CINEMATICA DEL PUNTO MATERIAL

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia los movimientos de los cuerpos, atendiéndose a la descripción de los mismos, y sin vincularlos con las causas que los originan o modifican.

Observando los cuerpos que nos rodean, vemos que pueden realizar movimientos muy distintos y que en algunos casos pueden ser muy complejos (vuelo de un avión o de un insecto, giro de un trompo, movimiento de las moléculas de un gas, de un satélite, etc); en muchos casos no todas las partes del cuerpo se mueven de la misma manera, y su estudio detallado no es sencillo.

Por ahora, nos limitaremos a la descripción del movimiento de un <u>solo punto</u> del cuerpo, con lo que desarrollaremos la <u>*Cinemática del punto material*</u>.

Se denomina punto material a un cuerpo cuyas dimensiones pueden despreciarse, cuando se describe un movimiento.

¿Cuándo decimos que el punto se mueve?. Cuando cambia su ubicación en el espacio. Si bien el concepto de ubicación es absoluto, para poder determinarlo se hace necesario referirlo a otro punto u objeto. Surge así el <u>*carácter relativo*</u> de posición de un objeto respecto a otro.

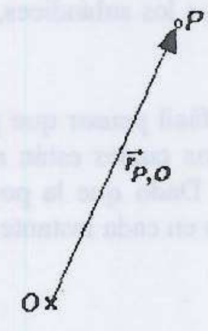
Así el espectador que ocupa un asiento en la tercera fila de un cine se encuentra una fila más atrás con respecto a un espectador de la segunda fila, pero dos filas más adelante del que esta sentado en la quinta fila. Buenos Aires esta 400 km al norte de Mar del Plata y 700 km al sudeste de Córdoba.

Una vez adoptado un punto como referencia, para poder determinar la posición de un punto material respecto de él, se hace necesario conocer:

a) a qué distancia se encuentra respecto del punto de referencia.

b) la dirección en que debe medirse la distancia

c) el sentido (dentro de los dos posibles) sobre esa dirección



Por lo tanto esta posición esta definida por tres características: valor, dirección y sentido. Luego, la posición de un punto respecto de otro punto se puede asociar a un <u>vector.</u>

Si O es el punto elegido como referencia y P el punto cuya posición queremos fijar respecto de dicho punto O, el vector será representado en la figura: tiene origen en el punto O y extremo en el punto P y lo denominaremos $\vec{r}_{P,0}$ (vector posición del punto P respecto del punto O).

Su módulo es igual a la distancia entre dichos puntos.

En lo sucesivo y mientras no se diga lo contrario consideraremos que el punto O ocupa en todo instante la misma posición en el espacio.

Para indicar el instante en que se produce un suceso utilizaremos el símbolo t. Representa el tiempo transcurrido con respecto al instante en que se produjo otro suceso que se adopta como referencia y al cual se le asigna el valor $t = 0$. Es decir, podemos considerar el instante t como una "abscisa temporal" medida con respecto a un origen totalmente arbitrario. Una vez elegido dicho origen, t puede adoptar signo positivo (sucesos ocurridos con posterioridad al suceso para el cual se adoptó $t = 0$) o signo negativo (sucesos ocurridos con anterioridad a $t = 0$)

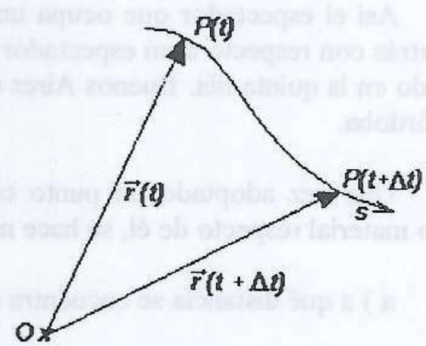
La variación de la abscisa temporal que tiene lugar entre dos sucesos no simultáneos la indicaremos con Δt, siendo $\Delta t = t_2 - t_1$ con $t_2 > t_1$.

El símbolo Δt representa la diferencia entre el instante t_2 en que ocurre el suceso posterior y el instante t_1 en que ocurre el suceso anterior (nunca a la inversa); esto equivale a decir que Δt nunca puede ser negativo. Si bien los valores de t_1 y t_2 dependen del instante en que se empieza a contar el tiempo, Δt resulta independiente del mismo. A esta diferencia la denominaremos intervalo de tiempo (o lapso) entre dos sucesos .

Utilizaremos como unidad de tiempo el segundo y lo simbolizaremos con s

$$[\,t\,] = s$$

Si al transcurrir el tiempo $\vec{r}_{p,o}$ es constante, diremos que el punto P no se mueve respecto de O. Si en cambio, la posición de P en el instante t' no es la misma que en el instante t, siendo t' posterior o anterior a t, diremos que el punto P se ha movido en el intervalo comprendido entre dichos instantes. Si suponemos que t' es posterior a t, podemos escribir:



$$t' = t + \Delta t, \quad \text{donde} \quad \Delta t > 0$$

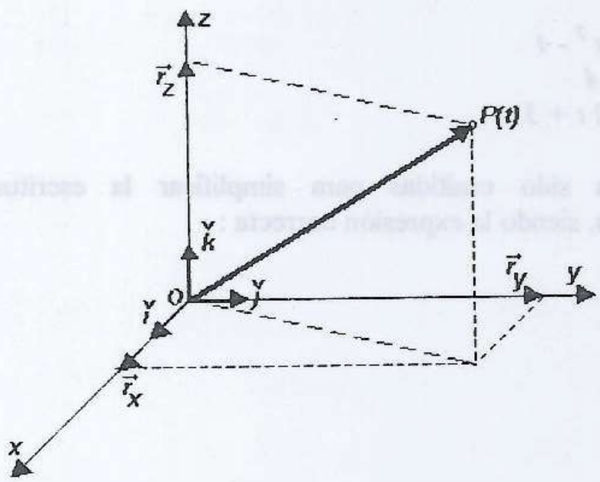
El vector $\vec{r}\,(t + \Delta t)$ es distinto al $\vec{r}(t)$ según puede verse en la figura (Por simplicidad omitiremos los subíndices, teniendo en cuenta que $\vec{r}$ será el vector posición del punto P respecto de O).

Es fácil pensar que para pasar de $P(t)$ a $P(t + \Delta t)$ el móvil debió pasar una sucesión de puntos, los cuales están representados por la curva s. Dicha curva se denomina trayectoria del punto P. Dado que la posición de P sobre la curva es función del tiempo, el vector $\vec{r}$ que está vinculado en cada instante con dicha posición, será también función del tiempo, es decir:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)}$$

Conocer esta función implica conocer cómo varían en el tiempo, la dirección, sentido y módulo de dicho vector posición; no resulta en general sencillo su manejo. Por este motivo, conviene considerar dicho vector como la suma de tres vectores de direcciones diferentes, fijas en el espacio, que por conveniencia se eligen perpendiculares entre si y se cortan en el punto O.

Llamaremos a estas direcciones x, y, y z



Y será:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_x(t)+\vec{r}_y(t)+\vec{r}_z(t)$$

Teniendo en cuenta que las direcciones x, y, z, están caracterizadas por los versores $\breve{i}, \breve{j}, \breve{k}$ respectivamente, podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\,\breve{i} + r_y(t)\,\breve{j} + r_z(t)\,\breve{k}$$

Estos tres vectores del segundo miembro tienen la ventaja sobre el vector $\vec{r}\,(t)$ que solo varían escalarmente, facilitando su manejo.

Los escalares $r_x(t)$; $r_y(t)$ y $r_z(t)$ serán iguales a las respectivas coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ del punto, en el caso que estamos considerando, es decir cuando hacemos coincidir el origen de coordenadas con el punto adoptado como referencia para los vectores posición; por lo que también podrá escribirse :

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\breve{i} + y(t)\,\breve{j} + z(t)\,\breve{k}}$$

Si se cambian las direcciones de los ejes x, y, z , varían r_x, r_y, r_z, pero no el vector $\vec{r}$ que resulta independiente del sistema de coordenadas adoptado.

Las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ se denominan ecuaciones horarias o paramétricas (de parámetro t) de la trayectoria y su conocimiento permitirá determinar la posición del móvil en cualquier instante.

Ejemplo 1 – a) Dadas las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula, obtener el vector posición y calcularlo para t = 2 s.

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = -4 \\ z(t) = -2t + 5 \end{cases}$$

Debe aclararse que han sido omitidas para simplificar la escritura las unidades correspondientes a las constantes, siendo la expresión correcta :

$$x(t) = 3\ \frac{m}{s^2} t^2 - 1\ m$$

$$y(t) = -4\ m$$

$$z(t) = -2\ \frac{m}{s}\ t + 5\ m$$

para el caso en que las posiciones se expresen en metros y el tiempo en segundos .

El vector posición $\vec{r}(t)$ será en este caso:

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 1)\,\breve{i} - 4\,\breve{j} + (-2t + 5)\,\breve{k}$$

se ha simplificado la expresión omitiendo las unidades.

para t = 2 s

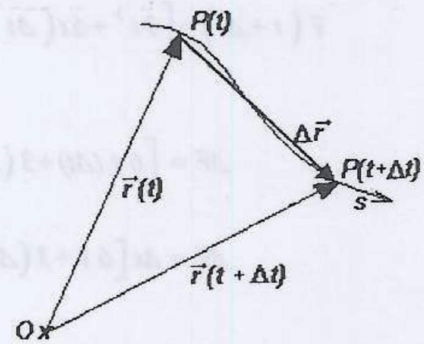
$$\vec{r}(1s) = 13\,\breve{i} - 4\,\breve{j} + 1\,\breve{k}$$

Vector desplazamiento:

Si introducimos un vector $\Delta\vec{r}$ con origen en $P(t)$ y extremo $P(t+\Delta t)$, por definición de variación de un vector será:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$$

Es decir, el vector $\Delta\vec{r}$, que tiene su origen en el extremo de $\vec{r}\,(t)$ y su extremo coincidente con el del vector $\vec{r}\,(t+\Delta t)$ según se observa en la figura, representa la variación del vector posición en el intervalo comprendido entre t y $t+\Delta t$



$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}(t, t+\Delta t)$$

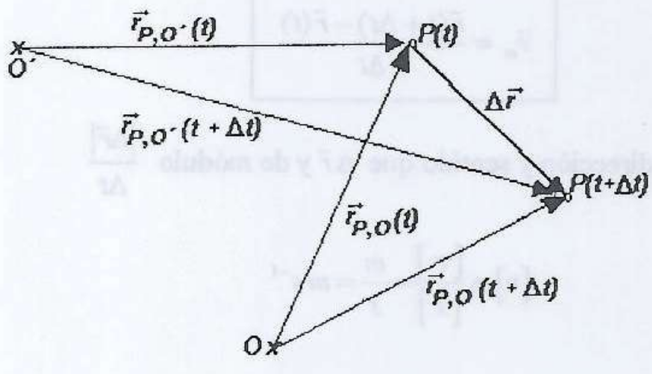
Llamaremos al vector $\Delta\vec{r}$ vector desplazamiento en el intervalo Δt y tiene las siguientes características:

$\Delta\vec{r}$

- **Dirección:** la de la recta determinada por las posiciones inicial y final del punto en el intervalo Δt
- **Sentido:** el del movimiento
- **Módulo:** distancia entre las posiciones inicial y final del punto en el intervalo Δt.

