Ejercicios Resueltos de Análisis Matemático 2

por Augusto Coda

March 27, 2014

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Índice

1 TP.1 - Ecuaciones diferenciales - 1° Parte

2 TP.2 - Nociones de Topología - Funciones

Nada por aquí 0.o

3 TP.3 - Límite y Continuidad

4 TP.4 - Derivabilidad - Recta Tangente y Plano Normal

5 TP.5 - Diferenciabilidad - Plano Tangente y Recta Normal

6 TP.6 - Funciones compuestas e implícitas

7 TP.7 - Polinomio de Taylor - Extremos

Nada por aquí 0.o

8 TP.8 - Curvas - Integrales de línea - Función potencial

9 TP.9 - Integrales múltiples

10 TP.10 - Integrales de Superficie - Flujo

11 TP.11 - Teoremas integrales (Green, Gauss, Stokes)

12 TP.12 - Ecuaciones diferenciales - 2° Parte

Part I

TP.1 - Ecuaciones diferenciales 1° Parte

5) Halle, según corresponda, la S.G. o la S.P. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

5) A) $y' = \dfrac{x^2+1}{2-y}$ con $y(-3) = 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y} \quad \Rightarrow \quad \int (2-y)dy = \int (x^2+1)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{(2-y)^2}{-2} = \frac{x^3}{3} + x + C$$

S.G: $\boxed{(2-y)^2 = \dfrac{-2}{3}x^3 - 2x - D}$

Reemplazando el punto $y(-3) = 4$:

$$(2-4)^2 = \frac{-2}{3}(-3)^3 - 6 - D \quad \Rightarrow \quad 20 = D$$

S.P: $\boxed{(2-y)^2 = \dfrac{-2}{3}x^3 - 2x - 20}$

**Para que de como en la guía mutliplicar en ambos lados por 3*
Nota: la integral $\int (2-y)\,dy$ *también da:* $2y - \dfrac{y^2}{2}$ *con lo cual daría una solución distinta a la guía pero que estaría bien igual.*

5) B) $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y$

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = (2x^2+1)y \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y}\right) dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx \quad \Rightarrow \quad ln(y) = x^2 + ln(x) + C \quad \Rightarrow$$

$$e^{ln(y)} = e^{x^2 + ln(x) + C} \quad \Rightarrow \quad e^{ln(y)} = e^{x^2}.e^{ln(x)}e^{C}$$

S.G: $\boxed{y = e^{x^2}xD}$

5) C) $y' = 2x\sqrt{y-1}$

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}dy = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \int (y-1)^{\frac{-1}{2}}dy = \int (2x)dx \quad \Rightarrow \quad 2(y-1)^{\frac{1}{2}} = x^2 + C$$

S.G: $\boxed{2\sqrt{y-1} = x^2 + C}$

5) D) $x^2 dy = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}dx$ con $y(1) = 2$

$$\int (3y^2+1)dy = \int (1+x^{-2})dx \quad \Rightarrow \quad y^3 + y = x + \frac{x^{-1}}{-1} + C \quad \Rightarrow \quad y^3 + y = x - x^{-1} + C$$

S.G: $\boxed{xy^3 + xy = x^2 - 1 + xC}$

Reemplazando el punto $y(1) = 2$:

$$1.2^3 + 1.2 = 1^2 - 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 10$$

S.P: $\boxed{xy^3 + xy = x^2 - 1 + 10x}$

5) E) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ con $y(4) = 2$

$$\int dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

Resolvemos la integral $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$ por sustitución:

$$u = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}du \quad \Rightarrow \quad u^{\frac{1}{2}} + C \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+9} + C$$

Volviendo a la ecuación principal:

S.G: $\boxed{y = \sqrt{x^2+9} + C}$

Reemplazando el punto $y(4) = 2$

$$2 = \sqrt{4^2+9} + C \quad \Rightarrow \quad 2 = 5 + C \quad \Rightarrow \quad C = -3$$

S.P: $\boxed{y = \sqrt{x^2+9} - 3}$

5) F) $y' = xy + x - 2y - 2$ con $y(0) = 2$

$$y' = (x-2)y + x - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (x-2)(y+1) \quad \Rightarrow \quad \int (y+1)^{-1}dy = \int (x-2)dx \quad \Rightarrow$$

$ln(y+1) = \frac{x^2}{2} - 2x + C \quad \Rightarrow \quad e^{ln(y+1)} = e^{\frac{x^2}{2} - 2x + C}$

S.G: $\boxed{y + 1 = e^{\frac{x^2}{2}} e^{-2x} e^{C}}$

Reemplazando el punto $y(0) = 2$:

$2 + 1 = e^0 e^0 D \quad \Rightarrow \quad D = 3$

S.P: $\boxed{y + 1 = e^{\frac{x^2}{2}} e^{-2x} 3}$

9) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de 1° orden.

NOTA: los ejercicios están resueltos utilizando la fórmula: $y = e^{-\int P(x)dx} \left(K + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \right)$

Siendo la forma: $y' + P(x)y = Q(x) \qquad \wedge \qquad Q(x) \neq 0$

9) A) $xy' - y - x^3 = 0$

$xy' - y = x^3 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\int \frac{-1}{x} dx} \left(K + \int e^{\int \frac{-1}{x} dx} x^2 dx \right)$

$y = e^{ln|x|} \left(K + \int e^{-ln|x|)} x^2 dx \right) \quad \Rightarrow \quad y = x \left(K + \int x^{-1} x^2 dx \right) \quad \Rightarrow \quad y = x \left(K + \int x dx \right) \quad \Rightarrow$

$y = x \left(K + \frac{x^2}{2} \right)$

S.G: $\boxed{y = Kx + \frac{x^3}{2}}$

9) B) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$

$y = e^{-\int \cos(x)dx} \left(K + \int e^{\int \cos(x)dx} \sin(x)\cos(x)dx \right) \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\sin(x)} \left(K + \int e^{\sin(x)} \sin(x)\cos(x)dx \right)$

Resolviendo la integral $\int e^{\sin(x)} \sin(x)\cos(x)dx$ por sustitución:

$p = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad dp = \cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int e^p p \, dp$

Resolviendo esta nueva integral con el método por partes:

$$u = p \quad \Rightarrow \quad du = dp \quad \wedge \quad dv = e^p \quad \Rightarrow \quad v = e^p$$

$$uv - \int vdu \quad \Rightarrow \quad pe^p - \int e^p dp \quad \Rightarrow \quad pe^p - e^p$$

Volviendo a la ecuación principal:

$$y = e^{-\sin(x)}\left(K + \sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}\right) \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\sin(x)}K + \sin(x)e^{\sin(x)}e^{-\sin(x)} - e^{\sin(x)}e^{-\sin(x)}$$

S.G: $\boxed{y = Ke^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1}$

9) C) $(x^2+4)y' - 3xy = x$ con (x, y) = (0, 1)

$$y' - \frac{3x}{x^2+4}y = \frac{x}{x^2+4} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\int \frac{-3x}{x^2+4}dx}\left(K + \int e^{\int \frac{-3x}{x^2+4}dx}\frac{x}{x^2+4}dx\right) \quad \Rightarrow$$

$$y = e^{3\int \frac{x}{x^2+4}dx}\left(K + \int e^{-3\int \frac{x}{x^2+4}dx}\frac{x}{x^2+4}dx\right)$$

Resolviendo la integral $\int \frac{x}{x^2+4}dx$ por sustitución:

$$u = x^2+4 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}ln(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}ln(x^2+4)$$

Volviendo a la ecuación principal:

$$y = e^{\frac{3}{2}ln(x^2+4)}\left(K + \int e^{\frac{-3}{2}ln(x^2+4)}\frac{x}{x^2+4}dx\right) \quad \Rightarrow \quad y = \left(\sqrt{x^2+4}\right)^3\left(K + \int \left(\sqrt{x^2+4}\right)^{-3}\frac{x}{x^2+4}dx\right)$$

Resolviendo la integral $\int \left(\sqrt{x^2+4}\right)^{-3}\frac{x}{x^2+4}dx$ por sustitución:

$$v = x^2+4 \quad \Rightarrow \quad dv = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{2} = xdx \quad \Rightarrow \quad \int \left(\sqrt{v}\right)^{-3}\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int v^{\frac{-3}{2}}dv \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(v^{\frac{-3}{2}}\right)\frac{-2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{3}(x^2+4)^{\frac{-3}{2}}$$

Volviendo a la ecuación principal:

S.G: $\boxed{y = (x^2+4)^{\frac{3}{2}}\left(K - \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{-3}{2}}\right)}$

Reemplazando el punto $(x, y) = (0, 1)$:

$$1 = (0+4)^{\frac{3}{2}}\left(K - \frac{1}{3}(0+4)^{\frac{-3}{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = 8\left(K - \frac{1}{24}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = 8K - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{6}$$

$$y = (x^2+4)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{-3}{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{6}(x^2+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$$

S.P: $\boxed{6y = (x^2+4)^{\frac{3}{2}} - 2}$

9) D) $\dfrac{dy}{dx} - 2\dfrac{y}{x} = x^2\sin(3x)$

$$y = e^{-\int \frac{-2}{x}dx}\left(K + \int e^{\int \frac{-2}{x}dx} x^2\sin(3x)dx\right) \quad \Rightarrow \quad y = e^{2\int \frac{1}{x}dx}\left(K + \int e^{-2\int \frac{1}{x}dx} x^2\sin(3x)dx\right)$$

$$y = e^{2ln(x)}\left(K + \int e^{-2ln(x)}x^2\sin(3x)dx\right) \quad \Rightarrow \quad y = x^2\left(K + \int x^{-2}x^2\sin(3x)dx\right)$$

Resolviendo la integral $\int x^{-2}x^2\sin(3x)dx$ por sustitución:

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad du = 3dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{3} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \sin(u)\frac{du}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\int \sin(u)du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}(-\cos(u)) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{3}\cos(3x)$$

Volviendo a la ecuación principal:

S.G: $\boxed{y = x^2(K - \frac{1}{3}\cos(3x))}$

12) Halle la familia de curvas ortogonal a la dada.

12) A) $y = 2x + C$

$$y' = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y'} = 2 \quad \Rightarrow \quad -dx = 2dy \quad \Rightarrow \quad -\int dx = \int 2dy$$

$\boxed{2y = -x + C}$

12) B) $y = Ce^x$

$$y' = Ce^x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{e^x}e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y'} = y \quad \Rightarrow \quad \int -1dx = \int ydy \quad \Rightarrow \quad -x + C = \frac{y^2}{2}$$

$$\boxed{-2x + D = y^2}$$

12) C) $y = C\tan(2x)$

$$y' = C\sec^2(2x)2 \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{\tan(2x)}\right)\left(\frac{2}{\cos^2(2x)}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y'} = \left(\frac{y}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}\right)\left(\frac{2}{\cos^2(2x)}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{y'} = \frac{2y}{\sin(2x)\cos(2x)} \quad \Rightarrow \quad -\int \sin(2x)\cos(2x)dx = 2\int ydy$$

Resolviendo la integral $-\int \sin(2x)\cos(2x)dx$ por sustitución:

$$u = \sin(2x) \quad \Rightarrow \quad du = \cos(2x)2dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = \cos(2x)dx \quad \Rightarrow \quad -\int u\frac{du}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}\int udu \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{u^2}{2}\right) + C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{\sin^2(2x)}{2}\right) + C$$

Volviendo a la ecuación principal:

$$2\frac{y^2}{2} = -\frac{\sin^2(2x)}{4} + C$$

$$\boxed{4y^2 = -\sin^2(2x) + D}$$

12) D) $y = ln(x + C)$

$$y' = \frac{1}{x + C} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y'} = \frac{1}{x + C}$$

Dado que al derivar la constante C no desapareció, la despejamos en base a la función original:

$$e^y = e^{ln(x+C)} \quad \Rightarrow \quad e^y = x + C \quad \Rightarrow \quad C = e^y - x$$

Volviendo:

$$\frac{-1}{y'} = \frac{1}{x + e^{y} - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y} = \frac{1}{e^{y}} \quad \Rightarrow \quad -\int dx = \int e^{-y} dy \quad \Rightarrow \quad -(x+C) = -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad x + C = e^{-y} \quad \Rightarrow$$

$ln(x+C) = -y$

$\boxed{-ln(x+C) = y}$

15) Dada $xy'' - 2y' = 0$ halle la S.P./ $y(1) = y'(1) = 3$ aplicando la transformación $w = y'$.

$$w = y' \quad \Rightarrow \quad w' = w'' \quad \Rightarrow \quad xw' - 2w = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dw}{dx} = 2w \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{2w} dw = \int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} ln(w) = ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad e^{ln(w^{\frac{1}{2}})} = e^{ln(x) + C} \quad \Rightarrow \quad w^{\frac{1}{2}} = xD \quad \Rightarrow \quad \sqrt{w} = xD$$

Reemplazamos w por y':

$$\sqrt{y'} = xD \quad \Rightarrow \quad y' = x^2.K$$

Reemplazamos el punto $y'(1) = 3$:

$$3 = 1^2 K \quad \Rightarrow \quad K = 3$$

$$y = \int x^2 3dx \quad \Rightarrow \quad y = 3\frac{x^3}{3} + C$$

Reemplazamos el punto $y(1) = 3$:

$$3 = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$\boxed{y = x^3 + 2}$

16) Halle la S.G. de y" - 2y' = x.

$$y'' - 2y' = x \quad \Rightarrow \quad w' - 2w = x \quad \Rightarrow \quad w = e^{-\int -2dx} \left(K + \int e^{\int -2dx} xdx \right)$$

$$w = e^{2\int dx}\left(K + \int e^{-2\int dx} x dx\right) \quad \Rightarrow \quad w = e^{2x}\left(K + \int e^{-2x} x dx\right)$$

Resolviendo la integral $\int e^{-2x} x dx$ por partes:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad \wedge \quad dv = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$uv - \int v du \quad \Rightarrow \quad xe^{-2x}\left(\frac{-1}{2}\right) - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx \quad \Rightarrow \quad xe^{-2x}\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx \quad \Rightarrow$$

$$xe^{-2x}\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) xe^{-2x}\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{1}{4}e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$$

Volviendo:

$$w = e^{2x}\left(K + e^{-2x}\left(\frac{-x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad w = e^{2x}K + \left(\frac{-x}{2} - \frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = e^{2x}K - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$y = \int \left(e^{2x}K - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) dx \quad \Rightarrow \quad y = Ke^{2x}\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{4}x + C$$

S.G: $\boxed{y = Ae^{2x} - \left(\frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{4}x + C}$

Part II

TP.2 - Nociones de Topología - Funciones

Nada por aquí 0.o

**Es muy teórico, leer los conceptos*

Part III

TP.3 - Límite y Continuidad

1) Analice la existencia del $\lim_{u \to 0}\left(\frac{1-\cos(u)}{u^2}, 1+2u, \frac{\sin(u^2)}{u^3+u^2}\right)$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{u^2} \quad \Rightarrow_{L'H} \quad \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{2u}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{u\to 0} 1+2u=\boxed{1} \qquad\qquad \Rightarrow \quad \boxed{\exists \quad \lim_{u\to 0} f}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u^2)}{u^3+u^2}=\boxed{1} \text{ (límite por acotado)}$$

2) ¿Por qué existe el $\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)}{|u|}, u.ln(u)\right)$ pero no existe el $\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)}{|u|}, u\right)$?

$$f_1=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)}{|u|}, u.ln(u)\right) \quad \wedge \quad f_2=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)}{|u|}, u\right)$$

Para f_1, por estar el $ln(u)$ se toma el lado derecho (+):

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\sin(u)}{u}=\boxed{1} \quad \wedge \quad \lim_{u\to 0^+} u.ln(u) \quad \Rightarrow \quad \lim_{u\to 0^+}\frac{ln(u)}{\frac{1}{u}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{u\to 0^+}\frac{ln(u)}{u^{-1}} \quad \Rightarrow_{L'H} \quad \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-u^{-2}} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{u\to 0^+} -u=\boxed{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\exists \quad \lim f_1}$$

Para f_2:

$$\lim_{u\to 0} u=\boxed{0}$$

Analizando por derecha y por izquierda $\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{|u|}$:

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\sin(u)}{u}=\boxed{1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nexists \quad \lim f_2}$$

$$\lim_{u\to 0^-}\frac{\sin(u)}{-u}=\boxed{-1}$$

3) Analice la existencia de los siguientes límites:

3) A) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{e^{xy}-1}{xy}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Criterio 1 (acercamiento por los ejes):

$$\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\boxed{0} \quad \wedge \quad \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\boxed{0}$$

Criterio 2 (radiales): y = mx

$$\lim_{x\to 0}\frac{x.mx}{x^2+(mx)^2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2m}{x^2(1+m)} = \boxed{\frac{m}{1+m^2}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f}$$

3) B) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x+y-2}{x-y}$

Criterio 1 (acercamiento por los ejes):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x} = \boxed{-1} \quad\wedge\quad \lim_{y\to 1}\frac{y-2}{-y} = \boxed{1} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(1,1)} f}$$

3) C) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{\sin(4-xy)}{16-x^2y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{\sin(4-xy)}{16-(xy)^2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(2,2)}\frac{\sin(4-xy)}{(4-xy)(4+xy)} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

3) D) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x+y-z}{x+y+z}$

Criterio 1 (acercamiento por los ejes):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \boxed{1} \quad\wedge\quad \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = \boxed{1} \quad\wedge\quad \lim_{z\to 0}\frac{-z}{z} = \boxed{-1} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nexists \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f}$$

3) E) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)\sin(y)}{xy} = \boxed{0}$ (límite por acotado)

3) F) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) = \boxed{0}$ (límite por acotado)

4) Sea S la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$, halle la ecuación de una curva C $\subset$ S que pase por el punto (1, 2, 5); verifique por definición que realmente se trata de una curva.

$S: z = x^2 + y^2 \qquad\qquad C \subset S / p(1,2,5) \in C$

Hay varias curvas que cumplen con lo pedido, por ejemplo:

A) $C: f(t) = \left(\frac{t}{2}, t, \left(\frac{t}{2}\right)^2 + t^2\right) \quad si \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad p \in C$

B) $C: f(t) = (1, t, t^2 + 1) \quad si \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad p \in C$

C) $C: f(t) = (1, 2t, 4t + 1) \quad si \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad p \in C$

5) Sea C la curva de ecuación $\bar{X} = (t, t^2, 2t^2) \quad \wedge \quad t \in \mathbb{R}$

a) Exprese C como intesección de 2 superficies.

b) Demuestre que C es una curva plana.

c) Dada la superficie de ecuación $\bar{X} = (u + v, u - v, u^2 + u + v^2 - v + 2uv)$ con (u, v) $\in \mathbb{R}^2$, demuestre que C está incluida en ella.

5) A) $C = \begin{cases} S_1: \quad 2y = z \\ S_2: \quad 2x^2 = z \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 2t^2 \end{cases}$

5) B) $C \subseteq \pi: 2y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad C$ es plana

5) C) $S: \bar{X} = (u + v, u - v, u^2 + u + v^2 - v + 2uv)$ con (u, v) $\in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 + u + v^2 - v + 2uv \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S: z = x^2 + y \quad \Rightarrow \quad S = \frac{S_1 + S_2}{2} \quad \wedge \quad S_1$ y S_2 definidos en el **5)A)**

$\Rightarrow \quad 2S = S_1 + S_2 \quad \Rightarrow \quad C \subseteq S$

7) Analice la continuidad en el origen de los siguientes campos escalares:

7) A) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y} & si \quad x^2 + y \neq 0 \\ 0 & si \quad x^2 + y = 0 \end{cases}$

Continuidad en (0, 0):

1) f(0, 0) = $\boxed{0}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 x}{x^2+y} \quad \Rightarrow \quad ① \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$

① Acercamiento por curvas: $y = x^3 - x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2+x^3-x^2} = \boxed{1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \Rightarrow$ <u>No es continua</u>

7) B) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Continuidad en (0,0):

1) f(0,0) = $\boxed{0}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-\cos(xy))y}{xy} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y - y\cos(xy)}{xy} = \boxed{0} \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Es\ \ continua}$

7) C) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,y) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,y) \end{cases}$

Continuidad en (0,0):

1) f(0,0) = $\boxed{0}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin(y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \boxed{0} \text{ (límite por acotado)} \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\Rightarrow \quad \boxed{Es\ \ continua}$

7) D) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Continuidad en (0,0):

1) f(0,0) = $\boxed{0}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} \quad \Rightarrow \quad ① \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$

① Acercamiento por curvas: $y^6 = xy^3 - x^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+xy^3-x^2} = \boxed{1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \Rightarrow$ <u>No es continua</u>

7) F) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & si \quad |y| \neq |x| \\ 0 & si \quad |y| = |x| \end{cases}$

Continuidad en (0,0):

1) f(0,0) = $\boxed{0}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad ① \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$

① Por radiales: $y = mx$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.mx}{x^2-(mx)^2} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 m}{x^2(1-m^2)} = \boxed{\dfrac{m}{1-m^2}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \Rightarrow$ <u>No es continua</u>

8) Analice la posibilidad de redefinir la función extendiendo su dominio por continuidad.

8) A) $f : \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x,y) = \left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \right)$

Continuidad en (0,0): para $F_1 = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Por radiales: $y = mx$

$$F_1 : \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+(mx)^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+m^2)} = \boxed{\frac{1}{1+m^2}} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \text{No es continua}$$

$\Rightarrow$ **No es posible redefinir el dominio**

8) B) $f(x,y) = \dfrac{x\sin(xy)}{y} \qquad si \;\; (x,y) \neq (x,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x\sin(xy)}{y} \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{x^2\sin(xy)}{xy} = \boxed{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{y} & si \quad (x,y) \neq (x,0) \\ x^2 & si \quad (x,y) = (x,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Se puede redefinir para } \boxed{f(x,0) = x^2}$$

8) C) $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \bar{g}(t) = \left(\dfrac{t}{|t|}, t.ln(t), \dfrac{1-\cos(t)}{t}\right)$

Dado que $t > 0$ por el $ln(t)$, entonces analizamos continuidad en $t = 0^+$:

$$\lim_{t\to 0^+} \bar{g}(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{t} = \boxed{1} \\ \lim\limits_{t\to 0^+} t.ln(t) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{ln(t)}{t^{-1}} \quad \Rightarrow_{L'H} \quad \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{t}}{\frac{-1}{t^{-2}}} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{-t^2}{t} = \boxed{0} \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1-\cos(t)}{t} \quad \Rightarrow_{L'H} \quad \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin(t)}{1} = \boxed{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Se puede redefinir para** $\boxed{\bar{g}(0) = (1,0,0)}$

8) D) $\bar{g}(u) = \left(\dfrac{\sqrt{u^2}}{u}, \sqrt{u}\right) \qquad si \;\; u > 0$

$$\lim_{u\to 0^+} \bar{g}(t) = \begin{cases} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\sqrt{u^2}}{u} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{|u|}{u} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{u}{u} = \boxed{1} \\ \lim\limits_{u\to 0^+} \sqrt{u} = \boxed{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Se puede redefinir para** $\boxed{\bar{g}(0) = (1,0)}$

11) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. **a)** Demuestre que f es continua en el origen. **b)** ¿Puede analizar el límite acercándose al origen por la línea de nivel 1 de f?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

11) A) Continuidad en (0,0):

1) f(0,0) $= \boxed{0}$

$$2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 x}{x^2+y^2} = \boxed{0} \text{ (límite por acotado)} \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \exists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \Rightarrow$ <u>Es continua</u>

11) B) Acercamiento por curvas:

Curva de nivel 1 $\quad \Rightarrow \quad C_1 : \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x^2 = y^2$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^3-x^2} = \boxed{1} \neq 0 \quad \Rightarrow$ No podemos analizar el límite por acercamiento de curvas de nivel 1.

