existen NO SE PUEDE ASEGURAR que todas las derivadas sean continuas

→ El teorema se cumple si las derivadas primeras son continuas y si AL MENOS UNA de las derivadas mixtas es continua

7

TEOREMA DE HOMOGENEIDAD

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v} \neq 0$

$\boxed{\text{Si existe } f'(\vec{x_0}, \vec{v}) \Rightarrow \text{Existe } f'(\vec{x_0}, k \cdot \vec{v})}$ y $\boxed{f'(x_0, k\vec{v}) = k \cdot f'(x_0, \vec{v})}$

DEMOSTRACIÓN

$$f'(x_0, k\cdot\vec{v}) \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + h\cdot(k\cdot\vec{v})) - f(\vec{x_0})}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x_0} + (h\cdot k)\cdot\vec{v}) - f(\vec{x_0})}{h} \Rightarrow$$

SUSTITUCIÓN: $h_2 = h \cdot k$; $\frac{h_2}{k} = h$; $h \to 0$; $\frac{h_2}{k} \to 0$; $h_2 \to 0$

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + h_2\cdot\vec{v}) - f(\vec{x_0})}{\frac{h_2}{k}} \Rightarrow \lim_{h_2\to 0} k \cdot \left(\frac{f(\vec{x_0} + h_2\cdot\vec{v}) - f(x_0)}{h_2} \right)$$

$$k \cdot \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0 + h_2\cdot\vec{v}) - f(x_0)}{h_2} \Rightarrow \boxed{k \cdot f'(x_0, \vec{v})}$$

COROLARIO

$$\boxed{\begin{aligned} f'(\vec{x_0}, -\vec{v}) &= -f'(\vec{x_0}, \vec{v}) \\ f'(\vec{x_0}, \vec{v}) &= \|\vec{v}\| \cdot f'(\vec{x_0}, \check{v}) \end{aligned}}$$ $\check{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

UNIDAD 5: DIFERENCIABILIDAD

DIFERENCIABILIDAD EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot h}$$

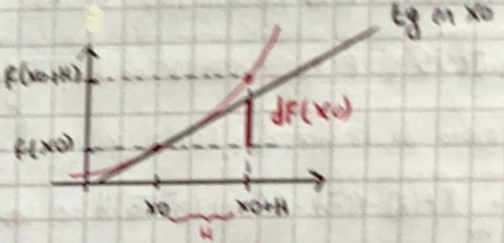
$x - x_0 = h$

$x = h + x_0$

$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)$

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h$

$$\boxed{f(x_0 + h) = f'(x_0) \cdot h + f(x_0)}$$



DIFERENCIABILIDAD EN CAMPOS ESCALARES

Una función es diferenciable en x_0 si:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{(f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0))}^{\text{RECTA TANGENTE}}}{|x - x_0|} = 0$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{(f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0))}^{\text{PLANO TG A LA GRÁFICA DE } f \text{ EN } (x_0, y_0)}}{\underbrace{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|}_{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}} = 0$$

VECTOR GRADIENTE ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

$$= \boxed{\lim_{x \to \vec{x_0}} \frac{f(\;\;) - f(\vec{x_0}) - \nabla f(\vec{x_0})\cdot(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_n} \right)}$$

EL VECTOR GRADIENTE ESTÁ FORMADO POR LAS DERIVADAS PARCIALES

- Si la función no es diferenciable se llama "VECTOR DERIVADO" (Df)
- Si nos dicen "dado el vector gradiente" ya sabemos que la función es diferenciable
- Si $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el gradiente es perpendicular a cada curva de nivel en x_0 } Después se
- Si $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el gradiente es normal a cada superficie de nivel en x_0 } demuestra

MATRIZ JACOBIANA ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) } FUNCIONES / CAMPOS VECTORIALES

$$Jf(\vec{x_0}) = \vec{D}f(\vec{x_0}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x_0})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x_0})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\vec{x_0})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\vec{x_0})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{N \text{ COLUMNAS}} \Bigg\} \begin{matrix} M \\ \text{FILAS} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1(\vec{x_0}) \\ \vec{\nabla} f_2(\vec{x_0}) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_n(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

