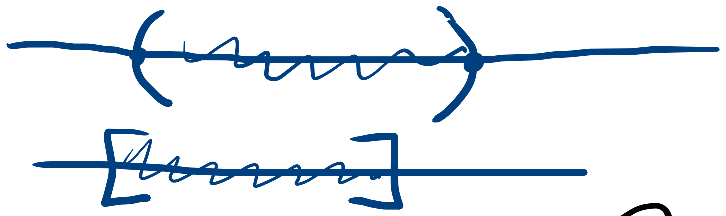
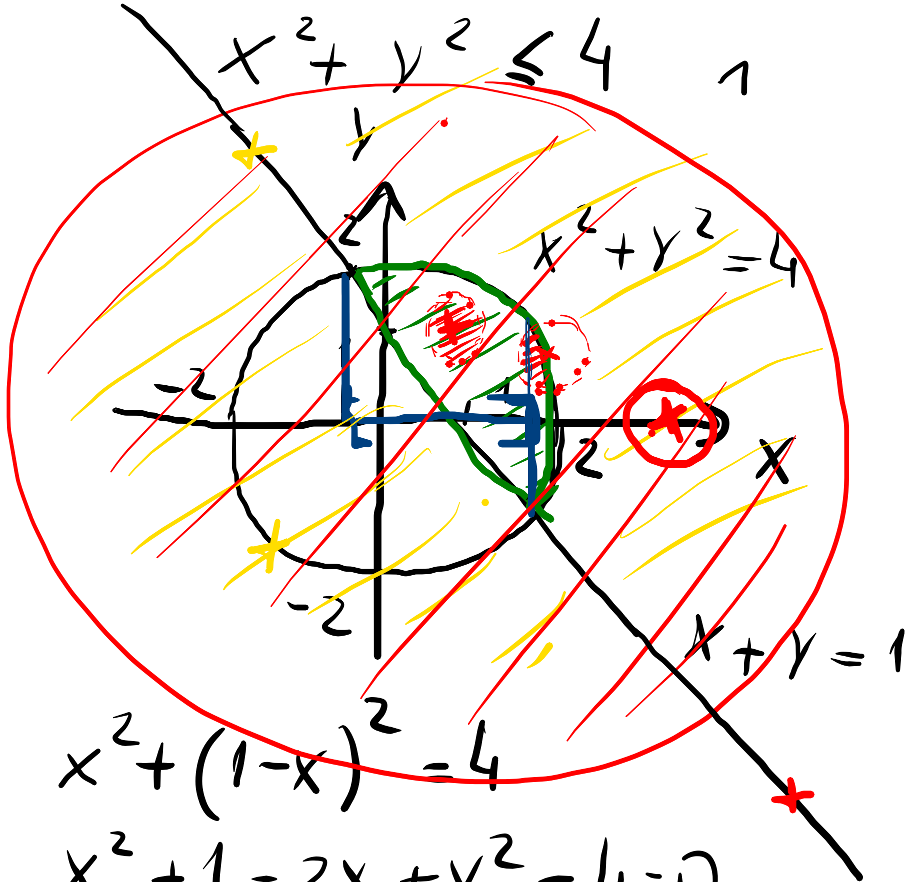
03) Represente geométricamente los siguientes conjuntos de puntos. En cada caso indique cuáles son sus puntos interiores, frontera y exteriores, analice si el conjunto es cerrado, abierto, acotado, compacto, ~~conexo~~.

a) $\{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 - 4 \le 0,\ x + y \ge 1\}$. $= A$



$$x^2 + y^2 \le 4 \quad \wedge \quad x + y \ge 1$$

$$p \quad \cap \quad q$$



$$\operatorname{Int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overbrace{x^2+y^2<4}^{p} \wedge \overbrace{x+y>1}^{q}\}$$

$$\operatorname{Fro}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x^2+y^2=4 \vee x+y=1) \wedge (x,y) \in A\}$$

$$\operatorname{Ext}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2>4 \vee x+y<1\}$$

$$x^2 + (1-x)^2 = 4$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\boxed{\sim(p \cap q) = \sim p \cup \sim q}$$