$y^2 = x^2(x-1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \geq 1 \quad \vee \quad x = 0}$

Part IV

TP.4 - Derivabilidad - Recta Tangente y Plano Normal

1) Definida la curva C como intersección de dos superficies S_1 y S_2 $(C = S_1 \cap S_2)$:

- parametrícela convenientemente y halle una ecuación para la recta tangente a C en $\bar{A}$,
- halle una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial para el plano normal a C en $\bar{A}$,
- analice si C es una curva plana o alabeada.

1) A) $S_1 : y = x^2$ $\qquad$ $S_2 : y + z = 5$ $\qquad$ $\bar{A} = (2, 4, 1)$:

$x = t \quad \Rightarrow \quad y = t^2 \quad \Rightarrow \quad z = 5 - t^2$

$C : g(t) = (t, t^2, 5 - t^2) \quad =^{t?} \quad (2, 4, 1) \quad \Rightarrow \quad t = 2$

$\Rightarrow \quad g'(t) = (1, 2t, -2t) \quad \Rightarrow \quad g'(2) = (1, 4, -4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{tg} : (x, y, z) = (2, 4, 1) + \lambda(1, 4, -4)}$

$\pi_{normal} : x + 4y - 4z + D = 0$

Reemplazando con (2, 4, 1):

$2 + 4.4 - 4.1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi_{normal} : x + 4y - 4z - 14 = 0}$

$C \subset \pi : z = 5 - y \quad \Rightarrow \quad \boxed{C \ \ es \ \ plana}$

3) Halle la ecuación de un plano que contenga tres puntos no alineados de la curva C de ecuación $\bar{X} = (2\cos(t), 2\sin(t), t)$ con t $\in [0, 2\pi]$. Demuestre que C es alabeada (no es plana):

$P_1 : \bar{g}(0) = (2, 0, 0)$
$P_2 : \bar{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, 2, \frac{\pi}{2}\right)$
$P_3 : \bar{g}(2\pi) = (2, 0, 2\pi)$

$P_1\bar{}P_2 = \left(-2, 2, \frac{\pi}{2}\right)$

$P_1\bar{}P_3 = (0, 0, 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \bar{n} = P_1\bar{}P_2 \ \text{ x } \ P_1\bar{}P_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & \frac{\pi}{2} \\ & & \\ 0 & 0 & 2\pi \end{vmatrix} = (4\pi, 4\pi, 0)$

$\pi : 4\pi x + 4\pi y + D = 0$

Reemplazando con $(2, 0, 0) \in \pi$:

$\Rightarrow \quad 8\pi + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -8\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi : 4\pi x + 4\pi y - 8\pi = 0}$

Calculando el determinante y si éste es $\neq 0$, entonces es alabeada:

$P_4 : \bar{g}(\pi) = (-2, 0, \pi) \quad \Rightarrow \quad \bar{P_1 P_4} = (-4, 0, \pi)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 2\pi \\ -4 & 0 & \pi \end{vmatrix} = -2(0) - 2(8\pi) + \tfrac{\pi}{2}(0) = -16\pi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{alabeada}$$

4) Analice por definición la existencia de las derivadas parciales de f en el punto $\bar{A}$; cuando sea posible verifique aplicando la regla práctica de derivación.

4) A) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy \quad , \quad \bar{A} = (1, 2)$

$$\begin{matrix} f'_x(x, y) = 6x + 2y \\ \\ f'_y(x, y) = 2x \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} f'_x(1, 2) = 10 \\ \\ f'_y(1, 2) = 2 \end{matrix}}$$

4) B) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad , \quad \bar{A} = (0, 0)$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = \boxed{0}$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = \boxed{0}$$

4) C) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + 2y^2} \quad , \quad \bar{A} = (0, 0)$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^4} - 0}{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{|h^2|}{h}$$

(h^2 entonces sacamos las barras de modulo) $\quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2}{h} = \boxed{0}$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} \quad\Rightarrow\quad f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{2k^2}-0}{k}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{2}\,|k|}{k}=\begin{cases}\lim\limits_{k\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}\,k}{k}=\boxed{\sqrt{2}}\\[2ex] \lim\limits_{k\to 0^-}\dfrac{-\sqrt{2}\,k}{k}=\boxed{-\sqrt{2}}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nexists\ \ f'_y(0,0)}$$

4) D) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} & si \quad (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & si \quad (x,y)=\bar{A}=(0,1)\end{cases}$$

$$f'_x(0,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h} \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3}{h^2}-0}{h} \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=\boxed{1}$$

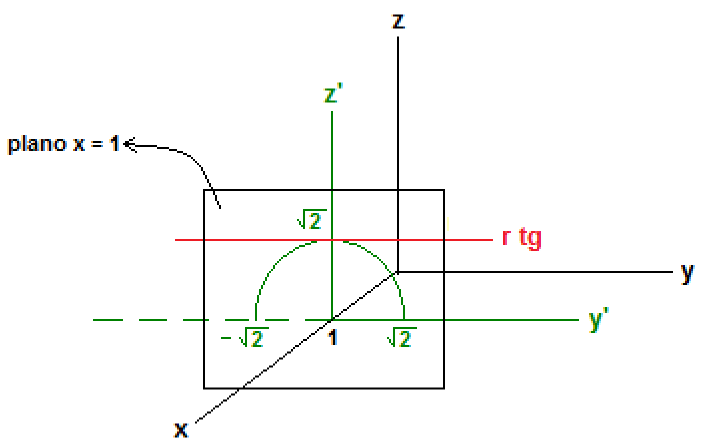
$$f'_y(0,1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,1+k)-f(0,1)}{k} \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{k^2}{k^2}-0}{k} \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}=\boxed{\infty} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nexists\ \ f'_y(0,1)}$$

5) Dada $f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$, obtenga $f'_y(1,0)$ observando el gráfico de la curva intersección de $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ con $x=1$.

Nota: Cuando $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ *como no dice* $\pm$ *delante de la raíz, entonces es la parte* $\oplus$ *de z.*

$$c:\begin{cases} z=\sqrt{3-x^2-y^2}\\ x=1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad z=\sqrt{2-y^2} \quad ①$$

de ① : $z^2+y^2=2 \quad\wedge\quad z\geq 0$



$\Rightarrow \quad f'_y(1,0)=\boxed{0}$ (Es la pendiente de la recta tangente)

6) Estudie la derivabilidad en distintas direcciones en el punto $\bar{A}$ que se indica en cada caso.

6) A) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-x}{x^2+(y-1)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,1) \end{cases} \quad , \quad \bar{A} = (0,1)$

$\breve{r} = (u,v) \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2=1$

$$f'((0,1),\breve{r}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0+\lambda u, 1+\lambda v) - f(0,1)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{\lambda u(1+\lambda v)-\lambda u}{\lambda^2u^2+\lambda^2v^2} - 0}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda u + \lambda^2 uv - \lambda u}{\lambda^3(u^2+v^2)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{uv}{\lambda}$$

$\Rightarrow \quad 0 \quad si \quad \underline{u=0} \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2=1 \quad \Rightarrow \quad v^2=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{v=\pm 1}$

$\Rightarrow \quad \infty \quad si \quad \underline{u \neq 0} \quad \wedge \quad \underline{v \neq 0} \quad \Rightarrow \quad \nexists$

$\Rightarrow \quad 0 \quad si \quad \underline{v=0} \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2=1 \quad \Rightarrow \quad u^2=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{u=\pm 1}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\breve{r} = (0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)}$

6) B) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & si \quad (x,y) \neq (0,y) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,y) \end{cases} \quad , \quad \bar{A} = (0,0)$

$\breve{r} = (u,v) \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2=1$

$$f'((0,0),\breve{r}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{\lambda^2v^2}{\lambda u} - 0}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^2v^2}{\lambda^2 u} = \boxed{\frac{v^2}{u}}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{f'((0,0),(u,v)) = \begin{cases} \dfrac{v^2}{u} & si \quad u \neq 0 \\ 0 & si \quad u = 0 \end{cases}} \quad con \quad u^2+v^2=1$

6) C) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & si \quad x+y \neq 0 \\ 0 & si \quad x+y = 0 \end{cases} \quad , \quad \bar{A} = (0,0)$

$\breve{r} = (u,v) \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2=1$

$$f'((0,0),\breve{r}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{\lambda^4u^4}{\lambda u+\lambda v} - 0}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^4u^4}{\lambda^2(u+v)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^2u^4}{u+v} = \boxed{0}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{f'((0,0),\breve{r}) = 0 \quad \forall \quad \breve{r}}$

6) D) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad \bar{A} = (0,0)$

$\check{r} = (u,v) \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 = 1$

$$f'((0,0),\check{r}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\dfrac{\lambda^2 u^2 \lambda v}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^3 u^2 v}{\lambda^3 (u^2+v^2)} = \boxed{u^2 v} \ ①$$

$\Rightarrow \quad u^2 + v^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^2 = 1 - v^2} \ ②$

Reemplazando ② en ①:

$(1-v^2)v = \boxed{v - v^3} \quad \Rightarrow \quad g(v) = v - v^3$

$\Rightarrow \quad g'(v) = 1 - 3v^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - 3v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} = v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\dfrac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \quad g''(v) = -6v \quad \Rightarrow \quad g''\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = -6.\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \begin{cases} \dfrac{-6}{\sqrt{3}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Max} \\ \\ \dfrac{6}{\sqrt{3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad Min \end{cases}$

Direcciones de derivada Máxima:

$\Rightarrow \quad u^2 + v^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 + \dfrac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Direcciones de derivada Nula:

$\Rightarrow \quad u^2 v = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \pm 1 \\ v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \pm 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)}$

7) Demuestre por definición que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / f(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2} \quad , \quad \bar{A} = (0,0)$

Continuidad en (0, 0):

1) $f(0,0) = \boxed{0}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2} = \boxed{0} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim f \quad \Rightarrow$ <u>es continua</u>

Derivadas parciales en (0,0):

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2h}{h} = \boxed{2} \\ \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-2h}{h} = \boxed{-2} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim f$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\nexists f'_x(0,0)}$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k} = \begin{cases} \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{k}{k} = \boxed{1} \\ \\ \lim\limits_{k\to 0^-} \dfrac{-k}{k} = \boxed{-1} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nexists f'_y(0,0)}$$

8) Determine los dominios en los que quedan definidas las derivadas parciales de 1° y 2° orden de las siguientes funciones:

8) A) $\quad f(x,y) = ln(x^2+y^2) \quad \wedge \quad Dom_f = \mathbb{R}^2 - \bar{0}$

Derivadas parciales de 1° orden:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f'} = Dom_f}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Derivadas parciales de 2° orden:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{-2x(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f''} = Dom_f}$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{-2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

8) B) $f(x,y) = (x.ln(y), \frac{y}{x}) \quad \wedge \quad Dom_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \wedge y > 0\}$

Derivadas parciales de 1^{er} orden:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y) = \left(ln(y), \dfrac{-y}{x^2}\right) \\ f'_y(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{1}{x}\right) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f'} = Dom_f}$$

Derivadas parciales de 2^{do} orden:

$$f''_{xx}(x,y) = \left(0, \frac{2y}{x^3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xy}(x,y) = \left(\dfrac{1}{y}, \dfrac{-1}{x^2}\right) \\ \\ f''_{yx}(x,y) = \left(\dfrac{1}{y}, \dfrac{-1}{x^2}\right) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f''} = Dom_f}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \left(\tfrac{-x}{y^2}, 0\right)$$

8) C) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 0}{h} = \boxed{\infty} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim f \quad \Rightarrow$$

$\nexists$ derivada parcial para x en $(0,0)$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = \boxed{0}$$

Derivadas parciales en $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - x^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \boxed{\frac{-x^2(2y)}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f'_x} = \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f'_y} = \mathbb{R}^2}$$

Derivadas parciales de 2^{do} orden:

$$f''_{xx}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2(x^2+y^2)^2 - 2xy^2(2(x^2+y^2)2x)}{(x^2+y^2)^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f''_{xx}} = Dom_{f'_x}}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy(x^2+y^2)^2 - 2xy^2(2(x^2+y^2)2y)}{(x^2+y^2)^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f''_{xy}} = Dom_{f'_x}}$$

$$f''_{yx}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-4xy(x^2+y^2)^2 + x^2(2y)(2(x^2+y^2)2x)}{(x^2+y^2)^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f''_{yx}} = Dom_{f'_y}}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2(x^2+y^2)^2 + x^2(2y)(2(x^2+y^2)2y)}{(x^2+y^2)^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f''_{yy}} = Dom_{f'_y}}$$

8) D) $f(x,y,z) = xy.ln(yz) \quad \Rightarrow \quad Dom_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / yz > 0\}$

Derivadas parciales de 1^{er} orden:

$$\begin{aligned} & f'_x(x,y,z) = y.ln(yz) \\ & f'_y(x,y,z) = x.ln(yz) + xz\left(\frac{1}{yz}z\right) = x.ln(yz) + x \qquad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{f'} = Dom_f} \\ & f'_z(x,y,z) = xy\frac{1}{yz}y = \frac{xy}{z} \end{aligned}$$

Derivadas parciales de 2^{do} orden:

$$f''_{xx}(x,y,z) = 0 \qquad f''_{xy}(x,y,z) = ln(yz) + y\frac{1}{yz}z = ln(yz) + 1 \qquad f''_{xz}(x,y,z) = y\frac{1}{yz}y = \frac{y}{z}$$

$$f''_{yy}(x,y,z) = x\left(\frac{1}{yz}z\right) = \frac{x}{y} \qquad f''_{yx}(x,y,z) = ln(yz) + 1 \qquad f''_{yz}(x,y,z) = x\left(\frac{1}{yz}y\right) = \frac{x}{z}$$

$$f''_{zz}(x,y,z) = \frac{-xy}{z^2} \qquad f''_{zy}(x,y,z) = \frac{x}{z} \qquad f''_{zx}(x,y,z) = \frac{y}{z}$$

$\boxed{Dom_{f''} = Dom_f}$

16) Dada $f(x,y) = y^2 + g(x)$, halle $g(x)$ para que $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ si $f(\bar{0}) = 0 \;\wedge\; f'_x(\bar{0}) = 1$

$$f'_x(x,y) = g'(x) \quad \Rightarrow \quad f''_{xx}(x,y) = g''(x)$$
$$f'_y(x,y) = 2y \quad \Rightarrow \quad f''_{yy}(x,y) = 2$$

$$\Rightarrow \quad f''_{xx} + f''_{yy} = g''(x) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g''(x) = -2$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \int -2\,dx \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -2x + C$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \int -2x + C\,dx \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x^2 + Cx + D$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} f'_x = g'(x) \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 1 = -2.0 + C \quad \Rightarrow \quad \underline{C = 1} \\ \\ f'(\bar{0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0 = -0^2 + 1.0 + D \quad \Rightarrow \quad \underline{D = 0} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(x) = -x^2 + x}$$

Part V

TP.5 - Diferenciabilidad - Plano Tangente y Recta Normal

1) Exprese $Df(X)$ y halle el conjunto W tal que Df sea continua en W.

1) A) $\bar{f}(t) = \left(t^3 - 2, \dfrac{t^2-1}{t+1}, \dfrac{\cos t}{2t - \pi}\right)$ siendo $\bar{f}(t) = (F_1, F_2, F_3)$

Para $F_2 : \dfrac{t^2-1}{t+1} = \dfrac{(t+1)(t-1)}{(t+1)} = t - 1$

$$D_f = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \nabla F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \\ \dfrac{-\sin(2t-\pi) - \cos(t)2}{(2t-\pi)^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = (t \in \mathbb{R} / t \neq -1 \quad \wedge \quad t \neq \frac{\pi}{2})}$$

1) B) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$$D_f = \begin{pmatrix} \nabla f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}}$$

1) C) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 + y, z.ln(x^2 + z^2))$ siendo $\bar{f}(x,y,z) = (F_1, F_2)$

$$D_f = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \\ \nabla F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ \\ z\dfrac{2x}{x^2+z^2} & 0 & ln(x^2+z^2) + z\dfrac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq 0 \quad \wedge \quad z \neq 0\}}$$

1) D) $\bar{f}(x,y,z) = \dfrac{k.\breve{r}}{r^2}$ $\begin{cases} \bar{r} = (x,y,z) \\ r = ||\bar{r}|| \end{cases}$, $k = cte$

$$\breve{r} = \frac{\bar{r}}{||\bar{r}||} \Rightarrow \breve{r} = \frac{\bar{r}}{r} \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = \frac{k.\bar{r}}{r^3} \Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = \frac{k(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

$$\Rightarrow \bar{f}(x,y,z) = (\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}) \quad \text{siendo} \quad \bar{f}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\nabla F_1 \Rightarrow {}_1f'_x = \frac{k(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - kx(\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} 2x)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$${}_1f'_y = \frac{-kx(\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} 2y)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$${}_1f'_z = \frac{-kx(\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} 2z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\Rightarrow D_f = \begin{pmatrix} {}_1f'_x & {}_1f'_y & {}_1f'_z \\ & \nabla F_2 & \\ & \nabla F_3 & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{W = \mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}}$$

1) E) $\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$D_f = \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{y^2(x^2+y^4) - xy^2(2x)}{(x^2+y^4)^2} & \dfrac{2xy(x^2+y^4) - xy^2(4y^3)}{(x^2+y^4)^2} \end{pmatrix} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}}$$

Habría que analizar continuidad para darse cuenta

2) Siendo $f(x,y) = \sqrt{xy}$ si $xy \geq 0$ y $f(x,y) = x$ si $xy < 0$, calcule $f'((0,0),(2,-1))$ aplicando la definición. Observe que en este caso $f'((0,0),(2,-1)) \neq \nabla f(0,0).(2,-1)$, ¿existe la derivada pedida?; si existe, ¿cuál es su valor?

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & si \quad xy \geq 0 \\ x & si \quad xy < 0 \end{cases}$$

$$f'((0,0),(2,-1)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+2\lambda, 0-\lambda) - f(0,0)}{\lambda} \begin{cases} ① & si \quad xy \geq 0 \\ ② & si \quad xy < 0 \end{cases}$$

Para ①:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\sqrt{-2\lambda^2} - 0}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad -2\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad ② \quad \Rightarrow \quad f'((0,0),(2,-1)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{2\lambda}{\lambda} = \boxed{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{existe}}$$

Derivadas parciales de 1^{er} orden:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \begin{cases} ① & si \quad xy \geq 0 \\ ② & si \quad xy < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ① \text{ ya que } h.0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h.0} - 0}{h} = \boxed{0}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \begin{cases} ① & si \quad xy \geq 0 \\ ② & si \quad xy < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ① \text{ ya que } k.0 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to 0} \frac{\sqrt{0.k} - 0}{k} = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(0,0) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad f'((0,0),(2,-1)) \neq \nabla f(0,0).(2,-1) \quad \Rightarrow \quad 2 \neq (0,0).(2,-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{2 \neq 0}$$

3) Sea $f(x,y) = x^2/y$ si $(x,y) \neq (x,0)$ con $f(x,0) = 0$. Demuestre que f es derivable en toda dirección en (0,0) pero no es diferenciable en dicho punto.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & si \quad (x,y) \neq (x,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (x,0) \end{cases} \quad , \quad \bar{A} = (0,0)$$

Derivada direccional en $(0,0) : \breve{r} = (u,v) \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 = 1$

$$f'((0,0),\breve{r}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2 u^2}{\lambda^2 v} = \boxed{\frac{u^2}{v}} \quad \Rightarrow \quad f'((0,0),\breve{r}) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{v} & si \quad v \neq 0 \\ 0 & si \quad v = 0 \end{cases}$$

Continuidad en $(0,0)$:

$1) f(0,0) = \boxed{0}$

$$2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y} \quad \Rightarrow \quad ① \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$$

Para ①, acercamiento por los ejes:

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{0} = \boxed{\infty} \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \boxed{0} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim \quad \Rightarrow$ No es continua en (0,0) $\Rightarrow$ <u>No es diferenciable</u>

4) Considere la función del TP N^o 4 - ítem 6)c). ¿Es diferenciable en el origen?

<u>No, porque no es continua en el origen</u>.

5) Analice si la gráfica de f del ítem 1)e) admite plano tangente en (0,0,0).

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuidad en (0,0):

$1) f(0,0) = \boxed{0}$

$$2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = ① \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases}$$

Para ①, acercamiento por curvas: $y^4 = xy^2 - x^2$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+xy^2-x^2} = \boxed{1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim \quad \Rightarrow$ No es continua en (0,0) $\Rightarrow$

No es diferenciable en (0,0) $\Rightarrow$ <u>f no admite plano tangente en (0,0,0)</u>

6) Analice si la función del TP N^o 4 - ítem 6)d) es diferenciable en el origen *(recuerde que tiene cuatro direcciones de derivada nula y dos direcciones de derivada máxima en el origen).*

No es diferenciable en (0,0) porque tiene 2 derivadas máximas.

7) *Optativo*: Siendo $f(x,y) = (x^3 - xy^2)/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, demuestre que f es continua y derivable en toda dirección en (0,0) pero no es diferenciable en (0,0).

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuidad en (0,0):

1)$f(0,0) = \boxed{0}$

$$2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \boxed{0} \text{ (límite por acotado)} \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \boxed{0} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim \Rightarrow \underline{\text{Es continua en (0,0)}}$$

Derivadas direccionales en (0,0): $\breve{r} = (u,v) \quad \Rightarrow \quad u^2+v^2 = 1$

$$f'((0,0),\breve{r}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0+\lambda u, 0+\lambda v) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{\lambda^3u^3 - \lambda u\lambda^2v^2}{\lambda^2u^2+\lambda^2v^2} - 0}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^3(u^3-uv^2)}{\lambda^3(u^2+v^2)} = \boxed{u^3-uv^2}$$

$\Rightarrow \quad \underline{f'((0,0),\breve{r}) = u^3 - uv^2 \quad \forall \text{ direcciones}}$

Diferenciabilidad en (0,0):

$\Rightarrow$ Veamos si existen $f'_x(0,0) \quad \wedge \quad f'_y(0,0)$

Derivadas parciales de 1° orden en (0,0):

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \quad \exists f'_x(0,0) \quad \wedge \quad \exists f'_y(0,0)$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0}{k^2} - 0}{k} = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-h.f'_x(0,0)-k.f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3-hk^2}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3-hk^2-h(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = (1)$$

Para (1), acercamiento por rectas: $k = mh$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-2hm^2h^2}{(h^2+m^2h^2)\sqrt{h^2+m^2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{-2hm^2h^2}{h^2(1+m^2)\sqrt{h^2}\sqrt{1+m^2}} = \frac{-2m^2}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}$$

$\Rightarrow \quad \nexists \lim \quad \Rightarrow \quad$ <u>No es diferenciable</u>

8) Calcule mediante aproximación lineal y compare el resultado con el obtenido con calculadora.

8) A) $f(1.96, 0.96)$ cuando $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$.