Dicho vector solo coincidirá con la trayectoria en el caso de que esta sea rectilínea; en general, no proporciona mayor información sobre el comportamiento del móvil. En el intervalo Δt el móvil puede haberse detenido, retrocedido o haber seguido cualquier trayectoria, teniendo en todos los casos el mismo vector $\Delta\vec{r}$.

Es conveniente notar que si se cambia el origen del vector posición, los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t+\Delta t)$ serán distintos, no así el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ que es independiente del origen elegido.



Ejemplo 1 – b) Hallar el vector desplazamiento para el vector posición $\vec{r}(t)$ del ejemplo dado en 1 a):

Sabiendo que: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

$$\vec{r}\,(t+\Delta t) = \left[3(t+\Delta t)^2 - 1\right]\breve{i} - 4\,\breve{j} + \left[-2(t+\Delta t)+5\right]\breve{k}$$

$$\vec{r}\,(t+\Delta t)=\left[3\,t^2+6\,t(\Delta t)+3(\Delta t)^2-1\right]\breve{i}-4\,\breve{j}+\left[-2t-2(\Delta t)+5\right]\breve{k}$$

$$\Delta\vec{r}=\left[6\,t\,(\Delta t)+3\,(\Delta t)^2\right]\breve{i}-2\,(\Delta t)\,\breve{k} \qquad \text{o bien}$$

$$\Delta\vec{r}=\Delta t\left[6\,t+3\,(\Delta t)\right]\breve{i}-2\,\breve{k}$$

Para el caso particular de $t = 2\,s$ y $\Delta t = 0{,}2\,s$ resultará:

$$\Delta\vec{r}=2{,}52\;\breve{i}-2\;\breve{k}$$

Vector velocidad media en un intervalo de tiempo

Resulta de interés, en general, relacionar el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ con el intervalo Δt, durante el cual ha tenido lugar el mismo. (un mismo $\Delta\vec{r}$ puede haberse producido en un segundo o en un año).

Se define entonces la *velocidad vectorial media* $\vec{v}_m$ en el intervalo Δt

$$\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{o bien}$$

$$\boxed{\vec{v}_m=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}}$$

que será un vector de igual dirección y sentido que $\Delta\vec{r}$ y de módulo $\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

$$[v]=\frac{[r]}{[t]}=\frac{m}{s}=m\,s^{-1}$$

Ejemplo 1 – c) Hallar el vector velocidad media para el ejemplo dado en 1 a):

Sabiendo que: $\vec{v}_m=\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$

$$\therefore\quad \vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\left[6\,t+3(\Delta t)\right]\breve{i}-2\,\breve{k}$$

Se observa que $\vec{v}_m$ depende en este caso de t y de Δt, aunque no necesariamente ocurre esto en todos los casos.

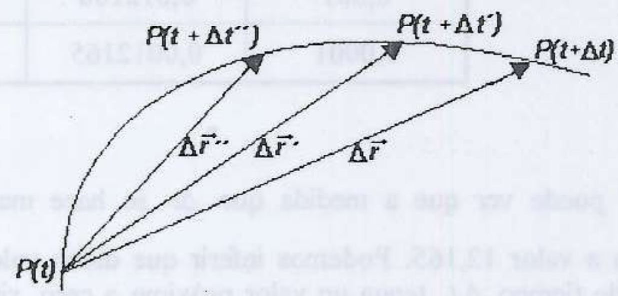
Para el caso particular de $t = 2\,s$ y $\Delta t = 0{,}2\,s$ resultará:

$$\vec{v}_m = 12{,}6\,\breve{i} - 2\,\breve{k}$$

Vector velocidad instantánea

Se ha dicho que $\vec{v}_m$ sólo permite relacionar la variación del vector $\vec{r}(t)$ con el intervalo de tiempo Δt en el que se produce, pero si este Δt no es pequeño, es fácil imaginar que el móvil puede haber tenido un comportamiento variado, sobre trayectorias arbitrarias, como ya se había dicho de $\Delta\vec{r}$, no proporcionando $\vec{v}_m$ información al respecto.

Supongamos la trayectoria curva de la figura y sea $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento entre $P(t)$ y $P(t+\Delta t)$.



Si elegimos un intervalo $\Delta t' < \Delta t$ y si suponemos que el móvil no se detiene ni retrocede, estará $P(t+\Delta t')$ más cercano al punto $P(t)$ y $\Delta\vec{r}\,' = \vec{r}(t+\Delta t') - \vec{r}(t)$; si bien $\Delta\vec{r}\,'$ tampoco coincide con el desplazamiento real, será mas cercano al mismo.

Si elegimos $\Delta t'' < \Delta t'$ la posición del punto será aun mas próxima a $P(t)$ y $\Delta\vec{r}\,'' = \vec{r}(t+\Delta t'') - \vec{r}(t)$ siendo:

$$|\Delta\vec{r}\,''| < |\Delta\vec{r}\,'| < |\Delta\vec{r}|$$

Pero ¿qué ocurrirá con los cocientes?

$$\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \; ; \; \left|\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t'}\right| \; ; \; \left|\frac{\Delta\vec{r}\,''}{\Delta t''}\right|$$

Analicemos el ejemplo anterior, 1 – c):

$$\Delta\vec{r} = \left[6\,t\,(\Delta t) + 3\,(\Delta t)^2\right]\breve{i} - 2\,(\Delta t)\,\breve{k}$$

Será $$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\left[6t(\Delta t)+3(\Delta t)^2\right]^2 + 4(\Delta t)^2}$$

Para t = 2 s observemos los valores de $|\Delta\vec{r}|$ y $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$ correspondientes a diferentes valores de Δt.

Δt (s)	$\lvert\Delta\vec{r}\rvert$ (m)	$\left\lvert\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right\rvert$ (m/s)
1	15,132	15,132
0,1	1,246	12,461
0,01	0,12195	12,195
0,001	0,012168	12,168
0,0001	0,0012165	12,165

Se puede ver que a medida que Δt se hace mas pequeño, los cocientes $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ se aproximan a valor 12,165. Podemos inferir que dicho valor será el que se obtendrá cuando el intervalo de tiempo Δt tenga un valor próximo a cero, sin llegar a ser nulo. Con respecto a la dirección del $\Delta\vec{r}$ y por lo tanto de

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_m$$

puede observarse en la figura que la misma tiende a ser tangente a la trayectoria en el punto P(t). Cuando Δt tiende a cero, definiremos entonces, la velocidad vectorial instantánea $\vec{v}(t)$ como:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{v}_m = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Por definición este límite se denomina *derivada del vector posición respecto del tiempo:*

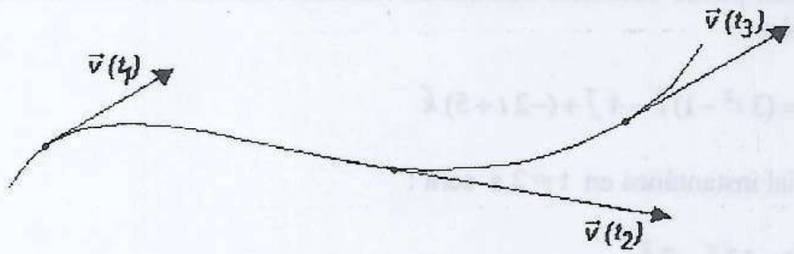
$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

y representa el cociente del desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ ocurrido en el intervalo infinitesimal dt dividido por dicho intervalo .

Las características del vector velocidad instantánea $\vec{v}(t)$ son:

$$v(t)\begin{cases}\textbf{Dirección: } \text{tangente a la trayectoria}\\ \textbf{Sentido: } \text{el del movimiento}\\ \textbf{Módulo: } \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|\end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra $\vec{v}(t)$ en varios puntos, suponiendo que el movimiento tiene lugar de izquierda a derecha .



Teniendo en cuenta que:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\breve{i} + y(t)\,\breve{j} + z(t)\,\breve{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\,\breve{i} + y(t)\,\breve{j} + z(t)\,\breve{k}\right]$$

En matemática se demuestra que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de sus términos y que la derivada respecto al tiempo de un término del tipo $k.t^n$ es de la forma $n.k.t^{n-1}$.

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\breve{i} + \frac{dy}{dt}\breve{j} + \frac{dz}{dt}\breve{k}$$

O lo que es lo mismo:

$$\vec{v}(t) = v_x\,\breve{i} + v_y\,\breve{j} + v_z\,\breve{k}$$

Los vectores $v_x\,\breve{i}$; $v_y\,\breve{j}$; $v_z\,\breve{k}$ son los componentes del vector $\vec{v}(t)$ según los ejes x, y, z.

Ejemplo 1 – d) Para el ejemplo dado en 1 – a), hallar la velocidad instantánea,

Teniendo en cuenta el valor de la velocidad media obtenida en el ejemplo 1 – c)

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left[(6\,t \;+\; 3\;(\Delta t) \right] \breve{i} \;-2\,\breve{k}$$

$$\vec{v}(t) = 6\,t\;\breve{i} - 2\,\breve{k}$$

Expresión que también puede obtenerse calculando matemáticamente la derivada respecto del tiempo del vector posición.

$$\vec{r}(t) = (3\,t^2 - 1)\,\breve{i} - 4\,\breve{j} + (-2\,t + 5)\,\breve{k}$$

La velocidad vectorial instantánea en t = 2 s será :

$$\vec{v}(2s) = 12\,\breve{i} - 2\,\breve{k}$$

Si calculamos su módulo:

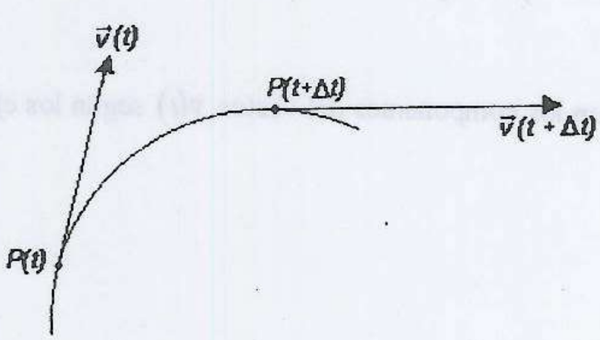
$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{12^2 + 2^2}$$

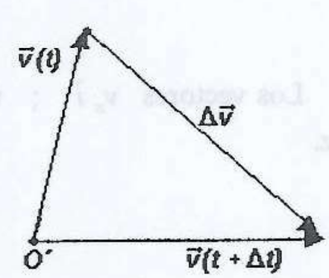
$$|\vec{v}(2s)| = 12{,}165$$

que es el valor al que tendía el cociente $\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ en la tabla anterior.

