

Un soupçon de physique, sans être agressif pour  
autant

Laurent CLAESSENS

17 février 2010

Copyright (c) 2006-2010 Laurent Claessens.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

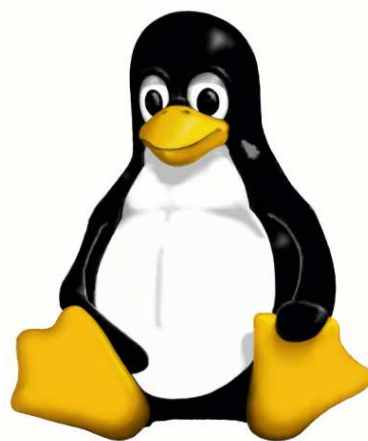
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X [source files](#) as well as a [pdf](#) version can be obtained on my website<sup>[1](#)</sup>.

The pictures on the cover page may not be under FDL. I found them on Linux related websites, so I hope that they are rather free.

---

<sup>1</sup><http://student.ulb.ac.be/~lclaesse/>

Composé avec des logiciels libres :  
GNU/Linux



Grâce à la prodigieuse distribution (K)Ubuntu



Et bien entendu...

$\text{AMS-LAT}_{\text{EX}} 2_{\epsilon}$

Autre logiciels utilisés : [pstricks](#) pour les figures, avec l'aide de [python](#) et [Sage](#) pour la génération de certains bouts de code trop compliqués à programmer en  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ .



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Sources . . . . .	13
1.2	Un cours de physique libre . . . . .	14
1.3	Originalité de ce texte . . . . .	14
1.4	Rappels . . . . .	16
1.4.1	Avertissement . . . . .	17
1.4.2	Du système international . . . . .	17
	Les unités de base . . . . .	17
	Les unités dérivées . . . . .	17
1.4.3	Le point matériel . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Principes généraux de la physique</b>	<b>21</b>
2.1	Homogénéité et isotropie . . . . .	21
2.1.1	Homogénéité de l'espace . . . . .	21
2.1.2	Homogénéité du temps . . . . .	22
2.1.3	Conclusion des homogénéités . . . . .	22
2.1.4	Isotropie de l'espace . . . . .	22
2.2	Le principe de relativité . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Optique géométrique</b>	<b>25</b>
3.1	Réflexion et réfraction de la lumière . . . . .	26
3.1.1	Réflexion et réfraction . . . . .	26
3.1.2	La réflexion . . . . .	27
3.1.3	La réfraction . . . . .	28
3.1.4	Loi de Snell-Descartes et vitesse de la lumière . . . . .	29
	Physique de la réfraction . . . . .	30
	Petit retour en arrière : la réflexion . . . . .	31
	Résolution géométrique de la réfraction . . . . .	31
	Les indices absolus . . . . .	33
3.1.5	Réfringence . . . . .	33
3.1.6	Construction du rayon réfracté . . . . .	34

3.1.7	Angle limite de réfraction . . . . .	34
3.1.8	Réflexion totale . . . . .	35
3.1.9	Exercices . . . . .	37
3.2	Miroirs plans . . . . .	38
3.2.1	Le principe général . . . . .	38
3.2.2	Image réelle et image virtuelle . . . . .	38
3.2.3	Rotation d'un miroir plan . . . . .	39
3.2.4	Images multiples . . . . .	39
3.3	Miroirs sphériques . . . . .	39
3.3.1	Construction de l'image d'un objet . . . . .	40
3.3.2	Quelque formules . . . . .	44
3.4	Lentilles minces . . . . .	44
3.4.1	Généralités et un peu de vocabulaire . . . . .	44
3.4.2	Propriétés des lentilles minces . . . . .	46
3.4.3	Image d'un objet . . . . .	48
3.4.4	Formules pour les lentilles minces . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Un petit peu d'algèbre</b>	<b>53</b>
4.1	Démonstration par l'absurde . . . . .	53
4.2	Premier degré à une inconnue . . . . .	54
4.2.1	Vocabulaire . . . . .	54
4.2.2	Les conditions d'existence . . . . .	56
4.2.3	Quand l'inconnue n'est pas au dénominateur . . . . .	58
4.2.4	Exercices . . . . .	58
4.2.5	Lorsque l'inconnue est au dénominateur . . . . .	59
4.2.6	Équations avec coefficients paramétriques. Discussions . . . . .	60
4.3	Système d'équations à deux inconnues . . . . .	61
4.3.1	Méthode de substitution . . . . .	61
4.3.2	Méthode de combinaison . . . . .	62
4.3.3	Avec ou sans solutions ? . . . . .	64
	Le cas $ad - bc = 0$ . . . . .	65
	Le cas $ac - bd \neq 0$ . . . . .	66
4.3.4	Petit truc de notation et de vocabulaire . . . . .	66
4.3.5	Discussions de systèmes . . . . .	66
4.3.6	Le coup de l'isotope mystère . . . . .	67
4.4	Inéquations à une inconnue . . . . .	68
4.4.1	Rappel théorique . . . . .	68
	Addition et soustraction . . . . .	68
	Multiplication et division . . . . .	69

<b>5</b>	<b>De la géométrie</b>	<b>71</b>
5.1	Vecteurs . . . . .	71
5.2	Équations de droites . . . . .	72
5.3	Système de coordonnées polaire . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Les fonctions</b>	<b>73</b>
6.1	Quelques exemples de fonctions . . . . .	73
6.2	Addition et multiplication de fonctions . . . . .	76
6.3	Domaine d'une fonction . . . . .	77
6.4	Fonctions croissantes et décroissantes . . . . .	78
6.5	L'application réciproque . . . . .	78
6.5.1	Remarques sur les domaines . . . . .	80
6.6	Maximum, supremum et majoration de fonctions . . . . .	81
6.7	Le second degré . . . . .	81
6.7.1	Trouver les racines de la parabole . . . . .	82
	Quand le discriminant est positif . . . . .	84
	Quand le discriminant est nul . . . . .	84
	Quand le discriminant est négatif . . . . .	84
6.7.2	Exercices . . . . .	85
6.7.3	Trouver le sommet d'une parabole . . . . .	87
6.8	Étude de signe d'une fonction . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Limite, topologie et continuité</b>	<b>91</b>
7.1	Limites avec des infinis . . . . .	91
7.1.1	Conversation avec mon ordinateur . . . . .	92
7.1.2	Limites du côté de l'infini . . . . .	93
7.2	Topologie . . . . .	101
7.2.1	Maximum et supremum . . . . .	101
	Un tout petit peu de théorie... . . . .	101
	...et quelques exemples . . . . .	102
7.2.2	Espaces métriques . . . . .	105
7.2.3	Connexité . . . . .	107
7.3	Continuité . . . . .	110
7.3.1	Approche analytique . . . . .	111
7.3.2	La fonction la moins continue du monde . . . . .	114
7.3.3	Approche topologique . . . . .	114
7.3.4	Exercices . . . . .	117
7.3.5	Continuité de la racine carrée . . . . .	119
7.3.6	Limites en des nombres . . . . .	122
7.4	Limite et continuité . . . . .	124
7.4.1	Limites quand tout va bien . . . . .	124

7.4.2	Limites et prolongement . . . . .	131
7.5	Calcul de limites . . . . .	133
7.6	Compacité . . . . .	134
7.7	A mad tea party . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Dérivation et intégration</b>	<b>141</b>
8.1	Des exemples . . . . .	141
8.1.1	La vitesse . . . . .	141
8.1.2	La tangente à une courbe . . . . .	142
8.1.3	L'aire en dessous d'une courbe . . . . .	144
8.2	Règles de calcul . . . . .	145
8.3	Démystification du MRUA (première) . . . . .	148
8.4	Dérivation et croissance . . . . .	148
8.5	Démystification du MRUA (seconde) . . . . .	155
8.5.1	Preuve de la formule . . . . .	155
8.5.2	Interprétation graphique . . . . .	156
<b>9</b>	<b>Mouvement, forces et travail</b>	<b>159</b>
9.1	Système de référence . . . . .	159
9.1.1	Besoin d'un système de référence . . . . .	159
9.1.2	Référentiel spatial . . . . .	159
9.1.3	Combien de dimensions ? . . . . .	161
	Une dimension . . . . .	161
	Deux dimensions . . . . .	161
	Trois dimensions . . . . .	161
9.1.4	Référentiel temporel . . . . .	161
9.2	Mouvement et repos . . . . .	162
9.2.1	Définitions . . . . .	162
	Trajectoire d'un point matériel . . . . .	162
9.2.2	Vecteur déplacement, vecteur position . . . . .	163
9.2.3	Exercices . . . . .	163
9.3	Vitesse moyenne et instantanée . . . . .	166
9.4	Accélération moyenne et instantanée . . . . .	168
9.5	Mouvement rectiligne uniforme (MRU) . . . . .	168
9.5.1	Exercices . . . . .	169
9.6	Mouvement uniformément accéléré (MRUA) . . . . .	170
9.6.1	Théorie . . . . .	170
9.6.2	La chute libre . . . . .	172
9.6.3	Chute libre et frottements . . . . .	173
9.7	Les forces . . . . .	174
9.7.1	Quelque définitions . . . . .	174