$\underset{\text{FILAS}}{M} \times \underset{\text{COLUMNAS}}{N}$

- Si la función no es diferenciable se llama "MATRIZ DERIVADA"
- Si todas las componentes de la matriz (las derivadas parciales) son continuas $\Rightarrow$ la función es C^1 $\Rightarrow$ la función es diferenciable

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES / CAMPOS DIFERENCIABLES

- Si F es diferenciable en $x_0 \Rightarrow F$ es continua en x_0 y derivable en toda dirección en x_0
- Si F no es continua en x_0 o no es derivable en toda dirección $\Rightarrow F$ no es diferenciable en x_0
- Si F es diferenciable en $x_0 \Rightarrow \boxed{F'(\bar{x}_0, \check{v}) = \frac{\partial F}{\partial \check{v}}(\bar{x}_0) = \nabla F(\bar{x}_0) \cdot \check{v}}$
- Si F es de clase C^1 en $x_0 \Rightarrow F$ es diferenciable

DEFINICIÓN CLASE $F \in C^1(\bar{x}_0)$: F es de clase C^1 en x_0 sii:
- $\exists$ todas las derivadas primeras parciales de F en x_0
- Todas las funciones derivadas parciales primeras son continuas en x_0

Para saber si $F \in C^1(\bar{x}_0)$ hay que encontrar las derivadas parciales y analizar su continuidad

DEMOSTRACIÓN: LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES SON CONTINUAS

HIPÓTESIS: F es diferenciable en x_0, $\lim_{x \to x_0} \frac{\|F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0) - \Delta F(x_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)\|}{\|\bar{x} - x_0\|} = 0$

TESIS: F es continua en x_0, $\lim_{x \to x_0} F(\bar{x}) = F(\bar{x}_0)$

Se parte de la hipótesis, para que ese límite sea 0 el numerador debe ser 0 (porque el denominador tiende a 0)

$$\lim_{x \to x_0} \|F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0) - \Delta F(x_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)\| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0) - \Delta F(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0 \rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) - \lim_{x \to x_0} F(\bar{x}_0) - \lim_{x \to x_0} \Delta F(\bar{x}_0)(x - x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} F(\bar{x}) = \lim_{x \to x_0} F(\bar{x}_0) + \lim_{x \to x_0} \Delta F(x_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} F(\bar{x}) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} F(\bar{x}_0)}_{cte} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \Delta F(\bar{x}_0)}_{cte} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (\bar{x} - \bar{x}_0)}_{0} \rightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} F(\bar{x}) = F(\bar{x}_0)}$$

DEMOSTRACIÓN: LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES SON DERIVABLES EN TODA DIRECCIÓN

HIPÓTESIS: F es diferenciable en $\bar{x}_0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{\|F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0) - \Delta F(\bar{x}_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$

TESIS: F es derivable en toda dirección en $\bar{x}_0$ y $\frac{\partial F}{\partial \check{v}}(\bar{x}_0) = \nabla F(x_0) \cdot \check{v}$

$$\lim_{x \to x_0} F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0) - \Delta F(\bar{x}_0)(x - x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0)] = \lim_{x \to x_0} \Delta F(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

SUSTITUCIÓN
$X = x_0 + H$
$H = h \cdot \check{v}$
Siendo $h = \|H\|$ y $\check{v}$ el versor
$X = x_0 + h \cdot \check{v}$
$X - x_0 = h \cdot \check{v}$

$$X \to x_0 \rightarrow X - x_0 \rightarrow \bar{0} \rightarrow H \rightarrow \bar{0} \rightarrow \|H\| \rightarrow 0 \rightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \to 0} F(\bar{x}_0 + h \cdot \check{v}) - F(\bar{x}_0) = \lim_{h \to 0} \Delta F(\bar{x}_0) \cdot h \cdot \check{v}$$

dividimos M.A.M por h

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{x}_0 + h \cdot \check{v}) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta F(\bar{x}_0) \cdot h \cdot \check{v}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h \cdot \check{v}) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\Delta F(\bar{x}_0) \cdot \check{v}}_{cte}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \check{v}}(\bar{x}_0) = \Delta F(\bar{x}_0) \cdot \check{v}}$$

$F \in C^1$
$\downarrow$
F es diferenciable
$\swarrow$ F es continua
$\searrow$ F es derivable en toda dirección
$\downarrow$
Existen todas las derivadas parciales

