ENSI de Caen
$2^{\text{ème}}$ année Informatique option Image

TP n° 2
Analyse spectrale des images
Transformée de Fourier et filtrage linéaire

But du TP

- Utilisation et extension des outils des SLIT en n-dimensionnel.
- Une application au recalage.
- Analyse des filtres linéaires par la TF.
- Convolution, corrélation et transformée de Fourier.

1 Propriétés usuelles de la transformée de Fourier

En s'inspirant de l'approche monodimensionnelle pour les signaux temporels, on peut généraliser les outils au cas 2D en les étendant aux deux variables d'espace continues x et y. En particulier, la notion de spectre s'étend très facilement en faisant intervenir les fréquences spatiales u et v. Une image quelconque périodique ou non d'énergie finie (on parle de sommabilité dans une certaine norme dans $\mathbb{R}^2$), peut être écrite sous la forme de la somme de nombre infini de fonctions harmoniques complexes ayant toutes les fréquences spatiales possibles dans les deux directions.

Dans la suite, toutes les fonctions sont supposées satisfaire les conditions d'intégrabilité pour l'existence de la TF. Ainsi, on peut résumer les propriétés usuelles de la TF dans le Tableau 1. Par ailleurs, les propriétés sont énoncées dans le cas continu alors que les images que l'on manipule sont échantillonées à nombre fini d'échantillons. Toutefois, ces propriétés restent essentiellement les mêmes (à quelques subtilités près). C'est ce que l'on se propose de vérifier dans un premier temps dans ce TP.

Propriété	**Fonction**	**TF**
Définition	$f(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}$	$F(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$
Linéarité	$\Sigma_i a_i f_i(x,y)$	$\Sigma_i a_i F_i(u,v)$
Inverse	$F(x,y)$	$f(-u,-v)$
Translation	$f(x-x_0, y-y_0)$	$e^{-i2\pi(ux_0+vy_0)}F(u,v)$
Modulation	$e^{xu_0+yv_0}f(x,y)$	$F(u-u_0, v-v_0)$

Changement d'échelle	$f(ax, by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert}F(\frac{u}{a}, \frac{v}{b})$
Complexe conjugué	$f^*(x, y)$	$F^*(-u, -v)$
Symétrie hermitienne	$f(x, y) \in \mathbb{R}$	$F(u, v) = F^*(-u, -v)$
Séparabilité	$f(x, y) = f(x)f(y)$	$F(u, v) = F(u)F(v)$
Produit de convolution	$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x', y')h(x - x', y - y')dx'dy'$	$F(u, v)H(u, v)$
Produit de corrélation	$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x', y')g(x' - x, y' - y)dx'dy'$	$F(u, v)G^*(u, v)$

Résultat	**Expression**
Théorème de Parseval	$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)g^*(x, y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} F(u, v)G^*(u, v)dudv$
Formule de Plancherel (conservation d'énergie)	$f = g \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} \lvert f(x, y)\rvert^2 dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \lvert F(u, v)\rvert^2 dudv$
Rotation	Rotation de $\theta \Leftrightarrow$ rotation de θ dans le domaine de Fourier : $f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \leftrightarrow F(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)$

Table 1 – Propriétés usuelles de la TF.

1.1 Transformations affines et FFT

1.1.1 Analyse de l'effet des transformations affines

Opérateurs utiles : `pfft`, `pifft`, `ptranslation`, `protation`, `pzoom`.
- Générer des images synthétiques (carré, rectangle, disque) et visualiser leur FFT.
- Translater chacune des ces images et visualiser la FFT. Quel effet provoque la translation ?
- Tourner chacune de ces images et visualiser la FFT. Quel effet provoque la rotation ?
- Tourner puis translater chacune des images et visualiser la FFT. Qu'observe-t-on ? Interpréter.

1.1.2 Recalage par FFT

Dans */home/public/pandore*, nous avons mis deux images couleurs nommées `ref.tif` et `target.tif`. Ces deux images réelles sont celles d'un défaut sur un film acquis par microscopie magnéto-optique. L'une des deux images est la translatée de l'autre.
- En vous inspirant de ce qui a précédé, proposer une méthode permettant l'estimation de la translation entre les deux images en utilisant la FFT.
- Écrire l'enchaînement des opérateurs correspondant et le tester.
- Quel est le mouvement estimé ?

1.2 Filtrage linéaire, FFT et convolution

Opérateurs utiles : `pfft`, `pifft`, `pfftshift`, `pfftconvolution`, `pmult`, `pshapedesign`, `pim2sf`, `pnormalization`.