$f(2-0,04; 1-0,04) \approx f(2,1) + \nabla f(2,1).(-0,04; -0,04)$

$$\Rightarrow \quad f'_x(x,y) = \frac{-4x}{2\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow \quad f'_x(2,1) = \frac{-8}{2.4} = \boxed{-1}$$

$$\Rightarrow \quad f'_y(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow \quad f'_y(2,1) = \frac{-2}{2.4} = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad f(2-0,04; 1-0,04) \approx 4 + \left(-1, \frac{-1}{4}\right).(-0,04; -0,04) \approx 4 + 0,04 + 0,01 \approx \boxed{4,05}$$

10) Sea S la superficie de ecuación $\bar{X} = (u-v^2, v^2/u, u/v)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2/uv \neq 0$, verifique que $\bar{A} = (-2,2,1)$ es un punto regular de S. Determine y exprese en forma cartesiana el plano tangente y la recta normal a S en $\bar{A}$

$$S : \bar{X} = \left(u-v^2, \frac{v^2}{u}, \frac{u}{v}\right) = (x,y,z)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 = u - v^2 \\ y = 2 = \dfrac{v^2}{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{2 = u} \quad \Rightarrow \quad \underline{2 = v} \\ z = 1 = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad v = u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'_u(u,v) = \left(1, \frac{-v^2}{u^2}, \frac{1}{v}\right) \quad \Rightarrow \quad f'_u(2,2) = \left(1, -1, \frac{-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'_v(u,v) = \left(-2v, \frac{2v}{u}, \frac{-u}{v^2}\right) \quad \Rightarrow \quad f'_v(2,2) = \left(-4, 2, \frac{-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{n}_\pi = f'_u(2,2) \text{ x } f'_v(2,2) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right) \neq \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\bar{A} \text{ es regular}}$$

$$\pi_{tg}: \frac{-x}{2} - \frac{3y}{2} - 2z + d = 0$$

$\Rightarrow$ Reemplazando $\bar{A}$ en $\pi_{tg}: 1 - 3 - 2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{d = 4}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\pi_{tg}: \frac{-x}{2} - \frac{3y}{2} - 2z + 4 = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{r}_n: (x,y,z) = (-2,2,1) + \lambda\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right)}$$

$$\bar{r}_n: \begin{cases} x = -2 - \dfrac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad -2x - 4 = \lambda \\[2ex] y = 2 - \dfrac{3\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 2 - \dfrac{3}{2}.(-2x-4) \quad \Rightarrow \quad y = 2 + 3x + 6 \\[2ex] z = 1 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad z = 1 - 2.(-2x-4) \quad \Rightarrow \quad z = 1 + 4x + 8 \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{r}_n: \begin{cases} y - 3x = 8 \\ z - 4x = 9 \end{cases}} \qquad \text{Forma cartesiana}$$

13) Halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de las siguientes funciones en el punto $\bar{A}$:

13) A) $f(x,y) = x^2 - xy^2$ $\qquad \bar{A} = (1,3)$

$$\nabla f(x,y) = (2x - y^2, -2xy) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1,3) = (-7,-6)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\breve{r} \text{ máx}} = \frac{\nabla f(1,3)}{||\nabla f(1,3)||} = \frac{(-7,-6)}{\sqrt{85}} = \boxed{\left(\frac{-7}{\sqrt{85}}, \frac{-6}{\sqrt{85}}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\breve{r} \text{ mín}} = \frac{-\nabla f(1,3)}{||\nabla f(1,3)||} = \frac{(7,6)}{\sqrt{85}} = \boxed{\left(\frac{7}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\breve{r} \text{ nula}}: \nabla f(1,3) \perp \breve{r} \quad \Rightarrow \quad (-7,-6) \perp \breve{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{7}{\sqrt{85}}, \frac{-6}{\sqrt{85}}\right) \quad \vee \quad \left(\frac{-7}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}}\right)}$$

13) B) $f(x,y,z) = x^2 - yz^3$ $\qquad\qquad \bar{A} = (5,2,0)$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, -z^3, -3yz^2) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(5,2,0) = (10,0,0)$

$$\Rightarrow \quad \underline{\check{r}\ \text{máx}} = \frac{\nabla f(5,2,0)}{||\nabla f(5,2,0)||} = \frac{(10,0,0)}{\sqrt{100}} = \boxed{(1,0,0)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\check{r}\ \text{mín}} = \frac{-\nabla f(5,2,0)}{||\nabla f(5,2,0)||} = \frac{(-10,0,0)}{\sqrt{100}} = \boxed{(-1,0,0)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\check{r}\ \text{nula}}\text{:}\ \nabla f(5,2,0) \perp \check{r} \quad \Rightarrow \quad (10,0,0) \perp \check{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(0,u,v)} \quad / \quad u^2 + v^2 = 1$$

14) Sea $f \in C^1$, si $f'\left(\bar{A},(3,4)\right) = 4$ y $f'\left(\bar{A},(2,7)\right) = -6$. **a)** Calcule $f'\left(\bar{A},(5,9)\right)$, **b)** Determine el valor de la derivada direccional máxima de f en $\bar{A}$, **c)** Sabiendo que $f(\bar{A}) = 3$, calcule en forma arpoximada $f\left(\bar{A} + (0.01, -0.02)\right)$

$$f'\left(\bar{A},(x,y)\right) = \nabla f(\bar{A}).(x,y) = (a,b).(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad f'\left(\bar{A},(3,4)\right) = 4 \quad \wedge \quad f'\left(\bar{A},(2,7)\right) = -6$$

$$(a,b).(3,4) = 4 \quad \wedge \quad (a,b).(2,7) = -6$$

$$(a,b).\left(\frac{3}{4},1\right) = 1 \quad \wedge \quad (a,b).\left(\frac{-1}{3},\frac{-7}{6}\right) = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}a + b = 1 \\ \\ \dfrac{-1}{3}a - \dfrac{7}{6}b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}a + b = \frac{-1}{3}a - \frac{7}{6}b \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{12}a = \frac{-13}{6}b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}a = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 4} \quad \Rightarrow \quad \underline{b = -2}$$

14) A) $f'(\bar{A},(5,9)) = (4,-2).(5,9) = 20 - 18 = \boxed{2}$

14) B) $\underline{\check{r}\ \text{máx}}$: $\dfrac{\nabla f(\bar{A})}{||\nabla f(\bar{A})||} = \dfrac{(4,-2)}{\sqrt{20}} = \boxed{\left(\dfrac{4}{\sqrt{20}},\dfrac{-2}{\sqrt{20}}\right)}$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(\bar{A}).\check{r}\ \text{máx} = (4,-2).\left(\frac{4}{\sqrt{20}},\frac{-2}{\sqrt{20}}\right) = \frac{16}{\sqrt{20}} + \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{20}{\sqrt{20}} = \frac{20}{\sqrt{20}}.\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \frac{20\sqrt{20}}{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

14) C) $f(\bar{A}) = 3 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\bar{A} + (0,01;-0,02)\right) \approx f(\bar{A}) + \nabla f'(\bar{A}).(0,01;-0,02) \approx 3 + (4,-2).(0,01;-0,02)$

$\approx 3 + 0,04 + 0,04 \approx \boxed{3,08}$

Part VI

TP.6 - Funciones compuestas e implícitas

1) Dadas f y g, analice en cada caso si quedan definidas $f \circ g$ y $g \circ f$. Además, para cada función generada mediante la composición, determine su dominio natural y obtenga su matriz jacobiana en algún punto interior al mismo.

1) A) $\bar{f}(x,y) = (xy, x-y) \quad \wedge \quad \bar{g}(u,v) = (u^2, v-u)$

$\Rightarrow \quad h_1 = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / D_{h_1} = D_f.D_g$

$\Rightarrow \quad h_1 = f\left(g(u,v)\right) = \big(u^2(v-u), u^2 - (v-u)\big)$

$\boxed{Dom_{h_1} = \mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow \quad D_{h_1} = \begin{pmatrix} 2u(v-u) + u^2(-1) & u^2 \\ & \\ 2u+1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \bar{A} = (1,1) \in Dom_{h_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{h_1}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \quad h_2 = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / D_{h_2} = D_g.D_f$

$\Rightarrow \quad h_2 = g\left(f(x,y)\right) = (x^2y^2, x - y - xy)$

$\boxed{Dom_{h_2} = \mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow \quad D_{h_2} = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ & \\ 1-y & -1-x \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \bar{A} = (1,1) \in Dom_{h_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{h_2}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

1) B) $f(x,y) = x\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\bar{g}(u) = (u, 2-u) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$h_1 : f \circ g = f\left(g(u)\right) = u\sqrt{2-u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{h_1} = \{u \in \mathbb{R} / 2 - u \geq 0\}}$

$$D_{h_1} = \left(\sqrt{2-u} + u\frac{-1}{2\sqrt{2-u}}\right) \quad \wedge \quad \bar{A} = (1) \in Dom_{h_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{h_1}(1) = \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$\Rightarrow \quad h_2 : g \circ f = g\,(f(x,y)) = (x\sqrt{y}, 2 - x\sqrt{y}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Dom_{h_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}}$

$$D_{h_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \dfrac{x}{2\sqrt{y}} \\ & \\ -\sqrt{y} & \dfrac{-x}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \bar{A} = (1,1) \in Dom_{h_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{h_2}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ & \\ -1 & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}}$$

4) Dada $w = u^3 - xv^2$ con $u = x\sqrt{y-x} \quad \wedge \quad v = 2x + y^2$, resulta $w = f(x,y)$. Aplicando la regla de derivación de funciones compuestas (sin realizar la composición), calcule $f'_x(0,1)$.

$$f : w \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \\ v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \\ x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'_x(x,y) = w'_x(u,v,x) + w'_u(u,v,x).u'_x(x,y) + w'_v(u,v,x).v'_x(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(x,y) = -v^2 + 3u^2 \left(\sqrt{y-x} + \frac{(-x)}{2\sqrt{y-x}} \right) + (-2xv)2$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(x,y) = -(2x+y)^2 + 3\,(x\sqrt{y-x})^2 \left(\sqrt{y-x} - \frac{x}{2\sqrt{y-x}} \right) - 4x(2x+y^2) \quad \Rightarrow \quad f'_x(0,1) = -1 + 0 - 0 = \boxed{-1}$$

8) La ecuación $xy - e^{z-x} = ln(z)$ define implícitamente $z = f(x,y)$, halle una expresión lineal que permita aproximar los valores de f en un entorno del punto $(1,1)$.

$$\Rightarrow \quad F(x,y,z) : xy - e^{z-x} - ln(z) = 0$$

$\Rightarrow \quad F(1,1,z_0) = 1 - e^{z_0 - 1} = ln(z_0) \quad \Rightarrow \quad$ Calculando a ojo vemos que: $\underline{z_0 = 1} \quad \Rightarrow \quad \underline{f(1,1) = 1}$

$$F \begin{cases} x \\ \\ y \\ \\ z : f \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \quad F'_x(x,y,z) + F'_z(x,y,z).z'_x(x,y) = 0 \\ \\ \Rightarrow \quad F'_y(x,y,z) + F'_z(x,y,z).z'_y(x,y) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z} = f'_x \quad \wedge \quad z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z} = f'_y$$

$$\Rightarrow \quad F'_x = y + e^{z-x} \quad \wedge \quad F'_y = x \quad \wedge \quad F'_z = -e^{z-x} - \frac{1}{z}$$

$$z'_x(1,1) = \frac{-F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = \frac{-2}{-2} = \boxed{1} = f'_x(1,1)$$

$$z'_y(1,1) = \frac{-F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = \frac{-1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}} = f'_y(1,1)$$

$$\Rightarrow \quad z = f(x,y) \approx f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) \approx 1 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \approx \boxed{1 + (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)}$$

Part VII

TP.7 - Polinomio de Taylor - Extremos

Nada por aquí 0.o

Part VIII

TP.8 - Curvas - Integrales de línea - Función potencial

1) Dados los siguientes arcos de curva, halle dos parametrizaciones que los orienten en sentido opuesto y plantee el cálculo de su longitud verificando que el resultado no dependa de su orientación.

1) A) Arco de parábola de ecuación $y = x^2$ entre los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(t) = (t, t^2) \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (1, 2t) \quad \wedge \quad -1 \le t \le 2$$

$$\text{Longitud de arco} = \int_{-1}^{2} ||f'(t)||\, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{1+4t^2}\, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{4}.\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\, dt = 2\int_{-1}^{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2}\, dt$$

$$= 2\left(\frac{t.\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}{2} + \frac{1}{8} ln\left|t + \sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right|\right)\int_{-1}^{2} = \left(t.\sqrt{t^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right|\right)\int_{-1}^{2} = 4,47 - (-1,65) = \boxed{6,12}$$

Otra parametrizacin posible es: $\begin{cases} x = -u \\ y = u^2 \end{cases} \Rightarrow \quad -1 \leq -u \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq u \leq 1$

Nota: como parametrizamos x=t entonces t varía según los límites de x ($-1 \leq x \leq 2$). Lo mismo para x = -u.

1) B) Circunferencia de radio 2 con centro en $(2, 1)$.

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

$$\begin{cases} x - 2 = 2\cos(t) \\ y - 1 = 2\sin(t) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 2\cos(t) + 2 \\ y = 2\sin(t) + 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(t) = (2 + 2\cos(t), 1 + 2\sin(t))$$

$\Rightarrow \quad f'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)) \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\text{Longitud de arco} = \int_c ||f'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = \boxed{4\pi}$$

Otra parametrizacin posible es: $f(u) = (2 + 2\sin(u), 1 + 2\cos(u)) \quad \wedge \quad 0 \leq u \leq 2\pi$

1) C) Elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 1$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases} \Rightarrow \quad f(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)) \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{Longitud de arco} = \boxed{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt}$$

Otra parametrización posible es: $f(u) = (a\sin(u), b\cos(u)) \quad \wedge \quad 0 \leq u \leq 2\pi$

Dato curioso: El cálculo del perímetro de una Elipse es de los mas complejos que hay, es por eso que el ejercicio termina acá sin resolver la integral.

1) D) Segmento $\bar{AB}$, con $\bar{A} = (2, 3, -1)$ y $\bar{B} = (3, 2, 1)$.

$\bar{AB} = (1, -1, 2) \quad \Rightarrow \quad ||\bar{AB}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{6}}$

Al calcular la longitud de arco nos tiene que dar igual a $\sqrt{6}$.

$\bar{r}:(x,y,z)=(2,3,-1)+t(1,-1,2)$

$$\begin{cases} x=2+t & dx=dt \\ y=3-t & \Rightarrow \quad dy=-dt \quad \Rightarrow \quad \text{Parametrizamos respecto a } x: 2\leq x\leq 3 \\ z=-1+2t & dz=2dt \end{cases}$$

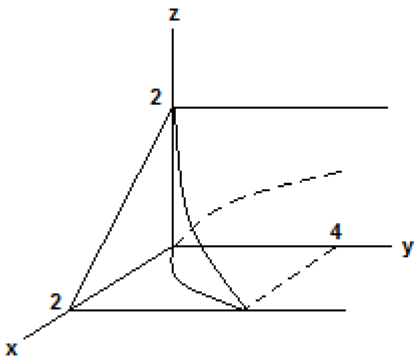
$f(t)=(2+t,3-t,-1+2t) \quad \Rightarrow \quad f'(t)=(1,-1,2) \quad \wedge \quad 2\leq t\leq 3$

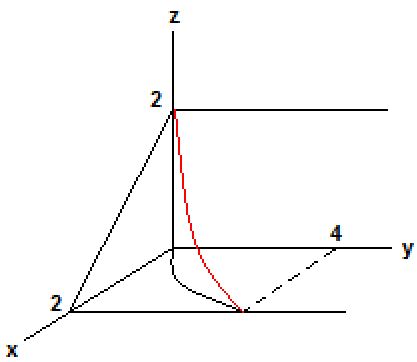
$$\text{Longitud de arco}=\int_2^3 \sqrt{1+1+4}\,dt=\int_2^3 \sqrt{6}\,dt=\boxed{\sqrt{6}}$$

Otra parametrización: para que sea en sentido inverso $\Rightarrow$ invertimos el director: $-(1,-1,2)=(-1,1,-2)$

$f(u)=(3-u,2+u,1-2u) \quad \wedge \quad 2\leq u\leq 3$

1) E) $C\subset\mathbb{R}^3$, intersección de $y=x^2$ con $x+z=2$ en el 1° octante.





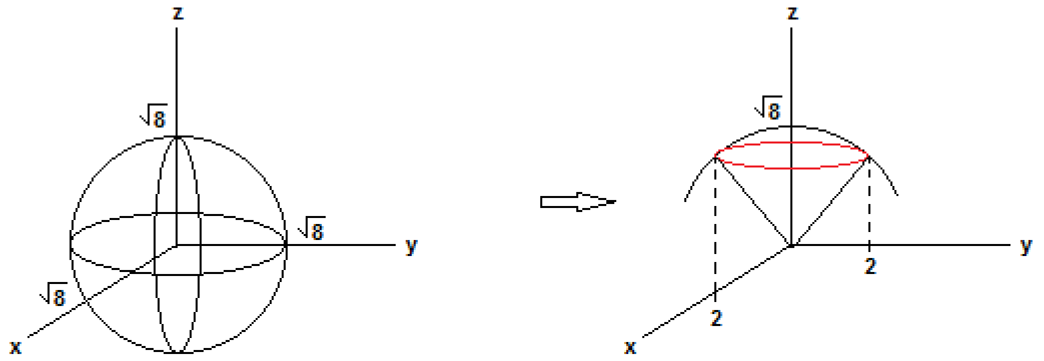
$(0,0,2)\rightarrow(2,4,0)$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 & \Rightarrow \quad f(t)=(t,t^2,2-t) \quad \Rightarrow \quad f'(t)=(1,2t,-1) \quad \wedge \quad 0\leq t\leq 2 \\ z=-2-t \end{cases}$$

$$\text{Longitud de arco}=\int_0^2 \sqrt{1+4t^2+1}\,dt=\int_0^2 \sqrt{2+4t^2}\,dt=\int_0^2 \sqrt{4}.\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\,dt=2\left(\frac{t.\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}}{2}+\frac{1}{4}.ln\left|t+\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\right|\right)\int_0^2$$

$=2(2,47-(-0,086))=\boxed{5,11}$

1) F) $C \subset \mathbb{R}^3$, intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$z^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$

$f(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)) \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)) \quad \wedge \quad 0 \le t \le 2\pi$

Longitud de arco $= \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = \boxed{4\pi}$

Otra parametrización posible es: $f(u) = (2\sin(t), 2\cos(t)) \quad \wedge \quad 0 \le u \le 2\pi$

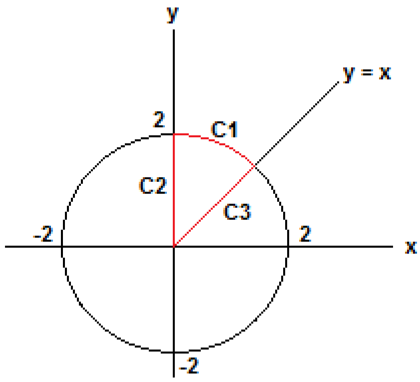
1) G) C: línea coordenada de $u = 3$, correspondiente a la superficie de ecuación $\bar{X} = (u^2 v, u - v, v + u) \quad \wedge \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$ entre los puntos $(9, 2, 4)$ y $(18, 1, 5)$.

$$\bar{X} = g(u, v) \quad \Rightarrow \quad g(3, v) = (9v, 3 - v, 3 + v) = \begin{cases} (9, 2, 4) & \Rightarrow \quad v = 1 \\ (18, 1, 5) & \Rightarrow \quad v = 2 \end{cases}$$

$g'(3, v) = (9, -1, 1) \quad \wedge \quad 1 \le v \le 2$

Longitud de arco $= \displaystyle\int_1^2 \sqrt{81 + 1 + 1}\, dv = \int_1^2 \sqrt{83}\, dv = \boxed{\sqrt{83}}$

2) Calcule la longitud de la frontera de la región plana definida por: $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge x$, $x \ge 0$.



$C_1 = x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad C_2 = x \leq 0 \quad \wedge \quad C_3 = y \geq x$

Longitud de arco = Longitud C_1 + Longitud C_2 + Longitud C_3

Para C_1:

$f(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)) \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)) \quad \wedge \quad$ Del gráfico vemos que: $\dfrac{\pi}{4} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$\text{Longitud } C_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\, dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Para C_2:

$f(t) = (0, t) \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (0, 1) \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq 2$

$$\text{Longitud } C_2 = \int_0^2 \sqrt{1}\, dt = \boxed{2}$$

Para C_3:

$f(t) = (t, t) \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (1, 1) \quad \wedge \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\text{Longitud } C_3 = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 0) = \boxed{2}$$

$$\text{Longitud de arco} = 2 + 2 + \frac{\pi}{2} = \boxed{4 + \frac{\pi}{2}}$$

3) Calcule la longitud de la trayectoria de una partícula que se mueve sobre la superficie de ecuación $z = x^2 - 4y^2$ desde el punto $(1, 2, -15)$ hasta el $(3, 1, 5)$, si la proyección de su recorrido sobre el plano x, y es el segmento de puntos extremos $(1,2,0)$ y $(3,1,0)$.

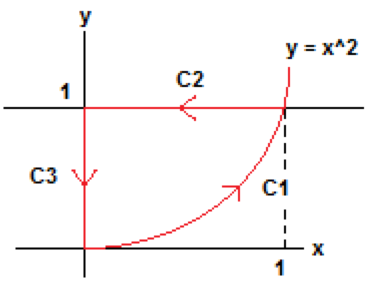
$$(3,1,0)-(1,2,0)=(2,-1,0) \quad \Rightarrow \quad \bar{r}:(x,y,z)=(1,2,0)+t(2,-1,0)$$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(t)=(1+2t,2-t,(1+2t)^2-4(2-t)^2) \quad \Rightarrow \quad f'(t)=(2,-1,4(1+2t)+8(2-t))$$

$$f'(t)=(2,-1,4+8t+16-8t) \quad \Rightarrow \quad f'(t)=(2,-1,20) \quad \wedge \quad 0\leq t\leq 1$$

$$\text{Longitud de arco} = \int_0^1 \sqrt{405}\,dt = \sqrt{405} = \boxed{9\sqrt{5}}$$

11) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y)=(y,-x)$ a lo largo de la frontera de la región definida por $x^2\leq y\leq 1 \quad \wedge \quad 0\leq x\leq 1$. En este ejemplo aún con camino cerrado el resultado no es nulo.



$$\oint_C \bar{f}\,d\bar{s} = \int_{C_1} \bar{f}\,d\bar{s} + \int_{C_2} \bar{f}\,d\bar{s} + \int_{C_3} \bar{f}\,d\bar{s}$$

Para C_1:

$$g(t)=(t,t^2) \quad \Rightarrow \quad g'(t)=(1,2t) \quad \wedge \quad 0\leq t\leq 1$$

$$\int_{C_1} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2,-t)(1,2t)\,dt = \int_0^1 t^2-2t^2\,dt = -\int_0^1 t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}\int_0^1 = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

Para C_2:

$g(t)=(t,1) \quad \Rightarrow \quad g'(t)=(1,0) \quad \wedge \quad 1\leq t\leq 0$? No, entonces hacemos que vaya de 0 a 1 pero le cambiamos el sentido a la circulación: $0\leq t\leq 1$

$$-\int_{C_2} f(g(t))g'(t)\,dt = -\int_0^1 (1,-t)(1,0)\,dt = -\int_0^1 dt = -t\int_0^1 = \boxed{-1}$$

Para C_3:

$g(t) = (0,t) \quad \Rightarrow \quad g'(t) = (0,1) \quad \wedge \quad 1 \leq t \leq 0$? No, entonces hacemos lo mismo que para C_2: $0 \leq t \leq 1$

$$-\int_{C_3} f(g(t))g'(t)\,dt = -\int_0^1 (t,0)(0,1)\,dt = \boxed{0}$$

$$\oint_C \bar{f}\,\bar{ds} = -\frac{1}{3} - 1 + 0 = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

12) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x-y, x, yz)$ a lo largo de la curva intersección de $z = x - y^2$ con $y = x^2$ desde $(1,1,0)$ hasta $(-1,1,-2)$.