9.7.2	Le dynamomètre . . . . .	175
9.7.3	Masse et poids . . . . .	175
	La masse . . . . .	175
	Le poids . . . . .	176
9.8	Les lois de Newton . . . . .	176
9.8.1	Première loi : inertie . . . . .	177
	Énoncé et exemples . . . . .	177
	Le problème de ce principe . . . . .	178
9.8.2	Deuxième loi (loi fondamentale de la dynamique) . . . . .	178
9.8.3	Troisième loi : action et réaction . . . . .	179
9.9	Le ressort . . . . .	180
9.10	Énergie . . . . .	180
9.10.1	Avertissement . . . . .	180
9.10.2	De la notion d'énergie . . . . .	180
9.10.3	Valeur de l'énergie . . . . .	181
	Position du problème . . . . .	181
	Le petit calcul . . . . .	182
9.10.4	Énergie cinétique et potentielle . . . . .	183
9.11	Travail . . . . .	184
9.11.1	De la notion de travail . . . . .	184
9.11.2	Bonus : mouvement sur un plan incliné . . . . .	186
9.11.3	Bonus : le levier hydraulique . . . . .	187
	Comment on faisait avant . . . . .	187
	La notion de travail simplifie les choses ! . . . . .	187
9.11.4	Récapitulons . . . . .	188
9.11.5	Exemples . . . . .	189
9.11.6	Travail et intégration . . . . .	192
9.12	Puissance . . . . .	194
9.13	Exercices . . . . .	195
<b>10</b>	<b>De la gravitation</b> . . . . .	<b>207</b>
10.1	Prolégomènes . . . . .	207
10.2	La gravitation à la surface de la Terre . . . . .	207
10.2.1	Chute libre . . . . .	208
10.2.2	Aurait dû censurer ... . . . .	208
10.2.3	La force . . . . .	209
10.2.4	De la difficulté de soulever un objet . . . . .	209
10.2.5	Énergie potentielle (la vérité) . . . . .	210
10.2.6	Énergie potentielle (petit mensonge) . . . . .	211
	Travail et effort . . . . .	211
10.2.7	Tir vertical (second) . . . . .	211

10.2.8	Course poursuite sur les toits . . . . .	212
10.2.9	Tir horizontal . . . . .	213
10.2.10	Problème informatique . . . . .	214
10.2.11	Le tir oblique . . . . .	215
10.2.12	Le plan incliné . . . . .	219
	Équilibre sur un plan incliné . . . . .	219
	Mouvement uniforme sur un plan incliné . . . . .	221
	Accélération sur un plan incliné . . . . .	221
10.3	Gravitation entre corps quelconques . . . . .	222
10.3.1	La <b>formule</b> que Newton a trouvée . . . . .	222
10.3.2	Dépendance en les masses . . . . .	222
10.3.3	Dépendance en la distance . . . . .	223
10.3.4	Petite vérification . . . . .	224
10.3.5	Le poids . . . . .	226
10.3.6	Diminution du poids avec la distance . . . . .	227
10.3.7	Mise en orbite . . . . .	227
	Première explication : force centrifuge . . . . .	228
	La simplification sauve la vie des astronautes . . . . .	228
	Seconde explication : la Terre « rate » le Soleil . . . . .	228
<b>11</b>	<b>Électricité</b>	<b>231</b>
11.1	Généralité sur les courants électriques . . . . .	231
11.2	Résistances . . . . .	231
<b>12</b>	<b>Relativité</b>	<b>233</b>
12.1	Relativité en mécanique newtonienne . . . . .	233
12.1.1	Relativité du mouvement . . . . .	233
12.1.2	Bob et Alice . . . . .	233
12.2	Invariance de la vitesse de la lumière . . . . .	234
12.2.1	Champ de gravitation et électrique . . . . .	234
	Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique . . . . .	234
	Pourquoi pas la gravitation ? . . . . .	235
12.2.2	Support du champ : pas d'éther . . . . .	235
12.2.3	Le problème . . . . .	236
12.3	Conséquences . . . . .	237
12.3.1	Ligne d'univers . . . . .	237
12.3.2	Transformations de Lorentz . . . . .	237
12.3.3	Conditions d'existence . . . . .	242
12.3.4	La notion d'intervalle . . . . .	243
	En mécanique newtonienne . . . . .	243
	En mécanique relativiste . . . . .	244

12.3.5	Le cône de lumière d'un point . . . . .	244
12.3.6	Contraction des longueurs . . . . .	244
12.3.7	Dilatation des intervalles de temps . . . . .	245
12.3.8	Invariance de l'intervalle . . . . .	246
	Rappel de trigonométrie hyperbolique . . . . .	248
	Les transformations de Lorentz (bis) . . . . .	250
12.3.9	Vitesse limite . . . . .	253
12.4	Applications . . . . .	253
12.4.1	Le GPS . . . . .	253
12.4.2	Les ondes électromagnétiques . . . . .	254
12.5	Mécanique relativiste . . . . .	254
12.5.1	Des problèmes, toujours des problèmes . . . . .	254
12.5.2	Loi d'addition des vitesses . . . . .	255
12.5.3	L'action d'une force . . . . .	256
12.5.4	Équivalence entre la masse et l'énergie . . . . .	258
12.6	Principe de correspondance . . . . .	258
<b>13</b>	<b>Exercices pré requis université</b>	<b>261</b>
13.0.1	Corrigez vous vous-même . . . . .	261
13.0.2	Les exercices . . . . .	261
13.1	Limites et continuité . . . . .	273
13.2	Suites numériques . . . . .	280
<b>14</b>	<b>Correction de certains exercices</b>	<b>285</b>
<b>Appendix</b>		<b>287</b>
A	Foire aux questions . . . . .	287
A.1	Division euclidienne de polynômes . . . . .	287
A.2	À venir... . . . .	288
A.3	Angles dans un parallélogramme . . . . .	289
<b>A</b>	<b>GNU Free Documentation License</b>	<b>291</b>
A	Preamble . . . . .	291
B	APPLICABILITY AND DEFINITIONS . . . . .	292
C	VERBATIM COPYING . . . . .	293
D	COPYING IN QUANTITY . . . . .	294
E	MODIFICATIONS . . . . .	294
F	COMBINING DOCUMENTS . . . . .	296
G	COLLECTIONS OF DOCUMENTS . . . . .	297
H	AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS . . . . .	297
I	TRANSLATION . . . . .	297

J	TERMINATION . . . . .	298
K	FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE . . . . .	298
L	RELICENSING . . . . .	299
M	ADDENDUM : How to use this License for your documents . . . .	299

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Sources

- Le cours *Mécanique et énergie* du « site de la famille GG ». [www.cvgg.org](http://www.cvgg.org).
- [wxMaxima](#) pour l'étude de certaines fonctions, la préparation de graphiques et beaucoup de calculs.
- [Le site de Guillaume Connan<sup>1</sup>](#), et les questions pas toujours idiotes que Tehessin le rezeen y pose à son ô maître Mathémator. Bourré d'humour et d'excellentes explications mathématiques. La mad tea party de la page [137](#) en est l'emprunt le plus direct.
- Le forum usenet de physique<sup>2</sup> pour la linéarité des transformations de Lorentz et une fructueuse discussion sur la maximalité de la vitesse de la lumière.
- Wikipédia pour des liens hypertexte et pour le second degré.
- Des discussions avec diverses personnes ayant lu des parties du texte.
- les questions de mes élèves particuliers,...
- ...des idées glanées par-ci par-là dans les cours —parfois très bien faits— de leurs profs. Que ceux qui se sentent visés soient remerciés de mettre des cours de qualité entre les mains des enfants ; qu'ils soient consolés que lesdits élèves parviennent encore à se faire morfler et à avoir besoin de cours particuliers ; et qu'ils n'hésitent pas à poster sur <http://www.enseignons.be/>.

