Resultados de los ejercicios
(No se incluyen gráficos ni demostraciones)

T.P. N°1

01)

	a	b	c	d	e	f
orden	3	3	3	2	1	2
grado	1	1	1	------	1	1
					lineal	lineal

02) c) $y^2 = 4x - 3$. e) existen dos soluciones: $y = 1 - x$, $y = -x^2/4$. f) $x^2 + 4y^2 = 8$.

03) a) $y = 2xy'$. b) $x + yy' = 0$. c) $y''(1 - y^2) + yy'^2 = 0$. d) $y'' - 2y' + y = 0$.
e) $xy''' + 3y'' = 0 \ \wedge \ x \neq 0$. f) $yy'' = y'^2$.

04) a) $(x-1)y' = y + 1$. b) $xyy' - y^2 = 1$. c) $2xyy' = y^2 - x^2$.

05) $g(x) = K e^{x + \tan^{-1}(\sqrt{3}\,x)/\sqrt{3}}$, $K \in \mathbb{R}$.

06) Se comprueba. Si existe otra solución, ella es $y = 0$.

07) a) S.P.: $3(y-2)^2 + 2x^3 + 6x + 60 = 0$. b) S.G.: $y = Cxe^{x^2}$.
c) S.G.: $2\sqrt{y-1} = x^2 + C$. d) S.P.: $xy^3 + xy - x^2 - 10x + 1 = 0$.
e) S.P.: $y = -3 + \sqrt{x^2 + 9}$. f) S.P.: $y = 3\,\mathrm{Exp}[\frac{1}{2}x^2 - 2x] - 1$.

08) $y^2 - x^2 = C$.

09) $y = -2e^{x^2/2}$.

10) a) $y = Cx$ (no incluye: $x = 0$). b) $y = C$. c) $y = -x + C$ (no incluye: $x = 0$).
d) $xy^2 = C$. e) $x^2 + y^2 = C$ con $C > 0$.

11) $x^2 + 2y^2 = 2$.

12) $x^2 + (y-5)^2 = C$ con $C > 0$.

13) a) $y = Cx + x^3/2$. c) $6y = (x^2+4)^{3/2} - 2$.
b) $y = -1 + \mathrm{sen}(x) + Ce^{-\mathrm{sen}(x)}$. d) $3y = x^2\big(C - \cos(3x)\big)$.

14) Se verifica, la S.G. es: $y = 3 + Ce^{-x^2}$.

15) $y = \dfrac{\pi/2 + \mathrm{sen}(x)}{x+1} - \cos(x)$.

16) $y = \mathrm{sen}(x) - \cos(x) + 2e^{-x}$.

17) a) $x = x_o + vt$. b) $x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$.

18) a) $T = T_A + (T_o - T_A)\,e^{-kt}$. b) Con $k > 0$: $T \xrightarrow[t \to \infty]{} T_A$. c) $k = 2\ln(2)\ \mathrm{hora}^{-1}$.

19) Sugerencia: halle las correspondientes ecuaciones diferenciales y verifique que se pasa de una de ellas a la otra reemplazando y' por $-1/y'$.

20) a) $y = -\frac{1}{2}x + K$. c) $x^3 + y^3 = C$. e) $\ln|\cos(2x)| - y^2 = C$.

b) $2x + y^2 = K$. d) $y = -\ln(x+K)$. f) $x^2 + y^2 = C,\ C > 0$.

21) $a = 1/3$.

22) $4\pi\sqrt{2}$.

23) $y = x^3 + 2$.

24) $y = A + B\,e^{2x} - (x + x^2)/4$.

25) $y = C_1\,e^x + C_2\,x + C_3$.

26) Se verifica, $y_0 = 6$.

27) $a^2/4$.

28) a) $(y-1)^2 = C\,y^2\,(x^2-1)$. b) Se verifica, es $y^2\,(x^2-1) = 32\,(y-1)^2$. c) Se verifica.

29) $y = x^3 + 3x$.

30) Sugerencia: recuerde que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Las soluciones son: $y = x$, $y = x^{-1}$.

31) Sugerencia: observe que $(y\,y')' = (y')^2 + y\,y''$.

T.P. N° 2

01)

	interior	exterior	frontera	aislado	acumulación
P_1			X	X	
P_2			X		X
P_3	X				X
P_4			X		X
P_5		X			

02) a) $\partial S = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 = 4 \,\vee\, (0,0) \vee (2,2)\}$.

b) $\overset{o}{S} = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 0 < x^2 + y^2 < 4\}$.

c) $S' = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 4\}$.

d) No es cerrado, no es abierto, es acotado.

e) $Cl(S) = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 4\} \cup \{(2,2)\}$.

03) a) interior $= \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 < 4\ ,\ x + y > 1\}$.

frontera $= \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 = 4\ ,\ x + y \ge 1\} \cup \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 < 4\ ,\ x + y = 1\}$

exterior $= \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x^2 + y^2 > 4\} \cup \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x + y < 1\}$.

Es cerrado, no es abierto, es compacto, es conexo.

b) interior $= \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 4x^2 + 7y^2 < 2\ ,\ x > 0\}$.

frontera $= \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 4x^2 + 7y^2 = 2,\ x \ge 0\} \cup \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 4x^2 + 7y^2 < 2,\ x = 0\}$

exterior $= \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, 4x^2 + 7y^2 > 2\} \cup \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x < 0\}$.

Es cerrado, no es abierto, es compacto, es conexo.

c) interior $= \{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x^2-y^2<3 \;,\; x+y>2\}$.

frontera $= \{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x^2-y^2=3 \;,\; x+y\geq 2\}\cup\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x^2-y^2<3 \;,\; x+y=2\}$

exterior $= \Re^2 -$ interior $-$ frontera.

Es cerrado, no es abierto, no es compacto, es conexo.

d) interior $= \phi$.

frontera $= \{\overline{X}\in\Re^3 \,/\, \overline{X}=(a\cos(t),\, a\,\mathrm{sen}(t),\, a\,\mathrm{sen}(t))\;,\; 0\leq t\leq \pi/2\}$.

exterior $= \Re^3 -$ frontera.

Es cerrado, no es abierto, es compacto, es conexo.

e) interior $= \{(x,y,z)\in\Re^3 \,/\, x^2+y^2<z^2 \wedge x^2+y^2+z^2<9\}$.

frontera $= \{(x,y,z)\in\Re^3 \,/\, (x^2+y^2=z^2 \wedge x^2+y^2+z^2\leq 9)\vee$
$\vee(x^2+y^2<z^2 \wedge x^2+y^2+z^2=9)\}$.

exterior $= \Re^3 -$ interior $-$ frontera.

No es cerrado, es abierto, es acotado, no es compacto, es desconexo.

04) Analice observando su representación geométrica.

05) a) $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x>-1 \wedge y>2x\}\cup\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x<-1 \wedge y<2x\}\}$.

b) $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, y>x \wedge -1<x\leq 1\}$.

c) $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, -1\leq y+x^2\leq 1\}$.

d) $D=\{(x,y,z)\in\Re^3 \,/\, z> x+y+1\}$.

e) Puntos debajo de la recta $x+y=2$ en 1° y 3° cuadrante, excluidos los ejes coordenados.

f) Semiplano $y\geq 0$ salvo los puntos de la recta $y=-x$ y los puntos del eje y.

g) $D=\{(x,y,z)\in\Re^3 \,/\, y<1\}$.

h) $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, x\leq x^2+y^2\leq 2x\}$.

i) $D=\Re^2$.

j) $D=\{(x,y)\in\Re^2 \,/\, (y\geq -2x \wedge y\geq 0)\vee(y\leq -2x \wedge y\leq 0)\}-\{(0,0)\}$.

