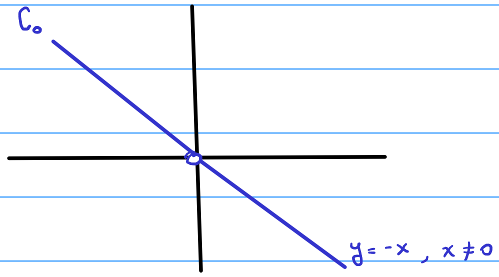
E 1) a) $C_k = \{(x,y) \in Dom(f) \ / \ f(x,y) = k\} =$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = k & \text{con } x \neq y \\ \text{ó} & \\ 1 = k & \text{con } x = y \end{cases} \right\}$$

$$C_0 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 0 & \text{con } x \neq y \\ \text{ó} & \\ \underbrace{1 = 0}_{\text{Abs.}} & \text{con } x = y \end{cases} \right\} =$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + y = 0 \ \text{ con } x \neq y \}$$

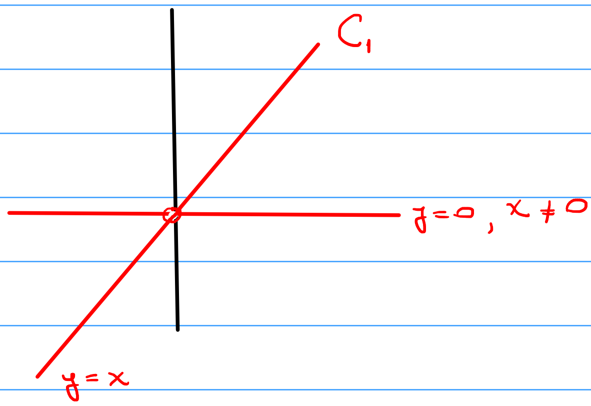


$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 1 & \text{con } x \neq y \\ \text{ó} & \\ 1 = 1 & \text{con } x = y \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x+y = x-y & \text{con } x \neq y \\ \text{ó} & \\ x = y & \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} y = -y & \text{con } x \neq y \\ \text{ó} & \\ x = y & \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} y = 0 & \text{con } x \neq 0 \\ \text{ó} & \\ x = y & \end{cases} \right\}$$



b) $f'_x(0,0) \overset{\text{si existe}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h+0}{h-0} - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$ ✓

$f'_y(0,0) \overset{\text{si existe}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+h(0,1)) - f(0,0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{0+h}{0-h} - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2}{h} \quad \nexists$

$\therefore \ \exists f'_x(0,0) = 0 \ , \ \nexists f'_y(0,0)$

$\therefore$ f no es diferenciable en $(0,0)$ pues no existe una de sus derivadas parciales en ese punto.

E2) $\mathcal{F}: \ (x-1)^2 + y^2 = k^2$

$\downarrow$

$2(x-1) + 2yy' = 0$ EDO de $\mathcal{F}$

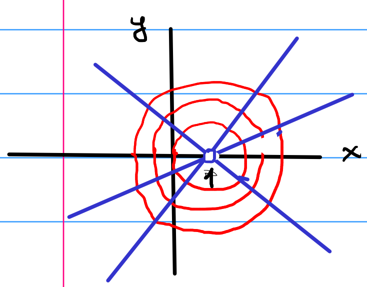
$2(x-1) + 2y\dfrac{-1}{y'} = 0$ EDO de $\mathcal{F}$

Si $x \neq 1, y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$



$$|y| = |x-1|\, e^C \rightsquigarrow$$

$\mathcal{F}^\perp$: $y = K(x-1)$

$K \in \mathbb{R}$

E3) Hay que corregir el enunciado:

Nota: hay un error de tipeo que fue corregido el día del parcial (me olvidé de decirlo)

Es

$$\underbrace{w \ln(v^2+u^2) + uvw + w}_{F(x,y,z)} = 1$$

- $F(0,-1,1) = 1 \ln((-1)^2+0^2) + 0(-1)\cdot 1 + 1 = 1$ ✓

- $F'_u = \dfrac{2uw}{v^2+u^2} + vw$

  $F'_v = \dfrac{2vw}{v^2+u^2} + uw$

  $F'_w = \ln(v^2+u^2) + uv + 1$

  } continuas para $v^2+u^2>0$. En particular en un entorno de $(0,-1,1)$

  $\therefore F \in C^1$ en un entorno de $(0,-1,1)$

- $F'_w(0,-1,1) = \ln((-1)^2+0^2) + 0(-1) + 1 = 1 \neq 0$

De estas 3 condiciones se puede asegurar que, por el Teorema de la función implícita, la ecuación

$$w \ln(v^2+u^2) + uvw + w = 1$$

define, implícitamente, w como función de u y v: $w = f(u,v)$

Además, f es C^1 en $(0,-1)$, y son:

$$f'_u(0,-1) = -\frac{F'_u(0,-1,1)}{F'_w(0,-1,1)} = -\frac{\frac{2\cdot 0\cdot(-1)}{(-1)^2+0^2} + (-1)1}{1} = 1$$

$$f'_v(0,-1) = -\frac{F'_v(0,-1,1)}{F'_w(0,-1,1)} = -\frac{\frac{2\cdot(-1)\cdot 1}{(-1)^2+0^2} + 0\cdot 1}{1} = 2$$