Si $\frac{\partial F}{\partial \check{v}}(\bar{x}_0) \neq \Delta F(\bar{x}_0) \cdot \check{v}$ la función NO es diferenciable

PASOS PARA INVESTIGAR LA DIFERENCIABILIDAD DE f EN EL PUNTO $\bar{x_0}$

1) ¿f es continua en $\bar{x_0}$? ↗ NO – NO ES DIFERENCIABLE EN $\bar{x_0}$ ↘ SÍ – IR AL PASO 2

2) ¿f admite derivada en toda dirección en $\bar{x_0}$? ↗ NO – NO ES DIFERENCIABLE EN $\bar{x_0}$ ↘ SÍ – IR AL PASO 3

3) ¿$f \in C^1(\bar{x_0})$? ↗ NO – IR AL PASO 4 ↘ SÍ – f ES DIFERENCIABLE EN $\bar{x_0}$

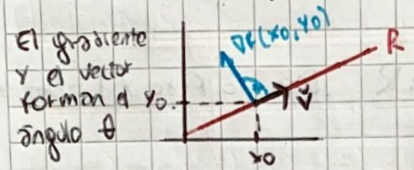
CONDICIÓN SUFICIENTE

4) DEFINICIÓN: $¿\exists \lim_{x \to \bar{x_0}} \dfrac{\|f(\bar{x}) - f(\bar{x_0}) - \nabla f(\bar{x_0}) \cdot (\bar{x} - \bar{x_0})\|}{\|x - \bar{x_0}\|} = 0$? ↗ NO – f NO ES DIFERENCIABLE EN $\bar{x_0}$ ↘ SÍ – f ES DIFERENCIABLE EN $\bar{x_0}$

RELACIÓN ENTRE EL VECTOR GRADIENTE Y LA DERIVADA DIRECCIONAL

$f : U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\quad f$ es diferenciable $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \check{v}}(\bar{x_0}) = \nabla f(\bar{x_0}) \cdot \check{v} =$

El gradiente y el vector forman el ángulo θ



$\dfrac{\partial f}{\partial v}(\bar{x_0}) = \|\nabla f(\bar{x_0})\| \cdot \underbrace{\|\check{v}\|}_{1} \cdot \cos\theta$

$\boxed{\dfrac{\partial f(\bar{x_0})}{\partial \check{v}} = \underbrace{\|\nabla f(\bar{x_0})\|}\cdot \cos\theta}$

Con esto obtenemos las derivadas máximas, mínimas y nulas

LA NORMA DEL GRADIENTE ES UNA CONSTANTE, ASÍ QUE EL "TAMAÑO" DE LA DERIVADA DEPENDE DE $\cos\theta$

DERIVADA DIRECCIONAL MÁXIMA

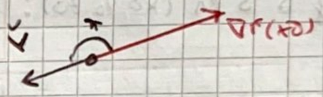
Cuando $[\cos\theta = 1] \Rightarrow \hat{\theta} = 0$ $\quad \nabla f(\bar{x_0})$ y $\check{v}$ tienen igual dirección y sentido (ya que el ángulo que forman es 0)

$\boxed{f'_{MAX}(\bar{x_0}) = \|\nabla f(\bar{x_0})\|}$ $\quad \boxed{\check{v}_{max} \text{ en } \bar{x_0} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}}$

DERIVADA DIRECCIONAL MÍNIMA

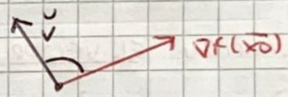
Cuando $[\cos\theta = -1] \Rightarrow \hat{\theta} = \pi$ $\quad \nabla f(\bar{x_0})$ y $\check{v}$ tienen igual dirección y sentido opuesto

$\boxed{f'_{MIN}(\bar{x_0}) = -\|\nabla f(\bar{x_0})\|}$ $\quad \boxed{\check{v}_{MIN} \text{ en } \bar{x_0} = -\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}}$



DERIVADA DIRECCIONAL NULA

Cuando $[\cos\theta = 0]$ ↗ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ↘ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $\quad \nabla f(\bar{x_0})$ y $\check{v}$ son perpendiculares



$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ ↗ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ ↘ $\left(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$

} VECTORES PERPENDICULARES AL GRADIENTE (SU PRODUCTO ESCALAR DA 0)