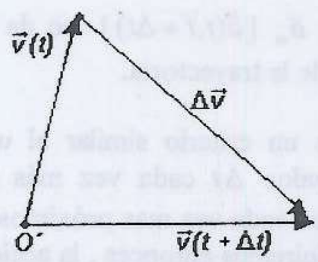
Vector aceleración:

Consideremos una trayectoria curva como la de la figura y representemos posibles vectores velocidad instantánea en *P (t)* y en *P (t + Δ t)*. Si trasladamos dichos vectores a un origen común *O'* arbitrario e introducimos un vector $\Delta\vec{v}$ con origen en el extremo de $\vec{v}(t)$ y extremo en el de $\vec{v}(t + \Delta t)$, resulta :





En general , $\vec{v}(t+\Delta t) \neq \vec{v}(t)$



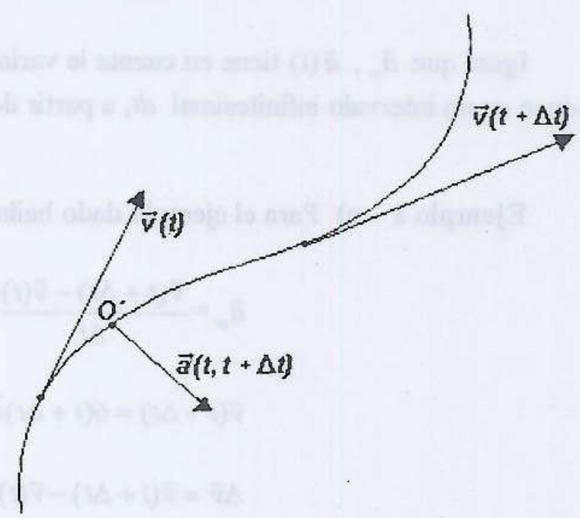
$$\boxed{\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}$$

Es decir $\Delta\vec{v}$ representa la variación del vector velocidad en el intervalo comprendido entre t y $(t + \Delta t)$. Si relacionamos dicha variación con Δt , intervalo de tiempo en el que tiene lugar dicha variación, definiremos la aceleración vectorial media en el intervalo Δt , $\vec{a}_m$ como:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}}$$

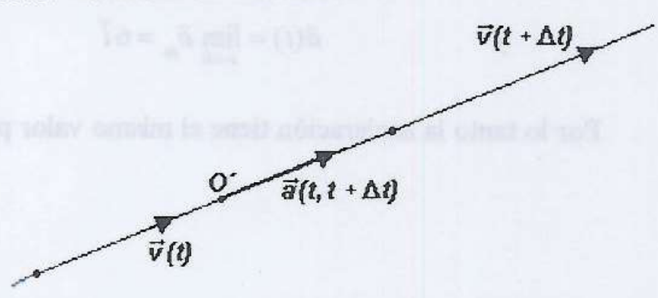
Puede observarse que $\Delta\vec{v}$ tiene en cuenta la variación de $\vec{v}(t)$ debido al cambio de dirección del movimiento, y también a la variación del valor de la velocidad.

Si la trayectoria es curva, el vector aceleración media apunta hacia la parte cóncava de la misma



En este caso sólo hay cambio de dirección de $\vec{v}(t)$

Si la trayectoria es rectilínea, el vector aceleración media apunta en la misma dirección de la trayectoria y su sentido solo depende del vector variación de velocidad.



En este caso sólo hay variación del módulo de $\vec{v}(t)$

Pero esta $\vec{a}_m$ $[\vec{a}(t, t+\Delta t)]$ no da información sobre el comportamiento del móvil en los distintos puntos de la trayectoria.

Siguiendo un criterio similar al utilizado con la velocidad vectorial media , podemos considerar intervalos Δt cada vez más pequeños con lo que los vectores $\vec{v}(t+\Delta t)$ estarán aplicados a puntos cada vez mas próximos , y para $\Delta t \to 0$, se tendrá la aceleración vectorial en el instante t definiremos entonces , la aceleración vectorial instantánea $\vec{a}(t)$ como :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

siendo $\vec{a}(t)$ entonces la derivada respecto del tiempo del vector $\vec{v}(t)$.

Las unidades de esta magnitud:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{m}{s^2} = ms^{-2}$$

Igual que $\vec{a}_m$, $\vec{a}$ (t) tiene en cuenta la variación de $\vec{v}(t)$ en dirección y módulo, pero que se produce en un intervalo infinitesimal dt, a partir de t.

Ejemplo 1 – e) Para el ejemplo dado hallar los vectores $\vec{a}$ (t) y $\vec{a}_m$,

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = 6(t+\Delta t)\breve{i} - 2\breve{k}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = 6(\Delta t)\breve{i}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 6\breve{i}$$

y $$\vec{a}(t) = \lim_{x\to 0} \vec{a}_m = 6\breve{i}$$

Por lo tanto la aceleración tiene el mismo valor para cualquier instante de tiempo.

Ecuación de la trayectoria

Siendo la trayectoria el lugar geométrico de los puntos por los que pasa el móvil durante su movimiento, podemos asegurar que dicho lugar geométrico será una recta o una curva continua (sin saltos). Si la trayectoria es una recta diremos que es rectilínea y en los casos restantes, curvilínea, dentro de estos puede ser circunferencial, elíptica, helicoidal, etc.

Ya habíamos señalado que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las ecuaciones horarias o paramétricas de la trayectoria, que nos permitían ubicar la posición del punto en cualquier instante.

Si la trayectoria tiene lugar en el plano (x , y) se deberán conocer solo $x(t)$ e $y(t)$. La trayectoria del punto estará conformada por los sucesivos pares de valores (x,y) obtenidos cada uno de ellos para un mismo instante t, a partir de las ecuaciones horarias.

Dichos puntos pertenecerán a una recta o curva determinada. Para obtener la ecuación de las mismas, bastará eliminar la variable tiempo en $x(t)$ e $y(t)$, con lo que se obtendrá una ecuación $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$, según convenga, que será la ecuación de la trayectoria.

Ejemplo 2 – Dada las ecuaciones horarias del movimiento de una partícula, hallar la ecuación de la trayectoria.

Sean $x(t) = -t + 3$

e $y(t) = 2t^2 - 1$

Despejando t de la primera ecuación, será:

$$t = -x + 3$$

Y reemplazando en la segunda ecuación:

$$y(x) = 2(-x+3)^2 - 1$$

$$y(x) = 2(x^2 - 6x + 9) - 1 \qquad \text{o}$$

$$y(x) = 2x^2 - 12x + 17$$

Su representación será una parábola por la que se desplaza.

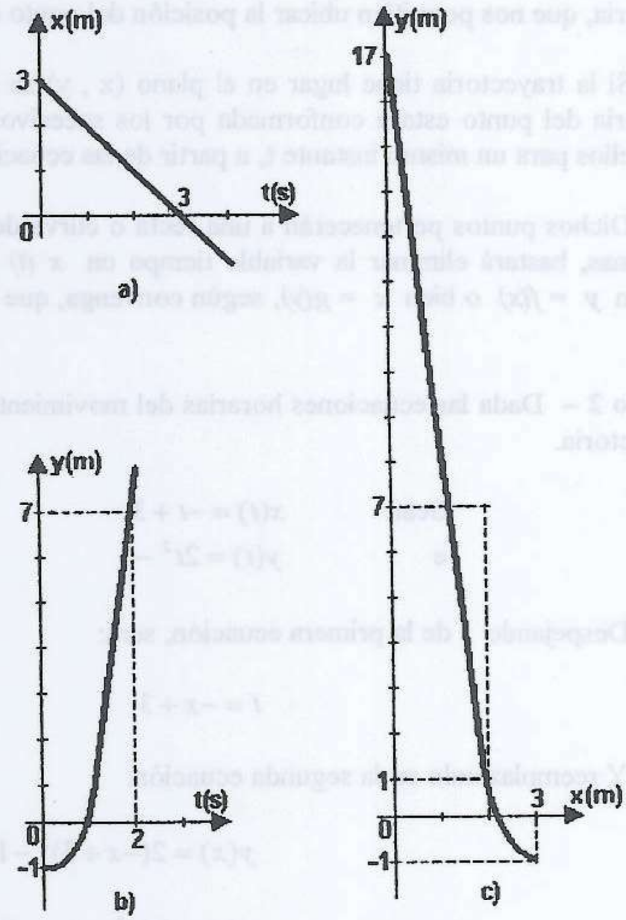
Es importante notar que si bien, a partir de las ecuaciones horarias puede obtenerse la ecuación de la trayectoria, no es posible sin embargo conocer las ecuaciones paramétricas a partir de la ecuación de la trayectoria. Esto era previsible, desde el momento que una misma trayectoria (una ruta caminera, una red ferroviaria, etc.) puede ser recorrida por el móvil en cualquier momento y en condiciones cinemáticas arbitrarias.

Si el movimiento se desarrolla en tres dimensiones al eliminar el tiempo en las ecuaciones horarias $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, se obtendrán pares de ecuaciones que pueden expresarse de las siguientes formas :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f'(y) \\ z = g'(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f''(z) \\ y = g''(z) \end{cases}$$

Debe tenerse presente que las gráficas de las ecuaciones horarias no guardan vinculación con la curva o recta recorrida por el móvil.

Para el ejemplo dado se tienen las siguientes representaciones a) $x = x(t)$; b) $y = y(t)$, y la representación de la trayectoria será el grafico c).

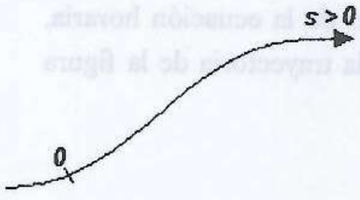


t	x	y
0	3	-1
1	2	1
2	1	7
3	0	17
4	-1	33

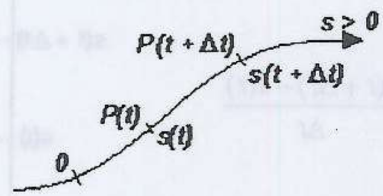
Notar que la trayectoria comienza a trazarse en el punto (3,-1).

Sistema de referencia curvilíneo

Una situación bastante frecuente se presenta cuando la trayectoria esta determinada (ruta caminera, vías del tren, montaña rusa, etc.), en estos casos no es necesario conocer generalmente la ecuación de la trayectoria, ni el vector posición del móvil. El tratamiento puede simplificarse, tomando un eje de referencia (eje curvilíneo) sobre la misma trayectoria, un punto arbitrario *0* considerado como origen de dicho eje y como sentido positivo uno de los dos posibles. De acuerdo con una escala prefijada, el punto tendrá en un instante t, una abscisa que designaremos *s(t)*.



Conocida la función escalar *s(t)*, podremos conocer la posición del punto en cualquier instante, y será esta la ecuación horaria del movimiento.



Si $s(t + \Delta t) \neq s(t)$ se puede definir el desplazamiento escalar Δs, en el intervalo comprendido entre t y $t + \Delta t$

$$\boxed{\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)}$$

El módulo del desplazamiento $|\Delta s|$ coincide con el desplazamiento real en el caso en que el movimiento no cambia de sentido.