A cerrado, A no abierto

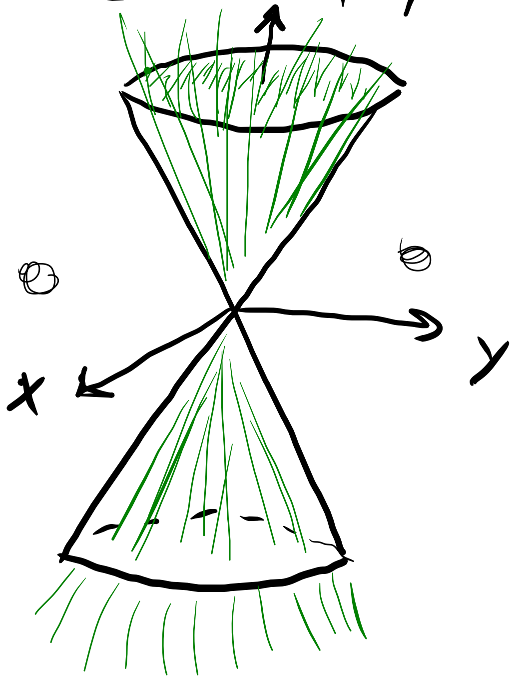
A acotado, A compacto

03) Represente geométricamente los siguientes conjuntos de puntos. En cada caso indique cuáles son sus puntos interiores, frontera y exteriores, analice si el conjunto es cerrado, abierto, acotado, compacto, ~~conexo~~.

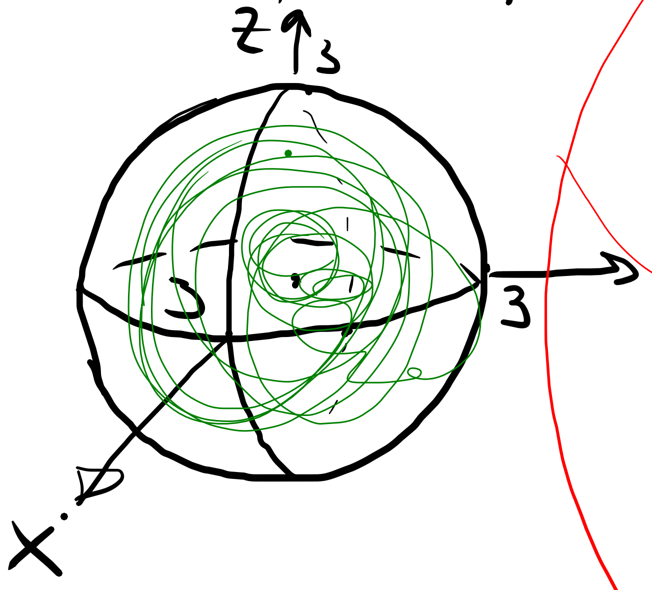
e) $\{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, x^2+y^2<z^2 \wedge x^2+y^2+z^2<9\}. = A$