$g(t) = (t, t^2, t - t^4) \quad \Rightarrow \quad g'(t) = (1, 2t, 1 - 4t^3) \quad \wedge \quad 1 \leq t \leq -1$? No, entonces hacemos que vaya de -1 a 1 pero le cambiamos el sentido a la circulación: $-1 \leq t \leq 1$

$$-\int_{-1}^1 f(g(t))g'(t)\,dt = -\int_{-1}^1 (t-t^2, t, t^3-t^6)(1,2t,1-4t^3)\,dt = -\int_{-1}^1 t - t^2 + 2t^2 + t^3 - t^6 - 4t^6 + 4t^9\,dt =$$

$$-\int_{-1}^1 t + t^2 + t^3 - 5t^6 + 4t^9\,dt = -\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} - \frac{5t^7}{7} + \frac{4t^{10}}{10}\right)\int_{-1}^1 = -\left(\frac{323}{420} - \frac{643}{420}\right) = \boxed{\frac{16}{21}}$$

13) Calcule el trabajo de $f(x,y,z) = 3x\breve{i} - xz\breve{j} + yz\breve{k}$ a lo largo de la curva de ecuación $\bar{X} = (t-1, t^2, 2t)$ con $t \in [1,3]$. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?, ¿puede asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?

$C : g(t) = (t-1, t^2, 2t) \quad \Rightarrow \quad g'(t) = (1, 2t, 2) \quad \wedge \quad 1 \leq t \leq 3$

$$\text{Trabajo} = \int_1^3 f(g(t))g'(t)\,dt = \int_1^3 (3t-3, (1-t)2t, 2t^3)(1,2t,2)\,dt = \int_1^3 3t - 3 + 4t^2 - 4t^3 + 4t^3\,dt =$$

$$\frac{3t^2}{2} - 3t + \frac{4t^3}{3}\int_1^3 = \frac{81}{2} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{122}{3}}$$

$g(1) = \boxed{p_i = (0,1,2)} \quad \wedge \quad g(3) = \boxed{p_f = (2,9,6)}$

Si la matriz jacobiana del campo (f) es simétrica, entonces es independiente del camino:

$$D_f = \begin{pmatrix} 3 & -z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & -x & y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{No es simétrica} \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{No es independiente del camino}}$$

14) Verifique si los siguientes campos admiten función potencial; de existir, determínela.

Nota: De ser la matriz jacobiana del campo simétrica, entonces el campo es conservativo con lo cual existe la función potencial.

14) A) $\bar{f}(x,y) = (y - 2xy + 1, x + 1 - x^2)$

$$D_f = \begin{pmatrix} - & 1-2x \\ 1-2x & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Es simétrica} \quad \Rightarrow \quad \exists\varphi$$

$$\nabla\varphi = f \quad \Rightarrow \quad (\varphi'_x, \varphi'_y) = (P, Q)$$

En este punto hay 2 métodos para obtener la función potencial, en este ejercicio lo resolveré por ambos, luego aplicaré solo uno de ellos.

Método 1 (el que exijía mi profesora):
Una vez obtendio φ_x, calculamos $A(y)$ igualando Q(que es igual a φ'_y) con la derivada de φ_x respecto de y para despejar $A'(y)$; integramos $A'(y)$ respecto de y para obtener $A(y)$; luego reemplazamos y obtendremos la función potencial.

$$\varphi_x = \int P\,dx = \int y - 2xy + 1\,dx = \underline{yx - x^2y + x + A(y)} \quad \Rightarrow \quad x + 1 - x^2 = \varphi'_y = x - x^2 + A'(y) \quad \Rightarrow \quad A'(y) = 1$$

$$\Rightarrow \quad A(y) = \int dy \quad \Rightarrow \quad \underline{A(y) = y + C}$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = yx - x^2y + x + y + C}$$

Método 2 (el más usado):

$$\varphi_x = \int P\,dx = \int y - 2xy + 1\,dx = \underline{yx - x^2y + x + A(y)}$$
$$\varphi_y = \int Q\,dy = \int x + 1 - x^2\,dy = \underline{yx + y - x^2y + B(x)}$$

Repetidos y no repetidos 1 sola vez: $\boxed{\varphi(x,y) = yx - x^2y + x + y + C}$

14) B) $\bar{f}(x,y) = (x - y^2, y - x^2)$

$$D_f = \begin{pmatrix} - & -2y \\ -2x & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{No es simétrica} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nexists \varphi}$$

14) C) $\bar{f}(x, y, z) = (z\cos(xz), z, y + x\cos(xz))$

$$D_f = \begin{pmatrix} - & 0 & \cos(xz) - x\sin(xz)z \\ 0 & - & 1 \\ \cos(xz) - z\sin(xz)x & 1 & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Es simétrica} \quad \Rightarrow \quad \exists\varphi$$

$$\nabla\varphi = f \quad \Rightarrow \quad (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) = (P, Q, R)$$

$$\varphi_x = \int P\,dx = \int z\cos(xz)\,dx = z\int \cos(xz)\,dx = z\frac{\sin(zx)}{z} + A(y, z) = \underline{\sin(zx) + A(y, z)}$$

$$\Rightarrow \quad z = \varphi'_y = A'_y(y, z) \quad \Rightarrow \quad A'_y(y, z) = z \quad \Rightarrow \quad A(y, z) = \int z\,dy \quad \Rightarrow \quad \underline{A(y, z) = yz + B(z)}$$

$$\Rightarrow \quad y + x\cos(xz) = \varphi'_z = y + B'(z) \quad \Rightarrow \quad B'(z) = x\cos(xz) \quad \Rightarrow \quad B(z) = \int x\cos(xz)\,dz \quad \Rightarrow \quad \underline{B(z) = \sin(xz) + C}$$

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = \sin(xz) + yz + C}$$

14) D) $\bar{f}(x, y, z) = (2x + y + 1, x + z, y + 2z)$

$$D_f = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Es simétrica} \quad \Rightarrow \quad \exists\varphi$$

$$\nabla\varphi = f \quad \Rightarrow \quad (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) = (P, Q, R)$$

$$\varphi_x = \int P\,dx = \int 2x + y + 1\,dx = \underline{x^2 + yx + x + A(y, z)}$$

$$\Rightarrow \quad x + z = \varphi'_y = x + A'_y(y, z) \quad \Rightarrow \quad A'_y(y, z) = z \quad \Rightarrow \quad A(y, z) = \int z\,dy \quad \Rightarrow \quad \underline{A(y, z) = yz + B(z)}$$

$$\Rightarrow \quad y + 2z = \varphi'_z = y + B'(z) \quad \Rightarrow \quad B'(z) = 2z \quad \Rightarrow \quad B(z) = \int 2z\,dz \quad \Rightarrow \quad \underline{B(z) = z^2 + C}$$

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = x^2 + xy + x + yz + z^2 + C}$$

18) Sea $\bar{f} \in C^1 / \bar{f}(x, y) = (xy^2, yg(x))$, determine g de manera que $\bar{f}$ admita función potencial; suponga que $\bar{f}(2, 1) = (2, 6)$.

$\bar{f}(2,1) = (2,6) \quad \Rightarrow \quad g(1) = 3$

$$D_f = \begin{pmatrix} - & yg'(x) \\ 2xy & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Si tiene que } \exists\varphi \quad \Rightarrow \quad 2xy = yg'(x) \quad \Rightarrow \quad 2x = g'(x)$$

$$g(x) = \int 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad g(x) = x^2 + C$$

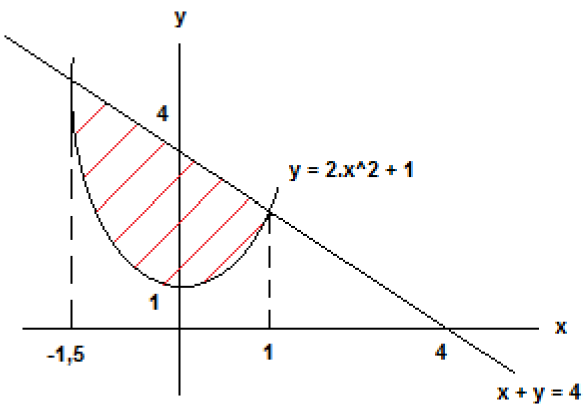
$$g(1) = 3 = 1^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(x) = x^2 + 2}$$

Part IX

TP.9 - Integrales múltiples

1) Calcule el área de las siguientes regiones planas mediante integrales dobles; se recomiendo no aplicar propiedades de simetría, plantee los límites para toda la región.

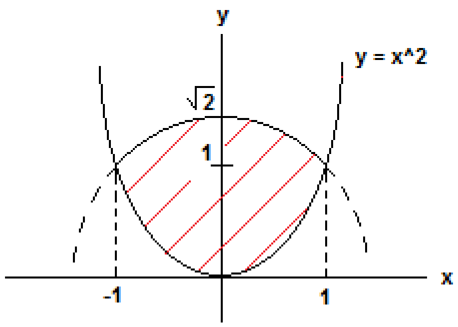
1) A)$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 2x^2 + 1 \quad \wedge \quad x + y \leq 4\}$.



$$4 - x = 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 2x^2 + x \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \int_{2x^2+1}^{4-x} dy\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} 4 - x - (2x^2+1)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} 4 - x - 2x^2 - 1\,dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} =$$
$$\frac{11}{6} - \left(\frac{-27}{8}\right) = \boxed{\frac{125}{24}}$$

1) B) D: definida por $x^2 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$.



$$x^2 = \sqrt{2-x^2} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2} - x^2\, dx = \left(\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + \frac{2}{2} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x^3}{3} \right) \int_{-1}^{1} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}}$$

1) C) D: dominio del campo $\bar{f}(x,y) = \left(ln(x+y-2), \sqrt{y-2x+2}, (2x+2-y-x^2)^{-\frac{1}{4}} \right)$.

$$x+y-2 > 0 \qquad\qquad y > 2-x \quad ①$$

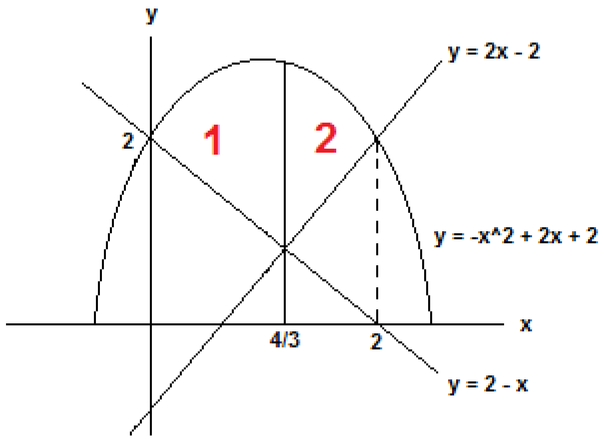
$$y-2x+2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y \geq 2x-2 \quad ②$$

$$2x+2+y-x^2 \geq 0 \qquad\qquad y \leq 2x+2-x^2 \quad ③$$

De ③: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_v = f(x_v) = f(1) = 2+2-1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{v = (1,3)}$

De ①=②: $2-x = 2x-2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 3x \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \dfrac{4}{3}}$

De ②=③: $2x-2 = 2x+2-x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \begin{cases} \underline{x = 2} \\ \cancel{x} = -2 \end{cases}$



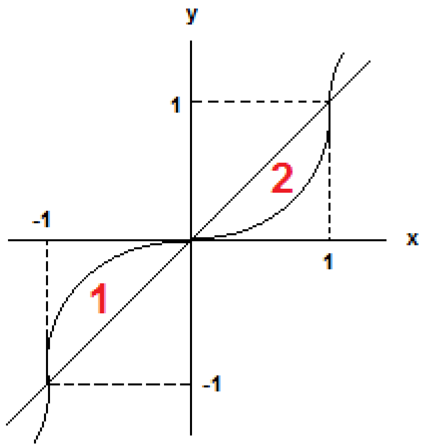
Área $=$ Área$_1$+ Área$_2$

$$\text{Área}_1 = \int_0^{\frac{4}{3}} \int_{2-x}^{-x^2+2x+2} dy\,dx = \int_0^{\frac{4}{3}} -x^2+2x+2-2+x\,dx = \int_0^{\frac{4}{3}} -x^2+3x\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{152}{81}}$$

$$\text{Área}_2 = \int_{\frac{4}{3}}^{2} \int_{2x-2}^{-x^2+2x+2} dy\,dx = \int_{\frac{4}{3}}^{2} -x^2+2x+2-2x+2\,dx = \int_{\frac{4}{3}}^{2} -x^2+4\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{\frac{4}{3}}^{2} = \frac{16}{3}-\frac{368}{81} = \boxed{\frac{64}{81}}$$

$$\text{Área} = \frac{152}{81}+\frac{64}{81} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

1) D) D: limitada por las curvas de ecuación $y = x^3$ e $y = x$.



Área $=$ Área$_1$+ Área$_2$

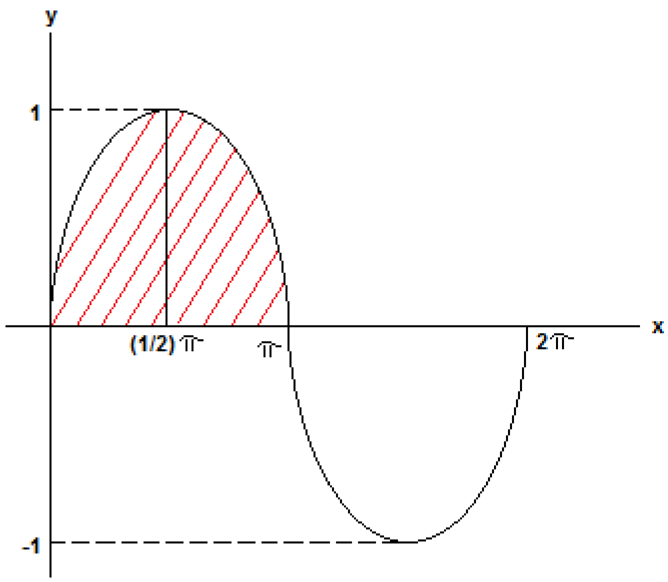
$$\text{Área}_1 = \int_{-1}^{0} \int_{x}^{x^3} dy\,dx = \int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\text{Área}_2 = \int_{0}^{1} \int_{x^3}^{x} dy\,dx = \int_{0}^{1} x - x^3\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_{0}^{1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2) Calcule las siguientes integrales en ambos órdenes de integración y verifique que los resultados coinciden.

2) A) $\iint_D dx\,dy$, D definido por $0 \leq y \leq \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.



1° forma:

$$\text{Área} = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\sin(x)} dy\,dx = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x) \Big|_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = \boxed{2}$$

2° forma:

$$\text{Área} = \int_{0}^{1} \int_{\arcsin(y)}^{\frac{\pi}{2}} dx\,dy + \int_{1}^{0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(y)} dx\,dy = \int_{0}^{1} \frac{\pi}{2} - \arcsin(y)\,dy - \int_{0}^{1} \arcsin(y) - \frac{\pi}{2}\,dy =$$

$$\left(\frac{\pi}{2}y - \left(y\arcsin(y) + \sqrt{1-y^2}\right)\right) \Big|_{0}^{1} - \left(y\arcsin(y) + \sqrt{1-y^2} - \frac{\pi}{2}y\right) \Big|_{0}^{1} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (-1)\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (1)\right) =$$

$1 + 1 = \boxed{2}$

2) B) $\displaystyle\iint\limits_D x\,dx\,dy \quad , \quad D = [-1,1]\text{x}[-1,1].$

1° forma:

$$\text{Área} = \int\limits_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} x\,dy\,dx = \int\limits_{-1}^{1} 2x\,dx = x^2 \int\limits_{-1}^{1} = 1 - (1) = \boxed{0}$$

2° forma:

$$\text{Área} = \int\limits_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} x\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{2} \int\limits_{-1}^{1} \right) dy = \int\limits_{-1}^{1} 0\,dy = \boxed{0}$$

2) C) $\displaystyle\iint\limits_D |x|\,dx\,dy \quad , \quad D = [-1,1]\text{x}[-1,1].$

1° forma:

$$\text{Área} = \int\limits_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |x|\,dy\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |x| \left(y \int\limits_{-1}^{1} \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} |x| 2\,dx = 2 \left(\int\limits_{-1}^{0} -x\,dx + \int\limits_{0}^{1} x\,dx \right) = 2 \left(\left(-\frac{x^2}{2} \int\limits_{-1}^{0} \right) + \left(\frac{x^2}{2} \int\limits_{0}^{1} \right) \right) =$$

$$2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{2}$$

2° forma:

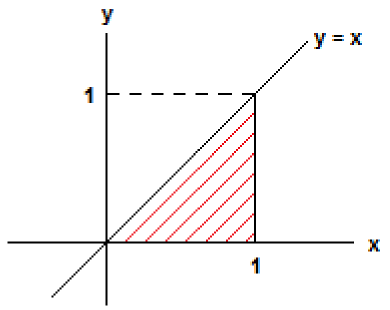
$$\text{Área} = \int\limits_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |x|\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-1}^{0} -x\,dx + \int\limits_{0}^{1} x\,dx \right) dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(-\frac{x^2}{2} \int\limits_{-1}^{0} \right) + \left(\frac{x^2}{2} \int\limits_{0}^{1} \right) \right) dy = \int\limits_{-1}^{1} dy = y \int\limits_{-1}^{1} = \boxed{2}$$

5) Calcule las siguientes integrales, en algunos casos puede convenirle invertir el orden de integración.

5) A) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left(-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \right) \int\limits_{0}^{1} = 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

5) B) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \int_{y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$

$0 \le y \le 1 \quad \wedge \quad y \le x \le 1$



$0 \le x \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le y \le x$

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 e^{x^2}\, x\, dx$$

Resolvemos por sustitución:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = x dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^u \int_0^1 = \frac{1}{2} e^{x^2} \int_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e-1}{2}}$$

$$\textbf{5) C)} \int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_0^5 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx = \int_{-4}^{0} 2\sqrt{y+4}\, dy + \int_0^5 \sqrt{y+4} - y + 2\, dy$$

$$2\left(\frac{2}{3}(y+4)^{\frac{3}{2}}\right) \int_{-4}^{0} + \left(\frac{2}{3}(y+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} + 2y\right) \int_0^5 = 2\left(\frac{16}{3} - 0\right) + \left(18 - \frac{25}{2} + 10 - \left(\frac{16}{3}\right)\right) = \boxed{\frac{125}{6}}$$

6) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

6) A) $\iint_D (6 - x - y)^{-1}\, dx\, dy \;\; , \;\; D : |x + y| \le 2 \quad \wedge \quad y \le x + 2 \le 4 \;\; , \;\;$ usando $(x, y) = (v, u - v)$.

$$\begin{cases} x + y \le 2 \quad \wedge \quad y \le 2 - x \quad ① \\ x + y \ge -2 \quad \wedge \quad y \ge -2 - x \quad ② \\ y \le x + 2 \quad ③ \\ x \le 2 \quad ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} ① : u - v \leq 2 - v \quad \Rightarrow \quad \underline{u \leq 2} \\ \\ ② : u - v \geq -2 - v \quad \Rightarrow \quad \underline{u \geq -2} \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{l} ③ : u - v \leq v + 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{v \geq \dfrac{u-2}{2}} \\ \\ ④ : \underline{v \leq 2} \end{array}$$

$$h(u,v) = (x,y) = (v, u-v) \quad \Rightarrow \quad |D_h| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = |-1| = \boxed{1}$$

$$\int_{-2}^{2} \int_{\frac{u-2}{2}}^{2} \frac{1}{6-v-u+v} |D_h| \, dv \, du = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{u}{2}-1}^{2} \frac{1}{6-u} \, dv \, du = \int_{-2}^{2} \frac{1}{6-u} \left(2 - \frac{u}{2} + 1\right) du = \int_{-2}^{2} \frac{1}{6-u} \left(3 - \frac{u}{2}\right) du =$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{6-u} \left(\frac{6-u}{2}\right) du = \frac{1}{2} \left(u \int_{-2}^{2} \right) = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

6) B) Calcule el área de la región plana definida por $1 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 4$, $(a,b) \in \mathbb{R}^+$ aplicando la transformación $(x,y) = (a.r\cos(\sigma), b.r\sin(\sigma))$.

$$\begin{cases} x = a.r\cos(\sigma) \\ y = b.r\sin(\sigma) \end{cases} \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{a^2.r^2\cos^2(\sigma)}{a^2} + \frac{b^2.r^2\sin(\sigma)}{b^2} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq r^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq r \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$|D_h| = \begin{vmatrix} a\cos(\sigma) & b\sin(\sigma) \\ -a.r\sin(\sigma) & b.r\cos(\sigma) \end{vmatrix} = |a.b.r\cos^2(\sigma) + a.b.r\sin^2(\sigma)| = \underline{a.b.r}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{1}^{2} |D_h| \, dr \, d\sigma = \int_{0}^{2\pi} \int_{1}^{2} a.b.r \, dr \, d\sigma = \int_{0}^{2\pi} a.b \left(\frac{r^2}{2} \int_{1}^{2} \right) d\sigma = \int_{0}^{2\pi} a.b \left(2 - \frac{1}{2}\right) d\sigma = a.b.\frac{3}{2} \left(\sigma \int_{0}^{2\pi} \right) = \boxed{a.b.3\pi}$$

6) C) $\displaystyle\iint_D (x-y)^4 \, dx \, dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 4\}$, con una transformación lineal apropiada.

$$x + y \leq 4 \quad \wedge \quad -x + y \leq 4 \quad \wedge \quad \begin{array}{c} x - y \leq 4 \\ -x + y \geq -4 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{c} -x - y \leq 4 \\ x + y \geq -4 \end{array}$$

$$\begin{cases} u = x + y & ① \\ v = -x + y & ② \end{cases} \Rightarrow \quad -4 \leq u \leq 4 \quad \wedge \quad -4 \leq v \leq 4$$

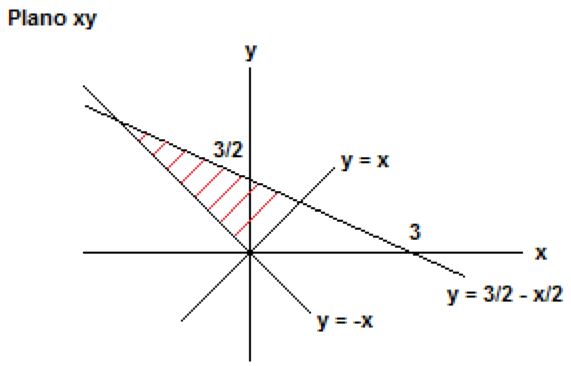
$$\underline{①+②}: 2y = u+v \qquad \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{u}{2}+\dfrac{v}{2} \\ x = \dfrac{u}{2}-\dfrac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right| = \boxed{\frac{1}{2}}$$

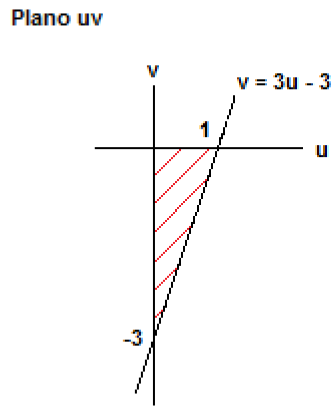
$$\underline{①-②}: 2x = u-v$$

$$\int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4}\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}-\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)^4 |D_f|\,dv\,du = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4}(-v)^4\frac{1}{2}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_{-4}^{4}\left(\frac{v^5}{5}\Big|_{-4}^{4}\right)du = \frac{1}{2}.\frac{2048}{5}.8 = \boxed{1638,4}$$

6) D) $\displaystyle\iint_D (x+y-2)^2\,dx\,dy$ aplicando el cambio de variables definido por:
$(x,y)=(u+v,u-v)$, con $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\geq|x| \ ,\ x+2y\leq 3\}$.