Por regla de la cadena,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
& x & & \\
h \arrow[ur, no head] \arrow[r, no head] & f \arrow[r, no head] \arrow[dr, no head] & u \arrow[r, no head] \arrow[dr, no head] & x \\
& & v \arrow[r, no head] \arrow[dr, no head] & y \\
& & & x \quad y
\end{tikzcd}$$

$u = 2x - y$

$v = 3x - y^2$

$x = 1$

$y = 2$

$u = 0$

$v = -1$

$$h'_x = 2x + f'_u \, u'_x + f'_v \, v'_x \qquad h'_x(1,2) = 2 \cdot 1 + f'_u(0,-1) \cdot 2 + f'_v(0,-1) \cdot 3$$
$$= 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$h'_y = f'_u \, u'_y + f'_v \, v'_y \qquad h'_y(1,2) = f'_u(0,-1)\,(-1) + f'_v(0,-1)(-2 \cdot 2)$$
$$= 1 \cdot (-1) + 2(-4) = -9$$

$$\nabla h(1,2) = (10, -9)$$

Como h es diferenciable en $(1,2)$ por ser composición de diferenciables, la derivada direccional máxima en $(1,2)$ es $\|\nabla h(1,2)\| = \sqrt{10^2 + (-9)^2} = \sqrt{181}$

E4)

$P = (3,5,1)$

$$\begin{cases} u^2 - v = 3 \\ u^2 + v = 5 \\ u - v = 1 \end{cases}$$

$2u^2 = 8 \rightarrow u^2 = 4 \rightarrow u = \pm 2$

Sólo $2 \in [1,3]$ $\therefore u = 2$

$u - v = 1 \longrightarrow v = 2 - 1 = 1 \in [0,2]$

$$\therefore (3,5,1) = \vec{P}(2,1) = P$$

$$\vec{P}'_u = (2u, 2u, 1)$$
$$\times \quad \vec{P}'_v = (-1, 1, -1)$$
$$\vec{N} = (-2u - 1, -1 + 2u, 4u)$$
$$\vec{N}_P = (-5, 3, 8)$$

Recta normal a S en P : $(x,y,z) = (3,5,1) + \lambda(-5,3,8)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Plano xy : $z = 0$ $\qquad z = 1 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$

$\therefore$ intersección con plano xy : $(3,5,1) + \left(-\frac{1}{8}\right)(-5,3,8) =$

$$= \left(\frac{29}{8}, \frac{37}{8}, 0\right)$$

T1) "Mínimo relativo" de $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un valor $f(x_0,y_0)$ de la imagen de f que verifica

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \text{ en un entorno de centro } (x_0,y_0)$$

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 6y = 0 \to 2y = x^2 \\ f'_y = -6x + 3y^2 = 0 \to 2x = y^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2y = \frac{y^4}{4} \to y=0 \vee y=2 \\ 2x = y^2 \qquad\quad \downarrow x=0 \quad \downarrow x=2 \end{cases}$$

$\therefore$ Puntos estacionarios : $(0,0)$, $(2,2)$

$$\Delta H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{vmatrix}$$

$$\Delta H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Pto. silla en $(0,0)$

$$\Delta H_f(2,2) = \begin{vmatrix} 12^{>0} & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$$

$\therefore$ en $(2,2)$ hay un mínimo relativo de valor $f(2,2) = -6$

T2) a) Geométricamente significa que todas las curvas que se obtienen cortando la gráfica de f con un plano vertical, cuya traza en el plano xy es

$$(x,y) = (a,b) + \lambda(v_1,v_2) \quad , \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

cualquiera sea el versor (v_1,v_2), admite recta tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$

Analíticamente significa que, cualquiera sea el versor (v_1,v_2), existe (y es finito)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((a,b)+h(v_1,v_2)) - f(a,b)}{h}$$

b) $$f'((0,0);(v_1,v_2)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(v_1,v_2)) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} =$$

$$= \begin{cases} \text{si } v_2 = 0 : \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \\ \text{si } v_2 \neq 0 : \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 v_1^2}{h v_2}}{h} = \frac{v_1^2}{v_2} \end{cases}$$

$\therefore \ \exists f'((0,0);(v_1,v_2)) \quad \forall (v_1,v_2)$

Es 0 para $\check{v} = (\pm 1, 0)$

Es $\frac{v_1^2}{v_2}$ para $\check{v} = (v_1, v_2)$, $v_2 \neq 0$, $v_1^2 + v_2^2 = 1$