P1) Calcule el area de la region plana definida por $g(x) \leq y \leq 5$, cuando $y = g(x)$ es la solucion particular de la ecuacion diferencial $y'' + y' = 2x$ que en $(0; y_0)$ tiene recta tangente de ecuacion $y + 2x = 2$.

resolveremos primero la ec diferencial:

$r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0 \quad r = 0 \vee r = -1$

$y_H = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x}$

$y_p = Ax + B \Rightarrow y'_p = A \Rightarrow y''_p = 0$ reemplazando:

$0 + A = 2x \Rightarrow$ absurdo "no hay parte lineal"

ensayo entonces $y_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y'_p = 2Ax + B$

$y''_p = 2A$

$2A + 2Ax + B = 2x \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$ no hay condición

$2A + B = 0 \Rightarrow B = -2 \Rightarrow \boxed{y_p = x^2 - 2x}$ para C; la puedo considerar "0"

$y_G = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x$

de la recta tangente $y + 2x = 2$ podemos concluir que:

$y = -2x + 2 \Rightarrow y'(0) = -2$ (pendiente)

$y(0) = -2 \cdot 0 + 2 \Rightarrow y(0) = 2$

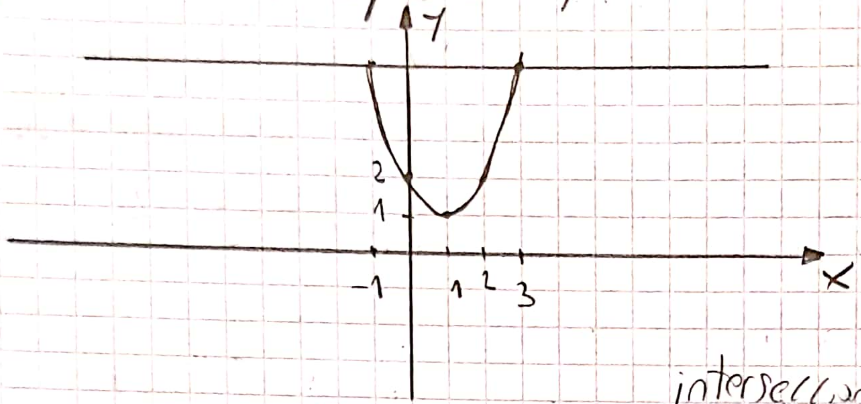
$y' = -C_2 e^{-x} + 2x - 2 \Rightarrow y'(0) = -C_2 - 2 = -2 \Rightarrow C_2 = 0$

$y(0) = C_1 + C_2 = 2$ pero $C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2$

(2)

la curva es entonces: $y_p = 2 + x^2 - 2x$

Con lo cual $x^2 - 2x + 2 \leq y \leq 5$ quedando la grafica:



$x_v = -\frac{b}{2a}$

$x_v = -\frac{-2}{2}$

interseccion $y = 5 \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 2 = 5$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

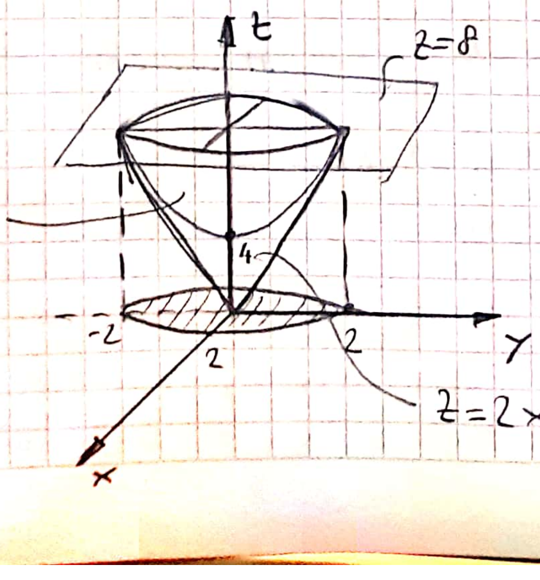
$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

$$\text{Area}: \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2-2x+2}^{5} dy \right) dx = \int_{-1}^{3} (5 - (x^2 - 2x + 2))\, dx$$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_{-1}^{3}$$

$$\text{Area} = (-9 + \cancel{9} + 9) - \left(+\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}$$

