2do PARCIAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

1)

a) Defina un endomorfismo de R^3 que cumpla simultáneamente que:
$S = \{\forall(x, y, z) \in R^3 / x = y\}$ es un autoespacio, $\forall X \in S^{\perp} / \ T(X) = 2X$ y la matriz asociada posee traza igual a 4.

Podemos tomar una base cualquiera de S, por ejemplo $B_S = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$, es una base de autovectores asociados al autovalor λ

$$T(1,1,0) = \lambda\ (1,1,0) \wedge T(0,0,1) = \lambda\ (0,0,1)$$

Para una base cualquiera del complemento ortogonal de S, por ejemplo $B_{S^{\perp}} = \{(1, -1,0)\}$, es una base de autovectores asociado al autovalor 2

$$T(1, -1,0) = 2\ (1, -1,0)$$

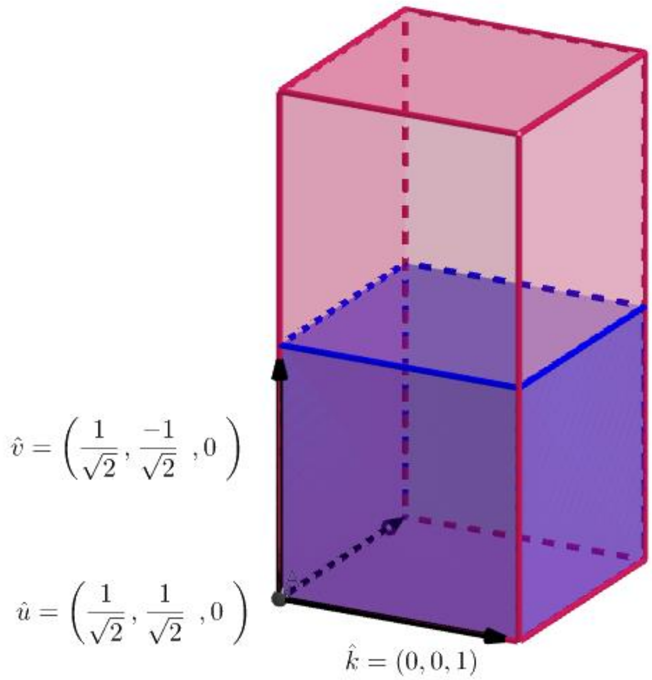
La traza de la matriz asociada a la TL es igual a la traza de la matriz de autovalores, por lo tanto:

$$traza(A) = 2\,\lambda + 2 = 4 \ \Rightarrow \ \lambda = 1$$

$$\begin{cases} \mathbf{T(1,1,0) = (1,1,0)} \\ \mathbf{T(0,0,1) = (0,0,1)} \\ \mathbf{T(1,-1,0) = 2\ (1,-1,0)} \end{cases}$$

b) Dibuje un cubo unitario con aristas en la dirección de los autoversores y muestre su imagen, explique el efecto de la transformación.

A aplicarle la TL al cubo solo se dilata al doble en la dirección del autovector $(1, -1,0)$, en las otras direcciones la imagen es el mismo vector



c) Justifique porque la transformación es inversible e indique los autovalores de la inversa.

Es inversible porque los autovalores son distintos de cero y por lo tanto el rango de la matriz es 3 y los autovalores de la inversa son: 1 doble y $\frac{1}{2}$ simple

---

2) Dadas las siguientes transformaciones lineales:

$$F: R^2 \rightarrow R^3 / F(x,y) = (x\,, y\,, x+y\,)$$

$$G: R^3 \rightarrow R^2 / F(x,y,z) = (-y+z,\ \ x-z)$$

a) Obtenga H=GoF , calcule sus autovalores y autovectores.