Y relacionando el desplazamiento escalar Δs con el intervalo Δt, introduciremos la velocidad escalar media en el intervalo Δt como:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}}$$

Y la velocidad escalar instantánea como:

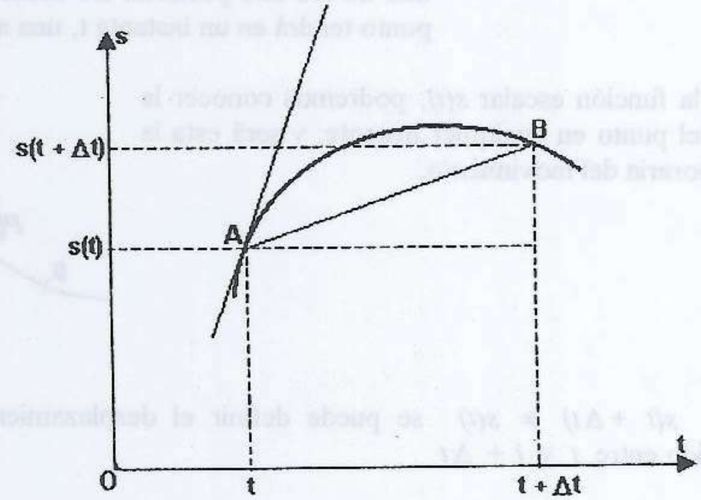
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O bien:

$$\boxed{v(t) = \frac{ds(t)}{dt}}$$

Pueden calcularse v_m y $v(t)$ a partir del gráfico representativo de la ecuación horaria, supongamos un gráfico posible de s en función de t correspondiente a la trayectoria de la figura anterior. Es posible observar que:

$$v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$



resulta ser la pendiente de la recta secante entre los puntos representativos de las posiciones en t y $(t + \Delta t)$.

Sean éstos A y B. A medida que $\Delta t \to 0$, los puntos estarán cada vez mas próximos y la recta secante tiende a ser tangente en el punto A, con lo que $v(t)$ será igual a la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

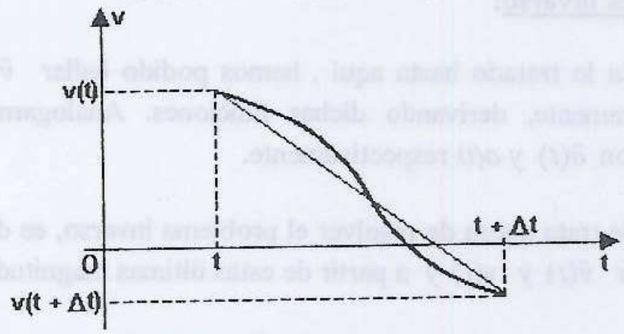
También se puede introducir la aceleración escalar media en el intervalo Δt, como:

$$a_m = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

y la aceleración escalar instantánea como:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Estas también pueden calcularse a partir del gráfico de la velocidad en función del tiempo.



Siendo a_m igual a la pendiente de la recta secante entre A y B y *a(t)* la pendiente de la recta tangente en el punto A

Rapidez media

En muchos casos, solo interesa relacionar el camino total recorrido por el móvil con el tiempo empleado en recorrerlo, sin importar el sentido del movimiento, o si hay retrocesos. Se define entonces la rapidez media R_m en el intervalo Δt,

$$\boxed{R_m = \frac{\textit{longitud del camino recorrido}}{\textit{tiempo empleado en recorrerlo}}}$$

Podríamos asociar la longitud del camino recorrido con la diferencia entre las lecturas de un cuenta-kilómetros en el instante final e inicial del intervalo.

La rapidez media coincidirá con el valor absoluto de la velocidad escalar media en el caso de que no haya cambio de sentido del movimiento.

Obsérvese que $\bar{v}_m$ y v_m son nulos si $P(t + \Delta t) = P(t)$ (trayectoria cerrada), pero R_m, no resultará cero.

Puede definirse también la rapidez instantánea *R(t)* como.

$$R(t) = \lim_{\Delta t \to 0} R_m$$

La rapidez media R(t) puede asociarse por ejemplo, a la indicación del velocímetro de un automóvil .

Problema inverso:

En lo tratado hasta aquí , hemos podido hallar $\vec{v}(t)$ y $v(t)$ a partir de $\vec{r}(t)$ y de $s(t)$ respectivamente, derivando dichas funciones. Análogamente y derivando $\vec{v}(t)$ y $v(t)$ se obtuvieron $\vec{a}(t)$ y $a(t)$ respectivamente.

Se trata ahora de resolver el problema inverso, es decir, conociendo $\vec{a}(t)$ o $a(t)$ se busca encontrar $\vec{v}(t)$ y $v(t)$ y a partir de estas últimas magnitudes, hallar $\vec{r}(t)$ y $s(t)$.

La resolución de este problema implica la aplicación de la operación inversa de la diferenciación, que es la integración, pero este tratamiento requiere conocimientos de análisis matemático que los alumnos no tienen a esta altura del curso. Por lo que procederemos a plantearlo por ahora eludiendo dicho mecanismo, aunque los resultados sean aplicables solo en casos particulares.

Comenzaremos tratando sólo funciones escalares, por simplicidad. Analicemos el caso en que $a(t) = 0$, lo que implica que $\frac{dv}{dt} = 0$, es decir que $v(t) = v$ = constante.

Esto corresponde a lo que hemos llamado *movimiento uniforme*, además;

$$\boxed{v(t) = \frac{ds(t)}{dt}}$$

o sea que $ds(t) = v(t)\, dt$ pero si $v(t) = v$ (constante), dicho valor será independiente del intervalo elegido y por lo tanto :

$$v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \therefore \qquad \Delta s = v \,.\Delta t$$

o sea

$$s(t + \Delta t) - s(t) = v\ \Delta t$$

y

$$s(t + \Delta t) = s(t) + v\ \Delta t$$

o bien,

$$\boxed{s(t) = s(t_o) + v(t - t_o)}$$

considerando como t_o el instante inicial del intervalo y t el instante final .

Si en particular $t_o = 0$, $s(t_o)$ será la coordenada inicial, que llamaremos s_o

Luego resultará:

$$s(t) = s_o + v\ t$$

Puede notarse que cuando se trata de hallar $s(t)$ a partir de $v(t)$, debe conocerse dicha magnitud s para un instante particular, que puede ser $t = 0$. De manera similar, se puede demostrar que:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}.t$$

siendo $\vec{r}_0$ el vector posición en $t = 0$

b) Analicemos el caso en que $a(t) \neq 0$ pero $a(t) = cte$; correspondiente al ***movimiento uniformemente variado.***

Será por lo tanto: $a(t) = a_m = a$

y siendo $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ resultará

$$\Delta v = a.\Delta t$$

o sea $v(t + \Delta t) - v(t) = a.\Delta t$

o $v(t + \Delta t) = v(t) + a.\Delta t$

o bien: $v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$

Considerando a t_o como instante inicial del intervalo y t el final. Si en particular $t_o = 0$, $v(t_o)$ será la velocidad en $t = 0$ que llamaremos velocidad inicial y denominaremos v_o. Luego resultará:

$$v(t) = v_o + a\ t \qquad (1)$$

Para hallar s(t) debemos buscar la función cuya derivada es la expresión anterior. Teniendo en cuenta que la derivada de una función $k\ .\ t^n$ es $n.k\ t^{n-1}$, podemos inferir que la función buscada debe ser del tipo

$$s(t) = \alpha + \beta.t + \gamma.t^2 \qquad (2)$$

De donde se deduce que α debe ser el valor de s para $t = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = s_0$

Si calculamos la derivada con respecto del tiempo de la función propuesta, resultará:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \beta + 2\gamma t = v(t)$$

Comparando esta expresión con (1), vemos que la igualdad se satisface si :

$$\beta = v_o \qquad \text{y} \qquad a = 2\gamma \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{a}{2}$$

Reemplazando en (2) se tendrá:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a\,t^2}{2}$$

Que será la ecuación horaria correspondiente ala movimiento uniformemente variado.

De manera similar, podremos obtener las expresiones vectoriales, para este tipo de movimiento ($a = cte$) siendo éstas:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 t + \vec{a}\,t \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{\vec{a}\,t^2}{2} \end{aligned}}$$

Debe notarse que para hallar $v(t)$ a partir de la aceleración, debe conocerse dicha magnitud en algún instante que puede ser $t = 0$, análogamente, para hallar $s(t)$ o $\vec{r}(t)$ debe conocerse la posición del móvil en algún instante particular.

En resumen, si para un movimiento curvilíneo arbitrario conocemos $s = s(t)$ en forma analítica o gráfica, podemos calcular $v = v(t)$, y a partir de esta última, podemos obtener $a = a(t)$.

Es decir que toda la información de un movimiento curvilíneo está contenida en la ecuación horaria $s = s(t)$ (además de conocer la trayectoria).

Hemos visto entonces que midiendo la pendiente de rectas tangentes a la curva $s = s(t)$ podemos calcular la curva $v = v(t)$ y haciendo lo propio en esta última obtenemos $a = a(t)$.

Esquemáticamente:

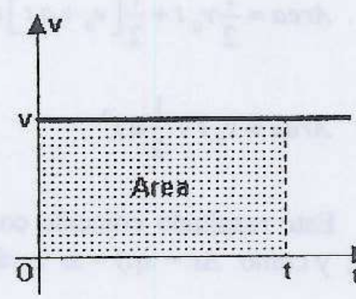
$$s(t) \longrightarrow \boxed{\textit{midiendo pendientes}} \longrightarrow v(t) \longrightarrow \boxed{\textit{midiendo pendientes}} \longrightarrow a(t)$$

Veremos que es posible realizar el proceso inverso en forma gráfica, midiendo áreas en los gráficos $v = v(t)$ y conociendo además s_0 y v_0. Esquemáticamente:

$$s(t) \longleftarrow \boxed{\textit{midiendo áreas y conociendo } s_0} \longleftarrow v(t) \longleftarrow \boxed{\textit{midiendo áreas y conociendo } v_0} \longleftarrow a(t)$$

Tomemos el caso del ***movimiento uniforme*** :

Siendo su velocidad constante su representación $v = v(t)$, es:



Si se calcula el área del rectángulo que tiene como lados v y el intervalo $0 - t$, esta resulta:

$$Area = v \cdot t$$

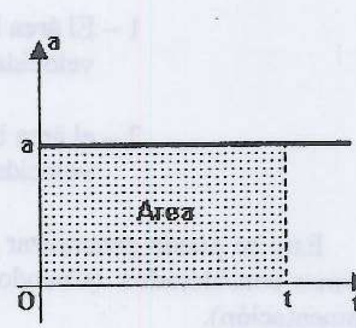
Este valor coincide con el desplazamiento Δs que efectúa el móvil en el tiempo t. Siendo Δx :

$\Delta s = s(t) - s(0)$ y siendo $s(0) = s_0$, resulta

$$s(t) = s_0 + v \cdot t$$

Para el caso del ***movimiento uniformemente variado.***

Siendo su aceleración constante, su representación $v = v(t)$ es la de la figura siguiente.