06) En todos los casos se describen conjuntos de nivel k para distintos valores posibles de k.

a) Hipérbolas equiláteras de ecuación $x\,y=k+2$ con $k\neq -2$ (1º y 3º cuadrante si $k>-2$, 2º y 4º cuadrante si $k<-2$), incluidos ambos ejes de coordenadas (caso de $k=-2$).

b) Hipérbolas equiláteras de ecuación $x\,y=\ln(k)$ con $k>0 \wedge k\neq 1$ (2º y 4º cuadrante si $0<k<1$, 1º y 3º cuadrante si $k>1$), incluidos ambos ejes de coordenadas (para $k=1$).

c) Paraboloides de ecuación $z=x^2+y^2-k$, $k\in\Re$.

d) Líneas de ecuación $y=k-|x|$, $k\in\Re$.

e) Puntos del espacio *xyz* cuya distancia al origen de coordenadas es igual a $e^{k/2}$ con $k\in\Re$, la ecuación es $x^2+y^2+z^2=e^k$.

f) Para $k \in \Re - \{0\}$: circunferencias de ecuación $(x-(2k)^{-1})^2 + y^2 = (2k)^{-2}$ excluido el origen de coordenadas, para $k = 0$: el eje y salvo el punto $(0,0)$.

g) Debe ser $k \geq 0$. Para $k = 0$: el plano xy. Para $k > 0$ paraboloides de revolución alrededor del eje z de ecuaciones $z = k(x^2 + y^2)$ o $z = -k(x^2 + y^2)$ excluyendo el punto $(0,0,0)$.

07) a) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ z \geq 0\}$, conj. positiv.: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

inter. planos: en $z = 0$: (0,0), en $y = 0$: parábola $z = x^2$, en $x = 0$: parábola $z = y^2$.

b) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ z \geq 0\}$, conj. positiv.: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
inter. planos: en $z = 0$: (0,0), en $y = 0$: semirrectas $z = |x|$, en $x = 0$: semirrectas $z = |y|$.

c) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ 0 \leq z \leq 3\}$, conj. positiv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 < 9\}$.

inter. planos: en $z = 0$: circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, en $y = 0$: semicircunferencia $z = \sqrt{9 - x^2}$, en $x = 0$: semicircunferencia $z = \sqrt{9 - y^2}$.

d) conj. imagen: $\mathbb{R}$, conj. positiv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + y < 2\}$,
inter. planos: en $z = 0$: recta $x + y = 2$, en $y = 0$: recta $x + z = 2$, en $x = 0$: recta $y + z = 2$.

e) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ z \leq 2\}$, conj. positiv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$,

inter. planos: en $z = 0$: rectas $x = \pm\sqrt{2}$, en $y = 0$: parábola $z = 2 - x^2$, en $x = 0$: recta $z = 2$.

f) conj. imagen: $\{y \in \mathbb{R} / \ y \geq -1\}$, conj. positiv.: $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 / \ (x-1)^2 + z^2 > 1\}$.

inter. planos: en $z = 0$: parábola $y = (x-1)^2 - 1$, en $y = 0$: circunferencia $(x-1)^2 + z^2 = 1$, en $x = 0$: parábola $y = z^2$.

08) a) por ejemplo: $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

b) por ejemplo: $f(x,y) = \sqrt{9 - (x+1)^2 - y^2}$.

c) por ejemplo: $\bar{f}(x,y) = (\ln(3 - x - y), \sqrt{x + y + 1})$. ¿Cómo sería con campo escalar?.

d) por ejemplo: $f(x,y) = [(x-1)^2 + (y-2)^2]^{-1/2}$.

09) a) paraboloide hiperbólico, b) hiperboloide de dos hojas, c) elipsoide, d) --, e) plano, f) --.

10) a) semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{1 - x^2}$. b) trozo de hélice circular con $0 \leq z \leq \pi$.

11) b) $\overline{X} = (2\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u), 2\cos(u))$ con $0 \leq u \leq \pi/2$.

c) Sobre *xy*: $\overline{X} = (2\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u), 0) \wedge u \in [0, \pi/2]$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ con $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

Sobre *xz*: $\overline{X} = (u, 0, u) \wedge u \in [0,2]$; $\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 2$.

Sobre yz: $\overline{X} = (0\,,2\,\mathrm{sen}(u)\,,2\cos(u)) \wedge u \in [0,\pi/2]$; $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ con $y \geq 0 \wedge z \geq 0$

12) interior: $\overset{o}{S} = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

puntos aislados: $\{(n^{-1},0) \in \Re^2 \ / \ n \in \mathbb{N}\,,\, n > 1\}$.

frontera: $\partial S = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1 \vee x^2 + y^2 = 2 \vee (n^{-1},0),\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$,

conjunto derivado: $S' = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \cup \{(0,0)\}$.

clausura: $Cl(S) = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \ \vee \ (n^{-1},0),\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$

T.P. N° 3

01) a) $L = 2$. b) $\nexists L$. c) $L = 0$. d) $\nexists L$.

02) Al no aclararse otra cosa, $(\mathrm{sen}(u)/|u|\,, u\ln(u))$ tiene dominio natural $\mathbb{R}^+$ y ambas componentes tienen límite en $\mathbb{R}^+$.
En cambio $(\mathrm{sen}(u)/|u|,\, u)$ está definida en $\mathbb{R}-\{0\}$, donde no existe el $\lim\limits_{u \to 0} \mathrm{sen}\,(u)/|u|$.

03) Existe, $\overline{L} = (1/2,\, 1,\, 1)$.

04) a) Es curva (recta en $\Re^2$). b) es curva. c) es curva. d) es curva (recta en $\Re^3$).
e) No es curva pues el dominio es desconexo. f) no es curva pues $\overline{g}$ es discontinua en 0 .

05) a) $L = 1/2$. b) $L = 0$. c) $\nexists L$. d) $\nexists L$. e) $L = 0$. f) $\nexists L$. g) $\nexists L$. h) $\nexists L$. i) $\nexists L$.
j) $\nexists L$. k) $\nexists L$. l) $L = 0$. m) $\nexists L$. n) $L = 0$. o) $\nexists L$. p) $L = 0$. q) $\nexists L$.

06) a) $D = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, |x| < 1 \wedge x \neq 0\}$.
b) $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,y_0)} f(x,y) = 0$.

07) a) $\nexists L$. b) $\nexists L$. c) $L = 1/8$. d) $\nexists L$. e) $\nexists \overline{L}$. f) $\overline{L} = (0\,, 1/2)$.

08) Por ejemplo $\overline{X} = (x,\, 2,\, x^2 + 4)$ con $x \in \Re$ está incluida en S por ser una de sus líneas coordenadas correspondientes a la representación $\overline{X} = (\,x, y,\, x^2 + y^2\,)$ con $(x,y) \in \Re^2$; para $x = 1$ la imagen es el (1,2,5). Es curva por ser imagen de un intervalo real ($\Re$) a través de una función vectorial continua (componentes continuas: una constante y las otras del tipo polinomio).