$\check{v}_{NULO} \text{ en } \bar{x_0} \quad \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)}{\|\nabla f(x_0)\|} \quad \text{o} \quad \dfrac{\left(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)}{\|\nabla f(x_0)\|}$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y la derivada se anula en más de dos direcciones → f NO ES DIFERENCIABLE
↳ y hay más de una dirección de derivada máxima o mínima

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N > 2)$ las direcciones de nulidad de la derivada direccional SON INFINITAS

PUNTO REGULAR DE UNA SUPERFICIE

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ asociada a la superficie S y sea (A_0, B_0) punto interior de D
$F(A_0, B_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto regular de S si:

I) $\exists \dfrac{\partial F}{\partial A}(A_0, B_0) \wedge \exists \dfrac{\partial F}{\partial B}(A_0, B_0)$ y ambas son continuas en (A_0, B_0) } ES DECIR, LA FUNCIÓN ES DIFERENCIABLE EN EL PUNTO (A_0, B_0)

II) $\vec{N} = \dfrac{\partial F}{\partial A}(A_0, B_0) \times \dfrac{\partial F}{\partial B}(A_0, B_0) \neq \bar{0}$

UNA SUPERFICIE ES REGULAR SI TODOS SUS PUNTOS SON REGULARES

El punto es regular si no se anulan todas sus derivadas parciales simultáneamente

PLANO TG A LA SUP GRÁFICA DE UN CAMPO ESCALAR $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $S: f(x,y)$ } FORMA EXPLÍCITA

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en (x_0, y_0), la ecuación del plano tg a la sup. gráfica de k (de ecuación $z = f(x,y)$) en el punto (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$ es

$$\boxed{\underbrace{z - z_0}_{f(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)} \Longrightarrow \boxed{z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

$$\boxed{\bar{N} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)}$$

- APROXIMACIÓN LINEAL CON EL PLANO TG

Ej) Calcular $f(1.02, 1.99)$ en $f(x,y) = x^2 e^{9x+y-6}$ usando una aproximación lineal.

Elegimos $A = (1,2)$, cercano al punto a aproximar, calculamos la ecuación de su plano tg

$z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2)$ $\quad f(1,2) = 1 \quad f'_x(1,2) = 6 \quad f'_y(1,2) = 1$] se calcula

$z = 1 + 6(x-1) + (y-2)$] PLANO TG

$f(1.02, 1.99) = 1 + 6.(1.02 - 1) + (1.99 - 2) \cong \underline{1.11}$

RECTA NORMAL A LA SUP. GRÁFICA DE UN CAMPO ESCALAR $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + h.(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)}$$

FORMA IMPLÍCITA: $S: F(x,y,z) = k$] → PLANO TG A LA SUP. DE NIVEL DE UNA FUNCIÓN $F(x,y,z)$

$$\boxed{0 = F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)}$$

PLANO Y RECTA A LA SUPERFICIE ASOCIADA A UN CAMPO VECTORIAL $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Sea $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ asociada a la sup. S y sea (A_0, B_0) punto interior de D de modo que $F(A_0, B_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es un PUNTO REGULAR DE S

Plano tg a S en (x_0, y_0, z_0): $\boxed{[(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)] \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial A}(A_0,B_0) \times \frac{\partial F}{\partial B}(A_0,B_0)\right) = 0}$

Recta normal a S en (x_0, y_0, z_0): $\boxed{(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) \cdot h \left(\frac{\partial F}{\partial A}(A_0,B_0) \times \frac{\partial F}{\partial B}(A_0,B_0)\right)}$

DEMOSTRACIÓN: EL VECTOR GRADIENTE ES ORTOGONAL A LA SUP. DE NIVEL DE UNA FUNCIÓN EN EL PUNTO

HIPÓTESIS $\quad F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0, z_0) punto interior de D

$G: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de modo que $\exists t_0 \in A / G(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$

S_k está asociada a la imagen de G

G es diferenciable en t_0

F es diferenciable en $\underbrace{G(t_0)}_{(x_0,y_0,z_0)}$

SUPERFICIE DE NIVEL k: $S_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / F(x,y,z) = k\}$

TESIS $\quad \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la sup. de nivel S_k en el punto (x_0, y_0, z_0)

