

Approche stochastique à l'agrégation de matière dans l'Univers

Laurent Mercier

Résumé

Cinq distributions de matière sont analysées selon différents paramètres α et β intervenant dans la friction dynamique. Un modèle stochastique en deux dimensions est construit afin de simuler l'évolution d'une distribution de matière initialement aléatoire sous l'effet de la friction dynamique. Les combinaisons de paramètres $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $\alpha = 2.5$, $\beta = 1.5$ forment une distribution de matière plus uniforme que les autres combinaisons étudiées, ce qui implique une dimension fractale plus grande. Le comportement de la dimension fractale en fonction du temps vérifie les résultats de Pietronero et Kopers [1]. Toutefois, aucune distribution analysée a une dimension fractale qui est compatible avec la valeur de $D = 1.4 \pm 0.1$, valeur calculée par Coleman et Pietronero en se basant sur un catalogue de galaxies [2].

1 Introduction

Le concept de fractale est présent dans plusieurs structures naturelles. On pourrait s'imaginer que la distribution de masse dans l'Univers est uniforme dans l'espace. Toutefois, il a été démontré par Coleman et Pietronero que la structure de l'Univers est fractale [2]. Dans le cadre de ce travail, j'étudierai plusieurs distributions de galaxies selon divers paramètres afin de déterminer l'impact de la friction dynamique, qui a pour effet de représenter la gravité dans les simulations effectuées, sur la dimension fractale de la distribution de matière. Finalement, le comportement de la dimension fractale en fonction du temps sera analysé afin de voir s'il suit une fonction de type marche ou non.

2 Éléments théoriques

Fractales

Une fractale peut être définie de plusieurs manières. Un des aspects importants d'une fractale est qu'elle présente une structure similaire à toutes les échelles. Une autre définition fait référence au concept de dimension. En effet, tout ensemble ayant une dimension non entière est une fractale [3]. On peut donc caractériser la fractalisation d'un ensemble de points par sa dimension fractale.

Fonction de densité et corrélation

Afin de calculer une fonction de corrélation sur la position et la masse des galaxies, il faut d'abord évaluer la fonction de densité en fonction de la distance [4] :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1)$$

où m_i est la masse de la galaxie i et \vec{r}_i est sa position. Ensuite, on peut définir la fonction de corrélation [1] :

$$C(r) = \langle \rho(\vec{r}_0) \rho(\vec{r}_0 + \vec{r}) \rangle \approx r^{-\gamma}, \quad (2)$$

où \vec{r}_0 correspond à la position de chaque galaxie. On peut également définir la moyenne d'ensemble [2] :

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{A} \int_{r_0} (\dots) dr_0, \quad (3)$$

où A est l'aire du réseau (en coordonnées polaires) où sont situées les galaxies. On passe d'une notation vectorielle de la position à une position scalaire r dans l'équation 2, ce qui implique de faire une moyenne sur les galaxies se retrouvant à la même distance r sans être au même angle θ . On peut réécrire l'exposant γ dans l'équation 2 [1] :

$$C(r) \sim r^{-(d-D)}, \quad (4)$$

où d est la dimension euclidienne de l'espace, soit 2 dans ce cas-ci, et D est la dimension fractale.

Collisions et friction dynamique

La gravité est simulée par la friction dynamique. La friction dynamique dicte si les galaxies s'aggrègent entre elles ou si elles continuent sur leur chemin. On peut calculer la fonction d'influence d'une galaxie au point \vec{y} sur la galaxie au point \vec{x} au temps t où la collision se déroule [4] :

$$f(t; \vec{x}, \vec{y}) = \exp\left(-\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{m(\vec{y}, t)^\beta}\right), \quad (5)$$

où β est un paramètre de la friction dynamique qui influencera comment les galaxies s'aggrègent. On dérive ensuite la fonction d'influence totale [4] :

$$F(t; \vec{x}) = \int_y f(t; \vec{x}, \vec{y}) dy, \quad (6)$$

où l'on intègre sur toutes les positions y . On peut ensuite déterminer la probabilité d'agrégation [4] :

$$P_a(t, \vec{x}) = F(t, \vec{x})^\alpha, \quad (7)$$

où α est un autre paramètre de la friction dynamique influençant l'agrégation. On peut définir la probabilité que la nouvelle galaxie s'immobilise après la collision [4] :

$$P_v = 1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

où les vitesses correspondent à celles des galaxies en collision. Le changement d'énergie cinétique après une collision est proportionnel [4] à la probabilité d'agrégation

selon l'équation 7 et on peut en dériver le changement de vitesse après une collision :

