Análisis Matemático II

Preparación de cosas para hacer en clase...

15 de junio de 2018

---

1. 2do parcial seminara 05/07/2016 #231

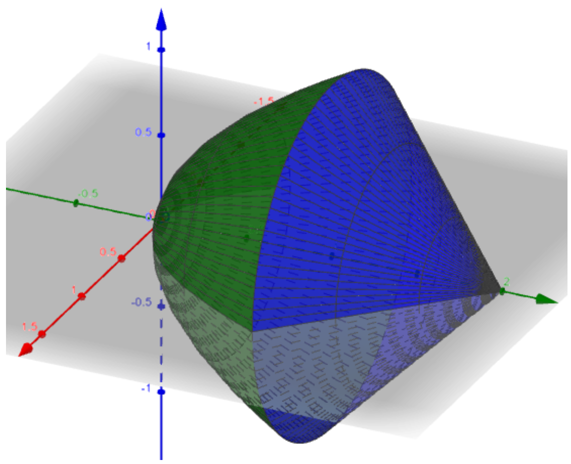
—enunciado—

Calcule la masa y la coordenada z_{cm} del cuerpo delimitado por las superficies $y = x^2 + z^2$ y $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$ en el primer octante, si la densidad es, en cada punto, $\delta(x, y, z) = 2|x|$.

Rta: $M = \frac{5\pi}{6}$
$z_{cm} = 0$

—solución—

Veamos donde se intersectan las superficies
$y = x^2 + z^2$ (1)
$y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$ (2)
Paso a cilíndricas sobre el eje y
$y = \rho^2$ (1')
$y = 2 - \rho$ (2')
igualando
$\rho^2 = 2 - \rho$
$\rho^2 + \rho - 2 = 0$
de donde $\rho = -2$ (absurdo) o $\rho = 1$.
Entonces calculamos la masa
$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho} dy = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$
Ahora calculamos esto
$M_z = \iiint_H z\delta dV = \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho} dy = 0$
De donde vemos que $\boxed{z_{cm} = 0}$



---

2. 2do parcial seminara 05/07/2016 #232

—enunciado—
Considere la superficie definida por $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ con $y \geq 0$.

a) Calcule, mediante integrales de superficie, el área de la misma.

b) Evalúe el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-2yz, 2xz, 3)$ a través de ella, considerando la normal orientada hacia las y positivas. Explique el sentido físico del signo del resultado.

---

3. 2do parcial seminara 07/07/2017 #238

—enunciado—
Considere la superficie definida por $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 4$, $y \geq 0$.

a) Calcule el area de la misma.

b) Evalue el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-xy^2, x^2y, 3z)$ a través de ella, considerando la normal orientada hacia las z negativas. Interprete el signo del flujo obtenido.

Rta: a) $\frac{8\pi\sqrt{10}}{9}$
b) $\frac{-64\pi}{9}$

—solución—

a) Parametrizo la superficie con $g(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), 3u)$, $0 \leq u \leq 4/3$, $0 \leq v \leq \pi$.

$g'_u = (\cos(v), \sin(v), 3)$

$g'_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$

$g'_u \times g'_v = (-3u\cos(v), -3u\sin(v), u)$

$||g'_u \times g'_v|| = \sqrt{9u^2 + u^2} = \sqrt{10}u$

Luego el área pedida es

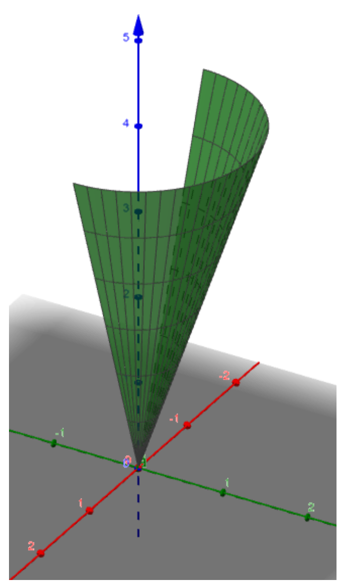
$$\sqrt{10}\int_0^\pi dv \int_0^{4/3} u du = \boxed{\frac{8\pi\sqrt{10}}{9}}$$

b) $\int_0^\pi dv \int_0^{4/3}(-u^3\cos(v)\sin^2(v), u^3\cos^2(v)\sin(v), 9u) \cdot$ $(-3u\cos(v), -3u\sin(v), u)du$

