Nombre y Apellido:

E1. Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

a) Encuentre y grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de $f(x,y)$
b) Analice la continuidad de la función en el origen.
c) ¿Existen las derivadas direccionales de $f(x,y)$ en $(0{,}0)$? Analícelo en todas las direcciones posibles y justifique adecuadamente su respuesta.
d) ¿Admite plano tangente la gráfica de $f(x,y)$ en $(0{,}0{,}0)$? ¿Y en $(0{,}1{,}0)$? Justifique sus respuestas y, cuando resulte posible, escriba la ecuación del plano tangente correspondiente.

E2. Para la función $g(x,y)=f(x^2e^y, x+y)$, encuentre una expresión para la derivada direccional de $g(x,y)$ en el punto $(1{,}0)$ en la dirección que apunta desde $(1{,}0)$ hacia $(2{,}3)$, si se sabe que el f es diferenciable en todo el plano y que verifica que $f'_u = f'_v = u+v \quad \forall (u,v)\in R^2$. Justifique su procedimiento.

E3. Sea la función definida por $F(x,y,z)=sen(\pi.x.y)+4\ln(x+z)$
Analice si la ecuación $F(x,y,z)=1$ define $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$. Fundamente su respuesta. En caso de ser posible, halle la ecuación de la recta normal a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto $(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

E4. Una familia de curvas responde a la siguiente ecuación diferencial: $y'-xy=x$.
Encuentre la curva de la familia ortogonal a la misma, que pasa por el punto (1,1).

T1.- a) ¿Qué representa, geométricamente, el valor de la derivada direccional $f'((x_0,y_0);\breve{v})$ de cierto campo escalar $f(x,y)$ en un punto (x_0,y_0) de su dominio, y en una dirección dada $\breve{v}$?

b) ¿V ó F? "La gráfica de $f(x,y)=x sen(y)$ tiene en el punto $(1,\frac{\pi}{2},1)$ pendiente positiva en todas direcciones." Justifique.

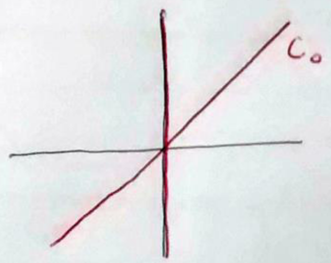
T2.- a) Demuestre que si una función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0{,}0)$ entonces es continua en ese punto.

b) ¿V ó F? "No existen valores de $k\in\mathbb{R}$ de modo que $f(x,y)=\begin{cases} x^2+k^2(y-2) & si\ x \geq 0 \\ xy+1 & si\ x<0 \end{cases}$ resulte diferenciable en (0,0)." Justifique.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

a) Conjunto de nivel 0:

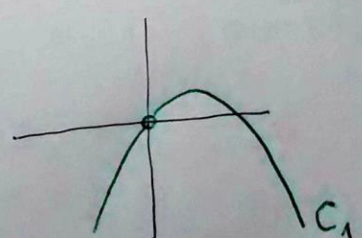
f vale 0 si: $\begin{cases} x \neq y \wedge x = 0 \} \text{ eje "y" sin origen} \\ \text{ó} \\ x = y \} \text{ recta} \end{cases}$



Conjunto de nivel 1

f vale 1 si: $x \neq y \wedge \dfrac{x^2}{2(x-y)} = 1$ } parábola sin el origen

$$\frac{x^2}{2(x-y)} = 1 \longrightarrow y = \frac{-1}{2}x^2 + x$$



b) Continuidad en el origen:

$f(0,0) = 0$

pero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2(x + \frac{x^2}{2} - x)} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

sobre $y = -\frac{x^2}{2} + x$ (C_1)

$\therefore$ la función no es continua en $(0,0)$

c) Derivadas direccionales en $(0,0)$

$\check{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$f'_{\check{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b)) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = \begin{cases} \text{Si } a \neq b : \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^2a^2}{2(ha-hb)}}{h} = \dfrac{a^2}{2(a-b)} \\ \text{Si } a=b : \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0 \end{cases}$$

Entonces $\exists f'_{\check{v}}(0,0) \ \forall \check{v}$

d) La gráfica de f no admite plano tangente en $(0,0,0)$ pues f no es continua en $(0,0)$ $\therefore$ no es diferenciable en $(0,0)$