$y\geq x \qquad \wedge \qquad y\geq -x \qquad \wedge \qquad x+2y\leq 3$





$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = |-2| = \boxed{2}$$

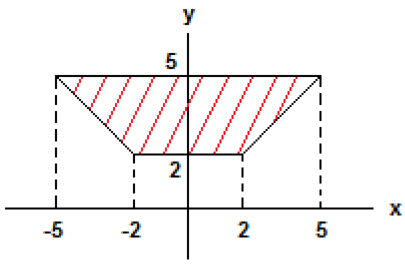
$u-v\geq u+v \quad \Rightarrow \quad 0\geq 2v \quad \Rightarrow \quad \underline{v\leq 0}$

$u-v\geq -u-v \quad \Rightarrow \quad 2u\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u\geq 0}$

$u+v+2u-2v\leq 3 \quad \Rightarrow \quad 3u-v\leq 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{v\geq 3u-3}$

$$\int_0^1\int_{3u-3}^{0}(u+v+u-v-2)^2|D_f|\,dv\,du = \int_0^1\int_{3u-3}^{0}2(u+v+u-v-2)^2\,dv\,du = \int_0^1\int_{3u-3}^{0}2(2u-2)^2\,dv\,du =$$
$$\int_0^1 2(4u^2-8u+4)(-3u+3)\,du = \int_0^1 2(u^2-2u+1)4(3(-u+1))\,du = 24\int_0^1(u^2-2u+1)(-u+1)\,du =$$
$$24\int_0^1 -u^3+2u^2-u+u^2-2u+1\,du = 24\int_0^1 -u^3+3u^2-3u+1\,du = 24\left(\left(-\frac{u^4}{4}+u^3-\frac{3u^2}{2}+u\right)\Big|_0^1\right) =$$
$$24\left(\frac{1}{4}-0\right) = \boxed{6}$$

6) E) Siendo D la región sombreada del dibujo, **calcule** $\displaystyle\iint\limits_D y(x^2+y^2)^{-1}\,dx\,dy$ usando coordenadas polares.



$$2 \le y \le 5 \quad \wedge \quad |x| = y \quad \Rightarrow \quad 2 \le y \;\text{①} \quad \wedge \quad y \le 5 \;\text{②} \quad \wedge \quad x = y \;\text{③} \quad \wedge \quad -x = y \;\text{④}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r}$$

De ①: $2 \le r\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \underline{r \ge \dfrac{2}{\sin(\sigma)}}$

De ②: $r\sin(\sigma) \le 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{r \le \dfrac{5}{\sin(\sigma)}}$

De ③: $r\cos(\sigma) = r\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\sigma) = \sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma = \dfrac{\pi}{4}}$

De ④: $-r\cos(\sigma) = r\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad -\cos(\sigma) = \sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma = -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}}$

Nota: trabajamos siempre con la parte ⊕, por eso le sumamos π *a* $-\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{2}{\sin(\sigma)}}^{\frac{5}{\sin(\sigma)}} r\sin(\sigma)(r^2\cos^2(\sigma) + r^2\sin^2(\sigma))^{-1}|D_f|\,dr\,d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{2}{\sin(\sigma)}}^{\frac{5}{\sin(\sigma)}} r^2\sin(\sigma)\frac{1}{r^2}\,dr\,d\sigma =$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(\sigma)\left(\frac{3}{\sin(\sigma)}\right)d\sigma = 3\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

7) A) Calcule el área de la región plana limitada por las curvas de niveles e^4 y e^8 de $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$.

$$4 \le x^2 + 2y^2 \le 8 \quad \Rightarrow \quad 2 \le \frac{x^2}{2} + y^2 \le 4$$

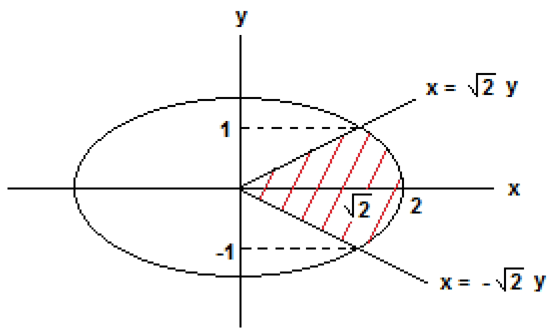
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}.r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \begin{vmatrix} \sqrt{2}\cos(\sigma) & \sin(\sigma) \\ -\sqrt{2}.r\sin(\sigma) & r\cos(\sigma) \end{vmatrix} = |\sqrt{2}.r\cos^2(\sigma) + \sqrt{2}.r\sin^2(\sigma)| = \boxed{\sqrt{2}.r}$$

$$2 \leq \frac{2r^2\cos^2(\sigma)}{2} + r^2\sin^2(\sigma) \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq r^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \leq r \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2} |D_f|\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{2}.r\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}\right) d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, d\sigma = \boxed{2\sqrt{2}\pi}$$

7) B) Calcule $\displaystyle\iint_D e^{x^2+2y^2}\, dx\, dy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad x \geq \sqrt{2}|y|\}$.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1$$



$$\begin{cases} x = 2r\cos(\sigma) \\ y = \sqrt{2}r\sin(\sigma) \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \begin{vmatrix} 2\cos(\sigma) & \sqrt{2}\sin(\sigma) \\ -2r\sin(\sigma) & \sqrt{2}r\cos(\sigma) \end{vmatrix} = |2\sqrt{2}r\cos^2(\sigma) + 2\sqrt{2}r\sin^2(\sigma)| = \boxed{2\sqrt{2}.r}$$

$$\frac{4r^2\cos^2(\sigma)}{4} + \frac{2r^2\sin^2(\sigma)}{2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\begin{cases} 2r\cos(\sigma) \geq \sqrt{2}\sqrt{2}r\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\sigma) \geq \sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\pi}{4} \\ 2r\cos(\sigma) \geq -\sqrt{2}\sqrt{2}r\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\sigma) \geq -\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq \sigma \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\iint_D e^{x^2+2y^2}\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 e^{4r^2\cos^2(\sigma)+2.2r^2\sin^2(\sigma)}\, dr\, d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 e^{4r^2} 2\sqrt{2}.r\, dr\, d\sigma$$

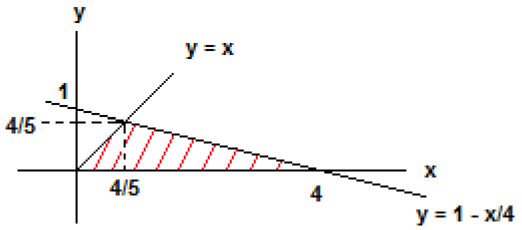
Resolviendo por sustitución:

$$u = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad du = 8rdr \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{8} = rdr \quad \Rightarrow \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 e^u\left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right) du\, d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{4r^2}\Big|_0^1\right) d\sigma$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^4-1\right)\,d\sigma = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^4-1\right)\frac{\pi}{2}}$$

9) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{x+4y}{x^2}\,dx\,dy$ con $D: x \geq y$, $x+4y \leq 4$, $y \geq 0$ usando coordenadas polares.

$$x \geq y \quad \wedge \quad y \leq 1-\frac{x}{4} \quad \wedge \quad y \geq 0$$



$$x = 1-\frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r}$$

$$r\cos(\sigma) \geq r\sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\sigma) \geq \sin(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma = \frac{\pi}{4}}$$

$$r\sin(\sigma) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r=0} \quad \vee \quad \underline{\sigma = 0}$$

$$r\sin(\sigma) \leq 1-\frac{r\cos(\sigma)}{4} \quad \Rightarrow \quad r\sin(\sigma)+\frac{r\cos(\sigma)}{4} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{r \leq \frac{1}{\sin(\sigma)+\frac{\cos(\sigma)}{4}}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sin(\sigma)+\frac{\cos(\sigma)}{4}}} \frac{r\cos(\sigma)+4r\sin(\sigma)}{r^2\cos^2(\sigma)}|D_f|\,dr\,d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sin(\sigma)+\frac{\cos(\sigma)}{4}}} \frac{r\cos(\sigma)+4r\sin(\sigma)}{r^2\cos^2(\sigma)} r\,dr\,d\sigma =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sin(\sigma)+\frac{\cos(\sigma)}{4}}} \frac{r^2(\cos(\sigma)+4\sin(\sigma))}{r^2\cos^2(\sigma)}\,dr\,d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(\sigma)+4\sin(\sigma)}{\cos^2(\sigma)}\right)\left(\frac{1}{\sin(\sigma)+\frac{\cos(\sigma)}{4}}\right)d\sigma =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(\sigma)+4\sin(\sigma)}{\cos^2(\sigma)}\right)\left(\frac{4}{4\sin(\sigma)+\cos(\sigma)}\right)d\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2(\sigma)}\right)d\sigma = 4\left(\tan(\sigma)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = 4(1-0) = \boxed{4}$$

10) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

10) A) H definido por $2y \geq x^2 + z \;\; , \;\; x + y \leq 4 \;\; , \;\; 1^\circ$ octante.

$$\underline{z \leq 2y - x^2} \quad \wedge \quad \underline{y \leq 4 - x} \quad \wedge \quad \underline{x \geq 0} \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad \underline{z \geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad 2y - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2y \geq x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{y \geq \frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} \leq 4 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 \leq 0 \begin{cases} \underline{x \leq 2} \\ \cancel{x} \leq -4 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} \int_0^{2y-x^2} dz\, dy\, dx = \int_0^2 \int_{4-x}^{\frac{x^2}{2}} 2y - x^2\, dy\, dx = \int_0^2 \left(y^2 - x^2 y \int_{4-x}^{\frac{x^2}{2}} \right) dx =$$

$$\int_0^2 (4-x)^2 - x^2(4-x) - \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right) dx = \int_0^2 16 - 8x + x^2 - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4}\, dx =$$

$$16x - 4x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{20} \int_0^2 = \boxed{\frac{68}{5}}$$

10) B) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z \leq 6 \quad \wedge \quad z \geq x + y \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0\}$.

$$\underline{z \leq 6 - x - y} \quad \wedge \quad \underline{z \geq x + y}$$

$$\Rightarrow \quad 6 - x - y \geq x + y \quad \Rightarrow \quad 6 \geq 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad 3 \geq x + y \quad \Rightarrow \quad \underline{y \leq 3 - x} \quad \wedge \quad \underline{y \geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad 3 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x \leq 3} \quad \wedge \quad \underline{x \geq 0}$$

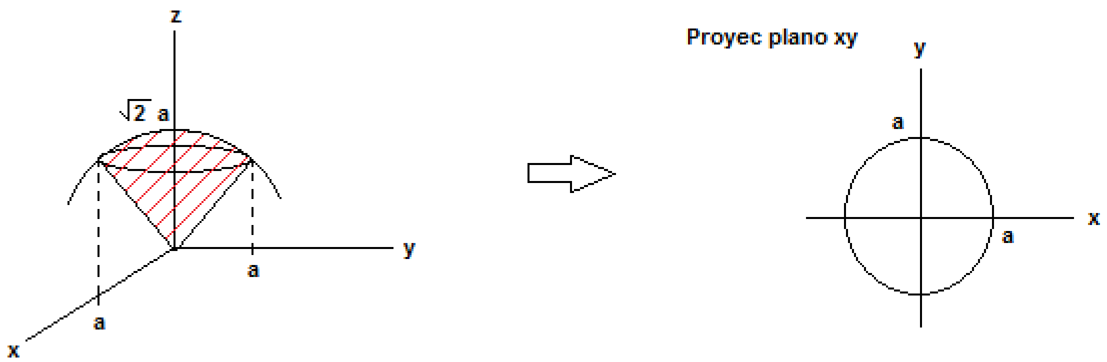
$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_{x+y}^{6-x-y} dz\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^{3-x} 6 - x - y - x - y\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^{3-x} 6 - 2x - 2y\, dy\, dx =$$

$$\int_0^3 \left(6y - 2xy - y^2 \int_0^{3-x} \right) dx = \int_0^3 18 - 6x - 6x + 2x^2 - (3-x)^2\, dx = \int_0^3 18 - 12x + 2x^2 - (9 - 6x + x^2)\, dx =$$

$$\int_{0}^{3} 9-6x+x^2\,dx = 9x-3x^2+\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{3} = \boxed{9}$$

10) D) H definido por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2$ con $a>0$.

Nota: Como la figura se forma con una esfera o cono (en este caso, esfera + cono = "cono de helado"), entonces conviene resolverlo por coordenadas cilíndricas o esféricas.



$$x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \leq 2a^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+2y^2 \leq 2a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \leq a^2$$

Por coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq a \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$z \geq \sqrt{r^2\cos^2(\sigma)+r^2\sin^2(\sigma)} \quad \Rightarrow \quad z \geq r$$

$$z \leq 2a^2 - r^2\cos^2(\sigma) - r^2\sin^2(\sigma) \quad \Rightarrow \quad z \leq \sqrt{2a^2-r^2}$$

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a}\int_{r}^{\sqrt{2a^2-r^2}} |D_f|\,dz\,dr\,d\sigma = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a} r\sqrt{2a^2-r^2}-r^2\,dr\,d\sigma = \int_{0}^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{(2a^2-r^2)^3}}{3}-\frac{r^3}{3}\Big|_{0}^{a}\right)d\sigma =$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{3}\left(-2a^3+\sqrt{8}a^3\right)d\sigma = \frac{a^3}{3}(-2+\sqrt{8})\int_{0}^{2\pi}d\sigma = \frac{a^3}{3}(-2+\sqrt{8})2\pi = \boxed{\frac{4\pi a^3}{3}(-1+\sqrt{2})}$$

Ahora por coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\sigma)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r^2\sin(\varphi)} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}a \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 = x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad 2z^2 = x^2+y^2+z^2 \quad \Rightarrow \quad 2.2a^2\cos^2(\varphi) = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(\varphi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} |D_f|\, dr\, d\sigma\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}a} \right) d\sigma\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{(\sqrt{2}a)^3}{3} \sin(\varphi)\, d\sigma\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\varphi) \frac{2\sqrt{2}a^3}{3} \left(\sigma \Big|_0^{2\pi} \right) d\varphi = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3} \left(-\cos(\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 \right) = \boxed{\frac{4\pi a^3}{3}(-1+\sqrt{2})}$$

10) E) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq x^2 \quad \wedge \quad x \geq z^2 \quad \wedge \quad x \geq |y|\}.$

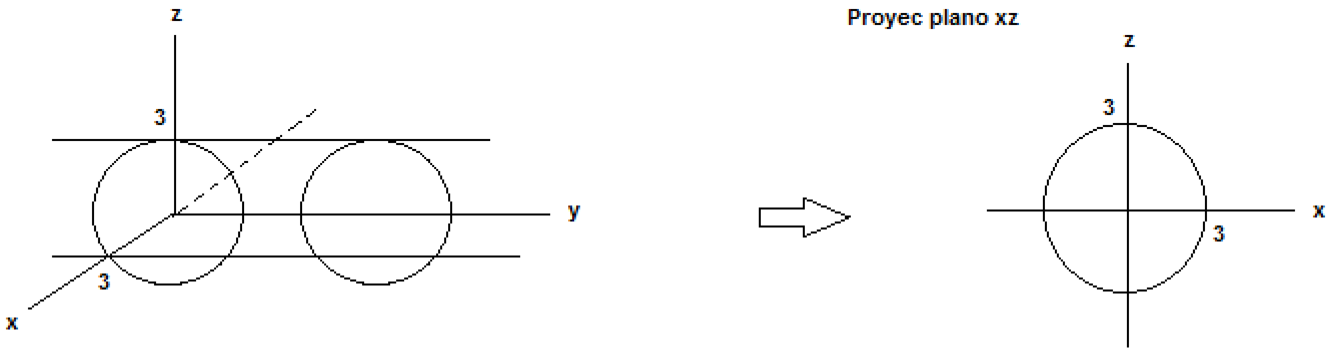
$$\underline{z \geq x^2} \quad \wedge \quad \underline{\sqrt{x} \geq z} \quad \wedge \quad \underline{x \geq y} \quad \wedge \quad x \geq -y \quad \Rightarrow \quad \underline{-x \leq y}$$

$$x^2 = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{x = 1} \\ \underline{x = 0} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{-x}^{x} \sqrt{x} - x^2\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x}y - x^2 y \Big|_{-x}^{x} \right) dx = \int_0^1 x\sqrt{x} - x^3 + x\sqrt{x} - x^3\, dx =$$

$$2\int_0^1 x\sqrt{x} - x^3\, dx = 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^3\, dx = 2\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \boxed{\frac{3}{10}}$$

10) F) H definido por $x^2+z^2 \leq 9 \quad , \quad y \geq 2x \quad , \quad y \leq 2x+4.$



$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ z = r\sin(\sigma) \\ y \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$y \geq 2r\cos(\sigma) \quad \wedge \quad y \leq 2r\cos(\sigma) + 4$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \int_{2r\cos(\sigma)}^{2r\cos(\sigma)+4} |D_f|\, dy\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^3 2r^2\cos(\sigma) + 4r - 2r^2\cos(\sigma)\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^3 4r\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(2r^2 \int_0^3\right) d\sigma =$$

$$18.2\pi = \boxed{36\pi}$$

10) G) H definido por $y \geq x^2 \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 2 \quad , \quad z \geq 0 \quad , \quad z \leq x.$

$$\underline{y \geq x^2} \quad \wedge \quad \underline{y \leq \sqrt{2 - x^2}} \quad \wedge \quad \underline{z \geq 0} \quad \wedge \quad \underline{z \leq x} \quad \Rightarrow \quad \underline{0 \leq x}$$

$$x^2 \leq \sqrt{2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{x = 1} \\ \cancel{x} = -1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^x dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x\, dy\, dx = \int_0^1 x\sqrt{2 - x^2} - x^3\, dx = \left(-\frac{\sqrt{(2 - x^2)^3}}{3} - \frac{x^4}{4} \int_0^1 \right) =$$

$$-\frac{7}{12} - \left(-\frac{\sqrt{8}}{3} \right) = \boxed{-\frac{7}{12} + \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

10) H) H definido por $x^2 + 2y^2 + z \leq 32 \quad , \quad z \geq x^2.$

$$2x^2 + 2y^2 \leq 32 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 16$$

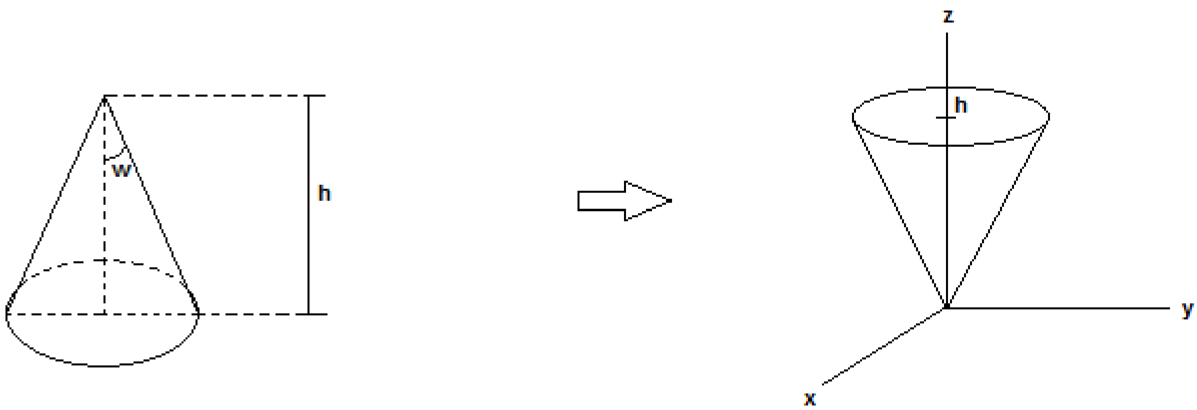
$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$z \geq x^2 \quad \wedge \quad z \leq 32 - x^2 - 2y^2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 \int_{r^2\cos^2(\sigma)}^{32 - r^2\cos^2(\sigma) - 2r^2\sin^2(\sigma)} |D_f|\, dz\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^4 32r - r^3\cos^2(\sigma) - 2r^3\sin^2(\sigma) - r^3\cos^2(\sigma)\, dr\, d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 32r - 2r^3\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(16r^2 - \frac{r^4}{2} \Big|_0^4 \right) d\sigma = \int_0^{2\pi} 256 - 128\, d\sigma = 128.2\pi = \boxed{256\pi}$$

13) Determine el volumen de un cuerpo cónico (cono circular recto) de altura h y ángulo de apertura ω; úbiquelo en la posición más conveniente para facilitar los cálculos.