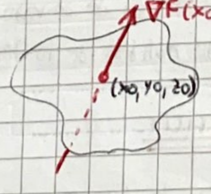
DEMOSTRACIÓN $\quad F(x,y,z) = k \Longrightarrow F(\bar{G}(t)) = k \to F \circ \bar{G}(t) = k \longrightarrow$ Derivamos m.a m

$(F \circ \bar{G})'(t) = k'$

$JF[\bar{G}(t)]\, J\bar{G}(t) = 0$

$\nabla F(G(t)) \cdot JG(t) = 0$

$\boxed{\underbrace{\nabla F(x,y,z)}_{1\times 3} \cdot \underbrace{JG(t)}_{3\times 1} = 0}$



Como ninguno es el vector nulo y su producto da 0, significa que son ortogonales

Si $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el gradiente es perpendicular a cada curva de nivel en un punto

Si $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el gradiente es perpendicular a cada sup de nivel en un punto

UNIDAD 6: FUNCIONES COMPUESTAS Y FUNCIONES IMPLÍCITAS

FUNCIONES COMPUESTAS

$\bar{F}: U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

$\bar{G}: B \subseteq \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^P$

$U \subset \mathbb{R}^N \qquad \mathbb{R}^M \qquad \mathbb{R}^P$

$x_0 \xrightarrow{F} \bar{F}(x_0) \xrightarrow{G} G(F(\bar{x_0}))$, $\bar{G}\circ\bar{F}$

$\boxed{Im\ F \subseteq DOM\ G}$

EL conjunto de llegada de F debe estar incluido en el de salida de G y tener la misma dimensión

$\boxed{\bar{G}\circ\bar{F}: U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P / (\bar{G}\circ\bar{F})(x) = \bar{G}(\bar{F}(x))}$ Si no se cumple, podemos restringir el dominio de F

Si $\bar{F}$ es diferenciable en $\bar{x_0}$ y G es diferenciable en $\bar{F}(\bar{x_0})$ entonces $\bar{G}\circ\bar{F}$ es diferenciable en $\bar{x_0}$ y su matriz Jacobiana es: $\boxed{\underbrace{JG\circ F(\bar{x_0})}_{P\times N} = \underbrace{JG[F(x_0)]}_{P\times M} \cdot \underbrace{JG(x_0)}_{M\times N}}$

[La composición de funciones de funciones diferenciables es diferenciable]

FUNCIONES IMPLÍCITAS

$\underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{IMPLÍCITA}} \qquad \underbrace{y=\sqrt{1-x^2}}_{\text{EXPLÍCITA}}$

DEFINICIÓN:

Sea la ecuación $F(x,y,z)=0$, donde $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea (x_0, y_0, z_0) punto interior de D.

Se dice que $F(x,y,z)=0$ define IMPLÍCITAMENTE una función $z=f(x,y)$ en un entorno de (x_0,y_0) si:

- $z_0 = f(x_0,y_0)$
- $F(x,y,f(x,y))=0 \quad \forall (x,y)\in E(x_0,y_0)$

TEOREMA DE DINI ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Sea la ecuación $F(x,y)=0$, asociada a la función $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sea (x_0,y_0) punto interior de D

Si se cumple que:
- $F(x_0,y_0)=0$
- $F \in C^1$ en (x_0,y_0) (F es diferenciable en (x_0,y_0))
- $F'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Entonces:
- La ecuación $F(x,y)=0$ define IMPLÍCITAMENTE una única función $y=f(x)$ en $E(x_0,y_0)$, siendo f una función continua en x_0, con $y_0=f(x_0)$
- La función f es derivable con continuidad en x_0 y además $\boxed{f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}}$

TEOREMA DE DINI ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

Sea la ecuación $F(x,y,z)=0$, asociada a la función $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. (x_0,y_0,z_0) punto interior de D

Si se cumple que:
- $F(x_0,y_0,z_0)=0$
- $F \in C^1$ en (x_0,y_0,z_0) (F es diferenciable en (x_0,y_0,z_0))
- $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

Entonces:
- La ecuación $F(x,y,z)=0$ define IMPLÍCITAMENTE una única función $z=f(x,y)$ en $E(x_0,y_0,z_0)$, siendo f una función continua en (x_0,y_0) con $z_0=f(x_0,y_0)$
- La función f es derivable con continuidad en (x_0,y_0) y además:

$\boxed{f'_x(x_0,y_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}} \wedge \boxed{f'_y(x_0,y_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}}$

