Avaliação da Área 2

Auxílio para a montagem da matriz de banda

Prof. Raphael Brum

Conforme exposto na aula do dia 24/07, exemplifico nesse texto a montagem do sistema de equações a partir de uma configuração espacial dada, como nos problemas propostos na P2.

As equações para cada ponto são da forma descrita enunciado. Alguns pontos tem um potencial fixo, no entanto. As bordas do problema devem ter $V = 0$, para emularmos o fato de que $V(\vec{R} \to \infty) = 0$. Outros pontos terão potencial fixo, ou ainda uma densidade de cargas associada (problema 2). Nesse caso, a equação do ponto fica resumida a

$$Vi, j = \text{constante}$$

ou

$$V_{i,j} = f(\rho(i,j))$$

No caso do problema 1, serão alguns pontos na mesma linha (y constante, para formarmos as placas). No caso do problema 2, serão círculos. Há de se determinar quais pontos do grid estão dentro do círculo. Isso pode ser feito matematicamente, ou carregando uma matriz com os pontos já "marcados"(o que poderia ser feito através de uma figura).

Considerem a seguinte matriz, em que os pontos com potencial fixo são representados pelo potencial numérico e os pontos com potencial a determinar estão representados por um ?.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & ? & ? & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & ? & ? & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As equações da borda são do tipo $V_{i,j} = 0$. As equações das placas são do tipo $V_{i,j} = 10$ e $V_{i,j} = 5$. As equações dos demais pontos, marcados com ?, são:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i-1,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}\right)$$

Isso resulta em 8 equações:

$$\begin{aligned}
4V_{3,2} - 1V_{2,2} - 1V_{4,2} - 1V_{3,1} - 1V_{3,3} &= 0\\
4V_{3,3} - 1V_{2,3} - 1V_{4,3} - 1V_{3,2} - 1V_{3,4} &= 0\\
4V_{3,4} - 1V_{2,4} - 1V_{4,4} - 1V_{3,3} - 1V_{3,5} &= 0\\
4V_{3,5} - 1V_{2,5} - 1V_{4,5} - 1V_{3,4} - 1V_{3,6} &= 0\\
4V_{4,2} - 1V_{3,2} - 1V_{5,2} - 1V_{4,1} - 1V_{4,3} &= 0\\
4V_{4,3} - 1V_{3,3} - 1V_{5,3} - 1V_{4,2} - 1V_{4,4} &= 0\\
4V_{4,4} - 1V_{3,4} - 1V_{5,4} - 1V_{4,3} - 1V_{4,5} &= 0\\
4V_{4,5} - 1V_{3,5} - 1V_{5,5} - 1V_{4,4} - 1V_{4,6} &= 0
\end{aligned}$$

Agora podemos compor uma matriz com essas equações, além das equações de potencial fixo. A matriz consiste de cruzar todos os 36 pontos do grid com eles mesmos, e então tem ordem $(n \times m) \times (n \times m)$, onde $n \times m$ é a ordem do grid. Não vou listar a matriz 36 por 36, mas deixo parte de uma linha de exemplo.

Vamos supor que a matriz seja ordenada linha a linha, dessa forma: $V_{1,1}$, $V_{1,2}$, ..., $V_{2,1}$, $V_{2,2}$, ..., $V_{6,5}$, $V_{6,6}$. Teríamos, para o ponto $V_{3,5}$, algo assim:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & 2,4 & \mathbf{2,5} & 2,6 & \cdots & 3,3 & \mathbf{3,4} & \mathbf{3,5} & \mathbf{3,6} & 3,7 & \cdots & 4,4 & \mathbf{4,5} & 4,6 & \cdots \end{array} \\
3,5 & \left(\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & 0 & \mathbf{-1} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{-1} & 0 & \cdots \end{array}\right)
\end{array}$$

A primeira linha e a primeira coluna são apenas cabeçalhos da matriz. Essa é a matriz A do sistema. As equações de fronteira preencherão a matriz A com um 1 na variável envolvida e com o valor da condição na matriz B.

Espero, assim, ter esclarecido a transição do grid para a matriz de resolução.