2) Halle la masa del cuerpo cuyo volumen esta definido por $z \leq 4 + x^2 + y^2$, $z \geq 2x^2 + 2y^2$ si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al eje z



$z = 4 + \rho^2$

$z = 2x^2 + 2y^2 = 2\rho^2$

$$\overbrace{4 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2}^{\text{interseccion}}$$

$x^2 + y^2 = 4$

$\boxed{z = 8}$

$\delta = k \cdot d = k\sqrt{x^2+y^2}$ en cilíndricas:

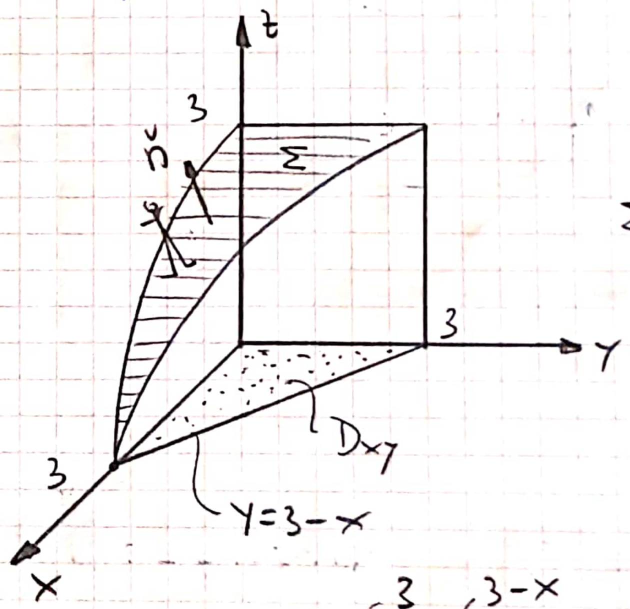
$$M = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2}\left(\int_{2\rho^2}^{4+\rho^2} k\rho\rho\,dz\right)d\rho\right)d\theta = 2\pi\int_0^2 k\rho^2(4+\rho^2-2\rho^2)\,d\rho$$

$$M = 2\pi k\left(\frac{4\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi k\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right) = \frac{128}{15}k\pi$$

P3) Sea $\bar{f}(x,y,z) = (xz, xy, z^2)$ definido en $\mathbb{R}^3$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $x^2+z^2=4$ con $x+y\leq 3$ en el 1er octante. Ind. gráficamente que orientación adoptó para Σ

(proyecto en xy)

$$\phi = \iint_{D_{xy}} \bar{f}\cdot\bar{\nabla}F\,\frac{dx\,dy}{|F'_z|}$$



$\Sigma: F(x,y,z) = x^2+z^2-4=0$

$\bar{\nabla}F = (2x; 0; 2z)$

$\bar{f}\cdot\bar{\nabla}F = 2x^2z + 2z^3$

$F'_z = 2z \qquad z\geq 0 \Rightarrow$

$|F'_z| = 2|z| = 2z$ reemplazando:

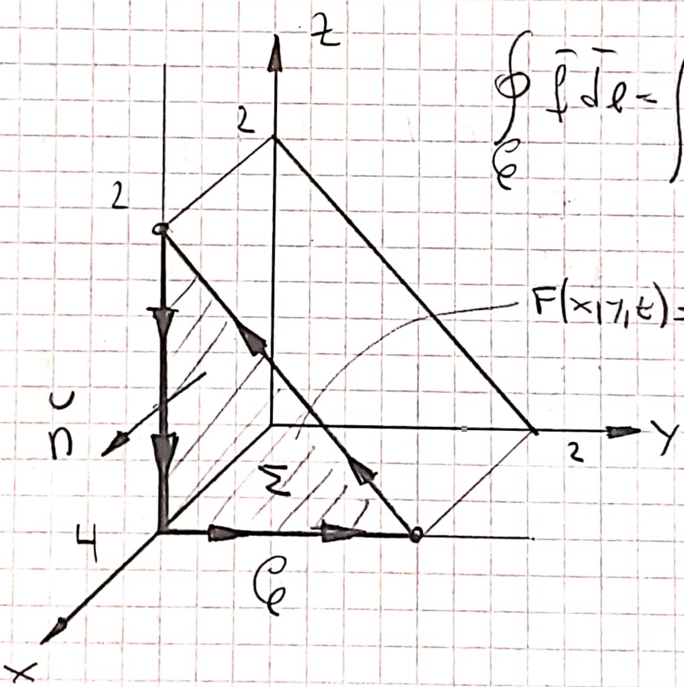
$$\phi = \int_0^3\int_0^{3-x} \frac{\cancel{2}x^2\cancel{z}+\cancel{2}z^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2z}}\,dx\,dy$$