El área del rectángulo de lados a y el intervalo 0 – t, es :

$$Area = a \cdot t$$

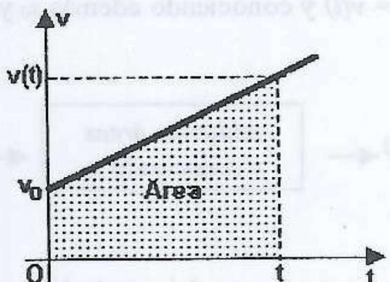
Este resultado coincide con la variación de velocidad Δv que experimenta el móvil en dicho lapso. Como $\Delta v = v(t) - v_0$, resultará :

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Si representamos esta función, al trazar la ordenada correspondiente al tiempo t, resulta un trapecio de bases v_0 y $v(t)$. Sabiendo que la superficie de un trapecio rectángulo es igual al producto de la semisuma de sus bases multiplicada por la altura, el área de dicha figura será:

$$Area = \frac{\left[v_0 + v(t) \right]}{2} t$$

Luego:



$$Area = \frac{1}{2} v_0 \, t + \frac{1}{2} v(t) \, t$$

y reemplazando por

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

será:

$$Area = \frac{1}{2} v_0 \, t + \frac{1}{2} \left[v_0 + a \, t \right] t \qquad \therefore$$

$$Area = v_0 \, t + \frac{1}{2} a \, t^2$$

Este resultado coincide con el desplazamiento Δs efectuado por el móvil en el intervalo $0 - t$; y como $\Delta s = s(t) - s_0$ será por lo tanto:

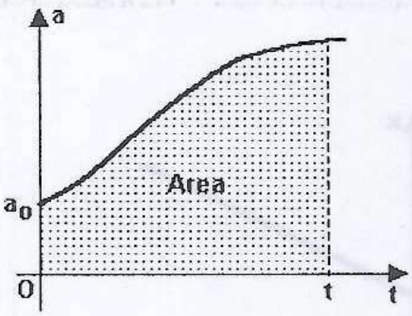
$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \, t + \frac{1}{2} a \, t^2}$$

Del análisis anterior, se puede concluir que:

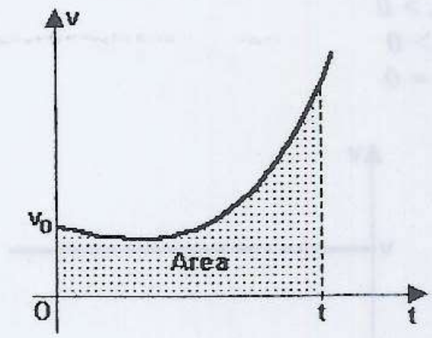
1 – El área bajo la recta que representa $a = a(t)$, representa la variación de velocidad del móvil en el intervalo considerado

2 – el área bajo la recta que representa $v = v(t)$, representa la variación de velocidad del móvil en el intervalo considerado

Esto se puede generalizar al caso de movimientos en general, distintos de los movimientos uniformes considerados. (Cuando se conozcan las propiedades de las integrales, se podrá ver su fundamentación).



Area = Δv



Area = Δs

En el apéndice III se muestra cómo se obtienen por integración, expresiones más generales, válidas para cualquier tipo de movimiento , siendo las anteriores un caso particular de las mismas. Son éstas:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)\, dt \qquad \text{o} \qquad v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^t a(t)\, dt$$

$$\text{y} \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)\, dt \qquad\qquad s(t) = s(t_2) + \int_{t_2}^t v(t)\, dt$$

y las correspondientes expresiones vectoriales :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\, dt \qquad \text{o} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^t \vec{a}(t)\, dt$$

$$\text{y} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\, dt \qquad \text{o} \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_2) + \int_{t_2}^t \vec{v}(t)\, dt$$

Movimiento rectilíneo

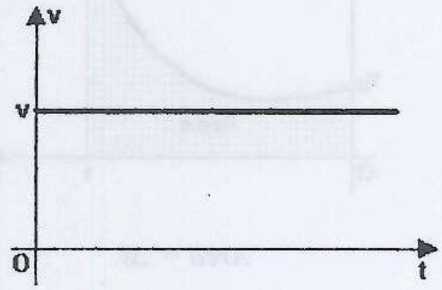
Si el movimiento tiene lugar a lo largo del eje x, las expresiones obtenidas, tendrán la siguiente forma:

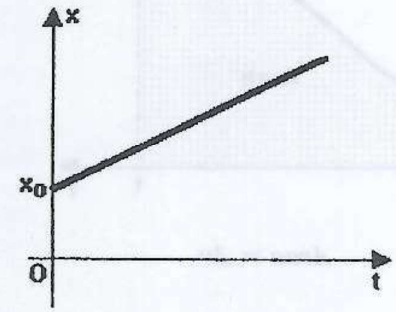
a) *Movimiento rectilíneo uniforme: M.R.U.*

$$\begin{cases} a = 0 \quad \Rightarrow \quad v = cte \\ x(t) = x_o + v.\, t \end{cases}$$

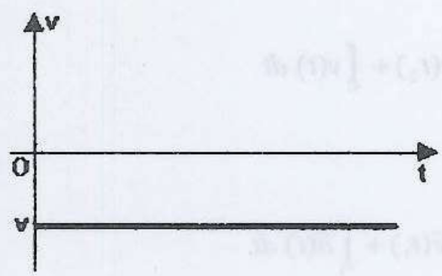
A continuación se muestran los gráficos de V y de x (t) para algunos casos :

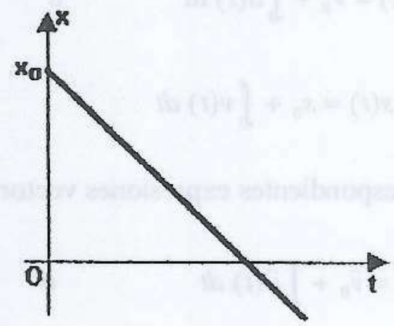
i) $\begin{cases} x_o > 0 \\ v > 0 \\ a = 0 \end{cases}$





ii) $\begin{cases} x_o > 0 \\ v < 0 \\ a = 0 \end{cases}$





Analice, como ejercitación , otros casos posibles

b) Movimiento rectilíneo uniformemente variado : M.R.U.V.

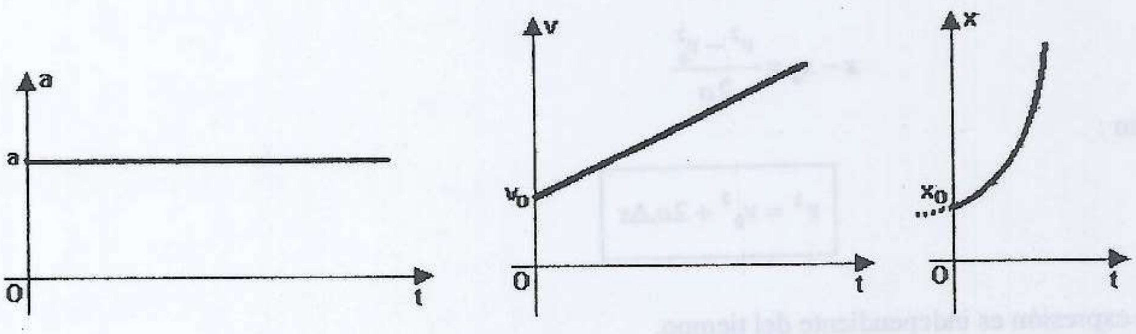
$$a = cte$$

$$v(t) = v_o + a\,t$$

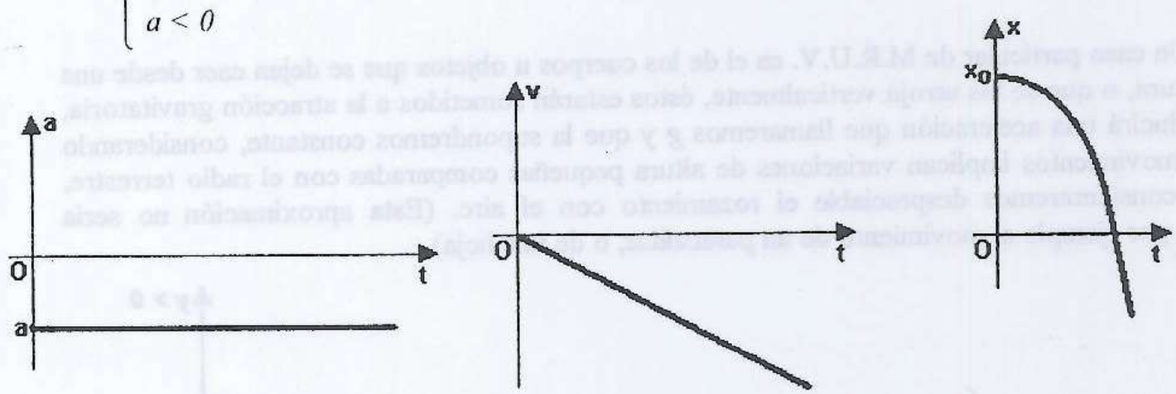
$$x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$$

Se muestran a continuación los gráficos correspondientes a algunos casos

i) $\begin{cases} x_o > 0 \\ v_o > 0 \\ a > 0 \end{cases}$



ii) $\begin{cases} x_o > 0 \\ v_o = 0 \\ a < 0 \end{cases}$



Analice y grafique, como ejercitación, otros casos .

Combinando las expresiones correspondientes a $v(t)$ y $x(t)$,

$$v(t) = v_0 + a\,t$$

$$x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$$

Despejando t de la primera ecuación, será :

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

y reemplazando en la segunda

$$x - x_0 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

y realizando operaciones algebraicas se obtendrá :

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

o bien :

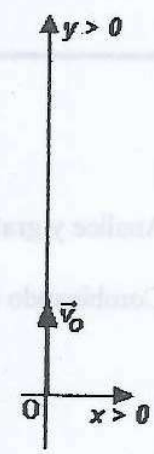
$$\boxed{v^2 = v_0^{\ 2} + 2a.\Delta x}$$

Esta expresión es independiente del tiempo.

Caída libre

Un caso particular de M.R.U.V. es el de los cuerpos u objetos que se dejan caer desde una cierta altura, o que se los arroja verticalmente, éstos estarán sometidos a la atracción gravitatoria, que producirá una aceleración que llamaremos g y que la supondremos constante, considerando que los movimientos implican variaciones de altura pequeñas comparadas con el radio terrestre, además consideraremos despreciable el rozamiento con el aire. (Esta aproximación no sería aplicable por ejemplo al movimiento de un paracaídas, o de una hoja).

$$\begin{cases} a = g \\ v = v_o + g\,t \\ y(t) = y_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$



Teniendo en cuenta que los signos de las magnitudes dependen de la elección del origen y del sentido positivo del eje y.

Ejemplo 3) Se arroja verticalmente y hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial v_o. Hallar la altura máxima alcanzada.

Eligiendo el origen del eje y en el punto desde el cual se arroja el cuerpo y considerando su sentido positivo hacia arriba, las ecuaciones serán para este caso:

$$a = -|\vec{g}|$$

$$v = |\vec{v}_0| - |\vec{g}|\, t$$

$$y = |\vec{v}_0|\, t - \frac{1}{2}|\vec{g}|\, t^2$$

Podemos calcular el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar la altura máxima, respecto del punto de partida. En este punto será $v = 0$.

$$\therefore \qquad |\vec{v}_0| = |\vec{g}|\, t_m \qquad \text{y} \qquad t_m = \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{g}|}$$

Reemplazando este valor de t_m en $y(t)$ se obtendrá $y_{máx.}$

$$y_{\max} = |\vec{v}_0| \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{g}|} - \frac{1}{2}\frac{|\vec{v}_0|^2}{g^2}$$

$$y_{\max} = \frac{|\vec{v}_0|^2}{2|\vec{g}|}$$

Siendo $y_{máx}$ la altura máxima alcanzada en el intervalo de tiempo t_m .

Encuentro en una dimensión

Si dos móviles A y B se desplazan sobre trayectorias rectilíneas, siendo ambas paralelas, podrá en determinadas condiciones producirse el encuentro de los mismos, es decir, se encontrarán en un punto de igual abscisa respecto del mismo origen de coordenadas, simultáneamente.