09) a) Por ejemplo $C : \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x^2 \end{cases}$ (1) , también podría ser $C : \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2y \end{cases}$ (2).

b) La forma (2) indicada en la respuesta (a) muestra que los puntos de *C* están sobre el plano de ecuación $z = 2y$, por lo tanto *C* es una curva plana.

c) La ecuación cartesiana de la superficie es $z = x^2 + y$, y con ella cumplen todos los puntos de *C*.

10)

	a	b	c	d	e	f	g	h
continuo		X	X					X
no continuo	X			X	X	X	X	

11) a) No. b) Si, con $f(x,0) = x^2$. c) Si, con $\overline{g}(0) = (1,0,0)$. d) Si, con $\overline{g}(0) = (1,0)$.

12) a) $\Re^2 - \{(x,0) \in \Re^2 \,/\, -2 < x < 2\}$. b) $\Re^2$.

13) a) Comience demostrando que $\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| < 1$ en todo entorno reducido de (0,0).

b) No se puede, todo punto (x,y) de dicha línea tiene coordenada $x \geq 1$.

14) Comience por expresar los productos escalar (para h) y vectorial (para $\overline{w}$) en función de las componentes de $\bar{f}$ y de $\overline{g}$.

T.P. N° 4

01) En cada caso se indica una respuesta posible a lo requerido.

a) Ecuación C: $\overline{X} = (x, x^2, 5-x^2) \wedge x \in \Re$, recta tg.: $\overline{X} = (2+u, 4+4u, 1-4u) \wedge u \in \Re$.

Plano normal: $x+4y-4z=14$, $\overline{X} = (14-4y+4z, y, z) \wedge (y,z) \in \Re^2$.

b) Ecuación C: $\overline{X} = (x, x-1, 2x-1) \wedge x \in \Re$, recta tg.: $\overline{X} = (2+u, 1+u, 3+2u) \wedge u \in \Re$.

Plano normal: $x+y+2z=9$, $\overline{X} = (x, y, (9-x-y)/2) \wedge (x,y) \in \Re^2$.

c) Ecuación C: $\overline{X} = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t), 2) \wedge t \in [0, 2\pi]$, recta tg.: $\overline{X} = (u, 2, 2) \wedge u \in \Re$.

Plano normal: $x = 0$, $\overline{X} = (0, y, z) \wedge (y,z) \in \Re^2$.

Las tres son curvas planas, pertenecen a los planos de ecuación:
a) $y+z=5$. b) $z=x+y$. c) $z=2$.

02) a) No. b) Si, en (6, 0.5, 5.5) y en (15, 2, 7). c) No.

03) Por ejemplo, el plano $y=0$ contiene a los puntos $(2,0,0)$, $(-2,0,\pi)$ y $(2,0,2\pi)$ de la curva; la curva no es plana pues $(0,2,\pi/2) \in C$ pero no está en el plano antes mencionado.

04) a) $f'_x(x,y) = 4x^3+2y+y^3$, $f'_y(x,y) = 2x+3xy^2$ ambas definidas en $\Re^2$.

b) $f'_x(x,y,z) = 2ye^{2x}$, $f'_y(x,y,z) = e^{2x}+3ze^{3y}$, $f'_z(x,y,z) = e^{3y}$ las tres def. en $\Re^3$.

c) $f'_x(x,y) = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = 2xye^{x^2+y^2}$ ambas definidas en $\Re^2$.

d) $f'_x(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ ambas definidas en $\{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x \neq 0\}$.

e) $f'_x(x,y) = -e^{\operatorname{sen}(x)}$, $f'_y(x,y) = e^{\operatorname{sen}(y)}$ ambas definidas en $\Re^2$.

f) $f'_x(x,y) = 2xe^{(x^2+y^2)^2} - e^{x^2}$, $f'_y(x,y) = 2ye^{(x^2+y^2)^2}$ ambas definidas en $\Re^2$.

05) a) $f'_x(1,2) = 10$, $f'_y(1,2) = 2$. c) $f'_x(0,0) = 0$, $\nexists f'_y(0,0)$.

b) $\nexists f'_x(1,1)$, $f'_y(1,1) = 2$. d) $\nexists f'_x(0,0)$, $\nexists f'_y(0,0)$.

06) a) Por ejemplo con límite por rectas. b) $f'(\overline{0}, \breve{r}) = 0$ sólo existe para los $\breve{r}$ del enunciado.

07) $f'(\overline{0}, \breve{r}) = 0$ $\forall \breve{r} \in \Re^2$. La discontinuidad por ejemplo con límite por $y = x^3$

08) a) Se demuestra usando definición. b) Se verifica.

09) Comentario: tenga en cuenta que en este caso la regla práctica de derivación no permite concluir sobre la existencia de la derivadas parciales en el origen.

10) $f'((1,-1),\breve{r}) = -22/5$.

11) a) sólo es derivable con resultado 0 según (0,1), $(0,-1)$, (1,0) y $(-1,0)$.

b) $f'(\bar{0},(u,v)) = \begin{cases} v^2/u & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$ con $u^2 + v^2 = 1$.

12) a) 1° y 2° en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$.

b) 1° y 2° en $\{(x,y) \in \Re^2 \ / \ x \neq 0 \wedge y > 0\}$.

c) f'_x, f''_{xx}, f''_{xy} en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$; f'_y, f''_{yx}, f''_{yy} $\Re^2$.

d) 1° y 2° en $\{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ yz > 0\}$.

13) a) Ángulo $= \arccos(2\sqrt{13/53})$. b) tiempo $=$ 2 segundos.

14) Ayuda, recuerde la definición de transformación lineal.

15) $\bar{k} = (-2,2)$.

16) Suponiendo g derivable en entorno de $x_0 = 1$, $g(x) = 2x^{-1}$.

17) Suponiendo g'' existente, $g(x) = x - x^2$.

18) Suponiendo g'' existente, $g(t) = 1 + \text{Exp}[2(t-1)]$.

19) Se verifica por simple cálculo y reemplazo.

20) Se demuestra por simple cálculo y reemplazo.

21) Según se enuncia, debe trabajar derivando $f(x,y,z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ con k constante.

22) Observe que, por ejemplo, $P(x,y,z) = \dfrac{k\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

23) $f'_y(1,0) = 0$.

24) El dibujo intenta mostrar que la intersección de la superficie con el plano xz es una recta paralela al eje x.

T.P. N° 5

01) a) $D\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \\ -\dfrac{2\cos(t)}{(2t-\pi)^2} - \dfrac{\text{sen(t)}}{2t-\pi} \end{pmatrix}$, $W = \{t \in \Re \ / \ t \neq -1 \wedge t \neq \pi/2\}$.

b) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^3 - x\,y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$, $W = \Re^2 - \{\bar{0}\}$.

c) $D\bar{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ \dfrac{2xz}{x^2+z^2} & 0 & \dfrac{2z^2}{x^2+z^2} + \ln(x^2+z^2) \end{pmatrix}$, $W = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x^2 + z^2 \neq 0\}$.

d) $D\bar{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} k\,r^{-3}(1-3x^2/r^2) & -3k\,x\,y/r^5 & -3k\,x\,z/r^5 \\ -3k\,x\,y/r^5 & k\,r^{-3}(1-3y^2/r^2) & -3k\,y\,z/r^5 \\ -3k\,x\,z/r^5 & -3k\,y\,z/r^5 & k\,r^{-3}(1-3z^2/r^2) \end{pmatrix}, W=\Re^3-\{\bar{0}\}$.

e) $Df(x,y)=\begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{y^6-x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} & \dfrac{2x^3y-2xy^5}{(x^2+y^4)^2} \end{pmatrix} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $W=\Re^2-\{\bar{0}\}$.(*)

f) $D\bar{f}(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 2(x-y) & 2(y-x) \end{pmatrix}$, $W=\Re^2$.