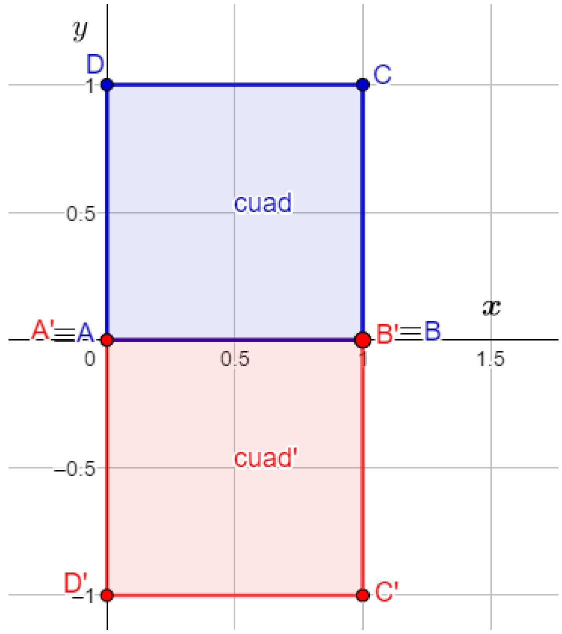
$$M(H) = M(G)M(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}: \boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^2} \ / \ \ \boldsymbol{H(x,y) = (x,-y)}$$

La matriz asociada a la TL resulto diagonal por lo tanto los autovalores son; 1 y -1 y la base de autovectores puede ser la base canónica de R^2

b) Interprete geométricamente la función H, aplíquela a un cuadrado unitario.

Se trata de una simetría con respecto al eje x



3) Sea la ecuación en R^2: $x^2 + 2\,k\,x\,y + \mathrm{k}\,\mathrm{y}^2 = k + 1$

a) Analice la ecuación e indique el lugar geométrico que representa para los distintos valores de la constante k.

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k \end{pmatrix}(x \quad y) = k + 1$$

$$\lambda_1\lambda_2 = |M| = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & k \end{vmatrix} = k\,(1-k)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = tr(M) = k + 1$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k + 1$$

1. $k\,(1-k) < 0$ tipo hipérbola $(k < 0 \;\vee k > 1)$
   a. $k < 0 \wedge k \neq -1$ hipérbola
   b. $k = -1$ dos rectas concurrentes en el origen (asíntotas de todas las hipérbolas)
   c. $k > 1$ hipérbola
2. $k\,(1-k) = 0$ tipo parábola $(k = 0 \;\vee k = 1)$
   a. $k = 0$ dos rectas paralelas $(x = -1\,; x = 1)$
   b. $k = 1$ dos rectas paralelas
3. $k\,(1-k) > 0$ tipo elipse $(0 < k < 1 \Rightarrow 1 < k + 1 < 2\,) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = k + 1 > 0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \lambda_1 > 0 \;\wedge \lambda_2 > 0 \;\Rightarrow$ elipse

Resumiendo:

$(\boldsymbol{k} < \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{k} \neq -\mathbf{1}) \;\vee\; \boldsymbol{k} > \mathbf{1}$ **hipérbola**

$\boldsymbol{k=-1}$ **dos rectas concurrentes en el origen (asíntotas de todas las hipérbolas)**

$\boldsymbol{k=0}$ **dos rectas paralelas (**$\boldsymbol{x=-1}$ **;** $\boldsymbol{x=1}$**)**

$\boldsymbol{0<k<1}$ **elipse**

$\boldsymbol{k=1}$ **dos rectas paralelas**

b) Para *k=1* obtenga las ecuaciones explícitas y grafique.