$= \int_0^\pi dv \int_0^{4/3} 3u^4\cos^2(v)\sin^2(v) - 3u^4\cos^2(v)\sin^2(v) + 9u^2 du$

$= \int_0^\pi dv \int_0^{4/3} 9u^2 du = \frac{64\pi}{9}$

Como la orientación de g es hacia z^+ y me piden hacia z^-, el flujo pedido es $\boxed{\frac{-64\pi}{9}}$



4. 2do parcial seminara 29/11/2016 #245

—enunciado—

¿Cuál es el area del trozo de superficie definido por
$\vec{\sigma}(u,v) = (u-v, u^2-v^2, u+v)$, con $1 \leq u^2+v^2 \leq 9$?

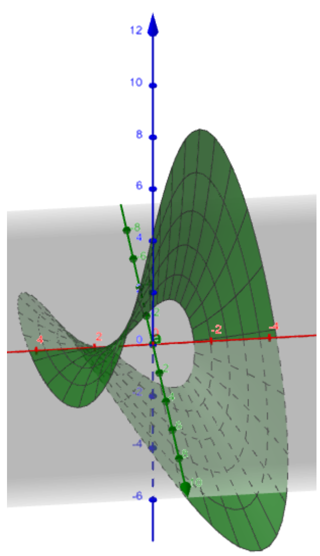
Rta: $\frac{2\pi(19\sqrt{19}-3\sqrt{3})}{3}$

—solución—

$\sigma'_u = (1, 2u, 1)$
$\sigma'_v = (-1, -2v, 1)$
$(\sigma'_u \times \sigma'_v) = (2u+2v, -1-1, -2v+2u) = 2(u+v, -1, u-v)$
$||\sigma'_u \times \sigma'_v|| = 2||(u+v, -1, u-v)|| = 2\sqrt{(u+v)^2+1+(u-v)^2}$
$= 2\sqrt{u^2+2uv+v^2+1+u^2-2uv+v^2}$
$= 2\sqrt{2u^2+2v^2+1}$

El area de la superficie, usando polares, nos queda

$$\boxed{2\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^3 \rho\sqrt{2\rho^2+1}d\rho = \frac{2\pi(19\sqrt{19}-3\sqrt{3})}{3}}$$



5. 2do parcial seminara 24/11/2017 #249

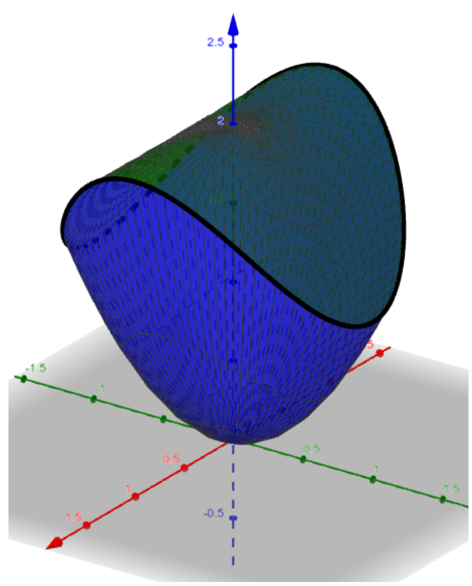
—enunciado—

Calcule la masa del cuerpo delimitado por las superficies $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 2 - y^2$, si la densidad del material es, en cada punto, proporcional a la distancia del punto al eje z.