1.2.1 Filtrage linéaire et FFT

On se propose ici d'appliquer des filtres linéaires à des images dans le domaine fréquentiel. Les gabarits investigués ici sont essentiellement passe-bas et passe-haut. Afin d'élucider les pbs liés à la géométrie du filtre 2D (ce qui ne se pose pas pour des signaux 1D), on utilisera des formes de type disque et carré.

- Synthétiser une image de disque et la normaliser de façon à ce que son amplitude soit unitaire.
- Bruiter l'image du damier (qui est dans le même répertoire que d'habitude) avec bruit gaussien centré de $\sigma = 5$.
- Calculer la FFT de l'image obtenue. Lui appliquer un filtrage passe-bas en multipliant sa FFT par l'image du disque puis FFT inverse. Qu'observe-t-on en fonction de la fréquence de coupure ? Interpréter.
- Que faut-il pour appliquer un filtrage passe-haut cette fois-ci (c'est très simple). Qu'observe-t-on ? Interpréter.
- Refaire les mêmes opérations avec un carré comme forme du filtre. Quelles sont les différences observées ?

1.2.2 Analyse de la réponse d'un filtre

Ici, on se propose d'étudier la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un filtre à moyenne mobile. Ce filtre remplace la valeur en chaque pixel par la moyenne des pixels qui l'entourent sur un horizon donné. Pour ce filtre appelé aussi moyenneur, le noyau de convolution 2D sur un horizon 3×3 peut sécrire sous forme matricielle :

$$H = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = H_x H_y^T, \text{ où } H_x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } H_y^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- S'agit-il d'un filtre FIR ou IIR ? Justifier.
- Calculer la TF discrète 2D de ce noyau. De quel type de gabarit s'agit-il ?

En utilisant Pandore, on veut visualiser la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert de ce filtre.

- Fabriquer une image contenant une impulsion de Dirac 2D unitaire. Penser à utiliser la propriété $\delta(mT_x, nT_y) \underset{\text{IFFT}}{\overset{\text{FFT}}{\rightleftarrows}} 1(\frac{k}{N_x T_x}, \frac{l}{N_y T_y})$.
- La réponse impulsionnelle est obtenue en convoluant l'impulsion ainsi synthétisée par le noyau H. Pour ce faire, on appliquera l'opérateur Pandore `pmeanfiltering` sur l'impulsion.
- Calculer la FFT de cette dernière image. Recentrer en utilisant l'opérateur `pfftshift` et visualiser le module. Qu'observe-t-on ? Comparer au résultat que vous avez calculé.
- Appliquer le filtre moyenneur à l'image de Lena bruitée (bruit gaussien centré de $\sigma = 10$). Commenter.

1.3 Corrélation et mesure de similarité

Pour la reconnaissance des objets par identification avec un modèle iconifié, le produit de corrélation (défini dans Table 1) offre un moyen approprié pour mesurer la similarité entre l'objet présenté et celui de référence (motif). La corrélation entre deux objets est maximale lorsque ces deux objets sont identiques. Ainsi, en prenant une image dont le contenu informatif est varié et un motif de base, on peut rechercher le nombre d'occurences de ce motif dans l'image par le produit de corrélation. Ceci correspondra au nombre de maxima locaux dans l'image du produit de corrélation. Cette méthode est cependant non-invariante par rotation et changement d'échelle (homothétie). Même si nous nous attacherons ici aux seules translations, le pb de la rotation peut être ramené à un pb de translation par passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

Le produit de corrélation (idem pour la convolution) discret entre deux images a une complexité en $O(N^4)$!!! Ainsi, pour des images usuelles de taille $N^2 = 256^2$, ceci induit 2^{64} (plus de 4 milliards) opérations. Ceci se traduit sur un PC actuel par des temps d'exécution de l'ordre de l'heure. En utilisant la propriété énoncé en Table 1 sur la TF dur produit de corrélation, et sachant que la FFT et la FFT inverse ont une complexité temporelle en $O(N^2 \log N)$, on aboutit pour ces mêmes images à une complexité qui est aussi en $O(N^2 \log N)$. Ainsi, le temps de calcul du produit de corrélation par la FFT est réduit à moins d'une seconde sur la même machine.

– Convertir au format Pandore et visualiser la planche de timbres qui se trouve dans */home/public/pandore*.
– Idem pour le motif extrait.
– Calculer le produit de corrélation (opérateur `pfftcorrelation`) qui implémente ce produit dans le domaine spectral (cf. Table 1). Du fait de la dualité échantillonnage-périodisation entre le domaine original et spectral, il faudra recentrer l'image obtenue en utilisant l'opérateur `pfftshift`.
– Qu'observe-t-on ? Compter le nombre de maxima locaux du produit de corrélation dans le support du motif. Commenter.