Je m'en voudrais de ne pas citer le cours de math libre [sesamath<sup>3</sup>](#), dont je ne me suis pas inspiré de façon directe, mais qui peut quand même intéresser la lectrice de ces lignes.

---

<sup>1</sup>À qui j'aurais pu téléphoner, mais...

<sup>2</sup><http://groups.google.fr/group/fr.sci.physique/topics?hl=fr>.

<sup>3</sup><http://sesamath.net/>

## 1.2 Un cours de physique libre

Ces notes ainsi que les sources  $\text{\LaTeX}$  sont librement publiées sur internet, cela signifie entre autres que chaque lectrice ou lecteur a le droit par tous les moyens de copier, modifier et redistribuer tout ou une partie du texte. En cela, je voudrais utiliser la puissance de l'internet pour mettre à portée de toutes et tous certaines connaissances en physique trop souvent confinées dans des manuels scolaires forts coûteux. J'espère qu'à l'avenir, la publication de textes libres d'enseignements fera à substantiellement baisser le prix de la scolarité.

Le partage est ce qu'on a trouvé de mieux pour propager la connaissance. De nombreuses autres initiatives internautes suivent cette idée. Citons Linux<sup>4</sup> (qui fournit des tonnes de logiciels dans un esprit de liberté), l'encyclopédie libre Wikipedia<sup>5</sup> et le (moins connu mais non moins intéressant) projet mutopia<sup>6</sup> qui a pour ambition de publier sous format électronique et libre des partitions musicales tombées dans le domaine public (avis aux fans de musique). La plupart des sources données plus haut sont également publiées dans un esprit de partage libre.

## 1.3 Originalité de ce texte

Le peu d'expérience de l'enseignement dont l'auteur de ces lignes peut se vanter sont trois sessions d'août d'Échec à l'échec et un bon nombre de cours particuliers, presque toujours entre la quatrième et la sixième secondaire. Les moments qui font plaisir, c'est quand un élève dit « eh bien ! en fait c'est pas n'importe quoi la physique, maintenant que je comprends comment ça marche c'est chouette ».

J'ai donc développé une série de théories personnelles sur la façon dont il faudrait enseigner la physique et la mathématique. Je me suis donc mit à taper à l'ordinateur les mots que j'aurais dit si j'avais à expliquer oralement.

Parmi mes idées sur l'enseignement de la physique, celles qui diffèrent des cours « traditionnels » sont plus ou moins celles-ci :

- je donne une préférence aux mots plutôt qu'aux formules : il ne s'agit pas de retenir que  $P = F/S$ , mais que « Pression égal force divisé par surface ».
- des exemples, des exemples, des exemples et encore des exemples, (sur ce point je ne suis pas encore du tout satisfait de mon résultat)
- de l'humour, c'est marrant et ça détend l'atmosphère,
- une définition peut avoir deux utilités : l'utilité première est d'être sûr que deux personnes parlent de la même chose quand elles utilisent le même mot ;

---

<sup>4</sup>[www.ubuntu.org](http://www.ubuntu.org)

<sup>5</sup>[www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

<sup>6</sup>[www.mutopiaproject.org](http://www.mutopiaproject.org)

la seconde est d'avoir une correspondance entre les objets physiques étudiés et les objets mathématiques précis qui les décrivent. Je ne comprends pas pourquoi on assomme les enfants avec des définitions compliquées. Pourquoi définir une « mesure » comme une « comparaison avec une grandeur de même nature choisie arbitrairement comme étalon » ? Je suis sûr que la moitié des élèves qui connaissent cette définition n'ont pas été voir *étalon* au dictionnaire.

- De la rigueur mathématique. Ça ne fait pas de mal de faire remarquer que la vitesse se trouve en dérivant la position, et que bien souvent les conditions d'existences qui arrivent dans les résolutions d'équations décrivent des situations où la physique même du problème devient absurde. (vitesse infinie, bille qui roule sur un plan vertical). Un honnête personne de nos jours doit au moins une fois dans sa vie avoir entendu que la mathématique a une capacité à décrire la nature qui demeure au bas-mot étonnante.
- Il y a je crois une grande différence entre la pédagogie de la mathématique et celle de la physique : en mathématique quand on remplace les lettres par des chiffres on comprend mieux. Si on ne comprend pas que  $ax = b \Rightarrow x = b/a$ , on peut regarder avec des nombres :  $5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 2 = 10/5$ , et on comprend mieux. En physique ce n'est pas vrai. Je ne crois pas qu'on comprend mieux la physique de ce qu'il se passe dans un exercice quand on remplace systématiquement toutes les lettres par les données de l'énoncé. Au contraire : le fond de la physique se trouve dans la manière dont les différentes grandeurs physiques se combinent (ou se simplifient !) dans les équations. Toute cette dynamique se perd quand on écrit des nombres à la place des lettres.
- La physique est une science vivante. Il reste de nombreuses questions ouvertes. Certaines peuvent être énoncées sans connaissances très pointues, comme par exemple la miraculeuse coïncidence entre la masse dans la formule d'inertie  $F = ma$  et la *même* masse qui intervient dans la formule de l'énergie potentielle de gravitation  $E = mgh$ . La gravitation est liée à l'inertie d'une façon que personne ne comprend bien. Il y a un prix Nobel à prendre sur la question. Comme disait mon prof de relativité : « En relativité générale, on postule l'égalité de la masse inertielle avec la masse pesante ; mais c'est pas pour ça qu'on comprend mieux ».

Je crois pouvoir dire que dans le cadre de cours particuliers, ce petit programme a souvent été efficace. J'ai bien entendu eut des élèves qui sont restés indifférents à la physique et qui se sont contentés de réussir leur examen dans l'apparente ignorance de la beauté de la chose. Mais j'ai également eut des élèves qui ont finit par accepter que c'est amusant de réfléchir à un problème de physique quand on comprend ce qu'il veut dire.

Ici, ce sont des notes écrites dans lesquelles j'ai essayé de remettre ce que j'ai dit à différents élèves. On verra.

## 1.4 Rappels

### Conseils de travail

- a. Convertis les unités donnés en unités SI.
- b. Fais des scraboutchas, des oeuvres, des schémas, gribouilles, ce que tu veux mais dessines ! Comme tu le vois, ce manuel contient un certain nombre de dessins. Ils ne sont pas faits pour être regardés avec admiration béate ; ils sont faits pour inspirer les dessins que tu feras sur ta feuille. Tu dois comprendre le sens des dessins et être capable de les réinventer.
- c. Si on te parle d'un triangle quelconque, n'en dessine pas un équilatéral, isocèle ou rectangle.
- d. Écris de phrases complètes sur ton papier de brouillon. N'écris pas «  $R_c = 3$  et  $v_A = 10$  » mais « Le rayon du cylindre est 3 m et la vitesse de  $A$  est 10 m/s ».

En particulier, méfies toi des « formules » toute faites. Le symbole  $F$  peut très bien désigner, d'après le contexte, une force quelconque ou un frottement ; tout comme  $P$  peut désigner la pesanteur, la pression ou la puissance. Ces symboles peuvent donc arriver dans plusieurs formules qui ne peuvent absolument pas être comparée. Donc il vaut toujours mieux un long discours qu'une petite formule.

Tu dois pouvoir donner avec des mots la signification de tous les symboles que tu écris.

- e. On n'efface pas une faute : on la barre proprement. Quand tu étudieras, il est tout aussi important de *comprendre* les fautes que tu as faites que de comprendre les réponses justes. Si tu ne comprends pas pourquoi tu as fait une faute une fois, tu referas la faute.
- f. Dans le même ordre d'idée, exit les correcteurs et tip-ex : quelque chose que tu crois faux pendant 10 secondes peut très bien être vrai. Ce serait bête de perdre l'idée pour quelques instants de doute.
- g. Quand tu as la réponse, prends une feuille blanche, et récris *proprement et à fond* toutes les étapes du raisonnement

Ce n'est pas au moment où tu peux dire par coeur une définition que tu *connais* la définition. La physique est une science qui étudie la réalité ; l'étude des mots



compliqués qui rentrent dans une définition est du ressort de la **lexicographique** ou de la **sémantique** et n'a aucun intérêt ici.

Pour voir si tu as compris une définition, tu dois pouvoir donner des exemple avec de préférence des objets que tu as sous les yeux au moment où tu lis la théorie – dans ta chambre, dans ta classe, sur ton lit ou dans ta douche. Tu dois également être capable d'expliquer pourquoi tel ou tel exemple rentre bien dans la définition donnée.