02) Si existe, $f'((0,0),(2,-1))=2$.

03) $f'(\bar{0},(u,v))=\begin{cases} u^2/v & \text{si } v\neq 0 \\ 0 & \text{si } v=0 \end{cases}$ con $u^2+v^2=1$, no es cont. en $\bar{0}\Rightarrow$ no es difer. en $\bar{0}$.

04) a) $f'(\bar{0},\breve{r})=0\ \forall\breve{r}\in\Re^2$. No es diferenciable en $\bar{0}$, por no ser continua en el origen.

b) $f'(\bar{0},(u,v))=u^2v$ con $u^2+v^2=1$.

Direcciones de derivada máxima: $(\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$.

Direcciones de derivada nula: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.

No es diferenciable en el origen. Si lo fuera $f'(\bar{0},\breve{r})=\nabla f(\bar{0})\cdot\breve{r}\ \forall\breve{r}\in\Re^2$, como en este caso resulta $\nabla f(\bar{0})=\bar{0}$ y las derivadas deberían ser nulas en toda dirección.

05) La función no es continua en $(0,0)\Rightarrow$ no es diferenciable en $(0,0)$, por lo tanto la gráfica de f no admite plano tangente en $(0,0,0)$.

06) Únicamente en el punto $(1,0,1)$, ecuación del plano: $z=1$.

07) Para el límite observe que: $\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=x\,\frac{x^2}{x^2+y^2}-x\,\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Derivada direccional: $f'(\bar{0},(u,v))=u^3-uv^2\ \forall\breve{r}=(u,v)\in\Re^2$.

Por otra parte, $f'((0,0),(u,v))\neq\nabla f(0,0)\cdot(u,v)\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

08) a) 4.05. b) 2.02.

09) Aplicar $f(\bar{X})\cong f(\bar{A})+\nabla f(\bar{A})\cdot(\bar{X}-\bar{A})$ (aproximación mediante diferencial primero).

10) Plano tangente: $x+3y+4z=8$. Recta normal: $r_0=\begin{cases} y-3x=8 \\ z-4x=9 \end{cases}$.

11) $(-1/2,0,-1/4)$ y $(0,1,0)$.

12) $(0,0,0)$ y $(2,4,4)$.

13) a) $\breve{r}_{\text{máx}}=(-7/\sqrt{85},-6/\sqrt{85})$, $\breve{r}_{\text{mín}}=(7/\sqrt{85},6/\sqrt{85})$,

$\breve{r}_{\text{nula}_1}=(-6/\sqrt{85},7/\sqrt{85})$, $\breve{r}_{\text{nula}_2}=(6/\sqrt{85},-7/\sqrt{85})$.

b) $\breve{r}_{\text{máx}}=(1,0,0)$, $\breve{r}_{\text{mín}}=(-1,0,0)$, $\breve{r}_{\text{nula}}=(0,u,v)\ \forall(u,v)\in\Re^2\ /\ u^2+v^2=1$.

(*) Acercándose por rectas es sencillo probar que f'_y no es continua en el origen.

14) $5+11\sqrt{3}/2$.

15) $a,b\in\Re$ tal que $a=(b-2)/4$ y $b\neq 2/3$.

16) $\breve{r}_{máx}=(2/\sqrt{14}\,,1/\sqrt{14}\,,3/\sqrt{14})$.

17) a) $f'(\bar{A},(5{,}9))=2$, b) $f'(\bar{A},\breve{r}_{\text{máx}})=2\sqrt{5}$, c) $f\big(\bar{A}+(0.01,-0.02)\big)\cong 3.08$.

18) $f(0.98,0.01)\cong 1.02$.

19) $z=10x-5y+5$, $f(1.01,1.97)\cong 5.25$.

20) Sí. Dado que la superficie admite plano tangente, f es diferenciable en $(1,2)$; entonces se puede usar el gradiente para calcular la derivada direccional. Resulta: $f'((1{,}2),\breve{r})=-5\sqrt{2}/8$.

21) a) $0.88\ \pm\ 0.04\ \text{k}\Omega$.
 b) $39.2\ \pm\ 1.6\ \text{cm}^3$.
 c) para $z=x\,y$ y $z=x/y$: $\varepsilon_{\text{rel}_z}=\varepsilon_{\text{rel}_x}+\varepsilon_{\text{rel}_y}$.
 para $z=x^2y^3$: $\varepsilon_{\text{rel}_z}=2\,\varepsilon_{\text{rel}_x}+3\,\varepsilon_{\text{rel}_y}$.
 d) $19.5\ \pm\ 0.975\ \text{k}\Omega$. Es decir, $19.5\,\text{k}\Omega$ al 5%.

<u>Cuestionario</u>, ítem e):
Verifique que la f propuesta cumple con la definición de diferenciabilidad en (0,0).
Por otra parte,

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2+y^2}{3x^{2/3}\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,y)\\[2mm] 0 & \text{si } (x,y)=(0{,}0)\end{cases}$$

Con lo cual f'_x no es continua en (0,0), esto puede demostrarse analizando límites por curvas. Por ejemplo, acercándose por $x=y^2$:

$$\lim_{y\to 0} f'_x(y^2,y)=\infty\,.$$

También puede analizarse por $x=y^{3/2}$ con $y\geq 0$ resulta $\lim\limits_{y\to 0^+} f'_x(y^{3/2},y)=1/3$.

T.P. N° 6

01) a) Ambas quedan definidas con dominio $\Re^2$.

$$D(\bar{f}\circ\bar{g})(1{,}1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\ ;\ D(\bar{g}\circ\bar{f})(1{,}1)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

 b) Dominio de $f\circ\bar{g}=\{u\in\Re\ /\ u\leq 2\}$; dominio de $\bar{g}\circ f=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ y\geq 0\}$.

$$D(f\circ\bar{g})(1)=(\ 0.5\ )\ ;\ D(\bar{g}\circ f)(1{,}1)=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

 c) Ninguna queda definida; tampoco sus matrices jacobianas.

 d) Dominio de $\bar{f}\circ\bar{g}=\{(u,v,w)\in\Re^3\ /\ u\leq 1\}$;
 dominio de $\bar{g}\circ\bar{f}=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x\,y^2\leq 1\}$

$$D(\bar{f}\circ\bar{g})(0{,}1{,}1)=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -3/2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\ ;\ D(\bar{g}\circ\bar{f})(0{,}1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

02) Por ejemplo, $h = f \circ \bar{g}$ si

$f : D_f \subset \Re^2 \to \Re \ / \ f(u,v) = u\ln(v)$ con $D_f = \{(u,v) \in \Re^2 \ / \ v > 0\}$ y

$\bar{g} : D_{\bar{g}} \subset \Re^2 \to \Re^2 \ / \ \bar{g}(x,y) = (x, 1 - xy)$ con $D_{\bar{g}} = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ xy < 1\}$.