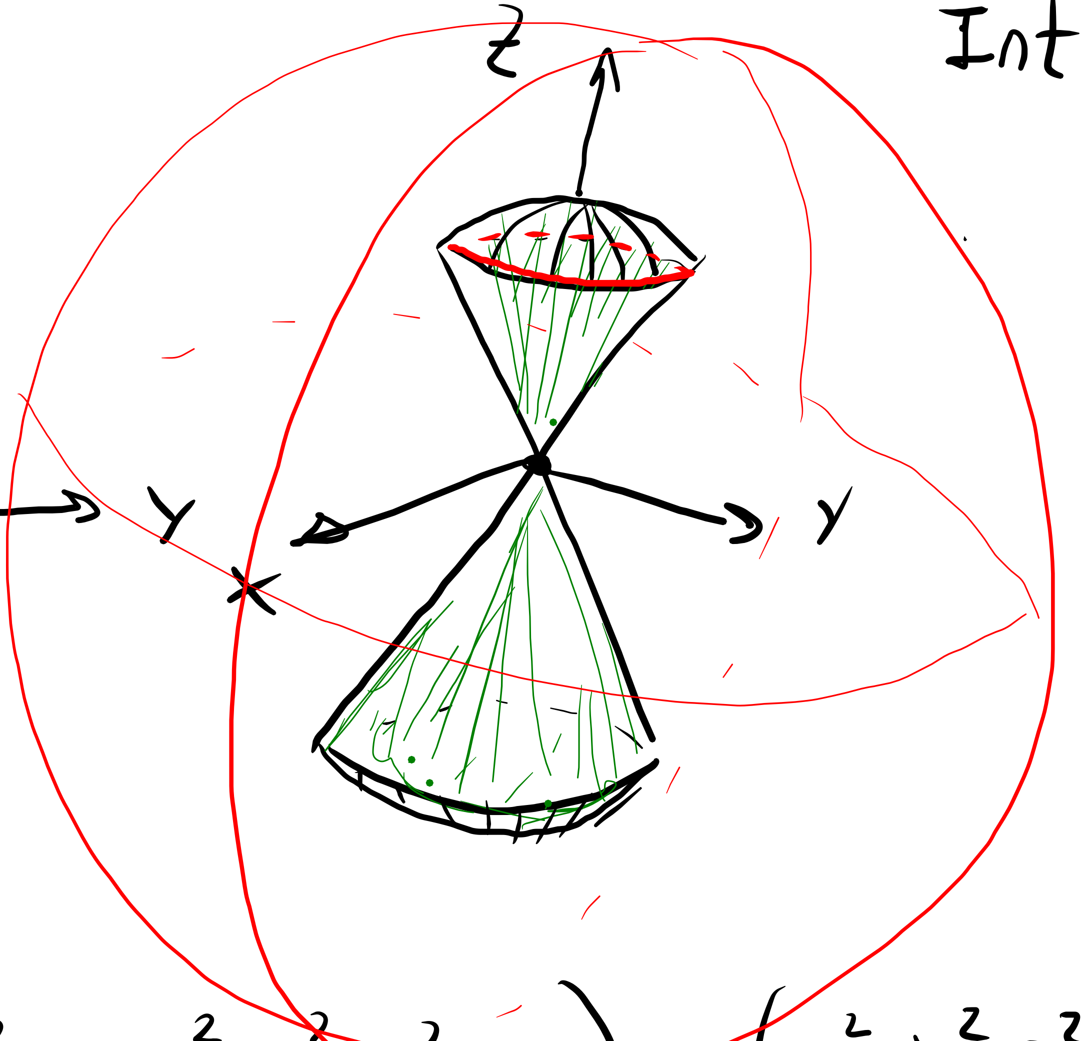
$\mathrm{Int}(A) = A$

$z^2 = x^2 + y^2$



$x^2+y^2+z^2=9$





$\mathrm{Fro}(A) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x^2+y^2=z^2 \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 9) \vee (x^2+y^2+z^2=9 \wedge x^2+y^2 \leq z^2)\}$

$\mathrm{Ext}(A) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2>z^2 \vee x^2+y^2+z^2>9\}$