Esto puede ocurrir en los dos casos siguientes:

a) viajando ambos móviles en igual sentido, uno de los móviles alcanzará al otro.

b) viajando los móviles en sentidos opuestos, ambos se cruzarán .

En ambos casos se verificará, siendo t_e la posición de encuentro:

$$x_A(t_e) = x_B(t_e)$$

y dicha posición será la de encuentro

Ejemplo 4) Un automóvil se dirige hacia una localidad B. Pasa por la localidad A, distante 300 km de B, a las 6 hs. Con una velocidad de $\vec{v}_A$ que mantiene constante durante todo el trayecto. Otro automóvil, que viaja en sentido contrario pasa por B a las 8 hs con una velocidad $\vec{v}_B$ con sentido hacia A que también mantiene constante. Hallar a qué distancia de la localidad A se encuentran y en qué instante tiene lugar dicho encuentro.

Datos: $|\vec{v}_A| = 80$ km/h $\qquad |\vec{v}_B| = 60$ km/h

Tomando como origen del sistema de referencia la localidad A, y como origen de tiempos el instante en que el primer móvil pasa por A (6 hs) será:

$$x_A = |\vec{v}_A|\, t$$
$$x_B = 300\,km - |\vec{v}_B|\,(t - 2\,hs)$$

La condición del encuentro $x_A(t_e) = x_B(t_e)$ implica:

$$|\vec{v}_A|\, t_e = 300\,km - |\vec{v}_B|\,(t_e - 2\,hs)$$

$$\therefore \qquad \left(|\vec{v}_A| + |\vec{v}_B|\right) t_e = 300\,km + |\vec{v}_B|\, 2\,hs$$

$$\therefore \qquad t_e = \frac{300\,km + |\vec{v}_B|\, 2\,hs}{\left(|\vec{v}_A| + |\vec{v}_B|\right)}$$

$$t_e = \frac{300\ km + 60\ km/h.2\ hs}{(80+60)\ km/h}$$

$$t_e = 3\ hs$$

Por lo tanto se encuentran a las 9 h en la posición:

$$x(t_e) = 80\ km/h\ .\ 3\ h\ = 240\ km$$

que se encuentra a 240 km de la localidad A.

Movimiento en dos dimensiones

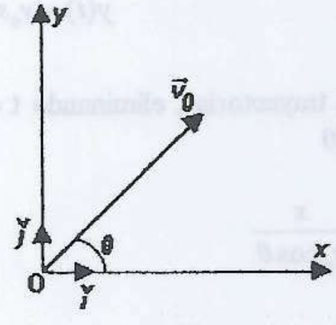
En caso general , la posición de un punto podrá expresarse mediante un vector posición $\vec{r}$ (t) que tendrá dos componentes. Si las direcciones involucradas son x e y

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \breve{i} + y(t)\ \breve{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\ \breve{i} + v_y(t)\ \breve{j}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\ \breve{i} + a_y(t)\ \breve{j}$$

Apliquémoslo al caso particular de un proyectil que se dispara desde un punto de la superficie terrestre con una velocidad inicial v_0 en una dirección que forma un ángulo θ con la dirección del eje x.



Fijando el origen del sistema de referencia en el punto de disparo, las ecuaciones para este caso serán :

$$\begin{cases} \vec{a} = -|\vec{g}|\,\breve{j} \\ \vec{v}(t) = v_0 \cos\theta\,\breve{i} + (v_0\, sen\theta - |\vec{g}|t)\,\breve{j} \\ \vec{r}(t) = v_0 \cos\theta\, t\,\breve{i} + (v_0\, sen\theta\, t - \frac{1}{2}|\vec{g}|t^2)\,\breve{j} \end{cases}$$

Analizando las expresiones que se han obtenido para cada una de las variables x e y, observamos que :

I – según el eje x, son las que tendría un móvil que se desplazara con movimiento uniforme, pues no existe aceleración en esa dirección.

II – según el eje y, son las que tendría un móvil que se desplazara con movimiento uniformemente variado, pues la aceleración en esa dirección que es gravitatoria, es constante.

Conviene en general , separar el análisis del movimiento en cada una de esas direcciones , lo que permite facilitar su tratamiento .

<u>Según el eje x</u>

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cos\theta = cte$$

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t$$

<u>Según el eje y</u>

$$a_y = -|\vec{g}|$$

$$v_y = v_0 sen\theta - |\vec{g}|\, t$$

$$y(t) = v_0 sen\theta\, t - \frac{1}{2}|\vec{g}|\, t^2$$

Podemos hallar la ecuación de la trayectoria , eliminando t de las ecuaciones *x(t)* e *y(t)*. Para ello despejamos t de la ecuación *x(t)*

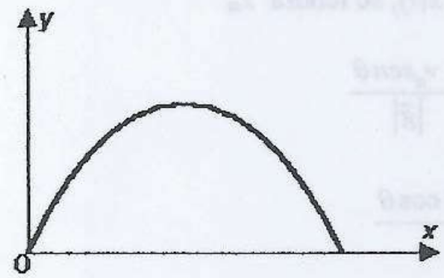
$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

y reemplazamos en *y(t)*, obteniendo *y(x)*

$$y(x) = v_0\, sen\,\theta\, \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}|\vec{g}|\frac{x^2}{{v_0}^2 \cos^2\theta}$$

$$\boxed{y(x) = tg\theta\, x - \frac{1}{2}\frac{|\vec{g}|}{{v_0}^2 \cos^2\theta}x^2}$$

que corresponde a una parábola de eje vertical que pasa por el origen .



Si se quiere hallar la altura máxima alcanzada por el proyectil, la condición será que v_y = 0, el instante correspondiente será:

$$t = \frac{v_0\, sen\,\theta}{|\vec{g}|}$$

calculando y para este valor t_1 , se tendrá y_m

$$y_m = v_0\ sen\,\theta . \frac{v_0\ sen\,\theta}{|\vec{g}|} - \frac{1}{2}|\vec{g}|\frac{{v_0}^2\ sen^2\theta}{g^2}$$

$$\boxed{y_m = \frac{{v_0}^2\ sen^2\theta}{2\,g}}$$

También puede calcularse el alcance, o máximo apartamiento horizontal respecto del punto de lanzamiento.

En este caso será $y = 0$

$$0 = t_2\left(v_0\, sen\,\theta - \frac{1}{2}|\vec{g}|\,t_2\right)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones :

$t_2 = 0$ corresponde a la posición inicial (no es la solución buscada).

$$t_2 = \frac{2\, v_0 sen\,\theta}{|\vec{g}|}$$

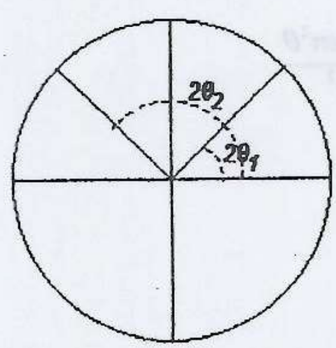
Reemplazando esta última en $x(t)$, se tendrá x_m

$$x_m = v_0 \cos\theta\, \frac{2\, v_0 sen\,\theta}{|\vec{g}|}$$

$$x_m = \frac{v_0^2\, 2\, sen\theta \cos\theta}{|\vec{g}|}$$

$$\therefore\quad x_m = \frac{v_0^2\, sen\,(2\theta)}{|\vec{g}|}$$

Del análisis de esta expresión se puede ver que existen dos ángulos θ_1 y θ_2 tal que $(2\,\theta_1)$ y $(2\,\theta_2)$ tienen el mismo valor del seno. Corresponderán estos últimos a ángulos del primer y segundo cuadrante respectivamente y que son suplementarios .



$$\frac{\pi}{2} \geq (2\theta_1) > 0 \quad \therefore$$

$$\frac{\pi}{4} \geq \theta_1 > 0$$

$$\pi > (2\,\theta_2) \geq \frac{\pi}{2} \quad \therefore$$

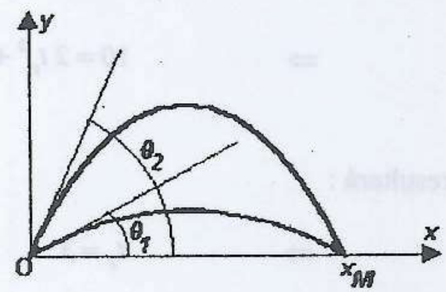
$$\frac{\pi}{2} > \theta_2 \geq \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto los respectivos ángulos de disparo darán el mismo alcance x_m serán:

$$\theta_1 \leq \frac{\pi}{4} \qquad \text{que se conoce como tiro rasante}$$

y $$\theta_2 \geq \frac{\pi}{4} \qquad \text{que se conoce como tiro por elevación.}$$

Puede observarse que θ_1 y θ_2 resultarán complementarios.



Encuentro en general

Dados dos móviles A y B, decimos que ambos se encuentran, cuando en un determinado instante t_e los dos móviles tienen el mismo vector posición respecto del mismo punto de referencia.

En símbolos, debe verificarse que:

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e)$$

La igualdad anterior se cumplirá si :

$$\begin{cases} x_A(t_e) = x_B(t_e) \\ y_A(t_e) = y_B(t_e) \\ z_A(t_e) = z_B(t_e) \end{cases}$$

Ejemplo 5 – Encontrar la posición y el instante de encuentro de dos móviles A y B cuyos vectores posición son :

$$\vec{r}_A(t) = (17t - 6)\,\breve{i} + 10\,\breve{j}$$

$$\vec{r}_B(t) = 15\,t\,\breve{i} + (2t^2 + t - 11)\,\breve{j}$$

Para que se produzca el encuentro de ambos móviles, y teniendo en cuenta que los vectores $\vec{r}_A(t)$ y $\vec{r}_B(t)$ se encuentran en el plano *(x,y)* deberá cumplir que :

$$x_A(t_e) = x_B(t_e) \qquad \Rightarrow \qquad 17\,t_e - 6 = 15\,t_e$$

e

$$y_A(t_e) = y_B(t_e) \qquad \Rightarrow \qquad 10 = 2\,t_e^{\,2} + t_e - 11$$

De la primera ecuación resultará :

$$2\,t_e = 6 \qquad \Rightarrow \qquad t_e = 3$$

y reemplazando este valor en la segunda, es:

$$10 = 2.3^2 + 3 - 1 \qquad \therefore \qquad 10 = 10$$

por lo tanto el valor de $t_e = 3\,s$, satisface las dos ecuaciones y por lo tanto será el instante en que se producirá el encuentro. La posición de dicho encuentro será :

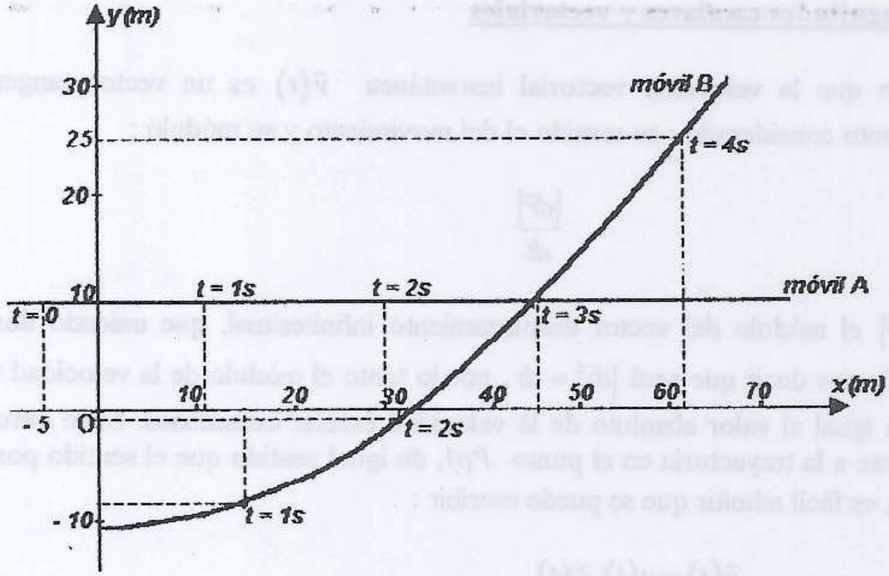
$$x(t_e) = 45$$

$$y(t_e) = 10$$

valores que podrán obtenerse a partir de las expresiones correspondientes a cualquiera de los dos móviles. (verificar).

$$\vec{r}(t_e) = 45\,\breve{i} + 10\,\breve{j}$$

En la figura siguiente se representan las trayectorias de ambos móviles y el punto de coordenadas (45, 10) donde se produce el encuentro.