$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = r\cos(\sigma)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\sigma)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r^2\sin(\varphi)} \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi \quad \wedge \quad 0 \leq \varphi \leq \omega$$

$$h = z = r\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{\cos(\varphi)} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq r \leq \frac{h}{\cos(\varphi)}$$

$$\int_0^{\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{h}{\cos(\varphi)}} |D_f|\, dr\, d\sigma\, d\varphi = \int_0^{\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{h}{\cos(\varphi)}} r^2\sin(\varphi)\, dr\, d\sigma\, d\varphi = \int_0^{\omega}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\frac{h^3}{3\cos^3(\varphi)}\, d\sigma\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\omega} \sin(\varphi)\frac{h^3}{3\cos^3(\varphi)} 2\pi\, d\varphi = \frac{2\pi h^3}{3}\int_0^{\omega} \frac{\sin(\varphi)}{\cos^3(\varphi)}\, d\varphi = \frac{2\pi h^3}{3}\left(\frac{1}{2\cos^2(\varphi)} \Big|_0^{\omega} \right) = \frac{2\pi h^3}{3}\left(\frac{1}{2\cos^2(\omega)} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$\frac{\pi h^3}{3}\left(\frac{1-\cos^2(\omega)}{\cos^2(\omega)}\right)=\frac{\pi h^3}{3}\left(\frac{\sin^2(\omega)}{\cos^2(\omega)}\right)=\boxed{\frac{\pi h^3}{3}\left(\tan^2(\omega)\right)}$$

15) Calcule la masa de los siguientes cuerpos:

15) A) cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

Densidad proporcional al eje z, entonces masa $= K \iiint \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx.$

$$4 - x^2 - y^2 = 8 - 2x^2 - 2y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \le r \le 2 \quad \wedge \quad 0 \le \sigma \le 2\pi \quad \wedge \quad 4 - r^2 \le z \le 8 - 2r^2$$

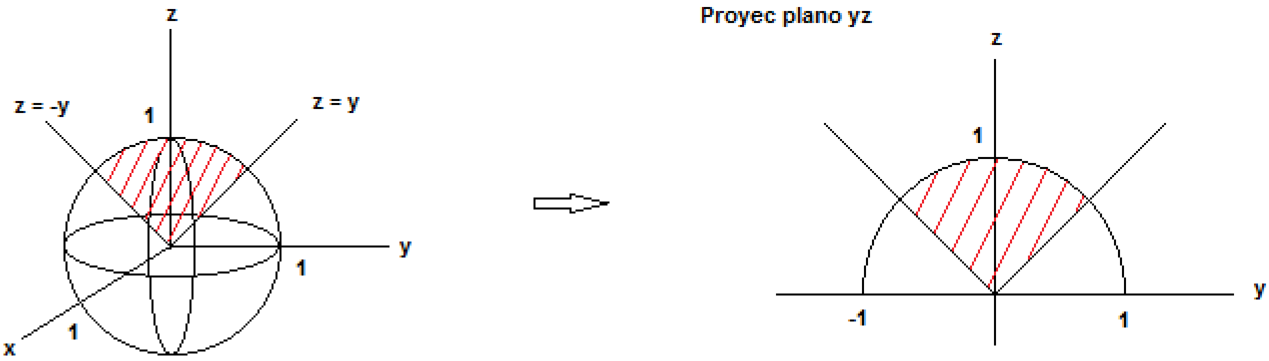
$$K\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{4-r^2}^{8-2r^2}\sqrt{r^2\cos^2\sigma + r^2\sin^2(\sigma)}|D_f|\, dz\, dr\, d\sigma = K\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{4-r^2}^{8-2r^2}\sqrt{r^2}r\, dz\, dr\, d\sigma =$$

$$K\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2(8-2r^2-4+r^2)\, dr\, d\sigma = K\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2(4-r^2)\, dr\, d\sigma = K\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r^2 - r^4\, dr\, d\sigma =$$

$$K\int_0^{2\pi}\left(\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\int_0^2\right) d\sigma = K\int_0^{2\pi}\frac{64}{15}\, d\sigma = \boxed{\frac{K128\pi}{15}}$$

15) B) cuerpo definido por $z \ge |y|$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

Densidad proporcional al plano xy, entonces masa $= K \iiint z\, dz\, dy\, dx.$



$$\begin{cases} y = r\cos(\sigma) \\ z = r\sin(\sigma) \\ x \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{4} \leq \sigma \leq \frac{3\pi}{4}$$

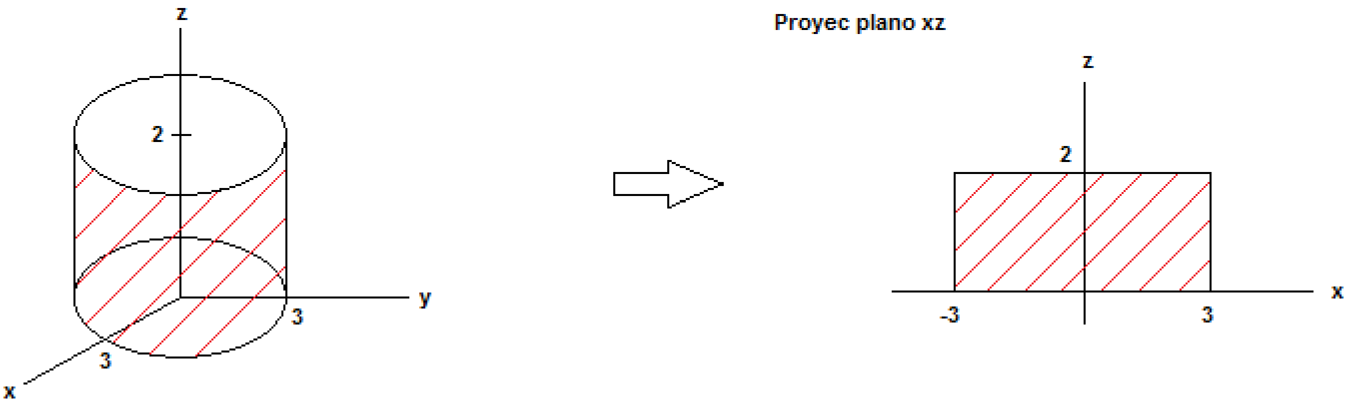
$$x^2 + r^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1-r^2}$$

$$K \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\sin(\sigma)|D_f|\, dx\, dr\, d\sigma = K \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 2r^2\sin(\sigma)\sqrt{1-r^2}\, dr\, d\sigma =$$

$$K \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin(\sigma) \left(-\frac{r\sqrt{(1-r^2)^3}}{4} + \frac{r\sqrt{1-r^2}}{8} - \frac{1}{8}\arcsin(r) \Big|_0^1 \right) d\sigma = K \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin(\sigma) \left(-\frac{\pi}{16} + 0 \right) d\sigma =$$

$$K \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\frac{\pi}{8}\sin(\sigma)\, d\sigma = -K\frac{\pi}{8} \left(-\cos(\sigma) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right) = K\frac{\pi}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{\frac{K\sqrt{2}\pi}{8}}$$

15) C) cuerpo definido por $x^2 + y^2 \leq 9$, $0 \leq z \leq 2$ con densidad en cada punto proporcinal a la distancia desde el punto al plano xz.



$$-3 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 2 \quad \wedge \quad y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

$$K \int_{-3}^{3} \int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \, dz \, dx = K \int_{-3}^{3} \int_{0}^{2} \frac{9-x^2}{2} + \frac{9-x^2}{2} \, dz \, dx = K \int_{-3}^{3} (9 - x^2) 2 \, dx = 2K \left(9x - \frac{x^3}{3} \int_{-3}^{3} \right) =$$

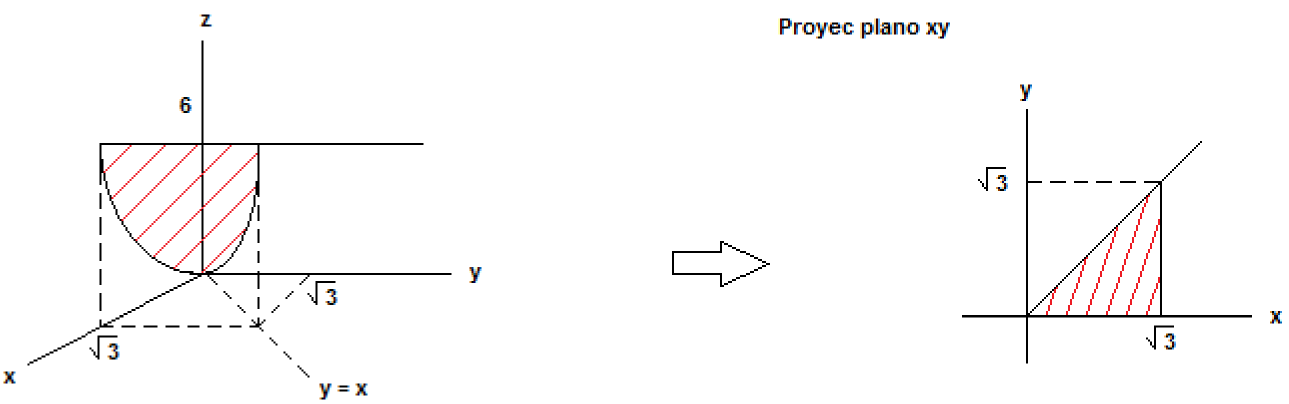
$$2K(18 + 18) = \boxed{72K}$$

Part X

TP.10 - Integrales de Superficie - Flujo

5) Calcule el área de las siguientes superficies:

5) A) Trozo de superficie cilíndrica $z = 2x^2$ con $y \leq x$, $z \leq 6$, 1° octante.



$$6 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}$$

$$g(x,y) = (x, y, 2x^2) \quad \wedge \quad T(x,y) = (0 \leq x \leq \sqrt{3} \quad , \quad 0 \leq y \leq x)$$

$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S||}{|S'_z|} = \frac{||(4x, 0, -1)||}{|-1|} = \sqrt{16x^2+1}$$

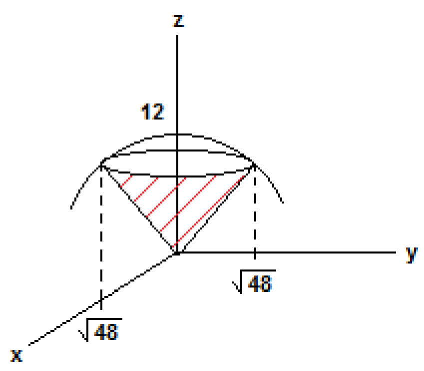
$$\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^x ||\bar{n}||\, dy\, dx = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^x \sqrt{16x^2+1}\, dy\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{16x^2+1}\, dx =$$

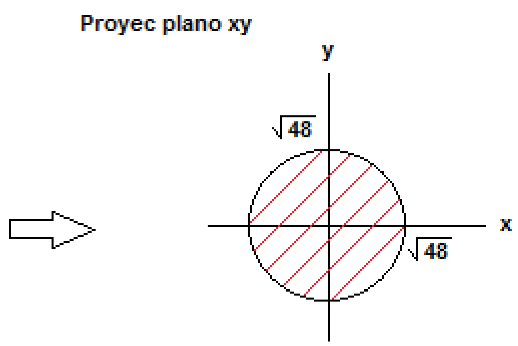
Resolviendo la integral por sustitución:

$$u = 16x^2+1 \quad \Rightarrow \quad du = 32xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{32} = xdx$$

$$\frac{1}{32}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{32}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \int\right) = \frac{1}{32}\left(\frac{2}{3}(16x^2+1)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{32}\left(\frac{686}{3} - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{57}{8}}$$

5) B) Trozo de superficie cónica $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$ interior a la esfera de radio 12 con centro en $\bar{0}$.





$$x^2+y^2+z^2 = 144 \quad \wedge \quad z = \sqrt{2x^2+2y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+2x^2+2y^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 48$$

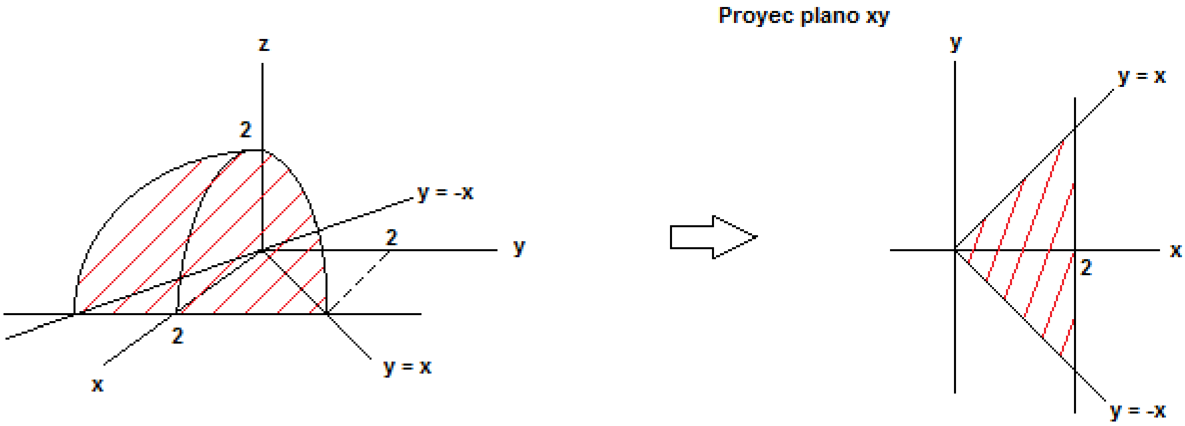
$$\begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z = \sqrt{2}r \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq \sqrt{48} \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S||}{|S'_z|} = \frac{||(4x, 4y, -2z)||}{|2z|} = \frac{\sqrt{16x^2+16y^2+4z^2}}{2z} = \frac{\sqrt{16r^2\cos^2(\sigma)+16r^2\sin^2(\sigma)+4.2r^2}}{2\sqrt{2}r} = \frac{\sqrt{24r^2}}{2\sqrt{2}r}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{48}} ||\bar{n}||.|D_f|\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{48}} r\frac{\sqrt{24r^2}}{2\sqrt{2}r}\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{48}} \frac{\sqrt{24r^2}}{2\sqrt{2}}\, dr\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{48}} \sqrt{12r^2}\, dr\, d\sigma =$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\int_0^{\sqrt{48}}\right)d\sigma = \frac{\sqrt{12}}{2}\int_0^{2\pi}24\,d\sigma = 24\sqrt{12}\pi = \boxed{48\sqrt{3}\pi}$$

5) C) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+z^2=4$ con $-x \le y \le x$, $z \ge 0$.



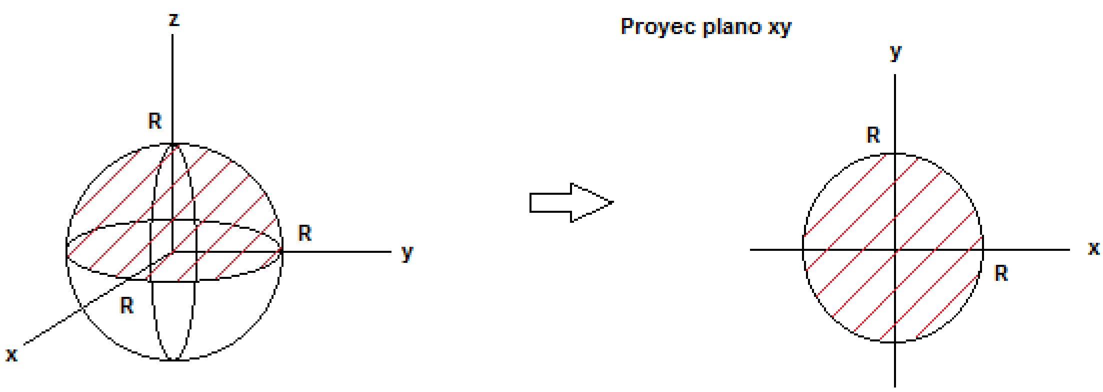
$g(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2}) \quad \wedge \quad T(x,y) = (0 \le x \le 2 \quad , \quad -x \le y \le x)$

$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S||}{|S'_z|} = \frac{||(2x,0,2z)||}{|2z|} = \frac{\sqrt{4x^2+4z^2}}{2z} = \frac{\sqrt{4x^2+4(4-x^2)}}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int_0^2\int_{-x}^{x}\bar{n}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}2x\,dx = 4\left(-\sqrt{4-x^2}\int_0^2\right) = 4(0+2) = \boxed{8}$$

5) D) Superfici esférica de radio R.

$S : x^2+y^2+z^2 = R^2$



El área de S es el de toda la esfera, el área de S' es el de la parte superior sombreada de la esfera, con lo cual:

Área (S) = 2.Área(S′)

$$g(\sigma,z)=\begin{cases} x=R\cos(\sigma)\\ y=R\sin(\sigma) \\ z\end{cases} \Rightarrow \quad 0\le\sigma\le 2\pi \quad\wedge\quad 0\le z\le R$$

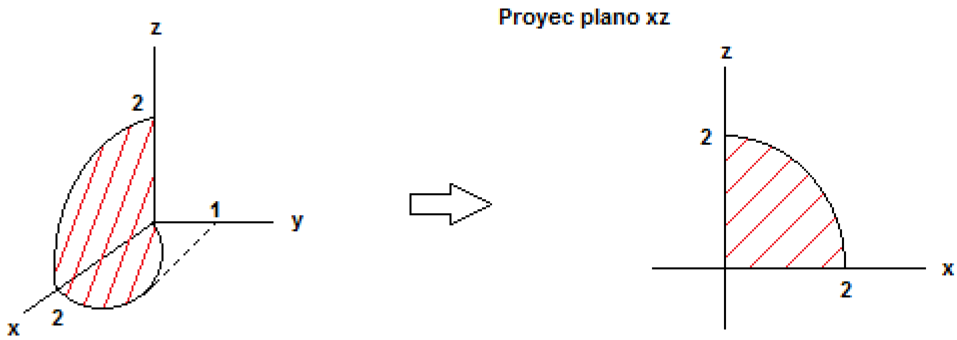
$$||\bar{n}||=||g'_\sigma \text{ x } g'_z||=\left\|\begin{matrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ -R\sin(\sigma) & R\cos(\sigma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=||(R\cos(\sigma),-R\sin(\sigma),0)||=R$$

Nota: Dado que calculamos $\bar{n}$ con el producto vectorial de las derivadas parciales de la parametrización, entonces no hace falta calcular $|D_f|$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R ||\bar{n}||\,dz\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^R R\,dz\,d\sigma=\int_0^{2\pi} R^2\,dz\,d\sigma=\underline{R^2 2\pi}=\text{Área}(S')$$

$$\text{Área }(S)=2.\text{Área}(S')=\boxed{4\pi R^2}$$

5) E) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+y^2=2x$ con $x^2+y^2+z^2\le 4$ en el 1° octante.



$$x^2-2x+y^2=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+y^2=1$$

$$x^2+y^2=2x \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{2x-x^2}$$

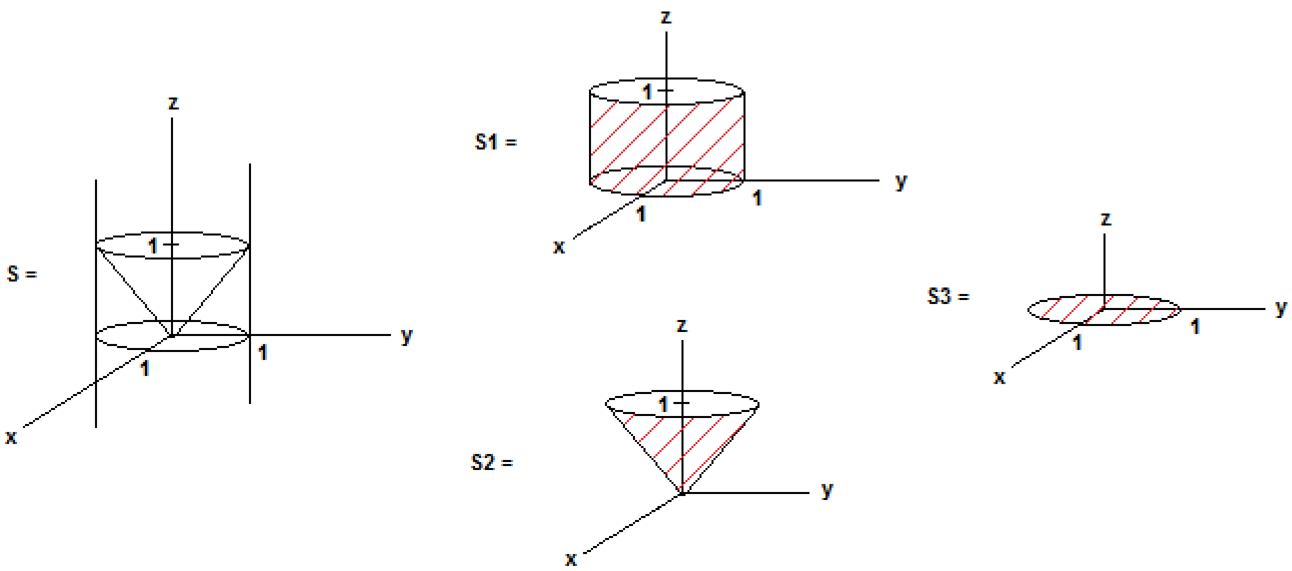
$$g(x,z)=(x,\sqrt{2x-x^2},z) \quad\wedge\quad T(x,z)=(0\le x\le 2 \quad,\quad 0\le z\le\sqrt{4-2x})$$

$$||\bar{n}||=\frac{||\nabla S||}{|S'_z|}=\frac{||(2x-2,2y,0)||}{|2y|}=\frac{\sqrt{4x^2-8x+4+4y^2}}{2y}=\frac{\sqrt{4x^2-8x+4+8x-4x^2}}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-2x}} ||\bar{n}||\,dz\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{4-2x}{2x-x^2}}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{2(2-x)}{x(2-x)}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$\sqrt{2}\left(2\sqrt{x}\,\Big|_{0}^{2}\right)=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right)=\boxed{4}$$

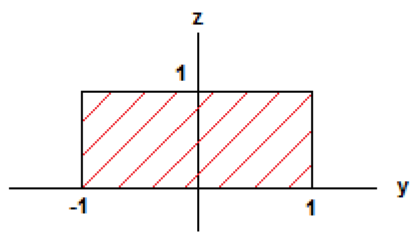
5) F) Superficie frontera del cuerpo definido por $x^2+y^2\leq 1 \quad , \quad 0\leq z\leq \sqrt{x^2+y^2}$.



$\text{Área}(S)=\text{Área}(S_1)+\text{Área}(S_2)+\text{Área}(S_3)$

Para S_1:

Proyec plano yz



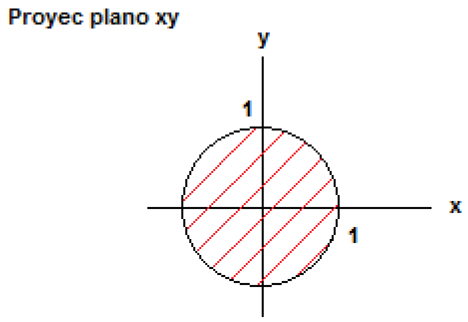
$g(y,z)=(\sqrt{1-y^2},y,z) \quad \wedge \quad T(y,z)=(-1\leq y\leq 1 \quad , \quad 0\leq z\leq 1)$

$$||\bar{n}||=\frac{||\nabla S_1||}{|S'_{1_z}|}=\frac{||(2x,2y,0)||}{|2x|}=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2}}{2x}=\frac{\sqrt{4(1-y^2)+4y^2}}{2\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}||\bar{n}||\,dz\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\arcsin(y)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\boxed{\pi} \quad \Rightarrow \quad \text{Área}(S_1)=\boxed{2\pi}$$

<u>Aclaración</u>: π es el área de la mitad del cilindro ya que, a diferencia de en volumen, al calcular áreas de superficies debe haber unicidad punto por punto, es decir, al proyectar los puntos de la superficie sobre un plano (en este caso el yz) éstos no deben superponerse.