03) a) $f(u,v) = 2uv - 2\sqrt{v-u}$, $g(x,y) = (x - y^2, x + 2xy - 1)$.

b) -3. c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 15z = 92 \end{cases}$. d) No.

04) $f'_x(0,1) = -1$.

05) $\nabla h(0,0) = (0,-2)$. No se puede pues $\nexists f'_u(1,-1) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(1,-1)$.(*)

06) 0.

07) Se verifica.

08) $a = 2/\sqrt{5}$ o bien $a = -2/\sqrt{5}$.

09) a) $\{(x,y) \in \Re^2 - \{\bar{0}\} \ / \ x^2 + y^2 = 5x/2\}$. Es decir: puntos de la circunferencia con centro en $(5/4, 0)$ y radio $5/4$, salvo el origen de coordenadas.

b) $\breve{r}_{\text{máx}} = (-3/5, 4/5)$. c) $3\sqrt{2}/50$. d) $\dfrac{6\cos(t)(1-3\,\text{sen}^2(t))}{(3\,\text{sen}^2(t)+1)^2}$. e) 1.4 %.

10) $f(x,y) \cong 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$.

11) a) $\nabla f(1,-2) = (-1/3, -1/3)$.

b) Plano tangente: $x + y + 3z = 2$. Recta normal: $\bar{X} = (1+t, -2+t, 1+3t)$, $t \in \Re$.

c) Para $\pi/3$: $f'((1,-2), \breve{r}_1) = -(1+\sqrt{3})/6$. Para $-\pi/3$: $f'((1,-2), \breve{r}_2) = (-1+\sqrt{3})/6$.

12) $(-1/2, -1/2, 1)$ y $(1/2, 1/2, -1)$.

13) $-66\sqrt{2/7}$.

14) $f'((x_0, y_0), \breve{r}) = 2/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

15) Se cumple, demostración a realizar por el alumno.

16) No.

17) $\breve{r}_{\text{nula}_1} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $\breve{r}_{\text{nula}_2} = (-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

18) $x + 4y + 6z + 18 = 0$.

19) Satisface, demostración a realizar por el alumno.

20) Se verifica, justificación a realizar por el alumno.

21) $h'((1,1), \breve{r}_{\text{máx}}) = 5/2$.

22) $h(2.98, 2.01) \cong 52.4175$.

23) Se verifica pues $h'(2) = -5/2 < 0$.

24) $g(x) = 2/(x-1)$.

25) $f(u) = u + C$ con C constante arbitraria.

(*) Observe que en este caso h resulta infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}^2$, aún con f no diferenciable.

T.P. N° 7

01) a) $p(x,y)=4+11(y-2)+(x-1)^2-(x-1)(y-2)+6(y-2)^2+(y-2)^3$.

b) $f(1,2)=4$. Se puede calcular evaluando el polinomio dato en (1,2).

02) Se verifica.

03) a) $f(x,y)\cong -4+\frac{7}{4}(x-2)-2(y-3)+\frac{3}{64}(x-2)^2+\frac{1}{4}(x-2)(y-3)$.

b) $f(x,y)\cong (x-1)+(y-2)-\frac{5}{2}(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-\frac{1}{2}(y-2)^2$.

c) $f(x,y,z)\cong \frac{(x-1)}{2}-\frac{(y-2)}{2}+\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{8}+\frac{z^2}{2}-\frac{(x-1)(y-2)}{4}+$
$+\frac{3(x-1)z}{2}-\frac{(y-2)z}{2}$.

d) $f(x,y,z)\cong 1-x+z-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2-xy-xz$.

04) a) 0.96 . b) 4.0025 . c) 2.97 .

05) $g(x)=K\,e^{x/y_0}$ con K constante arbitraria.

06) a) $f(0,0)=2$ mínimo local.

b) $f(0,0)=0$ no es extremo local.

c) $f(0,0)=0$ no es extremo local.

Sugerencia para "b)" y "c)":

Dibuje el conjunto de nivel $f(0,0)$, la región $S^{>}$ donde $f(x,y)>f(0,0)$ y la región $S^{<}$ donde $f(x,y)<f(0,0)$; luego observe qué valores adopta f alrededor de (0,0).

07) Note que $f(-a,a)=0$ y $f(x,y)\geq 0$ en todo punto, en especial en un entorno de $(-a,a)$.

08) a) $f(0,0)$ mínimo relativo.

b) No produce extremos.

c) $f(a,a)$ mínimo absoluto (en sentido amplio) para todo $a\in\Re$.

d) No produce extremos.

e) f produce mínimo absoluto en sentido amplio $\forall(x,y)\ /\ (x-4)^2+(y-2)^2=10$.

f produce máximo local y absoluto en sentido estricto en el punto (4,2).

f) No produce extremos.

09) $f(1,0)=1/2$ máximo absoluto, $f(0,0)=0$ mínimo absoluto.

10) Los puntos $(0,y)$ con $y\in\Re$, es decir, los puntos del eje y.

11) Máxima en $(1,\sqrt{3})$ y $(1,-\sqrt{3})$; mínima en $(-4/3,2\sqrt{5}/3)$ y $(-4/3,-2\sqrt{5}/3)$.

12) $f(1,1)=4$ es máximo local.

13) Observe que la suma de números positivos siempre resulta mayor que el mayor de ellos.

14) Aplique derivada de función definida implícitamente y derivada de la composición de funciones. Por ejemplo, para obtener la expresión de $f''_{xy}(x_o,y_o)$ tenga en cuenta que:

$$f'_x(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\quad \text{con } z=f(x,y).$$

15) $\varphi_1(x,y)=\sqrt{36-x^2-4y^2}$, $\varphi_1(0,0)$ máximo; $\varphi_2(x,y)=-\sqrt{36-x^2-4y^2}$, $\varphi_2(0,0)$ mínimo.

16) $\varphi_1(x,y)=\sqrt{\frac{1-x^2-4y^2}{9}}$, $\varphi_1(0,0)$ máximo; $\varphi_2(x,y)=-\sqrt{\frac{1-x^2-4y^2}{9}}$, $\varphi_2(0,0)$ mínimo.

17) a) $f(-1,-1) = -32$ es máximo local, $f(1,1) = 32$ es mínimo local.

b) $f(-1/3,-1/3) = -5/27$ no es extremo local, $f(1,1) = 1$ es máximo local.

c) f produce mínimo relativo en sentido amplio en todo punto de la recta $4x-3y=2$.

d) No produce extremos.

e) $f(1/8,\,-3/8,\,1/4) = -1/64$ es mínimo relativo.

f) $f(-8,\,-16,-4) = 112$ es máximo relativo; $f(2,4,1) = -13$ es mínimo relativo.

18) El más cercano: (1,5). El más alejado: $(1,-1)$.

19) a) diámetro = altura = $\sqrt{2A/(3\pi)}$; b) diámetro = altura = $(4\ V\ /\ \pi\ )^{1/3}$.

20) Los puntos a unir son el $(1,1/4)$ de la recta con el $(1/2,-1/4)$ de la parábola, la distancia entre ambos (longitud del camino a construir) es de $1/\sqrt{2}$.