④

$$\phi=\int_0^3\int_0^{3-x}(x^2+z^2)\,dx\,dy=\int_0^3\int_0^{3-x}\underbrace{(x^2+z^2)}_{9\ (\text{en }\Sigma)}dx\,dy=9\cdot\frac{3\cdot 3}{2}=$$

$$\boxed{\phi=81/2}$$

P4) Dado $\bar{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 / \bar{f}(x,y,z)=(\overset{P}{yx};\overset{Q}{xz};\overset{R}{\varphi(x,z)})$ con $\bar{f}\in C^1(\mathbb{R}^3)$ calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva borde de la superficie de ecuación $x=4$ con $y+z\leq 2$; $z\geq 0$ $y\geq 0$. Indique gráficamente con qué orientación ha decidido realizar la circulación.



$$\oint_{\mathcal{C}}\bar{f}\,\bar{dl}=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\bar{f}\cdot\bar{\nabla}F\,\frac{dy\,dz}{|F'_x|}$$

$F(x,y,z)=x-4$

$\bar{\nabla}F=(1,0,0)$

$$\operatorname{rot}\bar{f}=(R'_y-Q'_z;P'_z-R'_x,Q'_x-P'_y)=(0-x;0-\varphi'_x;z-x)$$

$\operatorname{rot}\bar{f}\cdot\bar{\nabla}F=-x \qquad F'_x=1 \Rightarrow$

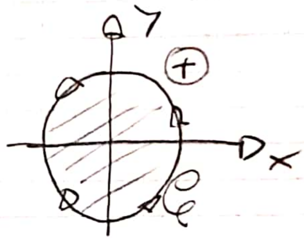
$$\oint_{\mathcal{C}}\bar{f}\,\bar{dl}=\iint \underbrace{-x}_{=4\text{ en }\Sigma}\,dy\,dz \Rightarrow \oint\bar{f}\,\bar{dl}=-4\,\frac{2\cdot 2}{2}=-8$$

T1) a) Enuncie el T. de Green. Siendo $\mathcal{C}$ de ecuacion $x^2+y^2=r^2$ con $r>0$; resulta $\oint_{\mathcal{C}^+} \bar{f}\cdot\bar{ds} = \pi r^3$; calcular sabiendo que $f(x,y) = (\overbrace{4-2y}^{P}; \underbrace{y+4x}_{Q})$

b) Sea $\bar{f} = \bar{\nabla}\phi / \bar{f}(x,y) = (y\,g(x) - xy; y + g(x))$ con $\bar{f}(0,1) = (1,2)$

Calcule $\int_{AB} \bar{f}\,\bar{ds}$ si $\bar{A} = (0,0)$; $\bar{B} = (2;2)$

a) $\oint \bar{f}\cdot\bar{dr} = \iint (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$



$\pi r^3 = \iint (4-(-2))\,dx\,dy = 6\underbrace{\iint dx\,dy}_{\text{Area Circulo}}$

$\cancel{\pi} r^{\cancel{3}} = 6\cancel{\pi}\,\cancel{r^2} \Rightarrow \boxed{r=6}$

b) Como $\bar{f} = \bar{\nabla}\phi \Rightarrow (\overbrace{y\,g(x) - xy}^{P}; \underbrace{y+g(x)}_{Q}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}; \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$