Rta: $\frac{8\pi}{15}$

—solución—

Analizo la intersección de las superficies
$z = 2x^2 + y^2$ (1)
$z = 2 - y^2$ (2)
Igualando
$2x^2 + y^2 = 2 - y^2$
$x^2 + y^2 = 1$
o sea que la intersección vive sobre dicho cilindro.
La densidad de masa es $\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$
En cilíndricas sobre el eje z, la masa es
$M = \iiint_H \delta dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{2\rho^2 \cos^2(\phi)+\rho^2 \sin^2(\phi)}^{2-\rho^2 \sin^2(\phi)} dz$
$= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2(2 - 2\rho^2) d\rho = \boxed{\frac{8\pi}{15}}$



6. 2do parcial seminara 24/11/2017 #250

—enunciado—

Considere la superficie definida por $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ con $x \leq 3$ y $z \geq 0$.

a) Calcule el area de la misma.

b) Evalue el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (y, xz, -xy)$ a través de esa superficie, indicando en un gráfico el sentido que eligió para la normal.

---

7. final 19/12/2017 #205

—enunciado—

Dada la superficie Σ de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el 1° octante con $z \leq 9$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ orientada hacia z^+ sabiendo que $\vec{f}(x, y, z) = (2y, -2x, 2z)$.

Rta: 243π

—solución—

$g(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, definido en $x, y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 9^2$.

$g'_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

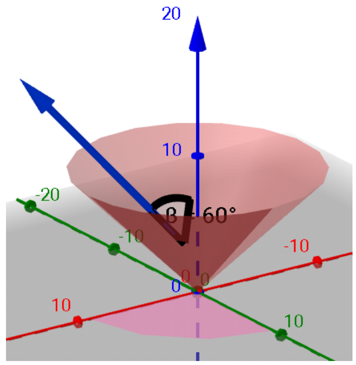
$g'_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$n = g'_x \times g'_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$

$f \cdot n = (2y, -2x, 2z) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$

$= \frac{-2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2z = 2z$

$2 \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^9 \rho^2 d\rho = 2 \frac{9^3}{3} \frac{\pi}{2} = \boxed{243\pi}$



8. final 19/12/2017 #206

—enunciado—
Calcule la masa del cuerpo definido por $x^2 + 3y^2 \leq z \leq 4 - 3x^2 - y^2$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

9. final 12/12/2017 #304

—enunciado—
Defina coordenadas cilíndricas. Dada $\int_0^\pi d\phi \int_0^2 d\rho \int_{-2}^1 \rho^3 \sin(\phi) dz$ planteada en coordenadas cilíndricas, grafique la región de integración en el espacio xyz y plantee la integral con los límites expresados en coordenadas cartesianas.

Rta: $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy \int_{-1}^2 \sqrt{x^2+y^2} dz$

10. final 12/12/2017 #306

—enunciado—
Dado $\vec{f}(x, y, z) = (2x, y, 3z)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $x = 4 - y^2$ con $z \leq x$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. **Indique** gráficamente cómo decidió orientar a Σ.

Rta: $\frac{256}{3}$ orientando hacia x^+.

11. final 12/12/2017 #307

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $z \leq 2 + x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $z \geq -1$.

Rta: 20π

---

12. final 05/12/2017 #312

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $z \leq 4 - x^2$, $x + z \geq 2$, $y \leq x$, 1er octante.

Rta: $8/3$

---

13. final 05/12/2017 #313

—enunciado—
Dado $\vec{f}(x, y, z) = (2xz, 2yz, z^2)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 9$, $x \geq 0$. Indique gráficamente cómo orienta a Σ.

Rta: $\frac{6561\pi}{4}$

---

14. final 05/12/2017 #314

—enunciado—
Calcule el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de $\mathbb{R}^3$ donde la superficie de ecuación $z = xy^2 + 2x^2 - 3x - 2xy + 5$ tiene plano tangente paralelo al plano xy.

Rta: $2\sqrt{5}$

---

15. final 26/09/2017 #316

—enunciado—

Defina coordenadas polares. Resuelva en coordenadas polares la integral doble de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en la región D definida por: $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ con $x \geq 0$.

Rta: $\frac{7}{3}\pi$

—solución—

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{7}{3}\pi$

---

16. final 26/09/2017 #318

—enunciado—

Siendo $\vec{f}(x,y,z) = (9z, 6x, 4y)$, **calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través del trozo de plano de ecuación $2x+2y+3z = 6$ en el 1er octante. **Indique** gráficamente cómo decidió orientar al plano.