Este teorema es CONDICIÓN SUFICIENTE pero NO NECESARIA para que una ecuación defina implícitamente una función $\Rightarrow$ Puede haber una ecuación F que no cumpla las condiciones de la hipótesis pero que igualmente defina implícitamente una función

UNIDAD 7: POLINOMIO DE TAYLOR Y EXTREMOS

DIFERENCIAL TOTAL

$F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) punto interior de D y $F \in C^1$ en (x_0, y_0)

$dF = f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$

$\partial(dF) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)\right)$

$$\boxed{dF(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

$$\boxed{d^2F(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y - y_0)^2}$$

POLINOMIO DE TAYLOR

FUNCIONES $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ F es derivable hasta el orden N+1 en x_0

$$\boxed{P_N(x) = F(x_0) + F'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \cdot F''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{N!} F^{(N)}(x_0) \cdot (x - x_0)^N}$$

Funciones $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ F es diferenciable hasta el orden N+1 en x_0 ($F \in C^{N+1}$ en x_0)

$$\boxed{P_N(x) = F(x_0) + dF(x_0) + \frac{1}{2!} d^2F(x_0) + \dots + \frac{1}{N!} d^N F(x_0)}$$

PT DE SEGUNDO ORDEN PARA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ } CASO PARTICULAR

$P_2(x, y) = F(x_0, y_0) + dF(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2F(x_0, y_0)$

$$\boxed{P_2(x, y) = F(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right]}$$

El polinomio de Taylor y todas sus derivadas parciales (segundas, terceras, ...) tienen el mismo valor que la función EN EL PUNTO EL CUAL SE ARMÓ EL POLINOMIO → Esto se demuestra evaluando el polinomio en (x_0, y_0), el punto donde se armó el polinomio

- $P(x_0, y_0) = F(x_0, y_0)$
- $P'_x(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)$
- $P'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0)$

EXTREMOS

Sea $F: D_F \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

F tiene un MÁXIMO RELATIVO en $\bar{x_0}$ si $\boxed{\exists\, \delta > 0:\ F(\bar{x_0}) \geq F(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta)}$

F tiene un MÍNIMO RELATIVO en $\bar{x_0}$ si $\boxed{\exists\, \delta > 0:\ F(\bar{x_0}) \leq F(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta)}$

F alcanza un MÁXIMO ABSOLUTO en $\bar{x_0}$ si $\boxed{F(\bar{x_0}) \geq F(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in D_F}$

F alcanza un MÍNIMO ABSOLUTO en $\bar{x_0}$ si $\boxed{F(\bar{x_0}) \leq F(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in D_F}$

CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea $F: D_F \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\bar{x_0}$ y $\bar{x_0}$ es extremo relativo $\to$ $\boxed{\nabla F(\bar{x_0}) = \bar{0}}$

↳ El plano tg es horizontal, paralelo al plano xy ya que tiene la forma $z = k$

No solo se anulan las derivadas parciales donde la función alcanza un extremo, sino que se anulan TODAS LAS DERIVADAS DIRECCIONALES.

TEOREMA

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, xo punto interior y $f(x_0)$ extremo relativo de f en D

$$\boxed{\text{Si existe } \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = f'(\bar{x}_0, v) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = 0}$$

SI EXISTE LA DERIVADA DIRECCIONAL EN EL PUNTO VALE 0

DEMOSTRACIÓN

Como en la hipótesis no se pide que la función sea diferenciable en el punto, no usamos gradiente por versor para la derivada direccional sino que usamos la definición de derivada direccional en un punto

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = \lim_{H \to 0} \frac{f(x_0 + H\cdot\vec{v}) - f(x_0)}{H}}$$

Dado que este límite existe y es finito deberán coincidir los valores de los límites laterales $H \to 0^+$ y $H \to 0^-$

- Si xo es máximo relativo

Existe una bola de $\bar{x}_0$ en donde se verifica $f(\bar{x}_0 + H.\vec{v}) \leq f(\bar{x}_0) \Rightarrow f(x_0 + H\vec{v}) - f(\bar{x}_0) \leq 0$

$$\lim_{H \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0 + H\cdot\vec{v}) - f(\bar{x}_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{H}_{>0}} \leq 0$$

$$\lim_{H \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0 + H.\vec{v}) - f(\bar{x}_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{H}_{<0}} \geq 0$$