A no cerrado, A abierto, A acotado, A no compacto

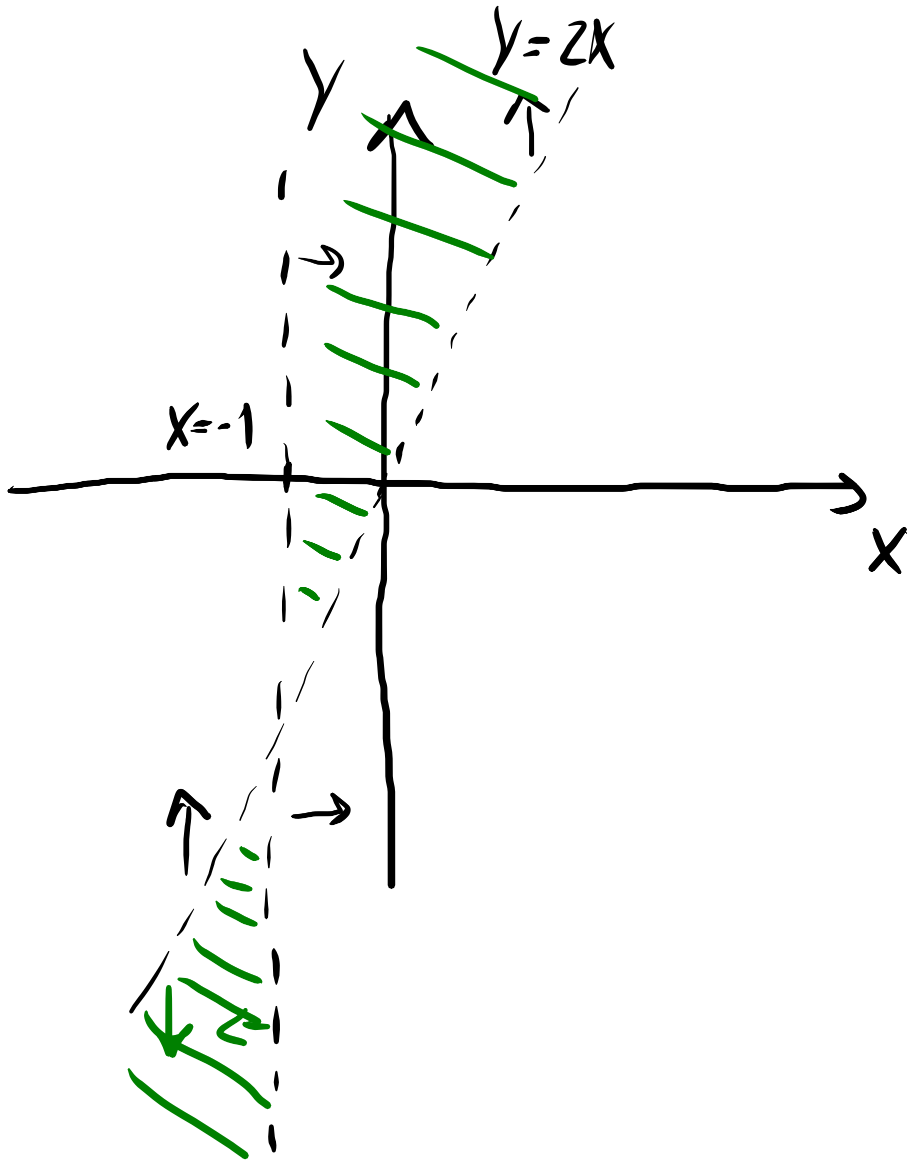
05) En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural D de la función.

a) $f(x,y) = \ln((x+1)(y-2x))$. ~~f) $\vec{f}(x,y) = (x^{-2}, (x+y)^{-2}\sqrt{y})$~~

$$(x+1)(y-2x) > 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+1>0 \ \wedge \ y-2x>0 \\ \vee \\ x+1<0 \ \wedge \ y-2x<0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x>-1 \ \wedge \ y>2x \leftarrow \\ \vee \\ x<-1 \ \wedge \ y<2x \end{array}\right.$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+1)(y-2) > 0\}$$