### 1.4.1 Avertissement

J'essayerai de ne faire aucun effort pour avoir une notation constante dans le texte. Les distances seront parfois notées  $l$  (comme longueur), parfois  $d$  (comme distance), la force de pesanteur sera notée indifféremment  $\vec{G}$  (comme gravitation) ou  $\vec{P}$  (comme pesanteur) à ne pas confondre avec le  $P$  de la puissance ou celui de la pression. Pourquoi ? Parce que je ne veux pas que tu retiennes des formules sous forme analytique : pas question de retenir  $G = mg$  ou  $W = Fd$ . Il faut retenir

force de gravitation sur un objet = masse de l'objet fois constante  $g$ ,

et

travail d'une force qui bouge = grandeur de la force fois le déplacement.

### 1.4.2 Du système international

Les unités se répartissent en trois catégories : les unités *de base* du système international (SI), les unités *dérivées* et les unités *hors SI*. Afin d'éviter les erreurs de calcul, il est *hyper-important* (!!) de n'utiliser que les unités du SI et ses dérivées.

#### Les unités de base

**masse** kilogramme, noté kg

**longueur** mètre, noté m

**temps** seconde, noté s

**courant électrique** ampère, noté A.

#### Les unités dérivées

Ce sont toutes les unités qu'on peut obtenir en multipliant ou divisant les unités fondamentales entre-elles. Les plus courantes sont données dans le tableau 1.1.

Toutes les autres unités sont à proscrire et à convertir avant de commencer quoi que ce soit.

Quantité	Unité	Abréviation	Conversion
Force	newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Énergie et travail	joule	J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Puissance	watt	W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Pression	pascal	Pa	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}^2$
Fréquence	hertz	Hz	$\text{s}^{-1}$

TAB. 1.1 – Les unités les plus courantes qui sont valables dans le système international.

**longueurs** centimètres, kilomètres, années-lumière, ... → mètres

**temps** jours, années, minutes, heures, ... → secondes

**vitesse** kilomètres/heures, ... → mètres/seconde

### Exemple 1.

Un exemple où on a l'impression que ce blabla ne sert à rien : un train avance à 240 km/h pendant une heure et demi. On multiplie 240 par 1,5 et on trouve bien que la distance parcourue est 360 km.

Pour bien faire, on devrait convertir  $120 \text{ km/h} = 33.333 \text{ m/s}$  et  $1.5 \text{ h} = 5400 \text{ s}$  puis multiplier pour trouver 180000 m, qui est effectivement la même chose que 180 km, mais obtenu de façon plus compliquée.

### Exemple 2.

Un exemple où l'on remarque que c'est important : une pierre est en chute libre pendant 2 minutes. Pour trouver la distance parcourue, on fait  $gt^2/2$  avec  $t = 2$  et  $g = 9,81$ . On trouve 19.62. Et c'est faux. Pourquoi ? Parce que quand on prend la peine d'écrire les unités, on remarque que  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Dire «  $g = 9.81$  », ça présuppose donc déjà un choix d'unité !

En fait à chaque fois qu'on utilise une constante physique « qu'on connaît par coeur » sans convertir les données en système SI, on va droit dans le panneau.

## 1.4.3 Le point matériel

Un corps matériel occupe un volume et possède une masse. Souvent, le volume occupé est petit par rapport au volume ambiant. Par exemple si on dit que la maison de la schtroumfette est à 25 m de celle du grand schtroumpf, on fait « comme si » les deux maisons étaient des points dans le village ; il est en effet possible que la penderie de bonnets rouges du grand schtroumpf soit à 24 m de la porte d'entrée de la schtroumfette ou que le PC de la schtroumfette soit à 27 m de la réserve secrète d'alcools du grand schtroumpf. Quoi qu'il en soit, la plupart du temps, on décrit la position des maisons avec des espèces de moyennes sans tenir compte de

la structure interne des maisons.

Autre exemple : la croix sur la carte au trésor indique juste un point de l'île, sans préciser si ce point est le coin arrière gauche ou avant droit du coffre. Le pirate a fait comme si le coffre était juste un point. À moins que le butin soit vraiment énorme ou que l'île soit minuscule, le trésor est bien un point par rapport à l'ensemble de l'île.

**Définition 3.**

*Lorsque un objet est petit par rapport à l'espace dans lequel il se déplace, nous faisons souvent comme si il se réduisait à un seul point. Cette approximation est ce que nous appelons l'hypothèse du **point matériel**.*

Dans les problèmes où la masse de l'objet est importante, le point que l'on confond avec l'objet complet est le *centre de gravité* du corps matériel.

**Exemple 4.**

Les objets suivants peuvent être considérés comme des points matériels.

- a. Un vélo qui se déplace entre Pékin et Madrid
- b. un ballon sur un terrain de football,
- c. la lune autour de la terre,
- d. une mouche dans la cuisine.

**Exercice 1.**

Donnez d'autres exemples de point matériel. Donnez aussi quelque exemples de choses qui ne sont pas des points matériels, comme le blanc dans un oeuf, par exemple. Donnez en particulier une situation dans laquelle une rame de métro n'est pas un point matériel.



# Chapitre 2

## Principes généraux de la physique

Ce chapitre a pour objectif de parler de quelque principes généraux de la physique qui transcendent l'une ou l'autre matière précise.

### 2.1 Homogénéité et isotropie

#### 2.1.1 Homogénéité de l'espace

En physique, nous supposons que l'espace est homogène, c'est à dire qu'il n'y a pas un lieu privilégié. Voici deux façons de se représenter ce principe :

- Il n'y a pas un endroit dans l'univers où un panneau est planté pour dire « ici c'est l'endroit de référence »,
- si on fait la même expérience à deux endroits différents, on doit obtenir le même résultat.

Ce principe n'est évidemment correct que si *tous* les paramètres de l'expérience sont reproduits. Si mon expérience est de voir à quelle température l'eau entre en ébullition, j'aurai un résultat différent ici ou au sommet de l'Éverest (pour des questions de pression). Mais si je me mets ici dans un caisson à la pression du sommet de l'Éverest, je trouverai le bon résultat.

Une importante conséquence de ce principe est le fait que si une expérience dépend de la position de deux points, en fait le résultat ne peut dépendre que de la *différence* entre les deux points, et non de leur position exacte dans l'espace. L'exemple le plus simple est de mettre par exemple deux aimants en présence. Ils vont s'attirer avec une certaine force. Je ne sais pas cette force, mais je sais que si le premier aimant est à la position  $\vec{r}$  et le second à la position  $\vec{r} + \vec{a}$ , cette force ne dépendra que de  $\vec{a}$ , c'est à dire de la position relative de l'un par rapport à l'autre, mais pas de leur position absolue dans l'espace.

### 2.1.2 Homogénéité du temps

Prenons un exemple. Tu veux étudier un pendule. Tu lance ton chrono quand tu rentre dans le labo, tu marche à ton aise vers le pendule, tu prends l'extrémité du pendule, tu la déplace un peu. Au moment de lâcher, tu regardes où en es ton chrono. Tu notes le résultat : une minute et vingt cinq secondes. Le pendule fait un aller-retour. Au moment où il a fini, tu regardes à nouveau ton chrono et tu notes le résultat : une minute et vingt sept secondes.

Le principe d'homogénéité te dit que toutes les caractéristiques mesurables du pendules sont contenues dans les *différences* de temps. En l'occurrence, la période du pendule sera la différence entre une minute vingt sept et une minute vingt cinq, soit deux secondes.

En particulier, l'opération de *somme* entre tes deux mesures n'a pas de sens : la grandeur de deux minutes et cinquante deux secondes n'a aucun rapport avec le pendule !

Si tu refais l'expérience le lendemain, tu lâches le pendule à vingt six heures, trente sept minutes et quatorze secondes ; et une période plus tard, on en est à vingt six heures, trente sept minutes et seize secondes. À nouveau c'est la différence de deux secondes entre les deux mesures qui a un sens physique.

### 2.1.3 Conclusion des homogénéités

Si dans un système de coordonnées spatio-temporel, tu étudies un phénomène en mesurant deux événements intervenant dans le phénomène aux endroits et instants  $(t_0, x_0)$  et  $(t_1, x_1)$ , les seules grandeurs qui caractérisent réellement le phénomène sont la durée  $t_1 - t_0$  et la distance  $x_1 - x_0$ .

### 2.1.4 Isotropie de l'espace

## 2.2 Le principe de relativité

Le **principe de relativité** est un des plus vieux principes physique : il remonte à **Galilée**. Son contenu est assez simple.