Para S_2:

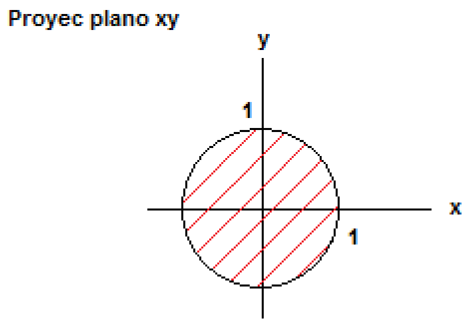


$$g(\sigma, r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z = r \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S_2||}{|S'_{2_z}|} = \frac{||(2x, 2y, 2z)||}{|2z|} = \frac{(2r\cos(\sigma), 2r\sin(\sigma), 2r)}{2r} = \frac{\sqrt{4r^2\cos^2(\sigma) + 4r^2\sin^2(\sigma) + 4r^2}}{2r} = \frac{\sqrt{8r^2}}{2r} = \sqrt{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 ||\bar{n}||.|D_f|\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\frac{1}{2}\, d\sigma = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$

Para S_3:



$$g(\sigma, r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

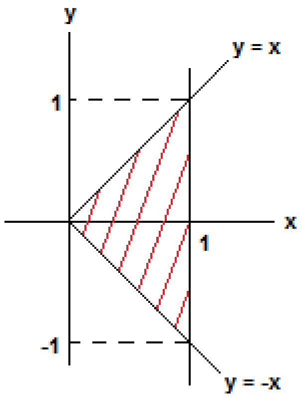
$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S_3||}{|S'_{3_z}|} = \frac{||(0,0,1)||}{|1|} = \frac{1^2}{1} = 1$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 ||\bar{n}||.|D_f|\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\sigma = \boxed{\pi}$$

$\text{Área}(S) = 2\pi + \sqrt{2}\pi + \pi = \boxed{(3+\sqrt{2})\pi}$

5) G) Superficie de ecuación $z = x^2 - y \quad con \quad |y| \leq x \quad , \quad x \leq 1.$

$y \leq x \quad , \quad -y \leq x \quad \Rightarrow \quad y \geq -x \quad , \quad x \leq 1$



$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S||}{|S'_z|} = \frac{||(2x,-1,-1)||}{|-1|} = \sqrt{4x^2+2}$$

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} ||\bar{n}||\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{-x}^{x} \sqrt{4x^2+2}\, dy\, dx = \int_0^1 2x\sqrt{4x^2+2}\, dx =$$

Resolviendo la integral por sustitución:

$$u = 4x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad du = 8xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{8} = xdx$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u=2} \quad \wedge \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{u=6}$$

$$\int_2^6 2\sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{216}-\sqrt{8}\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{8}\sqrt{9}\sqrt{3}-\sqrt{8}\right) = \frac{\sqrt{8}}{6}\left(3\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

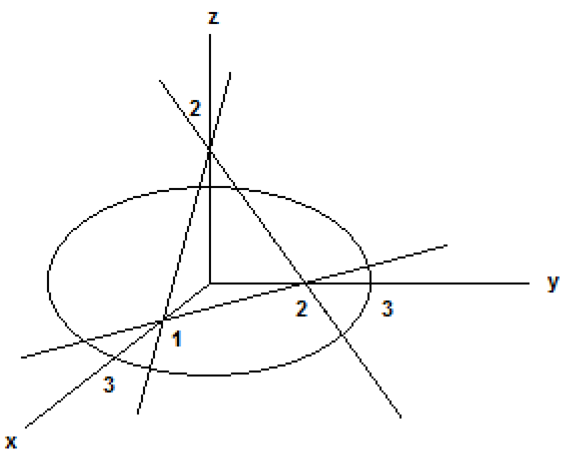
5) H) Trozo de plano tangente a $z = x + \ln(xy)$ en $(1, 1, z_0)$ con $x^2 + y^2 \leq 9.$

$$z_0 = 1 + \ln(1.1) \quad \Rightarrow \quad z_0 = 1$$

$$\nabla S = \left(1 + \frac{y}{xy}, \frac{x}{xy}, -1\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla S(1,1,1) = (1+1,1,-1) = \underline{(2,1,-1)}$$

$$\pi_{tg} : 2x + y - z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.1 + 1 - (-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2$$

$$\pi_{tg} : 2x + y - z = 2$$



$$g(\sigma, r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z = 2r\cos(\sigma) + r\sin(\sigma) - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

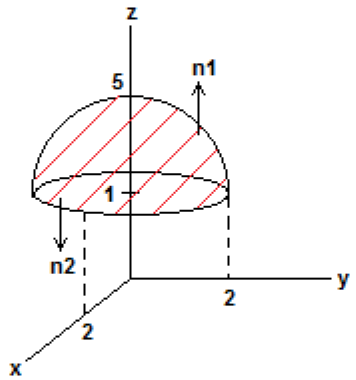
$$||\bar{n}|| = \frac{||\nabla S||}{|S'_z|} = \frac{||(2,1,-1)||}{|-1|} = \sqrt{6}$$

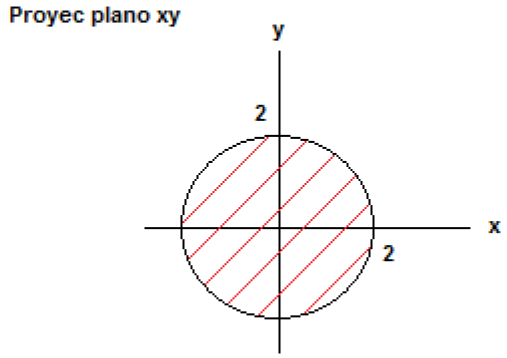
$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 ||\bar{n}||.|D_f|\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{6}r\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{6}\left(\frac{r^2}{2}\int_0^3\right) d\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{6}\frac{9}{2}\,d\sigma = \boxed{9\pi\sqrt{6}}$$

10) Calcule el flujo de f a través de S, indicando gráficamente la orientación del versor normal que ha elegido, o bien que se le solicite en cada caso.

10) A) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2+yz, xz, 2z^2-2xz)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $1 \leq z \leq 5-x^2-y^2$.

$$1 \leq 5 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4$$





$$\iint_S f.\bar{n}\,ds = \iint_{S_1} f.\bar{n_1}\,ds + \iint_{S_2} f.\bar{n_2}\,ds$$

Para S_1:

$$g(\sigma,r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z = 5 - r^2 \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \le r \le 2 \quad \wedge \quad 0 \le \sigma \le 2\pi$$

$$\bar{n_1} = \frac{\nabla S_1}{|S'_{1_z}|} = \frac{(2x,2y,1)}{|1|} = (2x,2y,1) = (2r\cos(\sigma), 2r\sin(\sigma), 1)$$

$$\iint\limits_{S_1} f.\bar{n_1}\,ds = \iint\limits_{S_1} (x^2+yz, xz, 2z^2-2xz)(2x,2y,1)\,ds = \iint\limits_{S_1} 2x^3 + 2xyz + 2xyz + 2z^2 - 2xz\,ds =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2 [2r^3\cos^3(\sigma) + 4r\cos(\sigma)r\sin(\sigma)(5-r^2) + 2(5-r^2)^2 - 2r\cos(\sigma)(5-r^2)]|D_f|\,dr\,d\sigma =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2 2r^4\cos^3(\sigma) + 4r^3\cos(\sigma)\sin(\sigma)(5-r^2) + 2r(25-10r^2+r^4) - 2r^2\cos(\sigma)(5-r^2)\,dr\,d\sigma =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2 2r^4\cos^3(\sigma) + 4\cos(\sigma)\sin(\sigma)(5r^3-r^5) + 50r - 20r^3 + 2r^5 - 2\cos(\sigma)(5r^2-r^4)\,dr\,d\sigma =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(2\cos^3(\sigma)\frac{r^5}{5} + 4\cos(\sigma)\sin(\sigma)\left(5\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right) + 25r^2 - 5r^4 + \frac{r^6}{3} - 2\cos(\sigma)\left(5\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right) \int\limits_0^2 \right) d\sigma =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{64}{5}\cos^3(\sigma) + \frac{112}{3}\cos(\sigma)\sin(\sigma) + 100 - 80 + \frac{64}{3} - \frac{208}{15}\cos(\sigma)\,d\sigma =$$

$$\left(\frac{64}{5} \left(\sin(\sigma) - \frac{\sin^3(\sigma)}{3} \right) + \frac{112}{3} \left(\frac{1}{2} \sin^2(\sigma) \right) + \frac{124}{3}\sigma - \frac{208}{15} \sin(\sigma) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{248\pi}{3} - 0 = \boxed{\frac{248\pi}{3}}$$

Para S_2:

$$g(\sigma, r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$\bar{n_2} = \frac{\nabla S_2}{|S'_{2_z}|} = \frac{(0,0,-1)}{|-1|} = (0,0,-1)$$

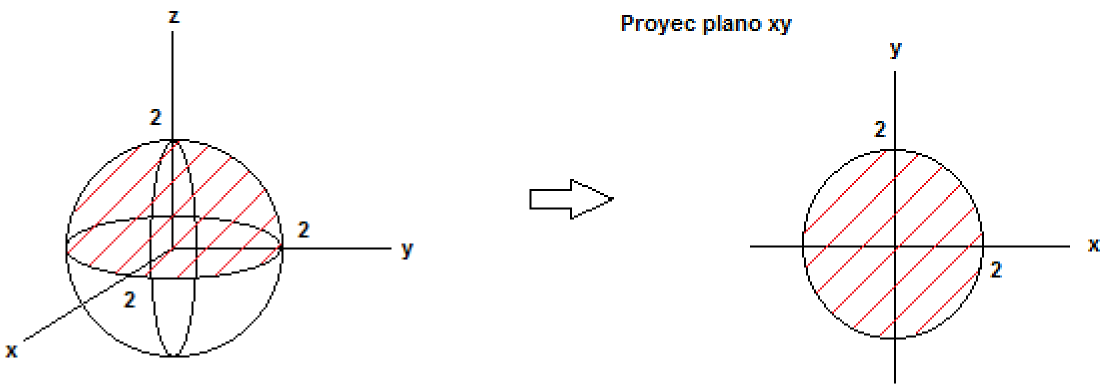
$$\iint_{S_2} f.\bar{n_2}\, ds = \iint_{S_2} (x^2+yz, xz, 2z^2-2xz)(0,0,-1)\, ds = \iint_{S_2} -2z^2+2xz\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2.1^2+2r\cos(\sigma).1)|D_f|\, dr\, d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 -2r+2r^2\cos(\sigma)\, dr\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(-r^2 + \frac{2r^3}{3}\cos(\sigma) \Big|_0^2 \right) d\sigma = \int_0^{2\pi} -4 + \frac{16}{3}\cos(\sigma)\, d\sigma = \left(-4\sigma + \frac{16}{3}\sin(\sigma) \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$-8\pi + 0 - (0) = \boxed{-8\pi}$$

$$\iint_S f.\bar{n}\, ds = \frac{248\pi}{3} - 8\pi = \boxed{\frac{224\pi}{3}}$$

10) B) $\bar{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$.



El flujo de S es el de toda la esfera, el flujo de S' es el de la parte superior sombreada de la esfera, con lo cual:

$$\iint_S f.\bar{n}\, ds = 2\iint_{S'} f.\bar{n}\, ds$$

$$g(\sigma,r)=\begin{cases} x=r\cos(\sigma)\\ y=r\sin(\sigma)\\ z=\sqrt{4-r^2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f|=\boxed{r} \quad \wedge \quad 0\le r\le 2 \quad \wedge \quad 0\le\sigma\le 2\pi$$

$$\bar{n}=\frac{\nabla S}{|S'_z|}=\frac{(2x,2y,2z)}{|2z|}=\frac{(2r\cos(\sigma),2r\sin(\sigma),2\sqrt{4-r^2})}{2\sqrt{4-r^2}}$$

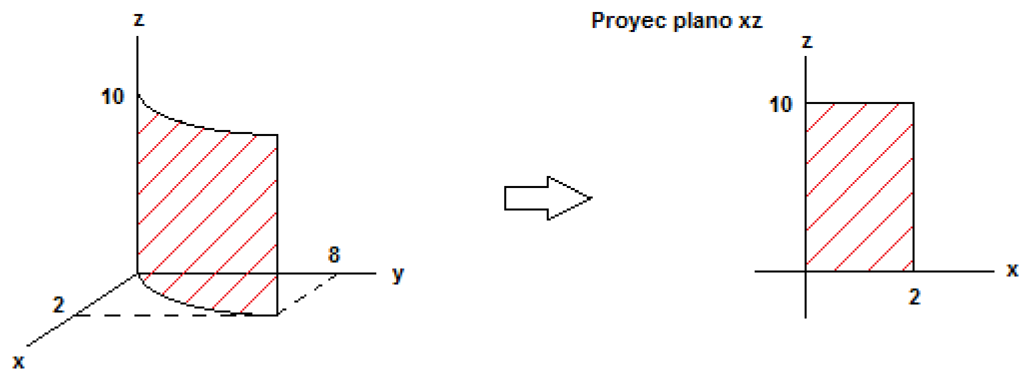
$$\iint\limits_{S'} f.\bar{n}\,ds=\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2\left(r\cos(\sigma),r\sin(\sigma),\sqrt{4-r^2}\right)\frac{(2r\cos(\sigma),2r\sin(\sigma),2\sqrt{4-r^2})}{2\sqrt{4-r^2}}|D_f|\,dr\,d\sigma=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2\frac{2r^3\cos^2(\sigma)+2r^3\sin^2(\sigma)+2r(4-r^2)}{2\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\sigma=\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2\frac{r^3+4r-r^3}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\sigma=4\int\limits_0^{2\pi}\int_0^2\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\sigma=$$

$$4\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sqrt{4-r^2}\int\limits_0^2\right)d\sigma=8\pi(0+2)=\boxed{16\pi}\quad\Rightarrow\quad\iint\limits_S f.\bar{n}\,ds=2.16\pi=\boxed{32\pi}$$

10) C) $\bar{f}(x,y,z)=(xy,zx,y-xz^2)$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y=x^3$ con $0\le z\le x+y$, $x+y\le 10$

$x+x^3-10\le 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x=2} \quad\Rightarrow\quad \underline{y=8}$



$g(x,z)=(x,x^3,z) \quad\wedge\quad T(x,z)=(0\le x\le 2, 0\le z\le x+x^3)$

$$\bar{n}=g'_x \text{ x } g'_z=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 1 & 3x^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(3x^2,-1,0)$$

$$\iint\limits_S f.\bar{n}\,ds=\int\limits_0^2\int_0^{x+x^3}(xx^3,xz,x^3-xz^2)(3x^2,-1,0)\,dz\,dx=\int\limits_0^2\int_0^{x+x^3}3x^6-xz\,dz\,dx=$$

$$\int_0^2 \left(3x^6 z - x\frac{z^2}{2} \int_0^{x+x^3}\right) dx = \int_0^2 3x^6(x^3+x) - \frac{x}{2}(x^3+x)^2\,dx = \int_0^2 3x^9 + 3x^7 - \frac{x}{2}(x^6+2x^4+x^2)\,dx =$$

$$\int_0^2 3x^9 + 3x^7 - \frac{x^7}{2} - x^5 - \frac{x^3}{2}\,dx = \left(\frac{3x^{10}}{10} + \frac{3x^8}{8} - \frac{x^8}{16} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{8}\right)\int_0^2 = \frac{1536}{5} + 96 - 16 - \frac{32}{3} - 2 = \boxed{\frac{5618}{15}}$$

10) D) $\bar{f}(x,y,z) = (y,x,y) \wedge (x,z,y)$ a través del trozo de plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 - yx^3$ en el punto $(1,2,-1)$ con $(x,y) \in [0,2]\text{x}[1,3]$.

$$\nabla S(x,y,z) = (2x - 3yx^2, -x^3, -1) = (3yx^2 - 2x, x^3, 1) \quad \Rightarrow \quad \nabla S(1,2,-1) = (4,1,1) = \bar{n}$$

$$\pi_{tg} : 4x + y + z + d = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_{tg}(1,2,-1) : 4.1 + 2 - 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -5$$

$$\pi_{tg} : 4x + y + z = 5$$

$$\bar{f}(x,y,z) = (y,x,y)\text{x}(x,z,y) \begin{vmatrix} y & x & y \\ x & z & y \end{vmatrix} = (xy - yz, yx - y^2, yz - x^2)$$

$$g(x,y) = (x, y, 5 - 4x - y) \quad \wedge \quad T(x,y) = (0 \le x \le 2, 1 \le y \le 3)$$

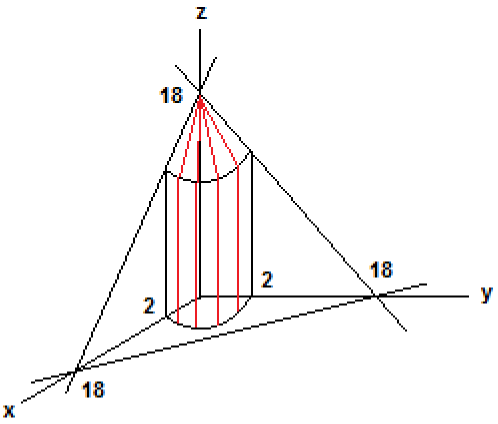
$$\iint_S f.\bar{n}\,ds = \int_0^2 \int_1^3 (xy - y(5-4x-y), yx - y^2, y(5-4x-y) - x^2)(4,1,1)\,dy\,dx =$$

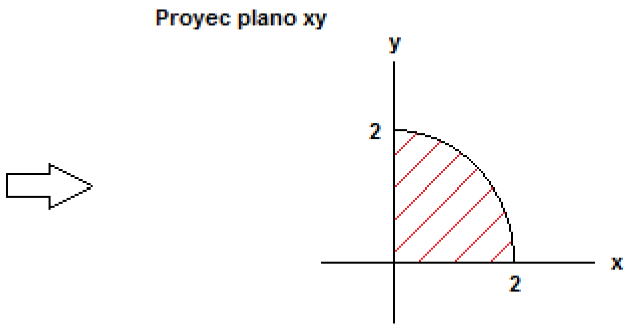
$$\int_0^2 \int_1^3 4xy - 20y + 16xy + 4y^2 + yx - y^2 + 5y - 4xy - y^2 - x^2\,dy\,dx = \int_0^2 \int_1^3 17xy - 15y + 2y^2 - x^2\,dy\,dx =$$

$$\int_0^2 \left(17x\frac{y^2}{2} - 15\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3} - x^2 y \int_1^3\right) dx = \int_0^2 \frac{153x}{2} - \frac{135}{2} + 18 - 3x^2 - \left(\frac{17x}{2} - \frac{15}{2} + \frac{2}{3} - x^2\right) dx =$$

$$\int_0^2 68x - 60 + 18 - \frac{2}{3} - 2x^2\,dx = \int_0^2 68x - \frac{128}{3} - 2x^2\,dx = \left(34x^2 - \frac{128x}{3} - \frac{2x^3}{3}\int_0^2\right) = 136 - \frac{256}{3} - \frac{16}{3} - (0) = \boxed{\frac{136}{3}}$$

10) E) $\bar{f}(x,y,z) = (xy, z, y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo limitado por $x^2 + y^2 \le 4$, $x + y + z \le 18$, en el 1° octante. Nota: en este caso, como en muchos otros, el cálculo de flujo puede realizarse en forma más sencilla aplicando el teorema de la divergencia (ver T.P. siguiente).





Por T. de la Divergencia (Gauss):

$$\text{flujo}_S f = \iiint_S div f \, ds \quad \Rightarrow \quad div f = P'_x + Q'_y + R'_z = y + 0 + 0 = y$$

$$g(\sigma, r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 18 - r\cos(\sigma) - r\sin(\sigma)$$

$$\iiint_S div f \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{18 - r\cos(\sigma) - r\sin(\sigma)} r\sin(\sigma)|D_f| \, dz \, dr \, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \sin(\sigma)(18 - r\cos(\sigma) - r\sin(\sigma)) \, dr \, d\sigma =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 18r^2 \sin(\sigma) - r^3 \sin(\sigma)\cos(\sigma) - r^3 \sin^2(\sigma) \, dr \, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(6r^3 \sin(\sigma) - \frac{r^4}{4} \sin(\sigma)\cos(\sigma) - \frac{r^4}{4} \sin^2(\sigma) \int_0^2 \right) d\sigma =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 48\sin(\sigma) - 4\sin(\sigma)\cos(\sigma) - 4\sin^2(\sigma) \, d\sigma = \left(-48\cos(\sigma) - 2\sin^2(\sigma) - 4\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sin(2\sigma)}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

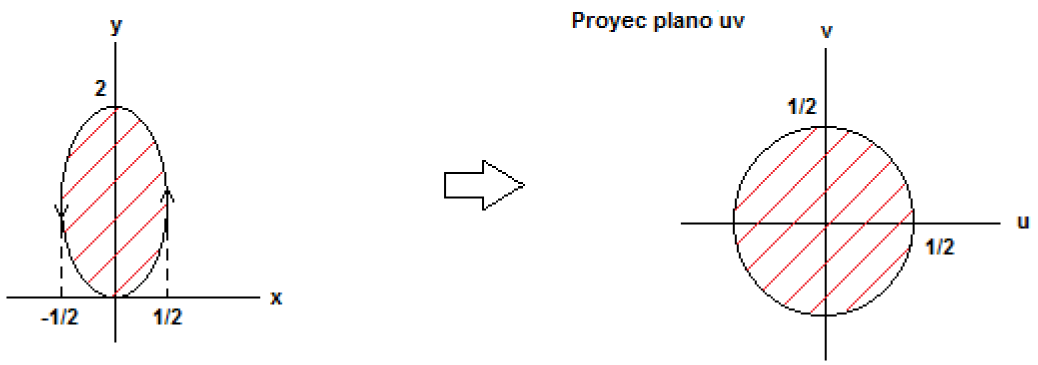
$$0 - 2 - \pi + 0 - (-48 - 0 - 0) = \boxed{46 - \pi}$$

Part XI

TP.11 - Teoremas integrales (Green, Gauss, Stokes)

2) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y) = (x^2+y^2, 3xy + \ln(y^2+1))$ a lo largo de la frontera de la región definida por $4x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ recorrida en sentido positivo.

$$4x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} \leq \frac{1}{4}$$



Por T. de Green:

$$\oint_C f\,ds = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dy\,dx$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2v+1 \end{cases} \Rightarrow \quad u^2+v^2 \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \begin{cases} u = r\cos(\sigma) \\ v = r\sin(\sigma) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = 2r\sin(\sigma)+1 \end{cases}$$

$$|D_f| = \begin{vmatrix} \cos(\sigma) & -r\sin(\sigma) \\ 2\sin(\sigma) & 2r\cos(\sigma) \end{vmatrix} = 2r\cos^2(\sigma) + 2r\sin^2(\sigma) = \boxed{2r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

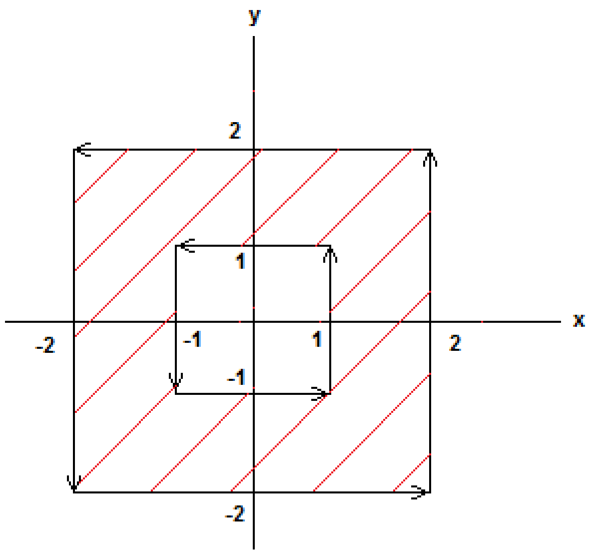
$$Q'_x - P'_y = 3y - 2y = y = 2r\sin(\sigma) + 1$$

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} |D_f|(Q'_x - P'_y)\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} 4r^2\sin(\sigma) + 2r\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(4\sin(\sigma)\frac{r^3}{3} + r^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) d\sigma =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\sigma)}{3} + \frac{1}{2}\,d\sigma = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(\sigma)}{3} + \frac{\sigma}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \pi - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

3) Verifique el teorema de Green con $\bar{f}(x,y) = (x^2y, y^2)$, en la región plana $D = D_1 - D_2$ donde $D_1 = [-2,2]\text{x}[-2,2]$ y $D_2 = [-1,1]\text{x}[-1,1]$.

