Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Engenharia Elétrica
ENG04010 – Teoria Eletromagnética e Ondas – Turma U
Prof. Raphael M. Brum

ESCOLA DE ENGENHARIA
UFRGS

Prova 2: Problemas de Valor de Contorno

Turma U – 28/06/2017

Introdução: o método das diferenças finitas (FDM) consiste em aproximar as equações diferenciais através de equações de diferenças, de tal modo a possibilitar a sua solução através de iterações numéricas. Assumindo o espaço bidimensional quantificado em uma malha retangular, vimos em aula a seguinte aproximação para a Equação de Laplace:

Aproximação por FDM da Equação de Laplace:

$$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1)\right]$$

Considerando a presença de uma distribuição de cargas no meio, podemos expressar a equação de Poisson da seguinte forma:

Aproximação por FDM da Equação de Poisson:

$$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1) + \frac{\rho(i,j)h^2}{\epsilon(i,j)}\right]$$

em que h é o passo da malha que quantiza o espaço. Caso estejamos em um meio homogêneo, podemos substituir $\epsilon(i,j)$ por uma constante ϵ. Se a distribuição de cargas for uniforme, podemos também substituir $\rho(i,j)$ por uma constante ρ.

O problema fica completamente especificado quando incorporamos, também, as condições de contorno. As condições de contorno de Dirichlet (do tipo $V(x_b, y_b) = K$, em que x_b e y_b representam todos os pontos que satisfazem a condição) podem ser facilmente aproximadas através da fixação dos potenciais de pontos da malha. Para as condições de contorno de Neumann (do tipo $\partial V/\partial x(x_b, y_b) = K$), podemos adotar uma equação de diferença central do tipo $(V_b - V_i)/h = K$, em que V_b é o potencial do ponto situado no contorno V_i é o potencial do ponto vizinho situado na região interna, na direção da derivada (no exemplo, x).

Como o potencial em cada ponto depende do potencial dos pontos vizinhos, reciprocamente, estabelece-se uma recursão através das equações de potencial associadas a cada ponto. Para uma malha bem pequena, pode-se resolver as equações resultantes através de um sistema de equações lineares.

Porém, no caso geral, convém utilizar-se de um método iterativo. Recomenda-se a utilização do método da super-relaxação sucessiva (SOR), descrito de forma resumida na seguinte biblografia, que será disponibilizada no Moodle:

James R. Nagel, *Solving the Generalized Poisson Equation Using the Finite-Difference Method (FDM)*, University of Utah, Salt Lake City, Utah.

Mais detalhes sobre a implementação podem ser obtidos em:

Sadiku, Matthew N.O.. *Elementos de eletromagnetismo***.** 5. ed. Porto Alegre : Bookman, 2012.
Sadiku, Matthew N.O.. **Numerical techniques in electromagnetics with MATLAB**. 3rd ed. Boca Raton, Fla. : CRC Press, 2009.

Objetivo do trabalho: implementar o método dos elementos finitos em software matemático (MATLAB ou similar), de modo a visualizar o potencial eletrostático e as linhas de campo de cada um dos problemas.

Formato de entrega: escrever um relatório em formato de artigo científico, de até quatro páginas, contendo introdução, apresentação do problema, metodologia, resultados e conclusão. A apresentação do problema deve descrever, de forma objetiva, a implementação do algoritmo

Os resultados de cada problema devem ser apresentados de forma gráfica e discutidos qualitativamente. Adicionalmente, para os problemas em que for solicitado, deve-se efetuar a resolução analítica e realizar a comparação quantitativa com os resultados obtidos numericamente.

Data de entrega: 28/07/2017, às 00h00

Problemas a serem resolvidos

Problema 1 (40%): considere um capacitor de placas plano-paralelas, composto de placas quadradas com uma largura de 10 mm, espaçados de 100 um.

a) assumindo a aproximação para um capacitor infinito, encontre a expressão para o potencial elétrico $V(x, y)$ e para o campo elétrico $\vec{E}(x, y)$ em qualquer ponto do espaço.

b) resolva numericamente o problema, encontrando o potencial. Trace o campo $\vec{E}$ sobre o gráfico, e expresse o seu potencial V através de um “mapa de calor”. Compare as respostas obtidas e discuta eventuais diferenças.