Rta: 54

—solución—

$\int_0^3 dx \int_0^{3-x} (9z, 6x, 4y) \cdot \frac{(2,2,3)}{3} dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} 12 dy = \frac{3^2}{2} \cdot 12 = 54$

---

17. final 26/09/2017 #319

—enunciado—

Calcule el volumen del cuerpo definido por: $x^2+y^2 \leq z \leq 2y$.

Rta: $\frac{\pi}{2}$

—solución—

$\int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\sin(\phi)} \rho d\rho \int_{\rho^2}^{2\rho\sin(\phi)} dz = \frac{\pi}{2}$

---

18. **final 25/07/2017** #324

—enunciado—

Calcule el área del trozo de plano de ecuación $z = x + 2y$ en el 1er octante, con $x + y + z \leq 6$.

Rta: $3\sqrt{6}$

---

19. **final 25/07/2017** #326

—enunciado—

Calcule el volumen del cuerpo definido por: $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z \leq 6$.

Rta: $\frac{32}{3}\pi$

---

20. **final 24/05/2017** #330

—enunciado—

Sea π_0 el plano tangente a la superficie de ecuación $xy + z + \ln(x + z + 2y - 4) - 3 = 0$ en el punto $\vec{A} = (1, 1, 2)$. **Calcule** el flujo del campo $\vec{f}$ a través del trozo de π_0 incluido en el 1er octante, sabiendo que $\vec{f}(x, y, z) = (3xy, -2xy, x + z)$; **indique** gráficamente cómo ha orientado al plano.

Rta: $\frac{81}{4}$ orientando hacia z^+.

---

21. **final 24/05/2017** #333

—enunciado—

Calcule el volumen del cuerpo definido por: $z \geq x^2 + y^2$, $z \leq 2y + 3$.

Rta: 8π

---

22. final 07/06/2018 #338

—enunciado—

Calcule el volumen del cuerpo definido por: $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2$, en el 1er octante.

Rta: $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$

—solución—

Analizo la intersección de las superficies
$z = \sqrt{x^2+y^2}$ (1)
$x^2+y^2+z^2 = 2$ (2)
de (1) en (2)
$x^2+y^2 = 1$
El volumen pedido es
$\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} dz = \boxed{\dfrac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)}$

---

23. examen viejo #48

—enunciado—

Enuncie el teorema de cambio de variables en integrales dobles. Calcule $area(D_{xy})$ sabiendo que a través del cambio de variables definido por $(x,y) = (u+2v, 3u+v)$, la región D_{xy} se transforma en D_{uv} con $area(D_{uv}) = 4$.

Rta: 20

—solución—

$g(u,v) = (u+2v, 3u+v)$, $Dg = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $|det(Dg)| = |1-6| = 5$, luego
$area(D_{xy}) = 5 \underbrace{area(D_{uv})}_{4} = 20$

---

24. examen viejo #49

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $y \geq x^2$, $x \geq y^2$, $z \leq 48xy$, en el 1º octante.

Rta: 4

—solución—
$\boxed{\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{48xy} dz} = 48\int_0^1 xdx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy = 24\int_0^1 x(x-x^4)dx =$
$24\int_0^1 x^2 - x^5 dx$
$= 24[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}]_0^1 = 24(1/3 - 1/6) = \boxed{4}$

---

25. examen viejo #50

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $0 \leq y \leq 1 - x^2$, $z \geq x$, $x + z \leq 2$.

Rta: $\frac{8}{3}$

—solución—
$V = \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \int_x^{2-x} dz = \boxed{\dfrac{8}{3}} \approx 2{,}666\ldots$

---

26. examen viejo #51

—enunciado—
Calcule la masa del cuerpo definido por $1 - x^2 - z^2 \leq y \leq 10 - 2x^2 - 2z^2$, si su densidad en cada punto es proporcional a su distancia al eje y.