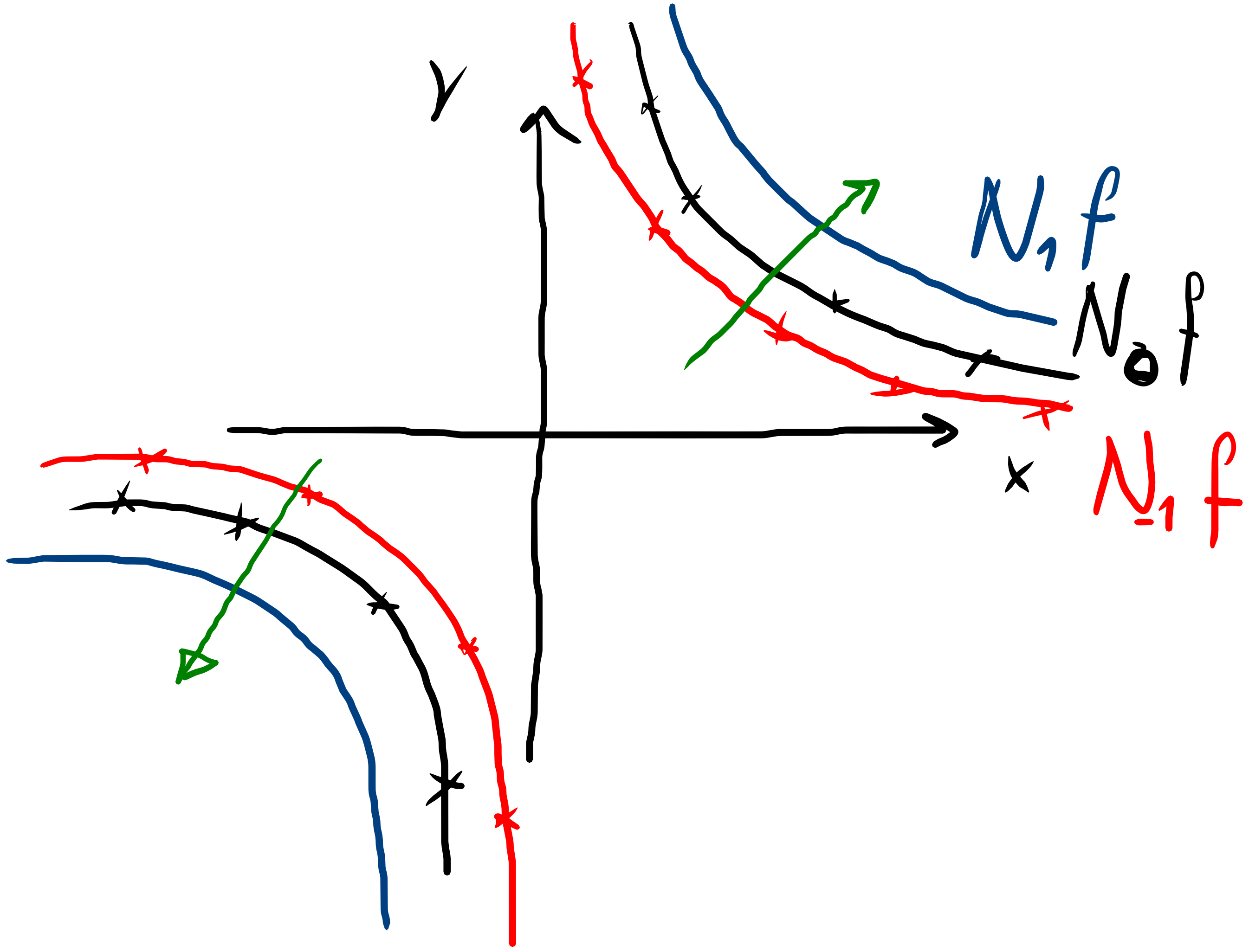
06) Representе geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

a) $f(x,y) = x\,y - 2$. ~~c) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.~~

$$N_0 f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{xy - 2 = 0}_{xy = 2}\}$$

$$N_1 f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{xy - 2 = 1}_{xy = 3}\}$$

$$N_{-1} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{xy - 2 = -1}_{xy = 1}\}$$



06) Represente geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

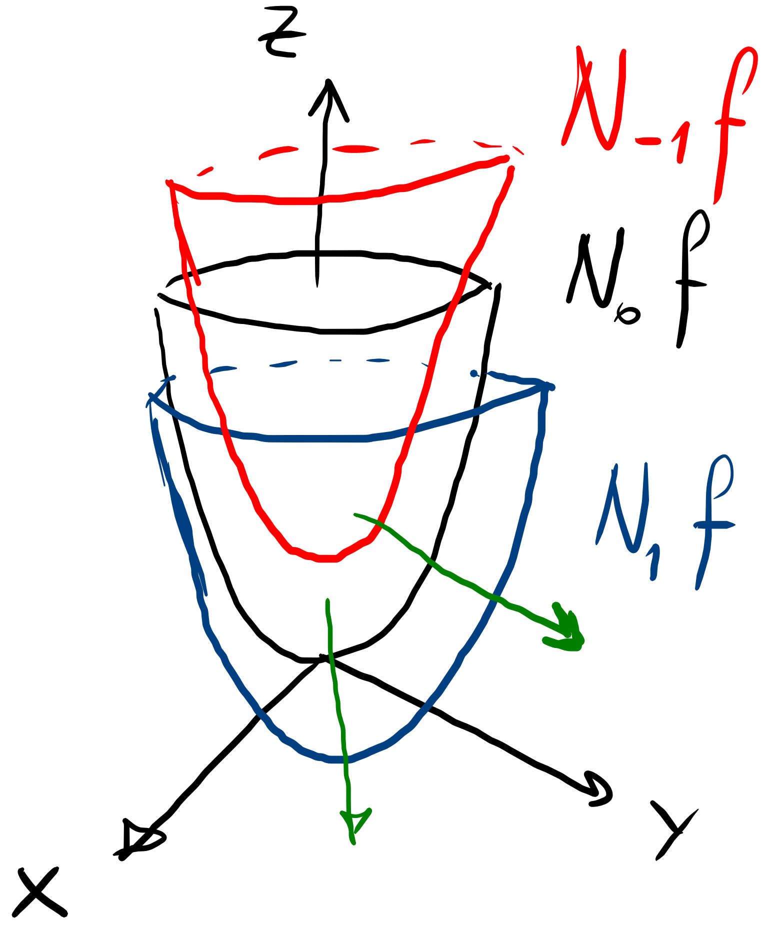
$$D_f = \mathbb{R}^3$$

$$N_0 f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2-z=0}_{z=x^2+y^2}\}$$