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2P_a}{m}}. \quad (9)$$

3 Méthodologie

Pour commencer, un réseau carré de côté 51 est défini. Ensuite, on place 400 galaxies de masse $m = 1$ et de vitesse $v = 1$ de façon aléatoires sur les positions en x et y du réseau avec des intervalles de 1 entre chaque position. Un exemple de réseau initial est illustré dans la Fig. 1. Une direction aléatoire est ensuite choisie entre 0

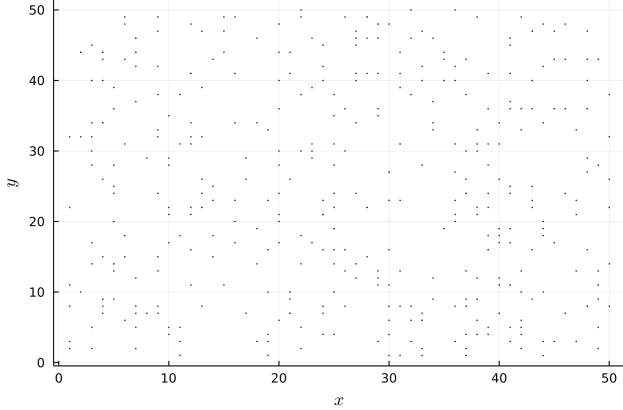


FIGURE 1 Exemple d'un réseau initial de 51x51 avec 400 galaxies placées de façon aléatoire.

et 2π à chaque itération temporelle pour chaque galaxie. La nouvelle position de la galaxie est déterminée selon la vitesse et la direction. Les positions peuvent prendre des valeurs de 0 à 51 avec des bords de 0.1. Si la nouvelle position est en dehors du réseau, elle est redéfinie pour être sur la frontière du réseau. De plus, une routine identifie à chaque itération s'il y a des galaxies qui occupent la même position. Si la collision a lieu (selon la probabilité de l'équation 7), une des deux galaxies est supprimée et l'autre voit sa masse augmentée par la masse de la galaxie supprimée. Le modèle utilisé traite seulement les collisions entre deux particules. Ensuite, la vitesse de la nouvelle galaxie est définie selon l'équation 9 et on regarde si la galaxie s'arrête ou continue avec sa nouvelle vitesse selon l'équation 8. Puis, on calcule la fonction de corrélation spatiale selon l'équation 2 et on utilise une fonction de moyenne mobile afin de lisser les données. Finalement, on utilise la méthode des moindres carrés afin de trouver une courbe qui s'ajuste à la fonction de corrélation. La courbe d'ajustement est du type :

$$C = Ar^b, \quad (10)$$

où b est le paramètre recherché qui nous permettra de trouver la dimension fractale selon l'équation 4. La méthode des moindres carrés est effectuée sur un intervalle

de r allant de 0.1 à 9.9 par bonds de 0.1. Un exemple de la méthode des moindres carrés est représenté dans la Fig. 2.

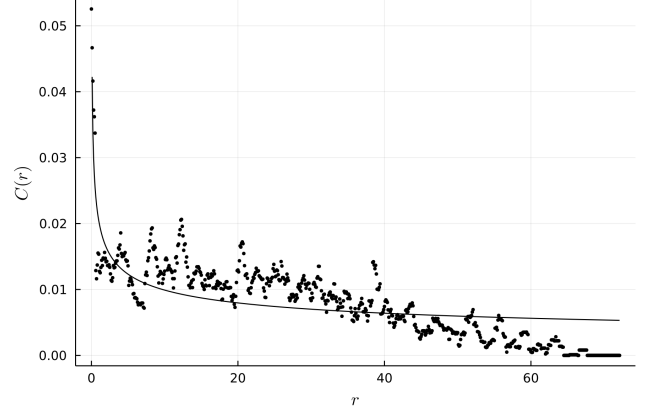


FIGURE 2 Exemple de la méthode des moindres carrés sur la corrélation $C(r)$. Les points noirs correspondent à la corrélation obtenue dans la simulation et ensuite lissée par une fonction de moyenne mobile. La courbe en noire correspond à la courbe ajustée par la méthode des moindres carrés. Un paramètre $\alpha = 2.5$, un paramètre $\beta = 1$ et une itération temporelle maximale de 100 000 ont été utilisés pour produire cette figure.

4 Résultats

En premier lieu, des paramètres α allant de 0.5 à 2.5 et des paramètres β allant de 0.5 à 1 ont été utilisés dans les simulations. De plus, l'itération maximale a été fixée à 100 000 pour chaque simulation. Les distributions de galaxies finales pour différentes valeurs de α et β sont illustrées dans les Fig. 3, 4, 5, 6, 7.