$$(x+y)^2=2 \Rightarrow \quad y=-x+\sqrt{2} \;\; ; \;\; y=-x-\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{y=-x+\sqrt{2} \;\; ; \;\; y=-x-\sqrt{2}}$$

```
(%i1) K: matrix([1,k],[k,k]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & k \end{bmatrix}$

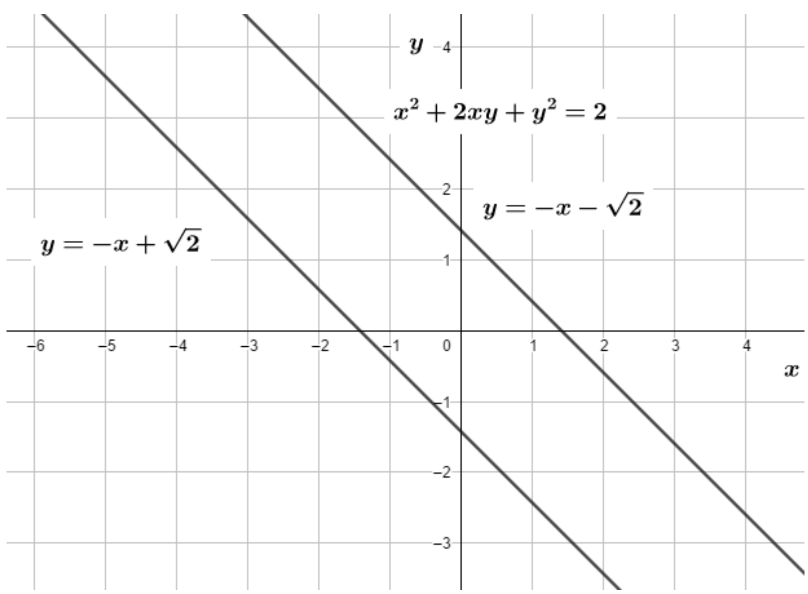
```
(%i8) k:-1;
(%o8) -1
```

```
(%i3) K: matrix([1,k],[k,k]);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i4) eigenvectors(K);
(%o4) [[[0,2],[1,1]],[[[1,-1]],[[1,1]]]]
```

$$D_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



c) Obtenga las ecuaciones de los lugares geométricos que contienen al origen y grafique.

$k=-1: \quad x^2-2\,x\,y-\,y^2=0$

```
(%i5) k:-1;
(%o5) -1
```

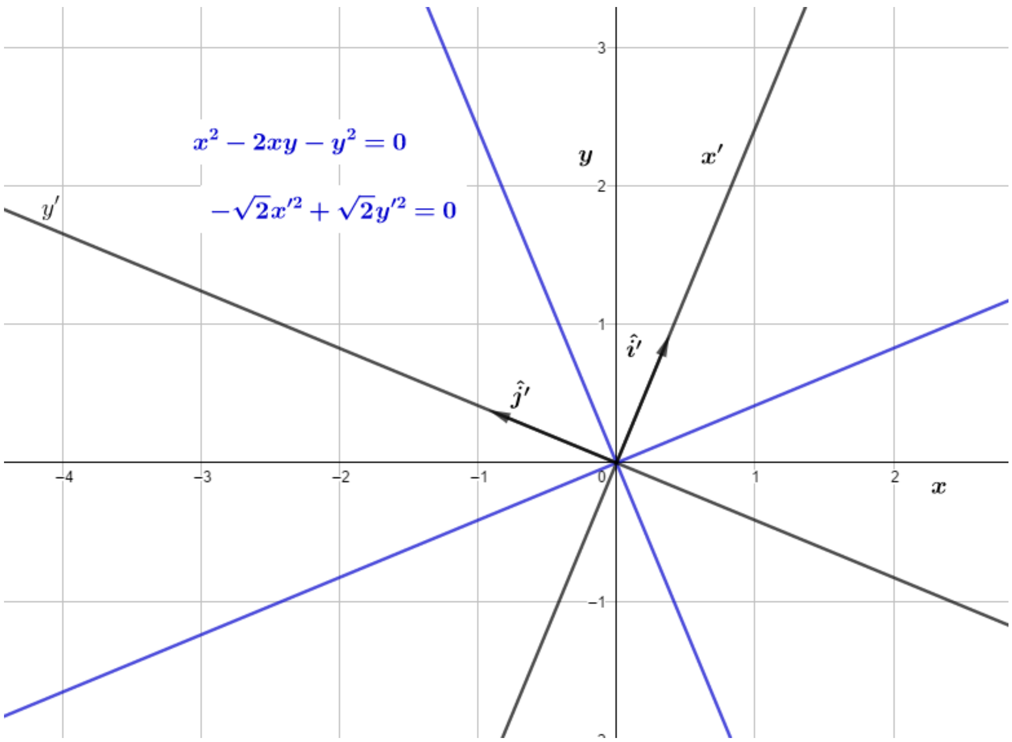
```
(%i6) K: matrix([1,k],[k,k]);
```

$$(\%o6)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) eigenvectors(K);
```