Valores que se comprueban confeccionando una tabla como la adjunta.

t(s)	x_A =(m)	y_A(m)	x_B(m)	y_B(m)
0	- 6	10	0	- 11
1	11	10	15	- 8
2	28	10	30	- 1
3	45	10	45	10
4	62	10	10	25

Debe notarse que la intersección de las trayectorias es condición necesaria pero no suficiente para que se produzca el encuentro; los móviles deben encontrarse en el *mismo instante* en ese punto.

Relación entre magnitudes escalares y vectoriales

Recordando que la velocidad vectorial instantánea $\vec{v}(t)$ es un vector tangente a la trayectoria en el punto considerado ; su sentido el del movimiento y su módulo :

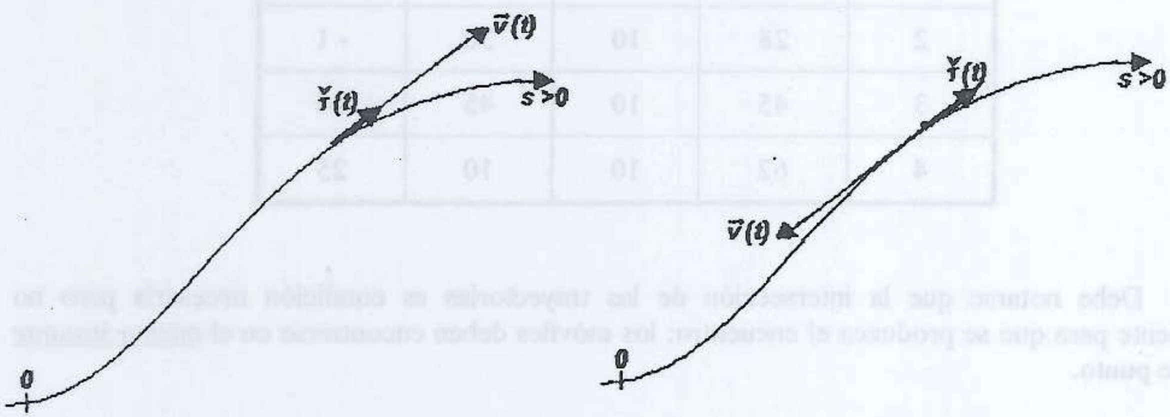
$$\frac{|d\vec{r}|}{dt}$$

Siendo $|d\vec{r}|$ el módulo del vector desplazamiento infinitesimal, que uniendo dos puntos muy próximos podemos decir que será $|d\vec{r}| = ds$, por lo tanto el módulo de la velocidad vectorial instantánea resulta igual al valor absoluto de la velocidad escalar instantánea. Si se introduce un versor $\breve{\tau}(t)$ tangente a la trayectoria en el punto *P(t)*, de igual sentido que el sentido positivo del eje curvilíneo *s(t)*, es fácil admitir que se puede escribir :

$$\vec{v}(t) = v(t)\ \breve{\tau}(t)$$

Si $v(t) > 0$ (móvil que avanza en el sentido de *s(t)* creciente; será $\vec{v}(t)$ de igual sentido que $\breve{\tau}_t$

Si $v(t) < 0$ (móvil que avanza en el sentido de *s(t)* *de*creciente; será $\vec{v}(t)$ de sentido opuesto a $\breve{\tau}_t$



$v(t) > 0$ $v(t) < 0$

A partir de $\vec{v}(t) = v(t)\ \breve{\tau}(t)$, la aceleración vectorial instantánea resultará :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(v(t)\,\breve{\tau}(t)\,\breve{j}\right)}{dt}$$

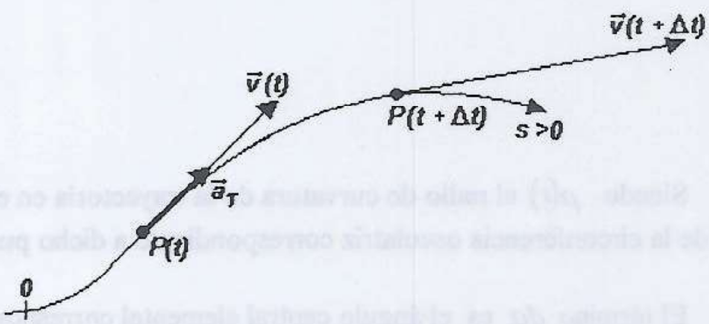
$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\,\breve{\tau}(t) + v(t)\,\frac{d\breve{\tau}(t)}{dt}}$$

Es importante hacer notar que el último término es en general distinto de cero (salvo que la trayectoria sea rectilínea debido a que si bien el módulo de $\breve{r}(t)$ es uno, por ser un versor, no es constante su dirección, cuando la trayectoria es curva.

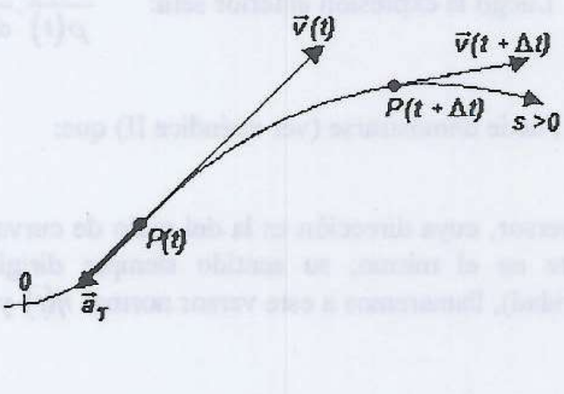
Analicemos separadamente cada uno de los términos de la expresión anterior. El primero de ellos es un vector tangente a la trayectoria, y lo llamaremos $\vec{a}_\tau$ siendo :

$$\frac{dv(t)}{dt}$$

la aceleración escalar instantánea, cuyo signo dependerá de $v(t)$ y de si esta es creciente o decreciente. Analizando los distintos casos posibles (se propone como ejercicio), se podrá concluir que si $|v(t+dt)| > |v(t)|$ (velocidad de valor creciente), el sentido de $\vec{a}_\tau$, coincide con el sentido de $\vec{v}(t)$;



y si $|v(t+dt)| < |v(t)|$ (velocidad de valor decreciente), el sentido de $\vec{a}_\tau$ será opuesto al sentido de $\vec{v}(t)$.



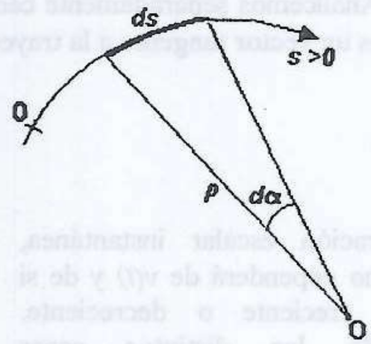
Analicemos ahora el segundo término,

$$v(t)\,\frac{d\breve{\tau}(t)}{dt}$$

Si multiplicamos y dividimos por *ds(t)*, resultará:

$$v(t)\,\frac{d\breve{\tau}(t)}{dt}.\frac{ds(t)}{ds(t)}$$ y recordando que $$\frac{ds(t)}{dt}=v(t)$$

se obtendrá $$v^2(t)\,\frac{d\breve{\tau}(t)}{ds(t)}$$



El término ds(t) es el arco de curva elemental, por lo tanto es: $ds(t)=\rho(t)\,d\alpha$

Siendo $\rho(t)$ el radio de curvatura de la trayectoria en el punto *P(t)*, que se define como el radio de la circunferencia osculatriz correspondiente a dicho punto (ver apéndice 1)

El término $d\alpha$ es el ángulo central elemental correspondiente a ese *ds.*

Luego la expresión anterior será: $$\frac{v^2(t)}{\rho(t)}.\frac{d\breve{\tau}(t)}{d\alpha(t)}$$

Puede demostrarse (ver apéndice II) que: $$\frac{d\breve{\tau}(t)}{d\alpha(t)}$$

es un versor, cuya dirección es la del radio de curvatura en el punto, y resulta perpendicular a la tangente en el mismo; su sentido siempre dirigido hacia el centro de curvatura (hacia la concavidad), llamaremos a este versor normal $\breve{\eta}(t)$ y es por lo dicho perpendicular al versor $\breve{\tau}(t)$.

Ambos dependen de la forma de la trayectoria, pero $\breve{\tau}(t)$ depende además del sentido creciente del eje *s*.

el segundo miembro de $\vec{a}(t)$, resultará: $\dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}\breve{\eta}(t)$

y lo llamaremos aceleración normal o centrípeta.

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\breve{\tau}(t) + \frac{v^2(t)}{\rho(t)}\breve{\eta}(t)} \qquad \text{o sea}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_\eta(t)$$

El primer término será cero, cuando no cambie el valor de la velocidad (no varía la indicación del velocímetro de un auto).

El segundo término será cero en los siguientes casos :

a) cuando la trayectoria es rectilínea, pues en este caso $\rho = \infty$

b) cuando el móvil tiene en ese punto velocidad cero .

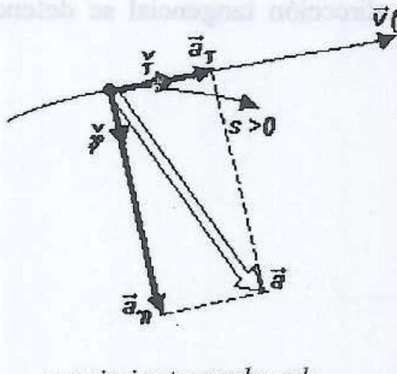
Si $|\vec{a}_\tau| = 0$, entonces $v(t)$ = cte. Llamaremos a este movimiento movimiento uniforme .

Si $|\vec{a}_\tau| \neq 0$ el movimiento es variado. Dentro de este caso puede ocurrir que :

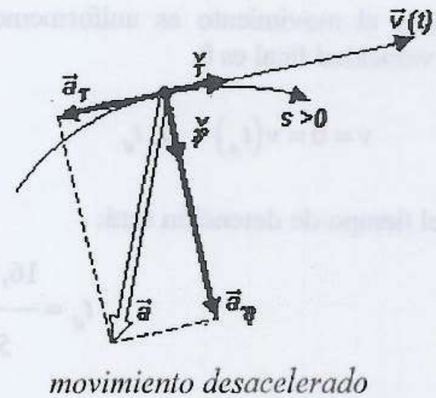
$|\vec{a}_\tau|$ = cte ; llamaremos a este movimiento uniformemente variado.