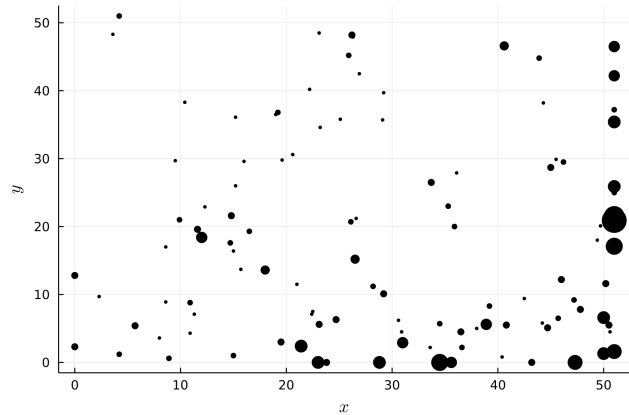


FIGURE 3 Distribution finale pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.5$. Les points plus gros correspondent à des galaxies de plus grosse taille.

Les dimensions fractales de chaque distribution ont été calculées selon l'équation 4 et elles figurent dans le

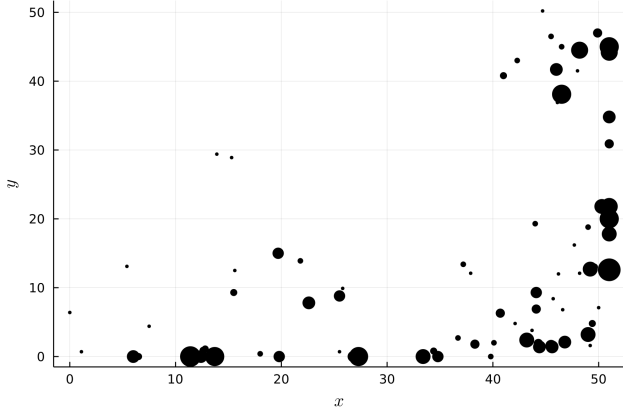


FIGURE 4 Distribution finale pour $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0.5$. Les points plus gros correspondent à des galaxies de plus grosse taille.

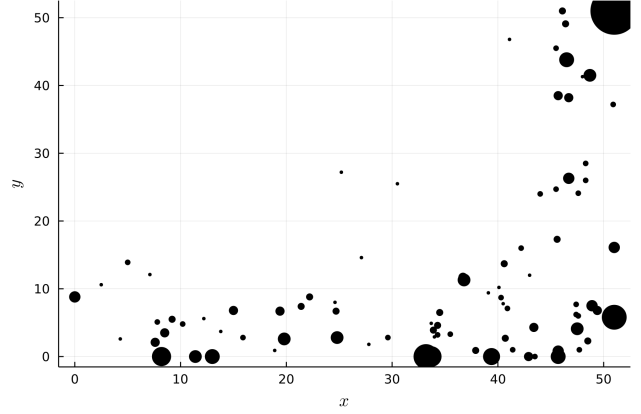


FIGURE 6 Distribution finale pour $\alpha = 2.5$ et $\beta = 1.0$. Les points plus gros correspondent à des galaxies de plus grosse taille.

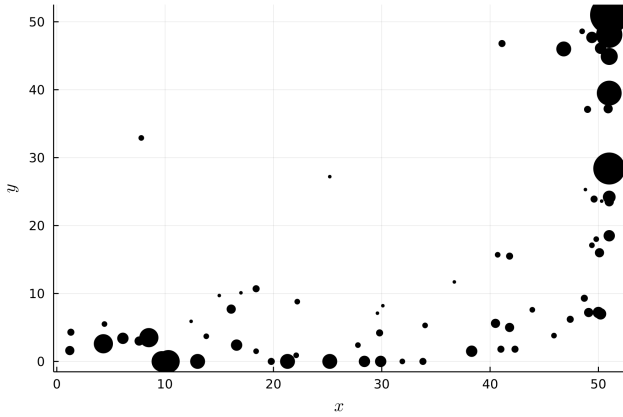


FIGURE 5 Distribution finale pour $\alpha = 2.5$ et $\beta = 0.5$. Les points plus gros correspondent à des galaxies de plus grosse taille.

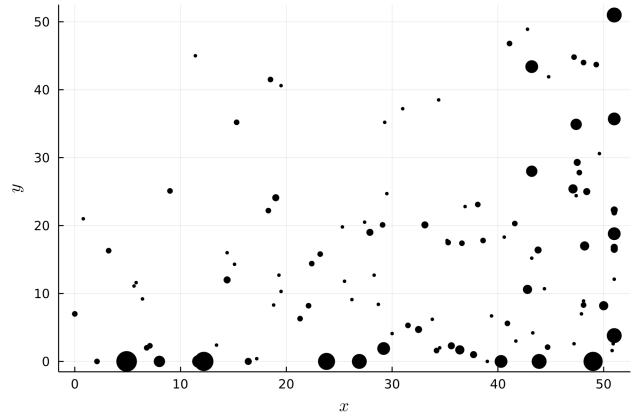


FIGURE 7 Distribution finale pour $\alpha = 2.5$ et $\beta = 1.5$. Les points plus gros correspondent à des galaxies de plus grosse taille.