#### Loi numéro 1.

*Les lois de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie. En d'autres termes, si vous êtes dans une pièce fermée, il n'existe aucune expérience qui vous permet de savoir si vous êtes au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.*

Une conséquence remarquable de ce principe est qu'il est possible de jongler dans le métro entre deux stations. En effet, tant que le métro avance à une vitesse

constante, tout se passe exactement comme si il était à l'arrêt, et les balles se comporteront exactement comme dans ton salon.

Autre conséquence. Un principe général en science<sup>1</sup> est que si il n'existe pas d'expériences pour distinguer deux choses alors les deux choses doivent être considérées comme équivalentes. Par conséquent, on ne peut pas définir de *repos absolu* parce qu'il serait impossible à distinguer du mouvement rectiligne uniforme. Toute personne se déplaçant en MRU a le droit de se considérer au repos et de dire que c'est le reste de l'univers qui se déplace.

---

<sup>1</sup>En sciences, j'entends en *vraies* sciences ; exit l'astrologie, la philosophie, la graphologie, la psychologie, les sciences politiques, la sorcellerie et autres charlatanismes.





# Chapitre 3

## Optique géométrique

### Introduction : propagation de la lumière

Tu remarqueras qu'une bonne lampe de poche envoie de la lumière dans une seule direction. On parle de **faisceau de lumière**. Et pourtant tu sais bien que l'ampoule éclaire dans tous les sens. Ce qu'il se passe est qu'une ampoule envoie des rayons dans tous les sens, mais qu'une lampe de poche est munie d'un système pour dévier les rayons qui ne vont pas dans le bon sens, de telle manière à ce que, au final, la lampe de poche émette un faisceau lumineux.

Nous allons considérer que la lumière se compose de **rayon lumineux** : elle se propage en ligne droite.

Un faisceau est composé de plusieurs rayons (disons au moins des millions par centimètre carré) qui peuvent être parallèles, divergents ou convergents.

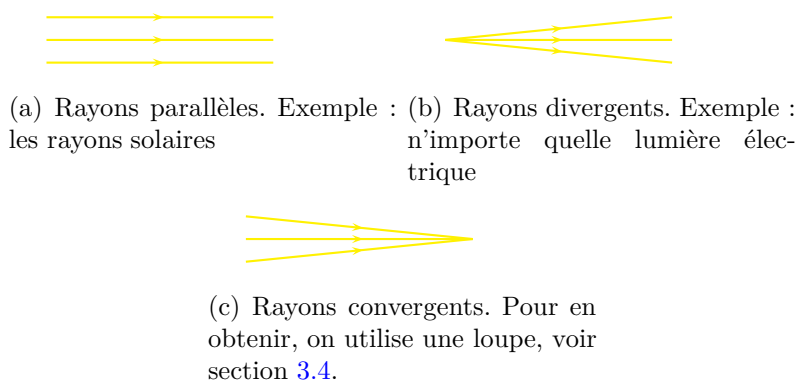


FIG. 3.1 – Dispositions possibles des rayons lumineux dans un faisceau

La théorie de la lumière basée sur l'idée que la lumière suit des rayons rectilignes est baptisée l'**optique géométrique** parce que la majorité des raisonnements et

des résultats s'obtiennent en calculant des angles et des intersections sur des figures géométriques.

L'optique géométrique n'est qu'une toute petite partie de l'optique. Tu verras peut-être plus tard une description plus précise des phénomènes lumineux en optique ondulatoire. Si tu manges vraiment beaucoup de soupe, et que tu choisis de faire des études poussées en physique, tu verras l'arme absolue des théories de la lumière : l'optique quantique. Ceci pour dire que ce dont on va parler ici n'est pas du tout le dernier mot de l'histoire... Ce cours concerne des choses qui sont essentiellement connues depuis les dix-sept et dix-huitième siècle !

## 3.1 Réflexion et réfraction de la lumière

### 3.1.1 Réflexion et réfraction

Considère deux milieux transparents (air, plastique transparent, verre ou eau), et envoie un rayon lumineux oblique de l'un vers l'autre. Prend par exemple une latte en plastique et capte un rayon de Soleil avec. Tu sais qu'une partie de la lumière subit une réflexion : c'est pour ça que tu peux t'amuser à éblouir les gens en envoyant le rayon réfléchi sur leurs yeux.

Mais tu sais aussi que cette réflexion ne rend pas le plastique opaque pour autant : une partie de la lumière rentre dans le plastique (et en ressort, mais c'est une autre histoire). La partie de la lumière qui rentre dans le plastique est dite **réfractée**

Il se fait que le rayon réfracté (la partie qui rentre dans le plastique, dans l'eau ou le verre) est déviée au passage. Cela ne se voit pas très bien dans le cas de la lumière solaire captée par la latte en plastique, mais cela se voit par contre très bien quand tu plonge un bout de bois dans de l'eau : à l'endroit où il entre dans l'eau, il semble cassé. Le rayon provenant du bâton sort de l'eau avec une « déviation ». Ceci est montré sur la figure 3.2.

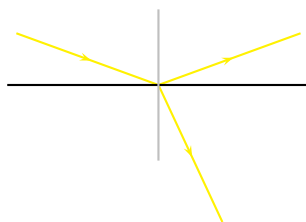


FIG. 3.2 – Réflexion et réfraction d'un rayon lumineux qui passe d'un milieu moins réfringent à plus réfringent

Avec certaines surfaces, presque tous les rayons lumineux sont réfléchis, et seule

une petite partie est absorbée. Dans ce cas, il n'y a quasiment pas de rayon réfracté, et on a alors un miroir.

### 3.1.2 La réflexion

Étudions plus spécifiquement le rayon réfléchi. Assez logiquement, le rayon incident va simplement « faire ricochet » sur la surface, et donc repartir avec un angle égal à l'angle d'arrivée, d'où les deux lois suivantes :

#### Loi numéro 2.

*Les rayons incidents et réfléchis sont dans un même plan perpendiculaire à la surface. Ce plan est appelé le plan d'incidence.*

#### Loi numéro 3.

*L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion  $\hat{i} = \hat{r}$ .*

Nous allons donner une preuve de ces deux lois dans la sous section 3.1.4 en utilisant un petit peu d'optique ondulatoire. L'important est de retenir que ces deux lois ne sont pas « évidentes » en soi, mais sont la partie émergée de l'iceberg qu'est le comportement ondulatoire de la lumière. Une description complète du phénomène demande de voir la lumière comme une onde électromagnétique. Cela devient vite très compliqué.

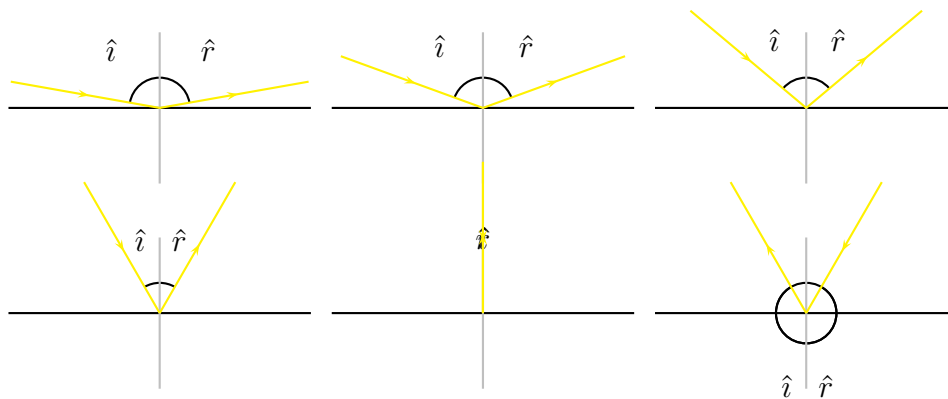


FIG. 3.3 – Divers rayons réfléchis

On parle de temps en temps d'une troisième loi qui a au moins le mérite d'avoir un nom marrant ; je te laisse juger.

#### Loi numéro 4 (Loi du retour inverse).

*Les lois de la réflexion sont indépendantes du sens de parcours de la lumière.*

Cette loi n'en n'est cependant pas une parce qu'elle peut se déduire des deux premières, comme montré sur la figure 3.4.