La única posibilidad para que el límite exista es que valga 0
Por lo tanto resulta $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = 0}$

- Si xo es mínimo relativo

Existe una bola de $\bar{x}_0$ donde se verifica $f(x_0 + H.\vec{v}) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0 + H.\vec{v}) - f(x_0) \geq 0$

$$\lim_{H \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0 + H\vec{v}) - f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{H}_{>0}} \geq 0$$

$$\lim_{H \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0 + H\vec{v} - f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{H}_{<0}} \leq 0$$

Solo se puede cumplir si el límite vale 0
$\therefore$ si $\bar{x}_0$ es extremo $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = 0}$

Esto demuestra la condición necesaria del vector gradiente ya que las derivadas parciales son un caso particular de las derivadas direccionales.

Se llaman PUNTOS CRÍTICOS a los candidatos a extremos de una función y son los puntos en donde

- $\nabla \vec{f}(\bar{x}_0) = 0$ (PUNTOS ESTACIONARIOS) ó
- $\bar{x}_0$ donde f es continua pero NO diferenciable

PUNTO SILLA: Punto candidato a ser un extremo pero que no lo es

Sea $f: D_f \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x}_0$ un punto crítico. Si se verifica que:
$\boxed{\exists\, x_1, x_2 \in D_f \,/\, f(x_1) > f(x_0) \wedge f(x_2) < f(x_0)}$ entonces xo es un PUNTO SILLA

TEOREMA DE SYLVESTER - CONDICIÓN SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $(x_0, y_0) \in D$ punto crítico de f y $f \in C^2$ en D.

MATRIZ HESSIANA DE F EN (x_0, y_0)

Las derivadas cruzadas son iguales

$$\boxed{H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}}$$

No se pueden anular todas las derivadas simultaneamente

- Si $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un punto silla
- Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0 \wedge f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f$ alcanza un MÍNIMO LOCAL en (x_0, y_0)
- Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0 \wedge f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow f$ alcanza un MÁXIMO LOCAL en (x_0, y_0)
- Si $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0 \Rightarrow$ No se puede asegurar nada, se usa la definición.

CRITERIO GENERAL DE SYLVESTER

Definición Previa: Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se llaman submatrices principales a todas las matrices menores que se forman utilizando los elementos de la diagonal principal

Ej $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ • $A_1 = a_{11}$ • $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ • $A_3 = A$ tiene 3 submatrices principales

Generalización: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C^2(\bar{x_0})$ con $\bar{x_0}$ punto estacionario

- Si el det. de todas las submatrices principales es POSITIVO $\Rightarrow$ f alcanza un MÍNIMO RELATIVO en $\bar{x_0}$
- Si el det. de todas las submatrices principales sigue el orden: $\begin{cases} \text{Negativo en impares} \ \angle A_1, A_3 \\ \text{Positivo en pares} - A_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f alcanza un MÁXIMO RELATIVO en $\bar{x_0}$
- Si el det. de todas las submatrices principales no sigue ninguno de los órdenes anteriores pero todas son $\neq 0$ $\Rightarrow$ f tiene un PUNTO SILLA en $\bar{x_0}$
- Si el det. de alguna submatriz principal es cero $\longrightarrow$ El criterio NO DECIDE

EXTREMOS CONDICIONADOS

TEOREMA DE WEIERSTRASS – Teorema de existencia

$\boxed{f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ continua en } A \text{ y } A \text{ es un conjunto compacto} \Rightarrow \exists \bar{x_1}, \bar{x_2} \in A \ / \ f(\bar{x_1}) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x_2}) \ \forall \bar{x} \in A}$

Si la función es continua en un conjunto compacto se garantiza que f alcanza extremos absolutos en $\bar{x_1}$ y $\bar{x_2}$.