Tab. 1. Finalement, on peut regarder l'évolution de la dimension fractale en fonction du temps dans la Fig. 8.

5 Discussion

En regardant les Fig. 3, 4, 5, 6, 7, on voit qu'il y a une tendance générale selon laquelle les grandes galaxies se retrouvent sur les côtés du bas et de droite du réseau. De plus, les grosses masses se retrouvent proches l'une de l'autre et forment des grands vides dans le réseau, ce qui est caractéristique d'une distribution fractale et de la distribution de matière dans l'Univers [2]. On observe également qu'il y a plus de galaxies dans le milieu du réseau dans les Fig. 3, 7 que dans les autres figures, un phénomène également présente dans le Tab. 1 où les deux dimensions fractales les plus élevées correspondent aux combinaisons α et β des Fig. 3, 7. On voit donc qu'une dimension fractale plus élevée correspond à une distribution de matière plus uniforme, tel qu'attendu.

De plus, la Fig. 8 suit très bien la tendance générale de la figure 5 de l'article de Pietronero et Kupers [1]. Toutefois, aucune des combinaisons de paramètres α et β utilisées est compatible avec une dimension fractale $D = 1.4 \pm 0.1$ telle que calculée sur un catalogue de galaxies dans l'article de Coleman et Pietronero [2].

6 Conclusion

En conclusion, plusieurs distributions de galaxies ont été simulées selon différents paramètres α et β afin d'évaluer l'effet de ces combinaisons sur la distribution de matière finale. Il a été montré que l'évolution de la dimension fractale dans le temps suit une fonction de type marche, tel qu'attendu. Or, aucune distribution ne s'approchait de la dimension fractale de $D = 1.4 \pm 0.1$. Il a également été montré que les distributions ayant une plus grande uniformité possédaient une dimension fractale plus haute. Finalement, les distributions étudiées présentent les caractéristiques d'une dis-

| Paramètres | Dimension fractale |
|-----------------------------|--------------------|
| $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ | 1.861 ± 0.014 |
| $\alpha = 1.5, \beta = 0.5$ | 1.79 ± 0.02 |
| $\alpha = 2.5, \beta = 0.5$ | 1.71 ± 0.03 |
| $\alpha = 2.5, \beta = 1.0$ | 1.69 ± 0.02 |
| $\alpha = 2.5, \beta = 1.5$ | 1.81 ± 0.02 |

TABLEAU 1 Dimension fractale de la distribution finale selon les différents paramètres α et β . L'incertitude provient de la méthode des moindres carrés.

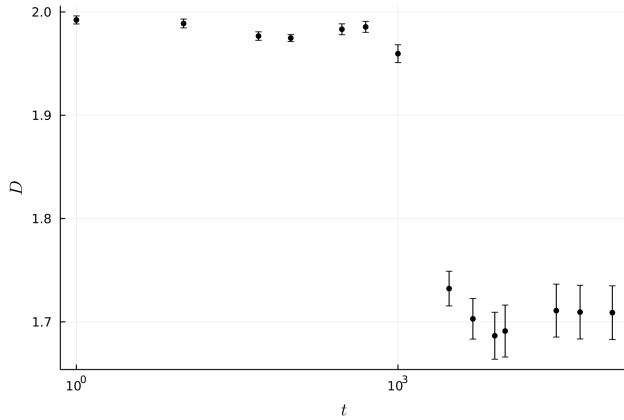


FIGURE 8 Évolution de la dimension fractale en fonction du temps pour une distribution ayant $\alpha = 2.5$ et $\beta = 0.5$. On voit que la dimension fractale se situe autour de 2, soit une distribution non fractale, jusqu'à ce que l'itération maximale atteigne 1000, où la dimension fractale tombe subitement vers 1.7.

tribution de matière fractale. Il serait intéressant d'utiliser d'autres combinaisons de paramètre afin de voir si une combinaison particulière se rapproche de la valeur de $D = 1.4 \pm 0.1$. On pourrait également étudier l'impact de la forme du réseau sur les résultats, est-ce qu'un réseau circulaire aurait une distribution de matière différente ?

Références

- [1] L. PIETRONERO et R. KUPERS, in *Fractals in Physics* (Elsevier, Waltham, MA, USA, 1986), p. 319-324.
- [2] P. H. COLEMAN et L. PIETRONERO, Phys. Rep. **213**, 311 (1992).
- [3] B. B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature* (Brattleboro, Vermont : Echo Point Books & Media, 2021).
- [4] F. S. LABINI et L. PIETRONERO, arXiv, 10.48550/arXiv.astro-ph/9505084 (1995).