$$(\%o7)\ [[[-\sqrt{2},\sqrt{2}],[1,1]],[[[1,\sqrt{2}+1]],[[1,1-\sqrt{2}]]]]$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}+1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



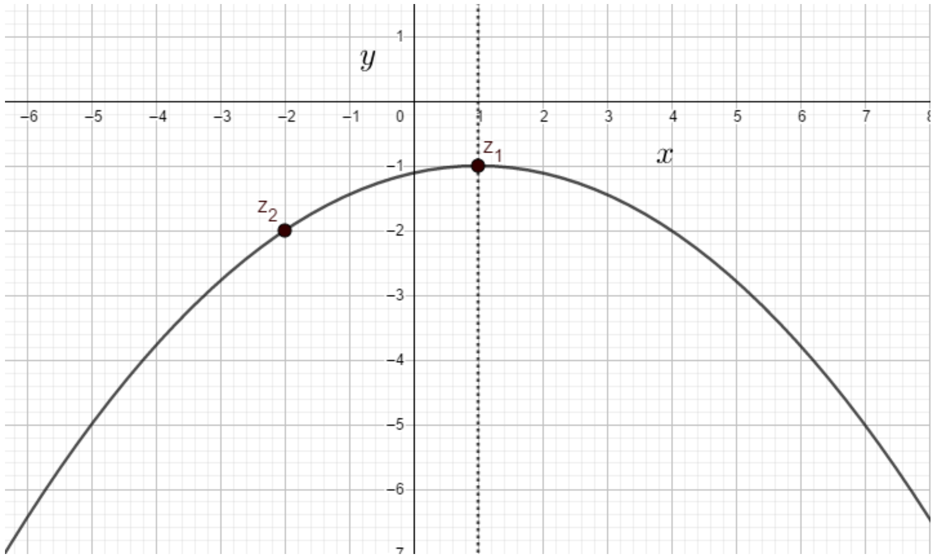
4) Dados los números complejos: $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = -2 - 2i$. Halle la ecuación y grafique en el plano complejo:

a) La parábola con vértice en z_1 , eje focal paralelo al eje imaginario y que contenga a z_2.

vértice en z_1 , eje focal paralelo al eje imaginario: $(x-1)^2 = a(y+1)$

que contenga a z_2. $(-2-1)^2 = a(-2+1) \Rightarrow \; a = -9$

$$\boldsymbol{(x-1)^2 = -9(y+1)}$$



b) La circunferencia con centro en z_3 y que contiene a z_1, siendo

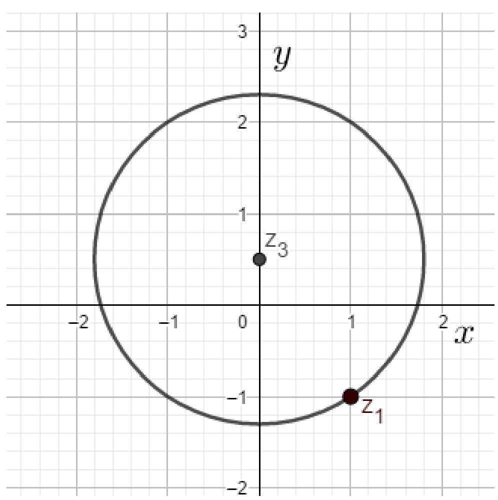
$$z_3 = \frac{(z_1)^4}{(z_2)^2}$$

$$z_3 = \frac{(z_1)^4}{(z_2)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^4}{\left(2\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^2} = \frac{4\, e^{i\,7\pi}}{8\, e^{i\frac{5\pi}{2}}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{9\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\, i$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = R^2$$

$$R^2 = \lfloor z_1 - z_3 \rfloor^2 = \left|(1,-1) - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right|^2 = \left|\left(1, -\frac{3}{2}\right)\right|^2 = \frac{13}{4}$$