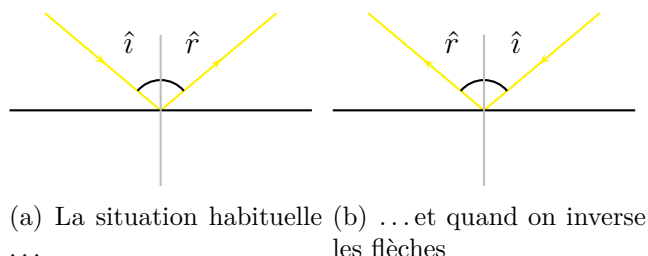


FIG. 3.4 – La loi du retour inverse : comme  $\hat{i} = \hat{r}$ , les deux dessins sont interchangeables et la loi du retour inverse est une évidence.

### 3.1.3 La réfraction

Lorsque la lumière change de milieu, elle dévie. Pour t'en convaincre, prends un verre d'eau et enfonce ton crayon dedans (je ne rigole pas : fais-le!). Tu observes qu'au passage de l'air à l'eau, le crayon est comme « cassé ». Je ne connais hélas pas de moyens simples pour prouver que les choses sont ainsi, mais c'est ainsi. Oublions un instant le rayon réfléchi, et regardons la figure 3.5.

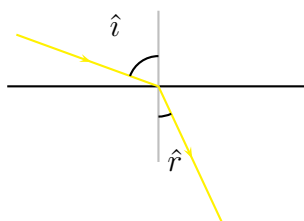


FIG. 3.5 – Un rayon lumineux est réfracté en entrant dans un verre d'eau

La réfraction obéit à deux lois.

#### Loi numéro 5.

*Les rayons incidents, réfléchis et réfractés sont dans un même plan, perpendiculaire à la surface. Ce plan est appelé le plan d'incidence.*

#### Loi numéro 6 (Loi de Snell- Descartes).

*L'angle d'incidence et de réfraction sont liés par la relation*

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = n_{2/1} \quad (3.1)$$

où  $n_{2/1}$  est l'**indice de réfraction** du milieu 2 par rapport au milieu 1. On l'appelle aussi l'**indice de réfraction relatif**.

Exemples d'indices de réfraction relatifs :

- $n_{\text{verre/air}} = 3/2$ ,
- $n_{\text{diamant/air}} = 2.42$ ,
- $n_{\text{eau/air}} = 4/3$ .

### 3.1.4 Loi de Snell-Descartes et vitesse de la lumière

**Avertissement** La preuve apportée ici à la loi de Snell-Descartes utilise le fait que la lumière se comporte comme une onde. La notion de front d'onde sera utilisée. Le niveau est donc un peu plus élevé que d'habitude.

Le phénomène de réfraction est dû à une différence de vitesse de propagation de la lumière entre deux milieux. Prenons l'exemple de l'air et de l'eau. Dans l'air, la lumière parcourt environ 300 000 km/s, tandis que dans l'eau cette vitesse n'est que de 225 000 km/s.

Considérons un paquet de rayons de lunes parallèles qui arrivent à la surface d'un étang par une belle nuit étoilée. Tant que la lumière ne touche pas du tout l'eau, tous les rayons avancent ensemble, au moment où des rayons commencent à pénétrer dans l'eau, les choses commencent à se compliquer. Durant le temps entre le moment où le premier rayon entre dans l'eau et le moment où les deux autres y parviennent, le premier rayon avance moins vite que les deux suivants. On voit alors tout de suite que le tout ne va plus avancer en un bloc, mais se déformer.

Il est donc clair qu'il va se passer quelque chose. Pouvons-nous voir plus précisément ce qui va se passer ?

#### Exercice 2.

Le rayon de la Terre vaut 6500 km à l'équateur. Combien de tours de la Terre la lumière peut-elle faire en une seconde. Le Soleil se trouve à 149 600 000 km de la Terre. Combien de temps mets la lumière solaire pour arriver jusqu'à nous ?

Mars se trouve à 227 900 000 km du Soleil. Quelle est la distance minimale que l'on peut espérer trouver entre la Terre et le Soleil ? Combien de temps il faut à la lumière pour aller de la Terre à Mars dans ces conditions ? Cela incite à la plus grande prudence quand on télécommande des robots sur Mars depuis la Terre, et peut poser des problèmes pratiques quant à l'organisation d'un tournoi d'échecs interplanétaire.



(a) Le trait bleu pointillé représente le trajet que le rayon  $B$  doit encore parcourir avant d'arriver sur l'interface au moment où le rayon  $B$  vient d'y arriver

(b) Où le rayon  $A$  a-t-il pu aller durant ce temps ?



(c) Pas correct

(d) Correct

FIG. 3.6 – Réfraction : étude de la physique du phénomène.

### Physique de la réfraction

Étudions en détail les trajets suivis par deux rayons lumineux parallèles  $A$  et  $B$  qui arrivent sur une interface, voir les figures 3.6. Disons que leur vitesse vaut  $v_1$  dans le premier milieu et  $v_2$  dans le second. On suppose  $v_2 < v_1$ .

La figure 3.6(a) montre la situation au moment où le rayon  $A$  arrive à l'interface : à ce moment il va se passer quelque chose pour lui, tandis que  $B$  doit encore parcourir le trajet bleu avant d'avoir à se soucier de quoi que ce soit. Le front d'onde est dessiné en vert et est, comme il se doit, perpendiculaire aux deux rayons en même temps.

Un peu plus tard, le rayon  $B$  arrive à l'interface, c'est la figure 3.6(b). Durant le temps que le rayon  $B$  a mis pour arriver là (c'est à dire le temps pour lui de parcourir le trajet bleu de la figure 3.6(a)), le rayon  $A$  a pu parcourir dans le second milieu une distance  $v_2/v_1$  fois moins longue. Ce rayon est donc quelque part sur le demi-cercle rouge dont le rayon vaut  $v_2/v_1$  fois la longueur du trajet bleu.

Le fait physique qui permet de déterminer à quel endroit du cercle rouge se trouve le rayon  $A$  est le suivant : le front d'onde doit être perpendiculaire au rayon. Il faut donc qu'un segment allant du bout du rayon  $A$  vers le point  $Q$  (qui est le bout du rayon  $B$ ) soit perpendiculaire au rayon  $A$ . En d'autres termes, il faut

trouver la tangente au cercle rouge passant par le point  $Q$ <sup>1</sup>.

Sur la figure 3.6(c), nous avons fait comme si le rayon  $A$  n'était pas dévié. On voit immédiatement que le front d'onde vert n'est pas perpendiculaire au rayon. Ce point n'est pas le bon. Attention : nous ne demandons pas que les deux fronts d'ondes dessinés soient parallèles.

Sur la figure 3.6(d), nous avons soigneusement pris le point de tangence comme destination du rayon  $A$ .

Le travail à présent est de déterminer exactement la déviation en fonction de  $v_1$  et de  $v_2$ .

### Petit retour en arrière : la réflexion

Maintenant qu'on a compris comment les rayons se comportent lors d'un changement de milieu, on peut expliquer la loi des angles égaux lors de la réflexion. En effet entre la figure 3.6(a) et 3.6(b), nous avons supposé que le rayon  $A$  allait continuer à l'intérieur du second milieu. Mais que se passerait-il si au lieu de cela, il retournait en arrière ? Pour la figure 3.7, nous reprenons la situation de la figure 3.6, sauf que cette fois nous traçons le cercle rouge vers le haut plutôt que vers le bas.

Nous reprenons l'argument de la tangente pour dessiner la figure 3.7(c).

### Exercice 3.

Prouvez que les triangles  $PQR$  et  $SRQ$  de la figure 3.7(c) sont identiques, et déduisez-en les relations voulues, c'est à dire essentiellement que les angles  $\widehat{PQR}$  et  $\widehat{SRQ}$  sont égaux.

Pour cela, n'hésitez pas à utiliser les faits que l'angle  $\widehat{QSR}$  est droit, et que les deux rayons lumineux sont parallèles dans le premier milieu.

### Résolution géométrique de la réfraction

La figure 3.8 montre la géométrie du problème de réfraction. Le but est de trouver l'angle  $\beta$  de réfraction (celui entre le rayon réfracté et la normale) en fonction de l'angle d'incidence  $\alpha$  (entre le rayon incident et la normale), en sachant que

$$\|AC\| = \frac{v_2}{v_1} \|DB\|. \quad (3.2)$$

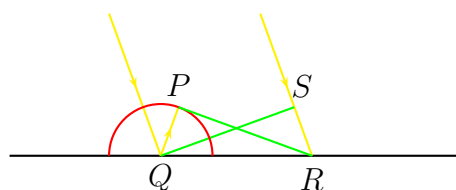
Nous désignons par  $\alpha'$  et  $\beta'$  les angles  $90 - \alpha$  et  $90 - \beta$ , et nous laissons comme exercice le soin de comprendre pourquoi les angles indiqués sont corrects (pensez que dans un triangle rectangle, la somme des deux angles non droit vaut 90 degrés).