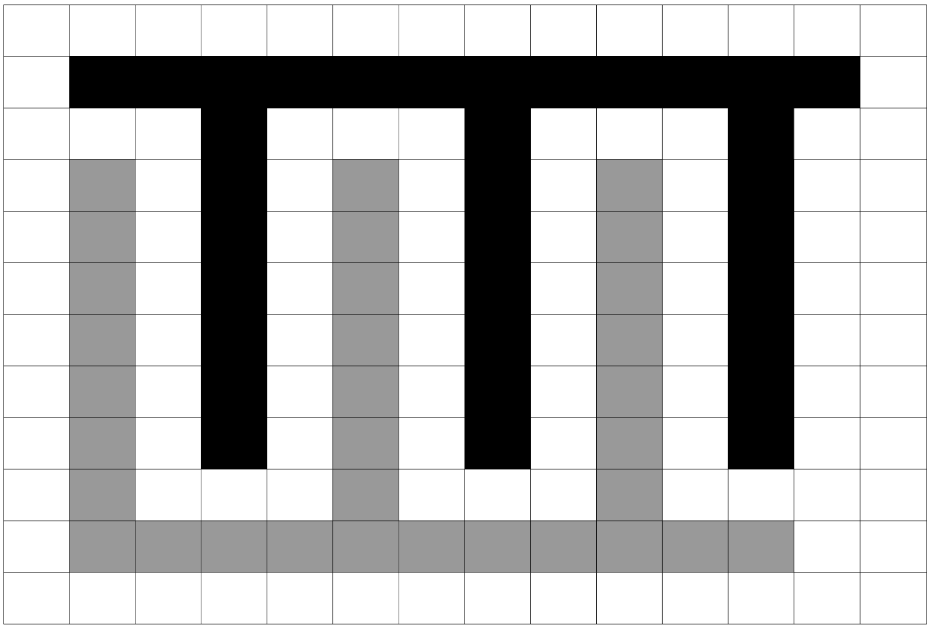
Problema 2 (40%): considere um cabo coaxial com condutor interno de raio $a = 1\ \mathrm{mm}$ (maciço) e um condutor externo de raio $b = 3\ \mathrm{mm}$ (casca), separados por um dielétrico com $\epsilon_r = 4$. O condutor interno possui potencial de 5 V, enquanto que o condutor externo está aterrado. Suponha que esse dielétrico possua comprimento $L = 1m$. Suponha também que o dielétrico possua, também, uma densidade de cargas $\rho = 4/r$.

a) supondo um ponto distante das bordas do cabo, resolva a equação de Poisson e encontre a expressão para o potencial elétrico $V(x,y)$ e para o campo elétrico $\vec{E}(x,y)$, para qualquer ponto do corte transversal do cabo.

b) resolva numericamente o problema, encontrando o potencial para todos os pontos do corte transversal do cabo, que se encontra distante das bordas. Trace o campo $\vec{E}$ sobre o gráfico, e expresse o seu potencial V através de um "mapa de calor". Compare as respostas obtidas e discuta eventuais diferenças.

b) resolva numericamente o problema, encontrando o potencial para os pontos que se encontram próximos a borda, assumindo um corte longitudinal do cabo que passe por seu centro. Trace o campo $\vec{E}$ sobre o gráfico, e expresse o seu potencial V através de um "mapa de calor". Discuta a respeito dos resultados obtidos.

Problema 3 (20%): um *comb-drive* é um microssistema eletromecânico (MEMS) composto por dois eletrodos em formato de "pente", como os da figura abaixo. Um dos eletrodos é móvel, e normalmente está acoplado a uma mola. O outro eletrodo permanece fixo. Aplicam-se dispositivos como esse na construção de acelerômetros, pois o movimento percebido pelo eletrodo móvel induz alterações na capacitância do elemento.



Considere que o eletrodo fixo está representado em preto na figura abaixo, e que o eletrodo móvel está representado em cinza. A área branca é o dielétrico (ar). Atribua uma diferença de potencial de 10 V entre os eletrodos, e suponha que cada retângulo represente uma área de 5 um x 5 um. Nessa condições:

a) determine, numericamente, o potencial $V(x,y)$ e o campo elétrico $\vec{E}(x,y)$ no espaço.
b) desloque o eletrodo móvel de 2,5um para a direita, e recalcule $V(x,y)$ e $\vec{E}(x,y)$.
c) compare os resultados.