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}}$$



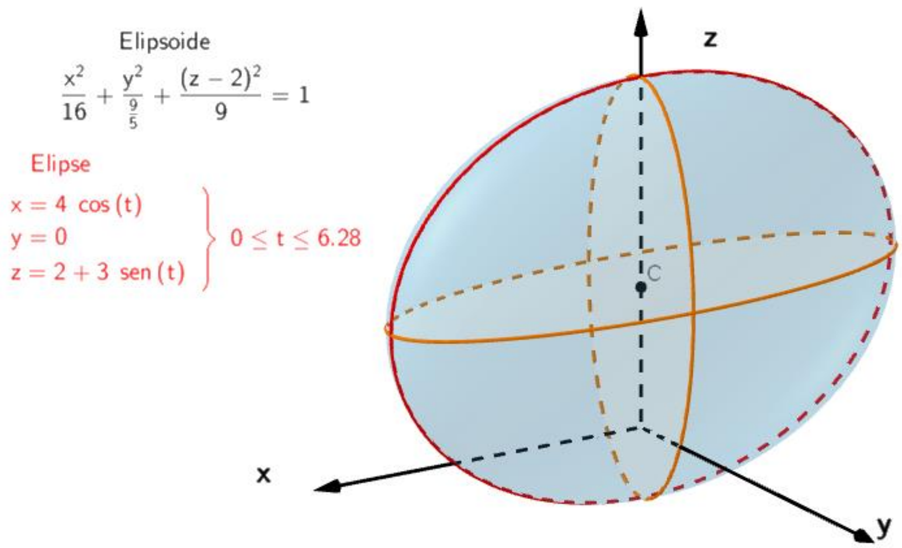
5) Dada la ecuación $Ax^2 + By^2 + z^2 - 4z = B$ en R^3.

a) Halle los valores de las constantes A y B de manera que la intersección con el plano y=0 sea la curva $(x, y, z) = (4\cos(t), 0, 2 + 3\mathrm{sen}(t))$ identifique la superficie y grafique.

b) Analice e identifique el lugar geométrico para $A < 0 \wedge B < 0$. Grafique para $A = -1 \wedge B = -4$.

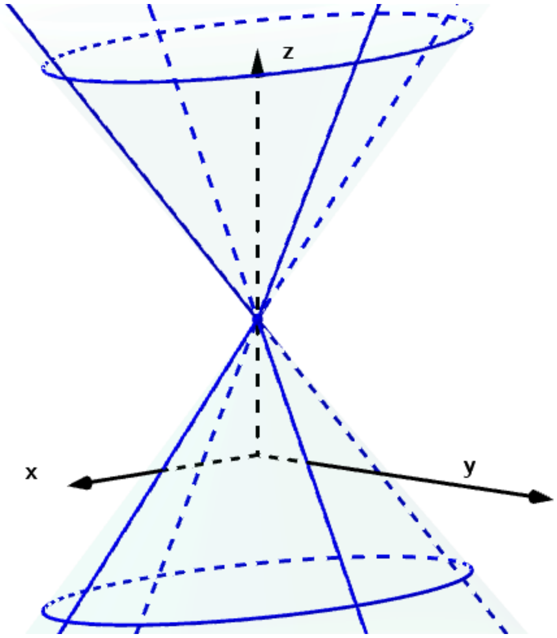
a)

$$A = \frac{9}{16} \wedge B = 5 \ ; \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{9}{5}} + \frac{(z-2)^2}{9} = 9; \quad \text{Elipsoide con centro en } C(0,0,2)$$



3)b)

$$x^2 + 4y^2 - (z-2)^2 = 0 \ \text{Cono elíptico de eje z y vértice } (0,0,2)$$


z
x
y