---

<sup>1</sup>Ici, on a utilisé un peu de géométrie : une droite qui coupe un cercle en *un seul* point  $R$  est tangente au cercle si et seulement si elle est perpendiculaire au rayon  $\overrightarrow{OR}$ .



- (a) Le trait bleu pointillé représente le trajet que le rayon  $B$  doit encore parcourir avant d'arriver sur l'interface au moment où le rayon  $B$  vient d'y arriver
- (b) Le rayon a pu se réfléchir en allant vers un des points du cercle rouge. Mais le cercle a un rayon de la même taille que le trajet bleu de la figure 3.7(a) parce que la réflexion se fait dans le même milieu que l'incidence



- (c) Le rayon  $A$  se réfléchit de telle façon à ce que le front d'onde soit tangent au cercle rouge

FIG. 3.7 – Réflexion : étude de la physique du phénomène.

En regardant attentivement les triangles rectangles  $ADB$  et  $ACB$ , on trouve que

$$\cos \beta' = \frac{\|AC\|}{\|AB\|} \text{ et } \cos \alpha' = \frac{\|BD\|}{\|AB\|},$$

et donc

$$\frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\|AC\|}{\|BD\|} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (3.3)$$

Dans cette ligne, nous avons d'abord utilisé l'égalité trigonométrique comme quoi  $\cos(90 - x) = \sin(x)$ , et ensuite l'hypothèse (3.2).

Une faute que l'on pourrait commettre est la suivante : étant donné que le front d'onde est toujours perpendiculaire au rayon, il faut que  $\overrightarrow{CB}$  soit perpendiculaire à  $\overrightarrow{DB}$ , de sorte que  $\alpha' + \beta = 90$ . Ce n'est pas le cas parce qu'en fait le front d'onde  $CB$  dessiné n'est valable qu'à l'intérieur du milieu du bas, tandis que le rayon  $DB$  est encore dans le premier milieu.



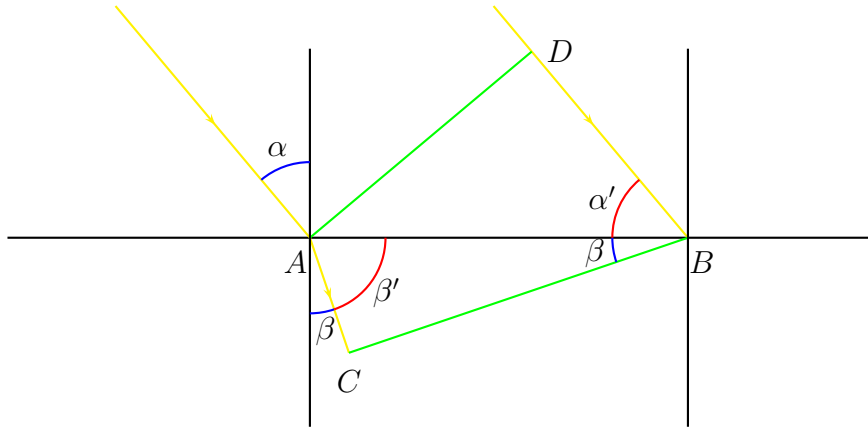


FIG. 3.8 – La réfraction

### Les indices absolus

Reprenons les parties importantes de l'équation (3.3), en changeant de notations (je te laisse deviner ce qui vaut quoi) :

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (3.4)$$

Si on désigne par  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide<sup>2</sup>, et qu'on définit

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2},$$

on peut écrire

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.5)$$

Les nombres  $n_1$  et  $n_2$  sont appelées les **indices absolus** des milieux 1 et 2. En comparant avec l'équation (3.1), on trouve que les indices relatifs sont donnés par les indices absolus par la formule

$$n_{2/1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

### 3.1.5 Réfringence

Si  $n_{2/1} > 1$ , on a que  $\sin \hat{i} > \sin \hat{r}$ , et donc  $\hat{i} > \hat{r}$ . Ce cas est illustré sur la figure 3.9(a) ; le cas inverse est donné à la figure 3.9(b). Par exemple, l'eau est plus réfringente que l'air.

Les deux règles que l'on déduit sont :

---

<sup>2</sup>Environ  $3 \cdot 10^8$  m/s.

- Un rayon lumineux passant d'un milieu moins réfringent dans un milieu plus réfringent se rapproche de la normale.
- Un rayon lumineux passant d'un milieu plus réfringent dans un milieu moins réfringent s'écarte de la normale.

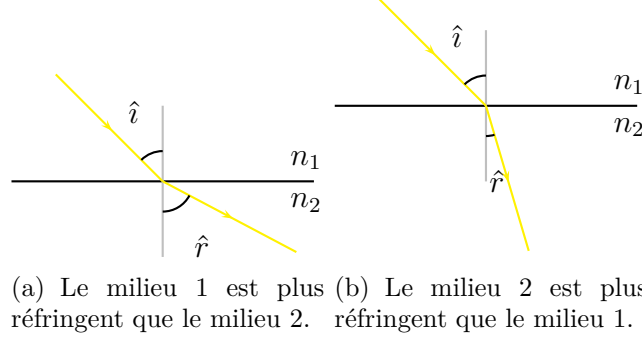


FIG. 3.9 – Second milieu plus ou moins réfringent que le premier.

### 3.1.6 Construction du rayon réfracté

Nous nous donnons comme but de construire (par dessin) le rayon réfracté lorsqu'on connaît l'indice de réfraction et le rayon incident. Nous nous donnons la situation de la figure 3.10(a) où un rayon  $AO$  arrive à la surface de séparation (la droite  $XY$ ) entre de l'air et de l'eau ( $n_{\text{eau/air}} = 4/3$ ).

D'abord nous faisons un choix d'unité sur l'axe  $XY$ , et on place  $C$  à 4 unités de  $B$ . De là, on élève la perpendiculaire à  $XY$  qui intersecte  $AO$  au point  $A'$ , et on trace le cercle de rayon  $\|OA'\|$  de centre  $O$ . Cela nous amène à la figure 3.10(b).

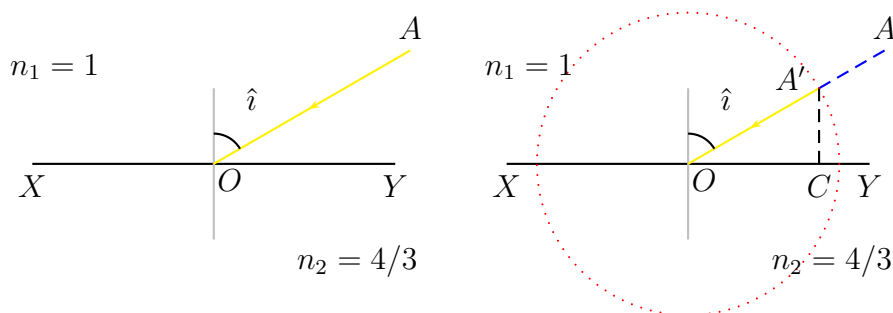
Maintenant on place le point  $D$  à 3 unités de  $O$ , et on trace la perpendiculaire qui intersecte le cercle en  $E$ . Le rayon recherché est  $OE$ , ce qui nous amène à 3.10(c). En effet, nous avons par construction que  $\|BA'\| = \|BE\|$  (parce que  $A'$  et  $E$  sont sur le même cercle), et donc

$$\frac{4}{3} = \frac{\|BC\|}{\|BD\|} = \frac{\|BC\| / \|BA'\|}{\|BD\| / \|BE\|} = \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}}.$$

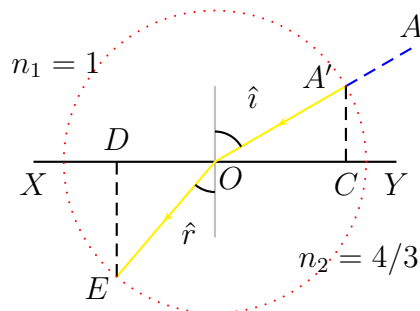
### 3.1.7 Angle limite de réfraction

Lors du passage de l'air vers l'eau, la déviation du rayon réfracté augmente avec l'angle d'incidence, voir figure 3.11. La déviation est maximale quand  $\hat{i} = 90^\circ$ , dans ce cas, on a

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \hat{r}_l} = \frac{4}{3},$$



(a) Comment construire le rayon réfracté dans cette situation ? (b) Une première étape de la construction



(c) La solution

FIG. 3.10 – Construction géométrique d'un rayon réfracté.

et donc  $\hat{r}_l = 48^\circ 36'$ . Il n'est pas possible de faire dévier un rayon plus fort que cet angle en passant de l'air à l'eau.