T.P. N° 8

01) Por ejemplo:

a) $\overline{X} = (t,\, t^2) \wedge t \in [-1,2]$; $\overline{X} = (2-u,\,(2-u)^2) \wedge u \in [0,3]$.

long. $= (2\sqrt{5} + 4\sqrt{17} + \text{argsenh}(2) + \text{argsenh}(4))/4 \cong 6.12573$.

b) $\overline{X} = (2+2\cos(t),\, 1+2\,\text{sen}(t)) \wedge t \in [0,2\pi]$;

$\overline{X} = (2+2\,\text{sen(u)},\, 1+2\cos(u)) \wedge u \in [0,2\pi]$.

long. $= 4\pi$.

c) $\overline{X} = (a\cos(t),\, b\,\text{sen}(t) \wedge t \in [0,2\pi]$; $\overline{X} = (a\,\text{sen(u)},\, b\cos(u)\,a\,\text{sen(u)}) \wedge u \in [0,2\pi]$.

long. $= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\text{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt$.

d) $\overline{X} = (2+t,\, 3-t,\, 2t-1) \wedge t \in [0,1]$; $\overline{X} = (3-u,\, 2+u,\, 1-2u) \wedge u \in [0,1]$.

long. $= \sqrt{6}$.

e) $\overline{X} = (t,\, t^2,\, 2-t) \wedge t \in [0,2]$; $\overline{X} = (2-u,\,(2-u)^2,\, u) \wedge u \in [0,2]$.

long. $= 3\sqrt{2} + \text{argsenh}(2\sqrt{2})/2 \cong 5.12401$.

f) $\overline{X} = (2\cos(t),\, 2\,\text{sen}(t),\, 2) \wedge t \in [0,2\pi]$; $\overline{X} = (2\,\text{sen(u)},\, 2\cos(u),\, 2) \wedge u \in [0,2\pi]$.

long. $= 4\pi$.

g) $\overline{X} = (9v,\, 3-v,\, 3+v) \wedge v \in [1,2]$; $\overline{X} = (9(3-t),\, t,\, 6-t) \wedge t \in [1,2]$.

long. $= \sqrt{83}$.

02) $4 + \pi/2$.

03) $9\sqrt{5}$.

04) $k\,(\sqrt{3/2} - \sqrt{2}/6)$; k constante de proporcionalidad.

05) $G = (8/9\ ,\ 16/9\ ,\ 4/3)$.

06) Sugerencia: recuerde que $\bar{h}\cdot\bar{h}=\|\bar{h}\|^2$ y derive ambos miembros en las condiciones del enunciado.

07) a) $\bar{X}=\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{5}\,\pi+s}{2\sqrt{5}}\right),\ 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{5}\,\pi+s}{2\sqrt{5}}\right),\ \frac{2(\sqrt{5}\,\pi+s)}{\sqrt{5}}\right)\wedge s\in[-\sqrt{5}\,\pi, 3\sqrt{5}\,\pi]$.

b) curv. flexión $=0$, plano osc. y curv. torsión: no quedan definidos.

d) $cf = 1/R$ con R radio de la circunferencia.

e) (–278/5 , –144/5 , 293/12).

08) En $\mathbb{R}^2$: observe que si $\bar{X}=\underbrace{(x(t),y(t))}_{\bar{g}(t)}$, entonces $d\bar{s}=(dx,dy)$.

11) $-4/3$.

12) 16/21.

13) 122/3; Pto.inic. = (0,1,2), Pto.final = (2,9,6); no ($D\bar{f}$ no es simétrica).

14) Cuando admite función potencial, se indica la familia de funciones a la cual pertenece:

a) $x+y+xy-x^2y+C$.

b) No admite función potencial.

c) $yz+sen(xz)+C$.

d) $x^2+xy+x+zy+z^2+C$.

16) Se demuestra. Se verifica. El campo no admite función potencial en su dominio.

17) Se cumple, la expresión de la función potencial es x^2y-x^3+x+2.

18) $g(x)=x^2+2$.

19) 27.

20) Demuestre que la circulación en camino cerrado no es nula.

21) $a=b=3$.

T.P. N° 9

01) a) 125/24. b) $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$. c) 8/3. d) 0.5. e) 20 arcsen$(1/\sqrt{5})\cong 9.27295$.

f) $3\sqrt{3}+4\pi/3\cong 9.38494$.

02) a) 2. b) 0. c) 2. d) 1. e) 9.5. f) 1– ln(2).

03) Llamando r al radio y k a la constante de proporcionalidad: masa$=\frac{4kr^3}{3}$; $G=(0,0)$.

05) a) $\frac{1}{3}$. b) $\frac{e-1}{2}$. c) $\frac{125}{6}$.

06) a) 2. b) $3\pi ab$. c) 1638.4. d) 6. e) $3\pi/2$.

07) a) $2\sqrt{2}\pi$. b) $\sqrt{2}\pi(e^4-1)/8\cong 29.7663$.

08) a) π.

09) 4 .

10) a) $3\pi/4$, planteo en cartesianas: $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\,dy$.

b) 4, planteo en cartesianas: $\int_0^{\sqrt{3}} x\,dx\int_{-x/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\,x} dy$.

11) $\frac{32}{15}\pi$, planteo en cartesianas: $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz$.

12) a) $\frac{68}{5}$. b) 9. c) $\frac{16}{9}a^3(3\pi-4)$. d) $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$. e) $\frac{3}{10}$.

f) 36π . g) $\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{12}$. h) 256π .

13) $G = (38/25 , 52/25 , 6/5)$.

14) k 8192/15 .

15) $\frac{\pi h^3}{3}[\mathrm{tg}(\omega)]^2$.

16) 0 .

17) a) $k\frac{128}{15}\pi$. b) $k\pi\sqrt{2}/8$. c) $72k$.

18) $64\pi/3$.

T.P. N° 10

01) a) param.: $\overline{X} = (u,u^2,v) \wedge (u,v)\in \Re^2$, cart.: $y = x^2$.

b) param.: $\overline{X} = (u+v\,,\, u^2+v\,,\, v) \wedge (u,v)\in \Re^2$, cart.: $y-z = (x-z)^2$.

c) param.: $\overline{X} = (2\cos(u)\,,\, 2\,\mathrm{sen}(u)\,,\, v)$ con $u\in[0,2\pi]$, $v\in\Re$; cart.: $x^2+y^2=4$.

d) param.: $\overline{X} = (u+2v\,,\, 2u+v\,,\, u^2) \wedge (u,v)\in \Re^2$, cart.: $(2y-x)^2 = 9z$.

02) a) param.: $\overline{X} = (uv, u^2v, 1-v) \wedge (u,v)\in \Re^2$, cart.: $x^2 = y(1-z)$.

b) param.: $\overline{X} = (u,v,0) \wedge (u,v)\in \Re^2$, cart.: $z=0$.

c) param.: $\overline{X} = (2v\cos(u)\,,\, 2v\,\mathrm{sen}(u)\,,\, 2-2v)$ con $u\in[0,2\pi]$, $v\in\Re$;

cart.: $x^2+y^2=(z-2)^2$.

d) param.: $\overline{X} = (v\,,2v\,,w) \wedge (v,w)\in \Re^2$, cart.: $y=2x$.

03) a) $\overline{X} = (2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi),\, 2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\, 2\cos(\theta))$ con $\theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi]$.

b) $\overline{X} = (2\cos(u),\, \mathrm{sen}(u),\, v)$ con $u\in[0,2\pi], v\in\Re$.

c) $\overline{X} = (6\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi),\, 3\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\, 2\cos(\theta))$ con $\theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi]$.

d) $\overline{X} = (u, v, u^2+v^2) \wedge (u,v)\in \Re^2$.