En $(0,1)$: se puede derivar por regla práctica

$$f'_x = \frac{2x\, 2(x-y) - x^2\, 2}{[2(x-y)]^2} = \frac{x(x-2y)}{2(x-y)^2}$$

$$f'_y = \frac{-x^2}{4(x-y)^2}$$

Como f'_x y f'_y son continuas $\forall (x,y)$ con $x \neq y$, f es C^1 para $x \neq y$ $\therefore$ f es diferenciable para $x \neq y$

En particular, en $(0,1)$ f es diferenciable y el plano tangente tiene ecuación

$$\pi : z = f(0,1) + f'_x(0,1)\, x + f'_y(0,1)\,(y-1)$$

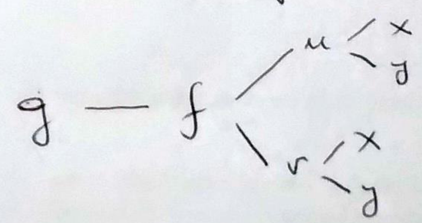
$$\pi \quad z = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot (y-1) = 0$$

2)

$$g(x,y) = f(\underbrace{x^2 e^y}_{u}, \underbrace{x+y}_{v})$$

x	1
y	0
u	1
v	1

Como f es diferenciable (por el enunciado) y $u(x,y)$ y $v(x,y)$ lo son (por ser C^1) g resulta diferenciable, por ser composición de diferenciables



$u'_x = 2xe^y \quad u'_y = x^2 e^y$

$v'_x = 1 \quad v'_y = 1$

$f'_u = f'_v = u+v$

$$g'_x = f'_u\, u'_x + f'_v\, v'_x$$

$$g'_y = f'_u\, u'_y + f'_v\, v'_y$$

$$g'_x(1,0) = f'_u(1,1)\, u'_x(1,0) + f'_v(1,1)\, v'_x(1,0) =$$

$$= (1+1)\,(2 \cdot 1 . e^0) + (1+1) . 1 = 6$$

$$g'_y(1,0) = f'_u(1,1)\, u'_y(1,0) + f'_v(1,1)\, v'_y(1,0) =$$

$$= (1+1)\,(1^2 e^0) + (1+1) . 1 = 4$$

$$\nabla g(1,0) = (6,4)$$

$g'_{\check{v}}(1,0) = \nabla g(1,0) \cdot \check{v}$ por ser g diferenciable

$$\check{v} = \frac{(2,3)-(1,0)}{\|(2,3)-(1,0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\therefore\ g'_{\check{v}}(1,0) = (6,4) . \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{18}{\sqrt{10}}$$

3) $F(x,y,z) = \text{sen}(\pi x y) + 4 \ln(x+z)$

- $F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \text{sen}\left(\pi \frac{1}{2} 1\right) + 4 \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1$ ✓

- $F'_x = \pi y \cos(\pi x y) + \dfrac{4}{x+z}$

$F'_y = \pi x \cos(\pi x y)$

$F'_z = \dfrac{4}{x+z}$

son continuas en todo su dominio

$\therefore$ f es C^1 en todo su dominio

- $F'_z\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4 \neq 0$

Como se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita, la ecuación $F(x,y,z) = 1$ define z como función de x e y, $f(x,y)$, en un entorno de $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

Además, por el mismo teorema,

$$f'_x\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = -\frac{F'_x\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)}{F'_z\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$f'_y\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = -\frac{F'_y\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)}{F'_z\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{0}{4} = 0$$

$\nabla f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = (-1, 0)$

$\therefore$ recta normal a $z = f(x,y)$ en $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{r: (x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}\right) + \lambda(-1, 0, -1) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

4) $\mathcal{F}: \; y' - xy = x$

$\downarrow$

$\mathcal{F}^{\perp}: \; -\frac{1}{y'} - xy = x$

$$-x(1+y) = \frac{1}{y'}$$

$$(1+y)\,y' = -\frac{1}{x}$$

$$\int (1+y)\,dy = -\int \frac{dx}{x}$$

$C^{\perp}: \quad y + \frac{y^2}{2} = -\ln|x| + K$

Pasa por $(1,1)$:

$$1 + \frac{1^2}{2} = -\ln|1| + K \longrightarrow K = \frac{3}{2}$$

$\therefore \; C^{\perp}: \quad y + \frac{y^2}{2} = -\ln|x| + \frac{3}{2}$

o $$\boxed{e^{y + \frac{y^2}{2}} = \frac{e^{3/2}}{|x|}}$$