Rta: $\frac{324}{5}k\pi$

—solución—
Averiguo el radio $1 - \rho^2 = 10 - 2\rho^2$, $\boxed{\rho = 3}$. La densidad es $k\rho$.

La masa pedida es $M = k\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 \rho^2 d\rho \int_{1-\rho^2}^{10-2\rho^2} dy = \boxed{\dfrac{324}{5}k\pi}$

---

27. examen viejo #52

—enunciado—
Calcule la masa del cuerpo definido por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3-2x^2-2y^2$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

Rta: $\frac{7}{10}k\pi$

—solución—
Averiguo el radio $\rho = 3-2\rho^2$, $\boxed{\rho = 1}$. La densidad es $k\rho$.

La masa pedida es $M = k\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_\rho^{3-2\rho^2} dz = \boxed{\dfrac{7}{10}k\pi}$

---

28. examen viejo #53

—enunciado—
Calcule la masa del cuerpo definido por $z \leq \sqrt{x^2+y^2}$ con $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ en el 1º octante, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

Rta: $\frac{15}{8}k\pi$

—solución—
La densidad es $\delta = k\rho$. La masa es $M = k\int_0^{\pi/2} d\phi \int_1^2 \rho^2 d\rho \int_0^\rho dz = \boxed{\dfrac{15}{8}k\pi}$

---

29. examen viejo #54

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $x+z \leq 4$, $y \geq x$, $y \leq 6$, 1º octante.

Rta: $\frac{112}{3}$

—solución—
$V = \int_0^4 dx \int_x^6 dy \int_0^{4-x} dz = \boxed{\dfrac{112}{3}}$

---

30. examen viejo #55

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $x^2 + z^2 \leq 9$, $y \geq x$, con $y \leq 14 - x^2 - z^2$.

Rta: $\frac{171}{2}\pi$

—solución—
$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 \rho d\rho \int_{\rho\cos(\phi)}^{14-\rho^2} dy = \boxed{\frac{171}{2}\pi} \approx 268{,}606\ldots$

---

31. examen viejo #56

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $y \leq x^2$, $x^2 + z^2 \leq 16$, 1º octante.

Rta: 16π

—solución—
$V = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^4 \rho d\rho \int_0^{\rho^2\cos^2(\phi)} dy = \boxed{16\pi} \approx 50{,}2655\ldots$

---

32. examen viejo #57

—enunciado—
Calcule la masa del cuerpo definido por: $z \geq \sqrt{2x^2 + y^2}$, $x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

Rta: $12k\pi$

—solución—
La densidad es $\delta(x, y, z) = k|z|$. La proyección sobre el plano xy queda $x^2 + y^2 \leq 4$, luego la masa pedida es

$$M = \boxed{k \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{12-x^2-2y^2}} zdz} =$$

$\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 \rho(12 - x^2 - 2y^2 - 2x^2 - y^2) d\rho = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 (12 - 3\rho^2)\rho d\rho = \boxed{12k\pi}$

---

33. examen viejo #58

—enunciado—
Calcule el volumen del cuerpo definido por: $3x^2 + z \leq 12$, $x^2 + z \geq 4$, $x \leq y \leq 4$ en el 1º octante.

Rta: $\frac{104}{3}$

—solución—
$V = \int_0^2 dx \int_x^4 dy \int_{4-x^2}^{12-3x^2} dz = \boxed{\dfrac{104}{3}}$

---

34. examen viejo #59

—enunciado—
Calcule el área del trozo de superficie de ecuación $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ con $2 \leq z \leq 5$

Rta: $15\sqrt{2}\pi$

—solución—
$(z-1)^2 = x^2 + y^2$, defino $G(x,y,z) = (z-1)^2 - x^2 - y^2$,
$\nabla G = (-2x, -2y, 2(z-1))$, $G'_z = 2(z-1)$,
$||\nabla G|| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-1)^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$, $\boxed{\dfrac{||\nabla G||}{|G'_z|} = \sqrt{2}}$, luego el área pedida es
$A = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^4 \rho d\rho = \sqrt{2}\pi(4^2 - 1^2) = \boxed{15\sqrt{2}\pi}$

---

35. examen viejo #60

—enunciado—
Calcule el área del trozo de superficie de ecuación $z = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$ con $z \leq 4$ en el 1º octante.