$Q'_x = P'_y \Rightarrow g'(x) = g(x) - x \longrightarrow y' = y - x$

$u'v + uv' = uv - x$

$u'v + u(v'-v) = -x$

$\frac{dv}{dx} = v \Rightarrow \frac{dv}{v} = x$

$\frac{du}{dx}\cdot e^x = -x \Rightarrow$

$\ln v = x \Rightarrow \boxed{v = e^x}$

$du = -\int x e^{-x}\,dx = +\frac{e^{-x}}{1}\left(x - \frac{1}{-1}\right) + C = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$g(x) = u\cdot v = +x + 1 + Ce^x$

Como $\bar{f}(0,1)=(1,2) \Rightarrow (1,2)=(1\cdot g(0)-0\cdot 1; 1+g(0))$

$g(0)=1 \Rightarrow +0+1+Ce^0 = 1 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$g(x)=1+x \Rightarrow$

$\bar{f}(x,y)=(y(1+x)-xy; y+1+x)=(y; x+y+1)$

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=y \Rightarrow \phi(x,y)=yx+\gamma(y)$

$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x+y+1=x+\gamma'(y) \Rightarrow \gamma(y)=\frac{y^2}{2}+y+k$

$\phi(x,y)=yx+\frac{y^2}{2}+y+k$

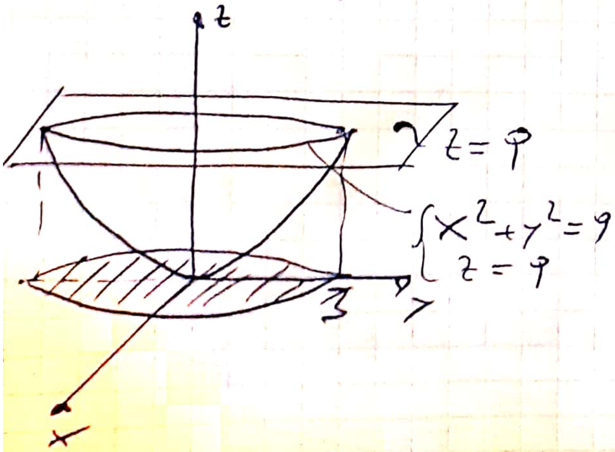
$\int_{AB} \bar{f}\, d\bar{s} = \phi(B)-\phi(A) = \phi(2,2)-\phi(0,0) =$

$= 4+2+2+k-k = 8$

T2) a) Enuncie el teorema de la divergencia. Calcule el flujo de

$\bar{f}(x,y,z)=(y\,g(z-x), 3y+z\,g(z-x), y\,g(z-x))$

$\text{div}\,\bar{f} = \cancel{y g'(-1)} + 3 + \cancel{y g'(1)} = 3$



Escaneado con CamScanner

$$\phi_T = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3\left(\int_{\rho^2}^{9} \rho\, dz\right)d\rho\right)d\theta = 6\pi\int_0^3 \rho\left(9-\rho^2\right)d\rho = 6\pi\left[\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3$$

$$\phi_T = 6\pi\left[\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right] \Rightarrow \phi_T = 6\pi\cdot\frac{81}{4} = \frac{3}{2}\pi\cdot 81$$

$$\boxed{\phi_T = \frac{243}{2}\pi}$$

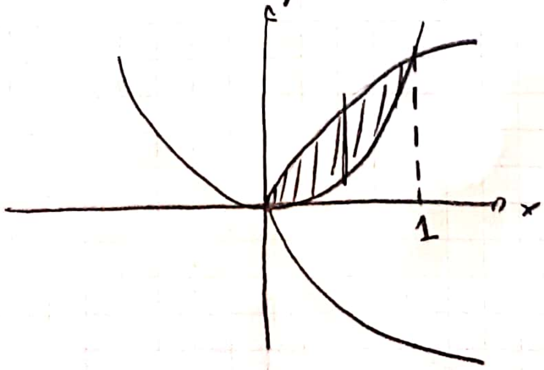
b) Calcule el area de la region plana limitada por las lineas de nivel 1 del campo

$$f(x,y) = (y-x^2)(x-y^2)+1$$

C.N. $k=1 \Rightarrow (y-x^2)(x-y^2)+\cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow$

$y-x^2=0 \quad \vee \quad x-y^2=0$

$y=x^2 \qquad\qquad x=y^2$



$$A = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right)dx \Rightarrow$$

$$A = \int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$$

$$A = \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$