Si en particular , el módulo de la velocidad es creciente , se suele llamar al movimiento uniformemente acelerado (M.U.A.); y si el módulo de la velocidad es decreciente, uniformemente retardado (M.U.R.)

Si $|\vec{a}_\tau| = |\vec{a}_\mu| = 0$; el movimiento será rectilíneo y uniforme (M.R.U.)



movimiento acelerado

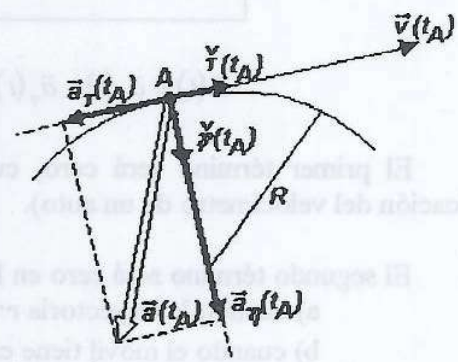


movimiento desacelerado

Ejemplo 6 – Una móvil describe una trayectoria circular de radio 30 m. Pasa por el punto A de la trayectoria con una aceleración de módulo 10 m/s^2 en la dirección indicada en la figura. Hallar cuanto tiempo tardará en detenerse sabiendo que la aceleración tangencial es constante.

Primero descomponemos el vector aceleración $\vec{a}(t)$ en sus dos componentes $\vec{a}_\tau(t)$ y $\vec{a}_\eta(t)$.

Con la componente de la aceleración normal podemos calcular la velocidad en el punto A.



En efecto, sabiendo que $a_\eta(t) = \dfrac{v^2(t)}{\rho(t)}$

y a su vez la $\vec{a}_\eta(t)$ es la proyección del vector aceleración resulta:

$$\vec{a}_\eta(t_A) = \vec{a}(t_A)\ \cos\theta = 10\frac{m}{s^2}\cos 30^\circ\ \breve{\eta} = 8{,}66\frac{m}{s^2}\breve{\eta}$$

A partir de la expresión que relaciona la aceleración normal con la velocidad y teniendo en cuenta que el radio $\rho(t) = R = cte$ se puede despejar

$$v(t_A) = \sqrt{a_\eta(t_A)R} = \sqrt{8{,}66\frac{m}{s^2}\,30\,m} = 16{,}12\frac{m}{s}$$

Por otra parte se calcula la aceleración tangencial como la proyección del vector aceleración en la dirección tangente a la trayectoria.

$$\vec{a}_\tau(t_A) = \vec{a}(t_A)\ sen\,\theta = 10\frac{m}{s^2}\,sen\,30^\circ\ \breve{\tau} = 5\frac{m}{s^2}\breve{\tau}$$

Como el movimiento es uniformemente variado en la dirección tangencial se detendrá cuando la velocidad final es 0.

$$v = 0 = v(t_A) - a_\tau\, t_d$$

entonces el tiempo de detención será:

$$t_d = \frac{16{,}12\,\frac{m}{s}}{5\,\frac{m}{s^2}} = 3{,}224\ s$$

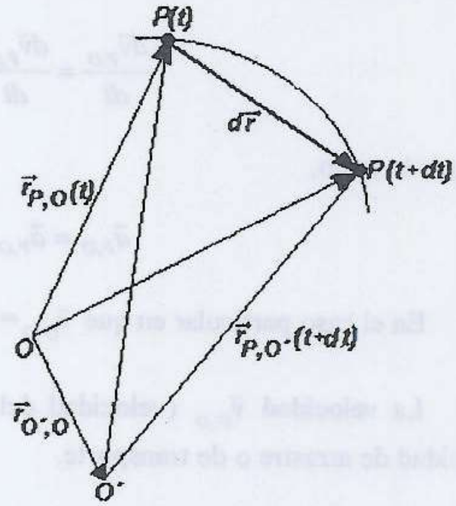
Cambio de sistema de referencia

En todos los análisis anteriores, supusimos que el origen O del vector posición de un móvil era un punto fijo .Supongamos dos posiciones del móvil *P(t)* y *P(t+dt)* . Los respectivos vectores posición serán :

$$\vec{r}_{P,O}(t) \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_{P,O}(t+dt)$$

Consideremos ahora otro punto O´ como origen de un nuevo sistema de referencia. Para las posiciones del móvil se tendrán ahora:

$$\vec{r}_{P,O'}(t) \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_{P,O'}(t+dt)$$



De la figura puede observarse que:

$$\vec{r}_{P,O}(t) = \vec{r}_{P,O'} + \vec{r}_{O',O}(t)$$

Y análogamente :

$$\vec{r}_{P,O}(t+dt) = \vec{r}_{P,O'}(t+dt) + \vec{r}_{O',O}(t+dt)$$

Restando a esta última expresión la anterior se obtendrá :

$$d\vec{r}_{P,O} = d\vec{r}_{P,O'} + d\vec{r}_{O',O}$$

Consideramos los siguientes casos:

a) O´ esta en reposo respecto de O, resultará entonces:

$$d\vec{r}_{O',O} = 0$$

$\therefore \quad d\vec{r}_{P,O} = d\vec{r}_{P,O'}$ y dividiendo por dt será:

$$\frac{d\vec{r}_{P,O}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{P,O'}}{dt} \qquad \text{o sea}$$

$$\vec{v}_{P,O} = \vec{v}_{P,O'} \qquad \text{y derivando respecto del tiempo}$$

$$\frac{d\vec{v}_{P,O}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{P,O'}}{dt} \qquad \text{es decir} \qquad \vec{a}_{P,O} = \vec{a}_{P,O'}$$

b) O' se mueve respecto de O, será $d\vec{r}_{O',O} \neq 0$ y dividiendo por dt se obtendrá:

$$\frac{d\vec{r}_{P,O}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{P,O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O',O}}{dt} \qquad \text{es decir}$$

$$\vec{v}_{P,O} = \vec{v}_{P,O'} + \vec{v}_{O',O}$$

y derivando esta igualdad respecto del tiempo

$$\frac{d\vec{v}_{P,O}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{P,O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O',O}}{dt}$$

será por lo tanto,

$$\vec{a}_{P,O} = \vec{a}_{P,O'} + \vec{a}_{O',O}$$

En el caso particular en que $\vec{v}_{O',O}$ = cte, será $\vec{a}_{O',O} = 0$

La velocidad $\vec{v}_{O',O}$ (velocidad del sistema O' respecto del sistema O) suele denominarse velocidad de arrastre o de transporte.

Ejemplo 7 - Un automóvil avanza por un camino recto horizontal siendo su velocidad con respecto a un sistema de referencia fijo a tierra, de 30 km/h. Un pájaro vuela a cierta altura constante de la superficie terrestre, siendo su velocidad con respecto a ella constante de 40 km/h. Hallar la velocidad del pájaro respecto del automóvil en los siguientes casos:

a) el pájaro se mueve paralelamente al camino en el mismo sentido que el automóvil.

b) Ídem , en sentido contrario.

c) El pájaro cruza el camino en forma perpendicular.

d) Idem, formando un ángulo de 30° con la trayectoria del móvil.

En la expresión:

$$\vec{v}_{P,O} = \vec{v}_{P,O'} + \vec{v}_{O',O} \qquad [1]$$

supondremos para este problema que :

- El punto P es el pájaro.
- El punto O es un punto fijo a la tierra.
- El punto O' es un punto fijo al automóvil.

Por lo tanto será :

$\vec{v}_{P,O}$: velocidad del pájaro respecto de la tierra
$\vec{v}_{P,O'}$: velocidad del pájaro respecto del automóvil
$\vec{v}_{O'O}$: velocidad del automóvil respecto de la tierra

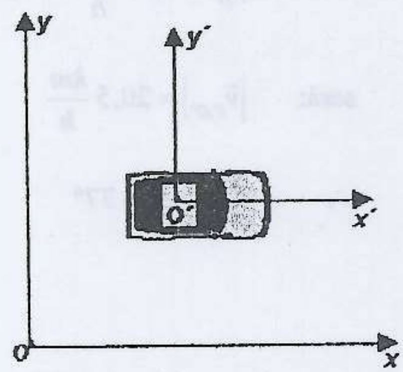
Es conveniente aclarar que si bien la tierra no está en reposo en el espacio, en la mayoría de los problemas se la puede considerar como un sistema fijo (cuando no se estudia el movimiento de la misma y solo interesa el movimiento del cuerpo respecto a ella)

De [1] será:

$$\vec{v}_{P,O'} = \vec{v}_{P,O} - \vec{v}_{O',O}$$

Eligiendo los ejes x e y correspondientes al sistema O y los eje x' e y' correspondientes a O', siendo x y x' paralelos a la trayectoria del móvil y y e y' perpendiculares a la misma y a la vertical del lugar, resulta:

$$\vec{v}_{O',O} = 30 \ \frac{km}{h} \breve{i}$$



a) $\vec{v}_{P,O} = 40 \ \frac{km}{h} \breve{i}$

$$\therefore \quad \vec{v}_{P,O'} = 40 \ \frac{km}{h} \breve{i} - 30 \ \frac{km}{h} \breve{i} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_{P,O'} = 10 \ \frac{km}{h} \breve{i}$$

b) $\vec{v}_{P,O} = -40 \ \frac{km}{h} \breve{i}$

$$\therefore \quad \vec{v}_{P,O'} = -40 \ \frac{km}{h} \breve{i} - 30 \ \frac{km}{h} \breve{i} \ \Rightarrow \qquad \vec{v}_{P,O'} = -70 \ \frac{km}{h} \breve{i}$$

c) $\vec{v}_{P,O} = 40 \ \dfrac{km}{h} \ \breve{j}$

$$\therefore \quad \vec{v}_{P,O'} = 40 \ \frac{km}{h} \ \breve{j} - 30 \ \frac{km}{h} \ \breve{i}$$

y será: $\left|\vec{v}_{P,O'}\right| = 50 \, \dfrac{km}{h}$

y se verá desde el automóvil bajo un ángulo α tal que:

$$\alpha = arctg\,(30/40) \qquad \therefore \qquad \alpha = 37^{\circ}$$

d) $\vec{v}_{P,O} = \left|\vec{v}_{P,O}\right| \cos 30^{\circ}\, \breve{i} + \left|\vec{v}_{P,O}\right| sen 30^{\circ}\, \breve{j}$

$$\vec{v}_{P,O} = 34,6 \ \frac{km}{h} \ \breve{i} + 20 \ \frac{km}{h} \ \breve{j}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{P,O'} = \left(34,6 \ \frac{km}{h} - 30 \ \frac{km}{h}\right)\breve{i} + 20 \, \frac{km}{h} \ \breve{j}$$

$$\vec{v}_{P,O'} = 4,6 \ \frac{km}{h} \ \breve{i} + 20 \ \frac{km}{h} \ \breve{j}$$

será: $\left|\vec{v}_{P,O'}\right| = 20,5 \, \dfrac{km}{h}$ y $\alpha = arc\ tg\ (20/4,6)$

$$\therefore \qquad \alpha = 77^{\circ}$$