DEFINICIÓN: EXTREMOS CONDICIONADOS (SE RESTRINGE LA FUNCIÓN A LA CURVA)

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{C}$ una curva con $\mathcal{C} \subset D$, interesa averiguar los extremos que alcanza $f/\mathcal{C}$ (f restringida a los puntos de la curva)

$f|_{\mathcal{C}}$ tiene un MÁXIMO RELATIVO en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ si $\Rightarrow$ $\boxed{\exists \delta > 0 : f(x_0, y_0) \geq f(x, y)}$ $\forall (x,y) \in (B((x_0,y_0);\delta) \cap \mathcal{C})$ ← Los puntos se limitan a la curva

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE – CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS CONDICIONADOS

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1$ en D. → Restricciones
Sean las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_k : B \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $g_i \in C^1$ en B $k < N$ y las derivadas parciales de g_i no se anulan todas simultáneamente

Sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^N / g_1(x) = 0 \wedge g_2(x) = 0 \wedge \ldots \wedge g_k(x) = 0\}$ (Puntos de $\mathbb{R}^N$ donde se cumplen todas las igualdades de condición)
Sea $x_0 \in A$ un punto tal que $f(x_0)$ es un extremo condicionado de f/A
Entonces existen los números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de modo que x_0 es punto crítico de la función

$$\boxed{L(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 . g_1(x) + \lambda_2 . g_2(x) + \ldots + \lambda_k . g_k(x)}$$

Esta función permite obtener los puntos críticos que después serán clasificados

---

Sea $F \wedge G$ dos campos escalares diferenciables en un entorno de $\bar{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ con derivadas no nulas simultáneamente. Si $\bar{X_0}$ es un punto crítico de F en el conjunto $A = \{(x,y,z) / G(x,y,z) = 0\}$ entonces existe un λ_0 tal que $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es punto crítico de

$$\boxed{L(x,y,z,\lambda) = F(x,y,z) + \lambda . G(x,y,z)}$$

Scanned with CamScanner

15

CLASIFICACIÓN DE EXTREMOS CONDICIONADOS - MATRIZ HESSIANA ORLADA

- CONDICIÓN SUFICIENTE $[\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ Y UNA SOLA CONDICIÓN

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 0\}$ se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener los puntos críticos en el análisis de los extremos condicionados para $f|_A$.

Sea $p_0 = (x_0, y_0)$ con $\lambda = \lambda_0$ un punto crítico de $f|_A$

Se define la función $L^*(x,y) = f(x,y) + \lambda_0 \cdot g(x,y)$ — se define una función L^* por cada punto crítico hallado

$$\boxed{H_{ORLADO}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & g'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{pmatrix}}$$

Si $|H_o| > 0 \Rightarrow f|_A$ alcanza un MÁXIMO CONDICIONADO en (x_0, y_0)

Si $|H_o| < 0 \to f|_A$ alcanza un MÍNIMO CONDICIONADO en (x_0, y_0)

Si $|H_o| = 0 \Rightarrow$ no se puede asegurar nada

Ej: Encontrar extremos condicionados de $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ para los puntos del conjunto A. Es decir, los extremos condicionados de $f|_A$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y - 1 = 0\}$.

1) DEFINIR FUNCIÓN L. $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$

$$\boxed{L(x,y,\lambda) = 4 - x^2 - y^2 + \lambda \cdot (x+y-1)}$$

2) HALLAR PUNTOS CRÍTICOS DE L (ya que son los mismos puntos críticos de $f|_A$)

$$\begin{cases} L'_x : -2x + \lambda = 0 \; (1) \\ L'_y : -2y + \lambda = 0 \; (2) \\ L'_\lambda : x + y - 1 = 0 \; (3) \end{cases}$$

UTILIZAMOS LA CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE PUNTOS CRÍTICOS

$\begin{cases} \lambda = 2x \; (1) \\ \lambda = 2y \; (2) \end{cases} \to 2x = 2y \to x = y$

(3) $x + y - 1 = 0 \Rightarrow x + x - 1 = 0 \to \boxed{x = \frac{1}{2}}$

Si $x = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} y = x = \frac{1}{2} \\ \lambda = 2x = 1 \end{cases}$ El PUNTO CRÍTICO ES $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con $\lambda = 1$

3) CLASIFICAR EL PUNTO CRÍTICO OBTENIDO. DEFINIMOS LA FUNCIÓN L^* Y EL HESSIANO ORLADO

$L^*(x,y) = f(x,y) + 1 \cdot g(x,y) \Rightarrow L^*(x,y) = 4 - x^2 - y^2 + x + y - 1$

$$H_{ORLADO}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H_o| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4 > 0$ MÁXIMO CONDICIONADO en $(1/2, 1/2)$

$f|_A$ alcanza un MÁXIMO CONDICIONADO