Rta: $\sqrt{5}\pi$

—solución—
$z^2 = 4x^2 + 4y^2$, defino $G(x,y,z) = z^2 - 4x^2 - 4y^2$, $\nabla G = (-8x, -8y, 2z)$,
$G'_z = 2z$, $||\nabla G|| = \sqrt{64x^2 + 64y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{20x^2 + 20y^2}$,
$\boxed{\dfrac{||\nabla G||}{|G'_z|} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}}$, luego el área pedida es
$A = \sqrt{5}\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^2 \rho d\rho = \boxed{\sqrt{5}\pi}$

---

36. examen viejo #61

—enunciado—
Siendo $f(x,y,z) = (x, yz, 2x^2 - z)$, calcule el flujo de f a través de la superficie abierta de ecuación $z = 4 - x^2$ con $0 \le y \le x$, $z \ge 0$; indique gráficamente cómo ha decidido orientar la superficie.

Rta: 12 (orientado hacia z^+)

—solución—
Parametrizo Σ con $g(x,y) = (x, y, 4 - x^2)$.
Luego $g'_x \times g'_y = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{(2x, 0, 1)}$
$\int_0^2 dx \int_0^x (x, y(4 - x^2), 2x^2 - 4 + x^2) \cdot (2x, 0, 1) dy =$
$\int_0^2 dx \int_0^x 2x^2 + 3x^2 - 4dy = \int_0^2 5x^3 - 4xdx = \boxed{12}$ (orientado hacia z^+)

---

37. examen viejo #62

—enunciado—
Dado $f(x,y,z) = (3x, 2y, y + z)$, calcule el flujo de f a través de la superficie abierta de ecuación $y = x^2$ con $0 \le z \le 9 - y$. Indique gráficamente como decidió orientar la superficie.

Rta: $\frac{1296}{5}$ (orientado hacia y^-)

—solución—
Parametrizo Σ con $g(x,z) = (x, x^2, z)$.
Luego $g'_x \times g'_z = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{(2x, -1, 0)}$
$\int_{-3}^{3} dx \int_0^{9-x^2} (3x, 2x^2, x^2+z) \cdot (2x, -1, 0) dz = \int_{-3}^{3} dx \int_0^{9-x^2} 6x^2 - 2x^2 dz =$
$\int_{-3}^{3} 4x^2(9-x^2) dx = \boxed{\frac{1296}{5}} \approx 259{,}2$ (orientado hacia y^-)

---

38. examen viejo #63

—enunciado—
Siendo $f(x,y,z) = (2xy, 2yz, 4yz)$, calcule el flujo de f a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = 4 - x^2$ con $y \leq x$ en el 1º octante. Indique gráficamente que orientación adoptó para Σ.

Rta: $\frac{64}{3}$ (orientando hacia z^+)

—solución—
Proyectando sobre el plano xy y orientando hacia z^+ queda la integral
$\int_0^2 dx \int_0^x \underbrace{(2xy, 2yz, 4yz) \cdot (2x, 0, 1)}_{4x^2y+4y(4-x^2)} dy = \boxed{\frac{64}{3}}$

---

39. examen viejo #81

—enunciado—
Calcule mediante una integral doble el área de la región plana definida por $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, siendo $y = f(x)$ la solución particular de $y'' + y = 1$ que en el punto $(0,2)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 2$.

Rta: 2π

—solución—
$\alpha^2 + 1 = 0$, $\alpha_{1,2} = \pm i$, luego
$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

Para la particular propongo $y = C$, $y' = y'' = 0$, $C = 1$, luego
$y = y_h + y_p = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + 1$
$y' = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$
Luego
$2 = C_1 + 1$, $C_2 = 0$, o sea que
$f(x) = \boxed{\cos(x) + 1}$
La integral pedida es
$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\cos(x)+1} dy = \int_0^{2\pi} \cos(x) + 1 = [\sin(x) + x]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi}$