05) a) 57/8. b) $48\pi\sqrt{3}$. c) 8. d) $4\pi R^2$. e) 4. f) $\pi(3+\sqrt{2})$. g) $\sqrt{6}-\sqrt{2}/3$. h) $9\pi\sqrt{6}$.

06) $\frac{k\pi}{12}(17^{3/2}-5^{3/2})$.

07) Observe que este caso $\overline{F}\cdot\breve{n}$ resulta constante.

08) Observe que siendo S plana $\breve{n}$ es constante.

10) a) $224\pi/3$.

b) 32π.

c) $\dfrac{5618}{15}$ con $\breve{n}$ orientado desde S hacia el plano xz.

d) $\dfrac{136}{3}$ con $\breve{n}\,/\,\breve{n}\cdot(0,0,1) > 0$.

e) $46-\pi$.

11) 16/3 con $\breve{n}$ orientado desde S hacia el plano x,z.

12) 64 con $\breve{n}\,/\,\breve{n}\cdot(1,0,0) > 0$.

14) 24.

15) 8/3, superficie orientada hacia z^+.

16) $\pi/2$, Σ orientado hacia z^+.

17) 12π.

T.P. N° 11

01) Por ejemplo: Área(D) $= \oint_{\partial D^+} x\,dy$; también, Área($D$) $= -\oint_{\partial D^+} y\,dx$.

a) $ab\pi$. b) 3π. c) π.

02) 1/30.

03) $\pi/2$.

04) -20.

05) 81/5.

06) a) 3. b) 0 .

07) 24.

08) -33π.

09) $384\pi-138$.

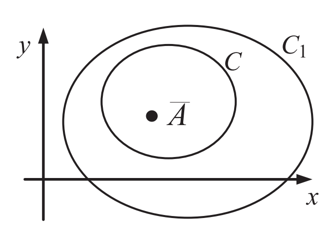
10) Se puede demostrar aplicando el teorema de Green, considerando las hipótesis adecuadas para la curva.

11) $\phi(-1/3,-1)=20/9$ es máximo local, $\phi(1/3,-1)=16/9$ es mínimo local.

12) -4π.

13) Sugerencia: considere otra curva C_1 según se indica en el dibujo y aplique Green en la región D entre ambas curvas. De esta manera podrá demostrar que

$$\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{s} = \oint_{C_1^+} \bar{f}\cdot d\bar{s}\text{ ; es decir,}$$



el resultado de la circulación rodeando $\overline{A}$ no depende de la curva. Así, si el cálculo con una C cualquiera resulta 0 , todas las circulaciones en camino cerrado serán nulas, entonces $\bar{f}$ es campo de gradientes. Si C no rodea al punto y $\overline{A} \notin C$, aplicando Green puede demostrar que la circulación es nula.(*)

(*) Cuando C rodea al punto no se puede aplicar Green pues $\bar{f} \notin C^1$ en $\overline{A}$.

14) No admite función potencial.
Sugerencia: calcule $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ por ejemplo con $C:\ 4x^2 + y^2 = 1$.

15) Tenga en cuenta las hipótesis del teorema, en especial respecto de la superficie.

16) Sugerencia: analice la matriz jacobiana y circule a lo largo de una circunferencia con centro en $\bar{0}$ y radio cualquiera. $U(x,y) = k\,q/r$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17) $U(x,y,z) = k\,q/r$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

18) a) No. b) No. c) No. d) Si.

19) Demostraciones a cargo del lector, aplicando definiciones y teoremas.

20) 21, circulando en el sentido $(6,0,0) \to (0,3,0) \to (0,0,2) \to (6,0,0)$.

21) 4π , circulando en el sentido $(2,2,0) \to (2,0,2) \to (2,-2,0) \to (2,0,-2) \to (2,2,0)$.

22) $6\pi - 16/3$.

23) 18.

24) 24, $\breve{n}$ saliente del cuerpo, $g \in C^1$.

25) 4π , considerando versor normal a S tal que $\breve{n} \cdot (0,1,0) > 0$.

26) 0 .

27) $25\pi/12$, con $\breve{n}\ /\ \breve{n} \cdot (0,0,1) > 0$.

28) Sugerencia: cuando *S* no encierra a $\bar{A}$ aplicando el teorema el flujo resulta nulo; si *S* encierra al punto $\bar{A}$ use una superficie auxiliar entre S y el origen y aplique el teorema al cuerpo *H* que tiene como frontera los puntos de ambas superficies.

29) $4\pi k\,q$, el resultado no cambia para toda superficie suave a trozos que rodee al origen.[(#)]

30) Sugerencia: aplique el teorema de la divergencia.

31) Sugerencia: aplique el teorema de la divergencia y recuerde que si el integrando es mayor o igual a cero el resultado de la integral también lo es.

32) 12π , con $\breve{n}\ /\ \breve{n} \cdot (0,0,1) > 0$.

33) 0 .

34) $\bar{f}(x,y,z) = (z + (5x - y\,x^2)/2\ ,\ (5y - x\,y^2)/2\ ,\ 2x\,y\,z - 5z)$.

35) $324\pi/5$.

36) $a = 1,\ b = -3$; es un mínimo local.

T.P. N° 12

01) a) $y \ln|x| - y + x = 0$. b) $y^2 = x^2 + C\,x$. c) $\operatorname{tg}(y/x) = 1 + \ln|x|$. d) $y \ln|y| + C\,y + x = 0$.

02) $x^2 + y^2 = K\,y$.

03) $y^2 - x^2 + 2xy + 2x + 6y = C$ con $x + y + 3 \neq 0$.

04) a) $x^2 y + \operatorname{sen}(y) = C$. b) $2x + 2y - x^2 y^2 + 1 = 0$. c) $3x^2 y - x\,y^3 + 2y^2 = C$.
d) $y = \dfrac{x}{x + C}$. e) $\ln|x| = \mathrm{C} + \dfrac{\mathrm{y}^2}{x}$. f) $y^4 + y^5 \operatorname{sen}(x) = C$.

05) $y = \left(C + \ln(x)\right) e^{-1/x}$.

[(#)] Se supone $\bar{0}$ interior a un cuerpo *H*, la superficie es la frontera de *H*, $\breve{n}$ saliente de *H*.

06) a) $y = A e^{-4x}\cos(3x) + B e^{-4x}\mathrm{sen}(3x)$.

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} - 2^{-1}$.

c) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \dfrac{x^2}{2} e^{x} - x e^{x} + x + \dfrac{3}{2}$.

d) $y = C_1 \mathrm{sen}(x) + C_2 \cos(x) + x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\ln(|\cos(x)|)$.

e) $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + x e^{x}\ln(|x|)$.

f) $y = C_1 e^{-x} + C_2 - \mathrm{sen}(x) - \cos(x)$.

07) $C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x$.

08) a) $y = 2e^{-x} + 2e^{2x} + 2x - 2x^2 - 3$. b) $y = \dfrac{1}{12}e^{-x} + \dfrac{2}{3}e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{3x}$

c) $y = \dfrac{e^{-x}}{10}\big(3\cos(x) + 11\,\mathrm{sen}(x)\big) + \dfrac{1}{10}\mathrm{sen}(2x) - \dfrac{3}{10}\cos(2x)$

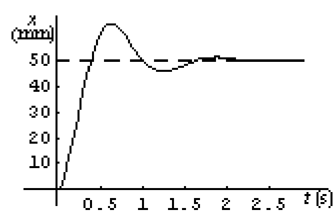
d) $y = x - 1 + e^{x} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$. e) $y = 1 - 2x - 2e^{-x} + 3e^{x}$.