$$N_1 f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2-z=1\}$$

$$z = x^2+y^2-1$$

$$N_{-1} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2-z=-1}_{z=x^2+y^2+1}\}$$

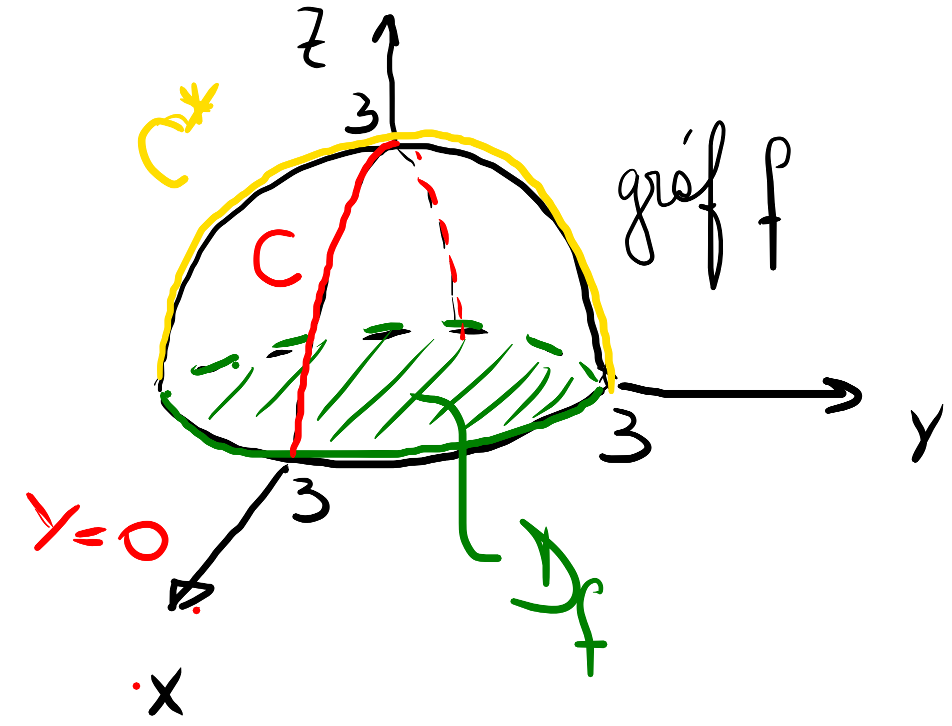


07) Para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en su dominio natural:

- determine el conjunto imagen,
- halle el conjunto de positividad,
- represente la gráfica en el espacio xyz y analice las intersecciones con los planos coordenados.

c) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ $\rightarrow \begin{cases} z^2 = 9-x^2-y^2 \\ z\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z\geq 0 \end{cases}$



$\operatorname{Im} f = \{ z\in\mathbb{R} \,/\, 0\leq z\leq 3 \} = [0,3]$

D_f: $9-x^2-y^2\geq 0 \rightarrow 9\geq x^2+y^2$

$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 9\}$

$\operatorname{Pos} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2<9\}$

$C \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z\geq 0 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad C^* \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z\geq 0 \\ x=0 \end{cases}$

08) Proponga un campo cuyo dominio natural $D \subset \mathbb{R}^2$ cumpla con:

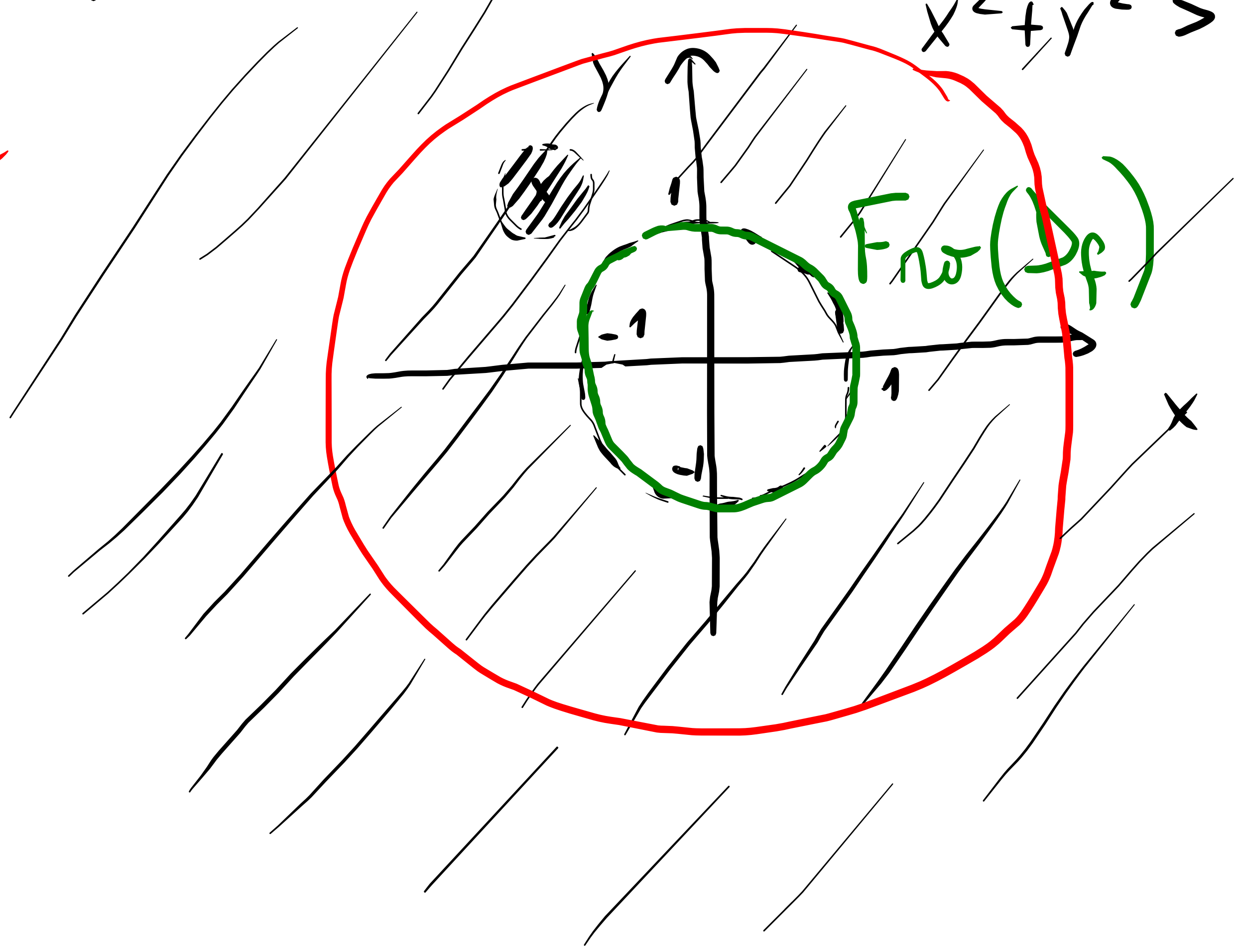
a) $x^2+y^2>1$. ~~b) $x^2+y^2\leq 8-2x$.~~ ~~c) $-1\leq x+y<3$.~~ ~~d) $(x-1)^2+(y-2)^2>0$.~~

$$x^2+y^2-1>0$$

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{x^2+y^2-1>0}_{x^2+y^2>1}\}$$

D_f abierto, no cerrado, no acotado



09) Dibuje los siguientes conjuntos de puntos e indique si tienen algún nombre en especial:

a) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = x^2 - 2y^2\}$. ~~d) $S=\{(x,y,z)\in\Re^3 / z = |x|\}$.~~

$$\boxed{z = x^2 - 2y^2}$$

$y = 0$ (plano zx) $\rightarrow$ $z = x^2$ } parábola

$x = 0$ (plano zy) $\rightarrow$ $z = -2y^2$

$z = 1$ $\rightarrow$ $1 = x^2 - 2y^2$ } hipérbola

paraboloide hiperbólico.