$D_1 : -2 \leq x \leq 2 \quad \wedge \quad -2 \leq y \leq 2 \qquad \wedge \qquad D_2 : -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad -1 \leq y \leq 1$



Por T. de Green:

$$\oint_C f\, ds = \iint_{D_1} (Q'_x - P'_y)\, dy\, dx - \iint_{D_2} (Q'_x - P'_y)\, dy\, dx \quad \wedge \quad Q'_x - P'_y = 0 - x^2 = -x^2$$

Para D_1:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} -x^2\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} -4x^2\, dx = \left(-\frac{4x^3}{3} \int_{-2}^{2} \right) = \boxed{-\frac{64}{3}}$$

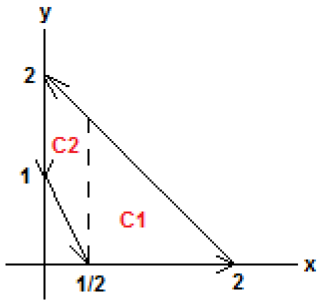
Para D_2:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} -x^2\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} -2x^2\, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} \int_{-1}^{1} \right) = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

$$\oint_C f\, ds = -\frac{64}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \boxed{-20}$$

4) Calcule la circulación en sentido positivo de $\bar{f} \in C^1$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x + y \leq 2 \quad , \quad 2x + y \geq 2 \quad , \quad 1°$ cuadrante, siendo:

4) A) $\bar{f}(x,y) = (2y - g(x), 5x - h(y))$



$$\oint_C f\,ds = \iint_{C_1} (Q'_x - P'_y)\,dy\,dx - \iint_{C_2} (Q'_x - P'_y)\,dy\,dx \quad \wedge \quad Q'_x - P'_y = 5 - 2 = 3$$

Para C_1:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_0^{2-x} 3\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} 6 - 3x\,dx = \left(6x - \frac{3x^2}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{2}\right) = 6 - \left(3 - \frac{3}{8}\right) = \boxed{\frac{21}{8}}$$

Para C_2:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2-2x}^{2-x} 3\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 3(2 - x - 2 + 2x)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}}\right) = \boxed{\frac{3}{8}}$$

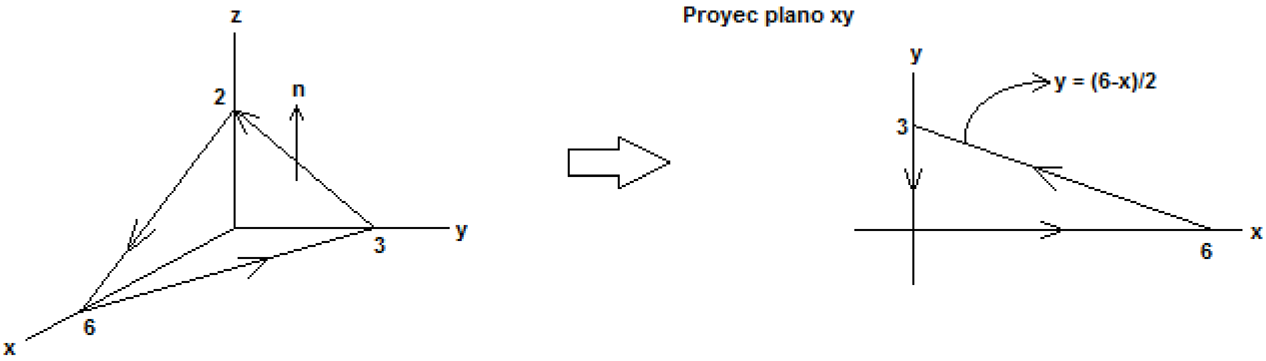
$$\oint_C f\,ds = \frac{21}{8} + \frac{3}{8} = \boxed{3}$$

4) B) $\bar{f}(x,y) = (2y + g(x-y), 2x - g(x-y))$

$$Q'_x - P'_y = 2 - g'(x-y) - 2 - g'(x-y)(-1) \quad \Rightarrow \quad Q'_x - P'_y = 0$$

$$\oint_C f\,ds = \iint_D 0\,dy\,dx = \boxed{0}$$

18) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x - y, x + y, z - x - y)$ a lo largo de la curva intersección del plano $x + 2y + 3z = 6$ con los planos coordenados aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.



$$\oint_C f\,ds = \iint_S rot f.\bar{n}\,ds \quad \Rightarrow \quad rot f = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (-1-0, 0-(-1), 1-(-1)) = (-1,1,2)$$

$$0 \le x \le 6 \quad \wedge \quad 0 \le y \le \frac{6-x}{2}$$

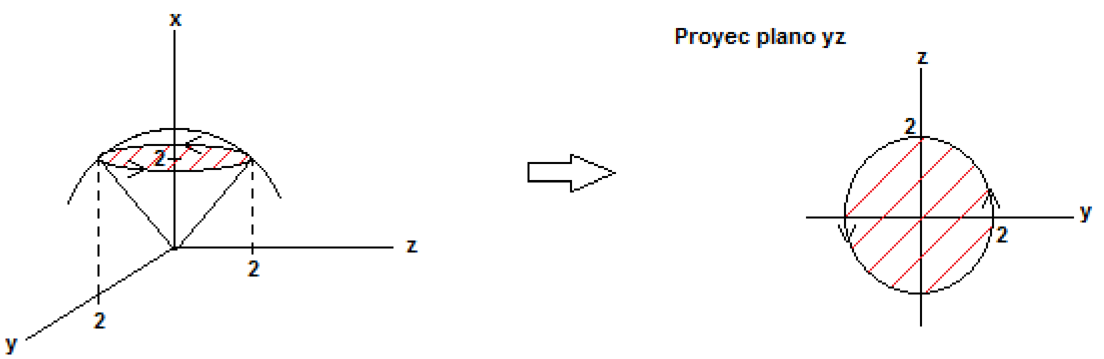
$$\bar{n} = \frac{\nabla S}{|S'_z|} = \frac{(1,2,3)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

$$\oint_C f\,ds = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} (-1,1,2)\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right) dy\,dx = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2\,dy\,dx = \int_0^6 \frac{7}{3}\left(\frac{6-x}{2}\right) dx =$$

$$\int_0^6 7 - \frac{7x}{6}\,dx = \left(7x - \frac{7x^2}{12}\right)\Big|_0^6 = 42 - 21 = \boxed{21}$$

19) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (xy, y-x, yz^2)$ a lo largo de la curva intersección de $x^2+y^2+z^2 = 8$ con $x = \sqrt{y^2+z^2}$ aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

$$2y^2 + 2z^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \underline{y^2+z^2 = 4} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 2}$$



$$\oint_C f\,ds = \iint_S rot f.\bar{n}\,ds \quad \Rightarrow \quad rot f = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (z^2 - 0, 0-0, -1-x) = (z^2, 0, -1-x)$$

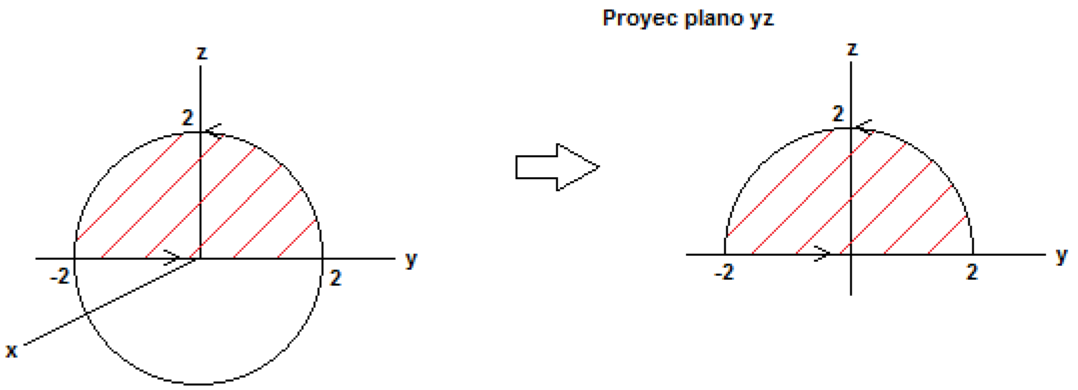
$$\begin{cases} y = r\cos(\sigma) \\ z = r\sin(\sigma) \\ x = r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \Rightarrow \quad 0 \le r \le 2 \quad \wedge \quad 0 \le \sigma \le 2\pi$$

$$\bar{n} = \frac{\nabla S}{|S'_x|} = \frac{(1,0,0)}{1} = (1,0,0)$$

$$\oint_C f\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2\sin^2(\sigma), 0, -1-r)(1,0,0)|D_f|\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\sin^2(\sigma)\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi} \sin^2(\sigma)\left(\frac{r^4}{4}\int_0^2\right)\,d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi} 4\sin^2(\sigma)\,d\sigma = 4\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sin(2\sigma)}{4}\int_0^{2\pi}\right) = 4(\pi - 0) = \boxed{4\pi}$$

20) Siendo $\bar{f} \in C^1$, $rot(\bar{f}(x,y,z)) = (3,1,2y)$, calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo del arco de curva de ecuación $\bar{X} = (0, 2\cos(u), 2\sin(u))$ con $u \in [0,\pi]$, sabiendo que la circulación de $\bar{f}$ por el segmento desde $(0,-2,0)$ hasta $(0,2,0)$ es igual a 16/3.



$$\begin{cases} y = r\cos(\sigma) \\ z = r\sin(\sigma) \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \Rightarrow \quad 0 \le r \le 2 \quad \wedge \quad 0 \le \sigma \le \pi$$

$$\bar{n} = \frac{\nabla S}{|S'_x|} = \frac{(1,0,0)}{1} = (1,0,0)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^2 (3,1,2r\cos(\sigma))(1,0,0)|D_f|\,dr\,d\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^2 3r\,dr\,d\sigma = \int_0^{\pi} 3\left(\frac{r^2}{2}\int_0^2\right)\,d\sigma = \int_0^{\pi} 6\,d\sigma = \boxed{6\pi}$$

$\oint_C f\,ds = \boxed{6\pi - \frac{16}{3}}$ *Se restan los* $\frac{16}{3}$ *de la circulación de* $(0,-2,0)$ *a* $(0,2,0)$*, ya que pide la circulación de la curva que va de* $(0,2,0)$ *a* $(0,-2,0)$.

21) Verifique el teorema de la divergencia con el campo $\bar{f}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ y la superficie frontera del paralepípedo $[0,1]\text{x}[0,2]\text{x}[0,3]$.

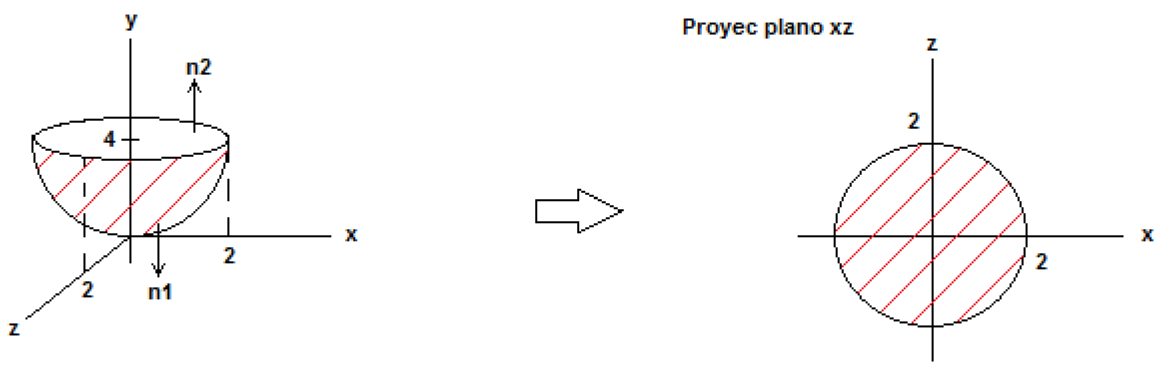
$$\text{flujo}_S f = \iiint_S div f\, ds \quad \Rightarrow \quad div f = P'_x + Q'_y + R'_z = y + z + x$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 y+z+x\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^2 \left(yz + \frac{z^2}{2} + xz \int_0^3 \right) dy\, dx = \int_0^1 \int_0^2 3y+\frac{9}{2}+3x\, dy\, dx = \int_0^1 \left(\frac{3y^2}{2} + \frac{9y}{2} + 3xy \int_0^2 \right) dx =$$

$$\int_0^1 6 + 9 + 6x\, dx = \left(15x + 3x^2 \int_0^1 \right) = 15 + 3 = \boxed{18}$$

23) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x^2z^2, 1+xyz^2, 1-xz^3)$ a través del trozo S de paraboloide de ecuación $y = x^2+z^2$ con $y \leq 4$ aplicando convenientemente el teorema de la divergencia. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a S.

$x^2 + z^2 \leq 4$



$$\text{flujo}_{S_1} f = \iiint_S div f\, ds - \iint_{S_2} f.\bar{n}_2\, ds \quad \Rightarrow \quad div f = P'_x + Q'_y + R'_z = 2xz^2 + xz^2 - 3xz^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_S div f\, ds = \boxed{0}$$

Para S_2(la tapa):

$$g(\sigma, r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ z = r\sin(\sigma) \\ y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi$$

$$\bar{n_2} = \frac{\nabla S_2}{|S'_{2y}|} = \frac{(0,1,0)}{|1|} = (0,1,0)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^4\cos^2(\sigma)\sin^2(\sigma), 1+4r^3\cos(\sigma)\sin^2(\sigma), 1-r^4\cos(\sigma)\sin^3(\sigma)).(0,1,0).|D_f|\,dr\,d\sigma =$$

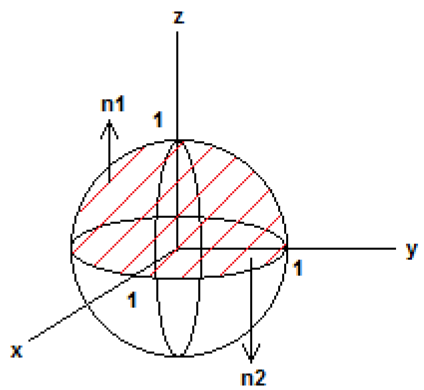
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 r+4r^4\cos(\sigma)\sin^2(\sigma)\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{4r^5}{5}\cos(\sigma)\sin^2(\sigma)\int_0^2\right)d\sigma = \int_0^{2\pi} 2+\frac{128}{5}\cos(\sigma)\sin^2(\sigma)\,d\sigma =$$

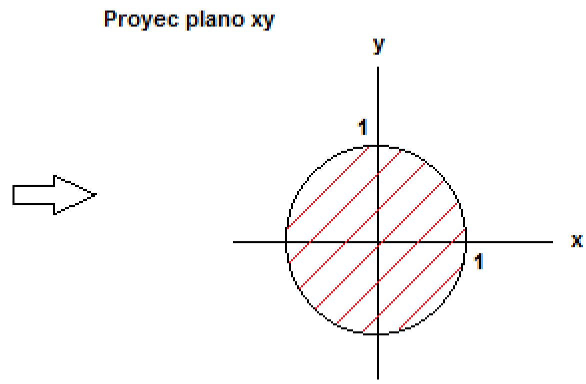
$$\left(2\sigma+\frac{128}{5}\left(\frac{\sin^3(\sigma)}{3}\right)\int_0^{2\pi}\right) = 4\pi+0-(0) = \boxed{4\pi}$$

$\text{flujo}_{S_1} f = 0 - 4\pi = \boxed{-4\pi}$ *Con* $\bar{n_1}.(0,1,0) < 0$ *ya que lo orientamos hacia abajo (ver gráfico).*

25) Calcule el flujo de $f \in C^1$ a través de la superficie de ecuación $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sabiendo que $\bar{f}(x,y,0) = (x,y,x^2)$, siendo $div(\bar{f}(x,y,z)) = 2(1+z)$.

$x^2+y^2+z^2 = 1$





$$\text{flujo}_{S_1} f = \iiint_S div f\,ds - \iint_{S_2} f.\bar{n_2}\,ds \quad \wedge \quad div f = 2+2z$$

Para S :

$$g(\sigma,r) = \begin{cases} x = r\cos(\sigma) \\ y = r\sin(\sigma) \\ z \end{cases} \Rightarrow \quad |D_f| = \boxed{r} \quad \wedge \quad 0 \le r \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le \sigma \le 2\pi \quad \wedge \quad 0 \le z \le \sqrt{1-r^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} (2+2z)|D_f|\,dz\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2rz+rz^2 \Big|_0^{\sqrt{1-r^2}}\right) dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{1-r^2}+r-r^3\,dr\,d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(2\left(-\frac{\sqrt{(1-r^2)^3}}{3}\right)+\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right) d\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right) d\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{11}{12}\,d\sigma = \boxed{\frac{11\pi}{6}}$$

Para S_2(la tapa):

$$g(\sigma,r)=\begin{cases} x=r\cos(\sigma)\\ y=r\sin(\sigma)\\ z=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad |D_f|=\boxed{r} \quad\wedge\quad 0\le r\le 1 \quad\wedge\quad 0\le\sigma\le 2\pi$$

$$\bar{n_2}=\frac{\nabla S_2}{|S'_{2_z}|}=\frac{(0,0,-1)}{|-1|}=(0,0,-1)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos(\sigma),r\sin(\sigma),r^2\cos^2(\sigma))(0,0,-1)|D_f|\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^3\cos^2(\sigma)\,dr\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\cos^2(\sigma)\left(-\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right) d\sigma =$$

$$\int_0^{2\pi} -\frac{1}{4}\cos^2(\sigma)\,d\sigma = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{\sin(2\sigma)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{1}{4}(\pi) = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{flujo}_{S_1} f = \frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{25}{12}\pi}$$

Part XII

TP.12 - Ecuaciones diferenciales - 2° Parte

1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de 1° orden.

1) A)$y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$ con $y(1)=1$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y}{\lambda x}+\frac{\lambda^2y^2}{\lambda^2x^2}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$$

$$y' = f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{x} \\ \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} = \underline{f(1,v) = v + v^2}$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \Rightarrow \quad \underline{y' = v'x + v}$$

$$y' = f(1,v) \quad \Rightarrow \quad v'x + v = v + v^2 \quad \Rightarrow \quad v'x = v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}x = v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{v^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad -\frac{x}{\ln|x| + C} = y$$

Reemplazando $y(1) = 1 : -\dfrac{1}{\ln|1| + C} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{C} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{C = -1}$

S.P: $-\dfrac{x}{y} = \ln|x| - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y\ln|x| - y + x = 0}$

1) B)$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

$$(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + y^2}{2xy} = y'$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{\lambda^2(2xy)} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

$$y' = f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{x} \\ \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} = \underline{f(1,v) = \frac{1 + v^2}{2v}}$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \Rightarrow \quad \underline{y' = v'x + v}$$

$$y' = f(1,v) \quad \Rightarrow \quad v'x + v = \frac{1 + v^2}{2v} \quad \Rightarrow \quad v'x = \frac{1 + v^2 - 2v^2}{2v} \quad \Rightarrow \quad v'x = \frac{1 - v^2}{2v} \quad \Rightarrow \quad \frac{2v}{1 - v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2v}{1 - v^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

Resolviendo la integral $\displaystyle\int \frac{2v}{1 - v^2}\,dv$ por sustitución:

$$u = 1 - v^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2v\,dv \quad \Rightarrow \quad -du = 2v\,dv \quad \Rightarrow \quad \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| = -\ln|1 - v^2|$$

$$-\ln|1 - v^2| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad e^{-\ln|1 - v^2|} = e^{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow \quad e^{-\ln|1 - v^2|} = e^{\ln|x|}e^{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - v^2} = xD$$

$$1 = xD - \frac{y^2 D}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2 D}{x} = xD - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^2 = x^2 - \frac{x}{D}}$$

1) C) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x\cos^2(y/x)}{x}$ con $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \cos^2\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

$$y' = f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y) \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{x} \\ \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} = \underline{f(1, v) = v + \cos^2(v)}$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \Rightarrow \quad \underline{y' = v'x + v}$$

$$y' = f(1, v) \quad \Rightarrow \quad v'x + v = v + \cos^2(\sigma) \quad \Rightarrow \quad v'x = \cos^(v) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2(v)}\, dv = \frac{1}{x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2(v)}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\tan(v) = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$$

Reemplazando $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \ln|1| + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

S.P.: $\boxed{\tan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + 1}$

1) D) $y' = y/(x - y)$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda(x - y)} = \frac{y}{x - y} \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

$$y' = f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y) \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{x} \\ \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} = \underline{f(1, v) = \frac{v}{1 - v}}$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \Rightarrow \quad \underline{y' = v'x + v}$$

$$y' = f(1, v) \quad \Rightarrow \quad v'x + v = \frac{v}{1 - v} \quad \Rightarrow \quad v'x = \frac{v - v + v^2}{1 - v} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - v}{v^2}\, dv = \frac{1}{x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int v^{-2} - \frac{1}{v}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$-\frac{1}{v}-\ln|v|=\ln|x|+C \quad\Rightarrow\quad -\frac{x}{y}-\ln\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C \quad\Rightarrow\quad \ln|x|+C+\frac{x}{y}+\ln\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\ln\left(x\frac{y}{x}\right)+C+\frac{x}{y}=0 \quad\Rightarrow\quad \ln(y)+C+\frac{x}{y}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y\ln(y)+Cy+x=0}$$

4) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo.

Método de resolución, por si no lo conocen, explicado en el ***T.P 8 - Ej. 14) A)****.*

4) A) $2xy\,dx+(x^2+\cos(y))\,dy=0$

$$\begin{cases} P=2xy \\ Q=x^2+\cos(y) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad P'_y=2x=Q'_x \quad\Rightarrow\quad \text{Jacobiano simétrico}$$

$$\nabla\varphi=f \quad\Rightarrow\quad (\varphi'_x,\varphi'_y)=(P,Q)$$

$$\varphi=\int P\,dx=\int 2xy\,dx=\underline{x^2y+A(y)}$$

$$x^2+\cos(y)=\varphi'_y=x^2+A'(y) \quad\Rightarrow\quad A'(y)=\cos(y) \quad\Rightarrow\quad A(y)=\int\cos(y)\,dy \quad\Rightarrow\quad \underline{A(y)=\sin(y)+C}$$

$$\boxed{\varphi(x,y):x^2y+\sin(y)+C=0}$$

4) B) $y'=\dfrac{xy^2-1}{1-x^2y}$ con $y(-1)=1$

$$(1-x^2y)\,dy=(xy^2-1)\,dx \quad\Rightarrow\quad (1-x^2y)\,dy-(xy^2-1)\,dx=0 \quad\Rightarrow\quad (1-x^2y)\,dy+(1-xy^2)\,dx=0$$

$$\begin{cases} P=1-xy^2 \\ Q=1-x^2y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad P'_y=-2xy=Q'_x \quad\Rightarrow\quad \text{Jacobiano simétrico}$$

$$\nabla\varphi=f \quad\Rightarrow\quad (\varphi'_x,\varphi'_y)=(P,Q)$$

$$\varphi=\int P\,dx=\int 1-xy^2\,dx=\underline{x-\frac{x^2y^2}{2}+A(y)}$$

$$1-x^2y=\varphi'_y=-xy+A'(y) \quad\Rightarrow\quad A'(y)=1 \quad\Rightarrow\quad A(y)=\int 1\,dy \quad\Rightarrow\quad \underline{A(y)=y+C}$$

$$\varphi(x,y):x-\frac{x^2y^2}{2}+y+C=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(-1,1):-1-\frac{(-1)^21^2}{2}+1+C=0 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{2}$$

$$\varphi(x,y):x-\frac{x^2y^2}{2}+y+\frac{1}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\varphi(x,y):2x-x^2y^2+2y+1=0}$$

9) Halle la S.G. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

9) A) $y'' + 8y' + 25y = 0$

$$x^2 + 8x + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4.1.25}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

Como hay parte de la raíz que es real (-4) y otra parte imaginaria $(\pm 3i)$:

$$\boxed{y = e^{-4x}(C\sin(3x) + K\cos(3x))}$$

9) B) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 2$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ x_1 = 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = 2} \quad \wedge \quad \underline{x_3 = 2}$$

Como hay raíz simple y doble:

$$\boxed{y = A.e^{x} + B.e^{2x} + C.x.e^{2x} - 2^{-1}}$$