09) $y = C_1\cos(x) + C_2\,\mathrm{sen}(x) + 2x^2$.

10) a_1) En metros:

$$x(t) = \tfrac{1}{100}[5 - 5e^{-2t}\cos(5t) - 2e^{-2t}\mathrm{sen}(5t)] =$$
$$= \tfrac{1}{100}[5 - \sqrt{29}\, e^{-2t}\mathrm{sen}(5t + \mathrm{arctg}(5/2))]$$

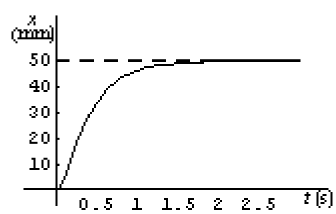
$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.05$ m $= 50$ mm, oscilación amortiguada.



a_2) En metros:

$$x(t) = \tfrac{1}{100}\left(5 - \tfrac{9}{4}e^{-29t/3} - \tfrac{29}{4}e^{-3t}\right)$$

$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.05$ m $= 50$ mm, sin oscilaciones.



b) $[x'] = \mathrm{m/s}$, $[x''] = \mathrm{m/s^2}$, $[M] = \mathrm{kg}$, $[k] = \mathrm{N/m}$, $[d] = \mathrm{N\,s/m}$.

11) En volts:

$$v(t) = \tfrac{1}{100}[5 - 5e^{-2t}\cos(5t) - 2e^{-2t}\mathrm{sen}(5t)] =$$
$$= \tfrac{1}{100}[5 - \sqrt{29}\, e^{-2t}\mathrm{sen}(5t + \mathrm{arctg}(5/2))]$$

$v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.05$ V $= 50$ mV, con oscilación amortiguada.

12) $0 < k < 6$.

13) Respuestas en forma cartesiana, con líneas orientadas según $\bar{f}$ en cada punto:

a) $(x - y)(x + 2y)^2 = K$. c) $y = Kx^2$.

b) $y^2 - x^2 = K$. d) $ky^2 - x^2 = K$.

Comentario: Observe que para $k = 1$ las respuestas “b” y “d” coinciden pero los campos son distintos; es decir, la forma cartesiana de las líneas de campo no permite deducir de qué campo vectorial son las líneas que se están describiendo.

e) Excluido el origen, familia de semirectas que parten (si $k\,q > 0$) del origen o llegan (si $k\,q < 0$) al origen en el plano *xy*.

f) Ídem "e" en el espacio *xyz*.

g) Conviene el planteo paramétrico (ver a continuación).

h) $\dfrac{x-A}{2} = y = \dfrac{z-B}{3}$; todas las rectas de $\Re^3$ dirigidas y orientadas por (2,1,3).

Planteo paramétrico, imponiendo $\bar{f}(\bar{g}(t)) = \bar{g}'(t)$ sólo se obtienen respuestas relativamente sencillas para:

a) $\bar{X} = (C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t}\ ,\ C_1 e^t - C_2 e^{-2t}) \wedge t \in \Re$.

b) $\bar{X} = (C_1 e^t + C_2 e^{-t}\ ,\ C_1 e^t - C_2 e^{-t}) \wedge t \in \Re$.

c) $\bar{X} = (C_1 e^{t/2}, C_2 e^t)$ con $t \in \Re$.

g) $$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C_3 e^{-t/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y = C_1 e^t - \frac{1}{2}(C_2 - C_3\sqrt{3})\, e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{1}{2}(C_2\sqrt{3} + C_3)\, e^{-t/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ z = C_1 e^t - \frac{1}{2}(C_2 + C_3\sqrt{3})\, e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{2}(C_2\sqrt{3} - C_3)\, e^{-t/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{cases} \quad \text{con } t \in \Re.$$

h) $\bar{X} = (C_1 + 2t, C_2 + t, C_3 + 3t)$ con $t \in \Re$.

Los otros casos son muy complicados; por ejemplo, para el campo electrostático plano sería:

e) $$\bar{X} = \left(\frac{A(3k\,q)^{1/3}}{\sqrt{A^2+B^2}}\, t^{1/3}\ ,\ \frac{B(3k\,q)^{1/3}}{\sqrt{A^2+B^2}}\, t^{1/3} \right) \text{ con } \begin{cases} t>0 \text{ si } k\,q>0 \\ t<0 \text{ si } k\,q<0 \end{cases}$$ (*)

Una parametrización simple para $k\,q > 0$ es $\bar{X} = \overbrace{(C_1 u, C_2 u)}^{\bar{g}(u)}$ con $u > 0$; pero esta forma no cumple con la ecuación (1).
Es decir, la representación geométrica de las líneas sigue siendo la misma (semirrectas orientadas alejándose del origen) pero se perdió la relación con $\bar{E}$; a esta última también se podría llegar desde $\bar{f}(x,y) = (x,y)$ que claramente no es el campo $\bar{E}$ original.

Para trabajar en base a trayectorias ortogonales, sería por ejemplo el ítem 13d con $k = 1$; en este caso, suponiendo que $\phi(x_o, y_o) = \phi_o$ es el valor del potencial que físicamente conviene imponer en el punto (x_o,y_o), resultan:

Familia de líneas equipotenciales: $\frac{1}{2}x^2 y^2 - \frac{1}{2}x_o^2 y_o^2 + \phi_o = C$.

Familia de líneas de campo: $y^2 - x^2 = K$, orientadas según $\bar{f}$ en cada punto.

(*) Son semirrectas orientadas (sentido de arcos crecientes) que "salen" del origen en el caso de $k\,q > 0$, y llegan cuando $k\,q < 0$; la forma especial del resultado surge de la imposición $\bar{f}(\bar{g}(t)) = \bar{g}'(t)$.

La respuesta contempla las líneas del campo generado por una carga eléctrica puntual ubicada en $\bar{0}$, en ambos casos: carga q positiva o negativa. Siendo k una constante del tipo $1/(4\,\pi\,\varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$ (permitividad) es una constante que depende del medio (caso de dieléctrico lineal).

14) Recuerde que, bajo ciertas hipótesis, $\bar{f} = \Delta\phi$ es ortogonal en cada punto al conjunto de nivel de ϕ que pasa por ese punto.

15) a) $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}e^{-t} - \frac{171}{170}e^{4t} - \frac{5}{17}\cos(t) - \frac{3}{17}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{114}{85}e^{4t} + \frac{1}{17}\cos(t) + \frac{4}{17}\operatorname{sen}(t) \end{cases}$.

b) $(x, y, z) = (v_x t, 0, v_z t - \frac{1}{2} g t^2)$.

c) $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} \\ y = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} + \cos(t) \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + (2/3)\, C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-t} \\ z = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - C_3 e^{-t} \end{cases}$.

e) $\begin{cases} y_1 = 3 - 2e^{-t} \\ y_2 = e^{-t} \\ y_3 = e^{-t} - 3 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x = e^{2t} + e^{3t} + t + t^2 \\ y = 2e^{2t} + t + 1 \end{cases}$.