En général, à chaque fois que l'on passe d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent, il existe un angle limite de réfraction donné par

$$\sin \hat{r}_{\max} = \frac{1}{n_{2/1}},$$

voir la figure 3.11.

### 3.1.8 Réflexion totale

Regardons un peu les conditions d'existence pour  $\hat{r}$  dans la formule (3.5) que l'on écrit sous la forme

$$\sin \hat{r} = \frac{\sin \hat{i}}{n_{2/1}}. \quad (3.6)$$

Le sinus d'un angle ne peut pas être plus grand que 1, donc si on veut que cette formule définisse correctement  $\hat{r}$ , il faut que

$$\sin \hat{i} \leq n_{2/1}.$$

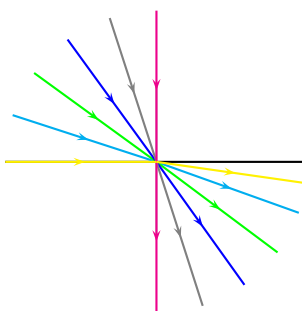


FIG. 3.11 – Comment des rayons incidents de plus en plus rasants se réfractent.

Étant donné que  $\sin \hat{i} \in [-1, 1]$ , on ne risque de faillir à satisfaire cette condition uniquement lorsque  $n_{2/1} < 1$  (on a toujours que  $n_{2/1} > 0$ ). Les problèmes ne peuvent donc arriver que lorsque le rayon passe d'un milieu plus réfringent à un moins réfringent. Par exemple le passage de l'eau à l'air.

Au cas où  $\sin \hat{r} > 1$ , on ne peut pas trouver de  $\hat{r}$ , et le phénomène physique correspondant est qu'il n'y a aucun rayon réfracté : toute la lumière est réfléchie, voir la figure 3.12.

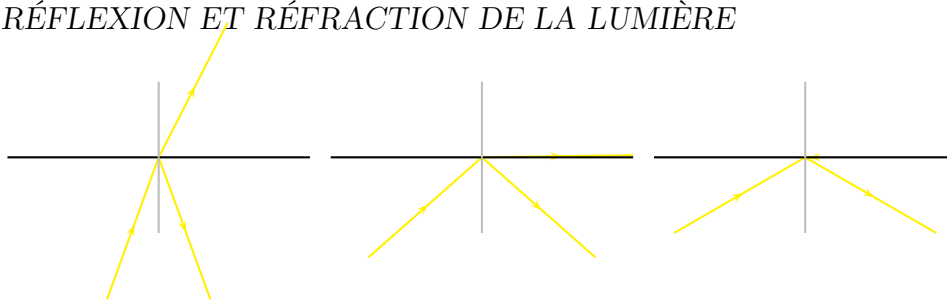
#### Exercice 4.

Si vous voulez expérimenter la réflexion totale à la piscine, est-ce qu'il vous faut une lampe de poche qui résiste à l'eau ? En d'autres termes, allez-vous mettre la lampe sous l'eau et regarder la lumière qui sort de l'eau, ou bien mettre la lampe en dehors de l'eau et regarder la lumière qui rentre dans l'eau ? Le phénomène va-t-il être observé quand la lampe est presque parallèle à l'eau, ou bien au contraire quand elle est presque perpendiculaire ?

L'équation (3.6) donne  $\hat{r}$  par la formule

$$\hat{r} = \arcsin \left( \frac{\sin \hat{i}}{n_{2/1}} \right).$$

Il est remarquable de comprendre que le phénomène de réflexion totale est une manifestation physique tout à fait palpable de la condition d'existence  $|x| \leq 1$  pour la fonction  $x \mapsto \arcsin x$  que tu auras vue dans un cours de math que tu croyais être complètement inutile et abstrait. Eh bien non : cette condition d'existence a un contenu physique, la nature la respecte. C'est un fait très général en science : il semble que la nature s'amuse à suivre des lois mathématiques de façon très rigoureuse.



(a) Un rayon sort de l'eau avec un angle relativement petit par rapport à la normale. (b) Le rayon arrive avec un angle maximum, le rayon réfracté existe encore mais rase l'interface. (c) Maintenant l'angle est trop grand, il n'y a plus de rayon réfracté. Bonne chance pour réaliser ça dans une piscine ou à la mer, à cause des vagues!

FIG. 3.12 – Phénomène de réflexion totale

### 3.1.9 Exercices

#### Exercice 5.

Rien qu'en regardant la figure 3.11, est ce que tu peux dire si le milieu du haut est plus ou moins réfringent que celui du bas ?

#### Exercice 6.

Calculer la vitesse de la lumière ainsi que les angles limite de réfraction pour les milieux suivants vis à vis de l'air (indique si c'est en entrant ou en sortant que cela se produit) :

- le corail,  $n = 1.486$ ,
- le cristal,  $n = 2$ ,
- l'or,  $n = 0.47$ ,
- le sirop de maïs,  $n = 1.5$ .

#### Exercice 7.

Un rayon lumineux passe du verre dans l'air, et l'on observe que le rayon réfracté rase la surface du verre. Quel est l'angle d'incidence ? Trouver la réponse graphiquement et par calcul.

#### Exercice 8.

Et si je te disais que l'angle limite de réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air vers le zircon (cubique) vaut 27.44 degrés, que pourrais-tu dire de l'indice de réflexion du zircon ?

(Réponse :  $n = 2.170$ )

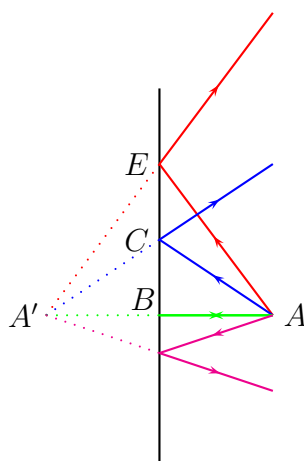


FIG. 3.13 – Différents rayons lumineux issus de  $A$ , et le chemin qu'ils suivent à cause du miroir.

## 3.2 Miroirs plans

### 3.2.1 Le principe général

Lorsqu'une source lumineuse  $A$  est placée devant un **miroir plan**  $M$ , tout rayon issu de  $A$  se réfléchit sur le **miroir**. Les prolongements des rayons lumineux se coupent en un point  $A'$  (voir la figure 3.13) qui sera l'image de  $A$ .

L'œil qui reçoit les rayons réfléchis a l'illusion que ces rayons sont issus du point  $A'$ . On dit que  $A'$  est l'**image** du point  $A$ . Étant donné que cette image ne peut pas être reçue sur un écran (vas voir de **l'autre côté du miroir** de ton salon si tu n'y crois pas), on dit que l'image est **virtuelle**. C'est une **illusion d'optique**.

La figure 3.13 montre le chemin suivi par différents rayons lumineux issus du point  $A$ . Deux choses sont à remarquer :

- toutes les prolongations, notées en pointillés, se coupent au même point,
- le rayon qui arrive perpendiculairement (point  $B$ ) se réfléchit en retournant simplement sur ses pas.

### 3.2.2 Image réelle et image virtuelle

Lorsque l'image d'un objet est formée par l'intersection des rayons lumineux directement issus de l'objet, on dit que l'image est **réelle**. Une image réelle se trouve à un endroit où la lumière passe réellement. L'exemple typique d'une image réelle est un écran de cinéma.

Si par contre l'image de l'objet est située à l'intersection des *prolongements* des rayons réfléchis, nous disons que l'image est **virtuelle**. On ne peut la recevoir sur

un écran. Elle se trouve à un endroit où la lumière ne passe pas réellement ; c'est donc toujours une illusion d'optique. L'image d'un objet par un miroir plan est l'exemple le plus simple d'image virtuelle.

### 3.2.3 Rotation d'un miroir plan

Lorsqu'un miroir plan tourne d'un angle  $\alpha$  autour d'un axe situé dans son plan, le rayon réfléchi tourne d'un angle  $2\alpha$ .

### 3.2.4 Images multiples

Si deux miroirs plans forment un angle de  $90^\circ$  entre eux, et que l'on place un objet  $A$  dans l'angle, on obtient 3 images de  $A$ . Si  $a$  (diviseur de  $360^\circ$ ) est l'angle entre les miroirs, le nombre d'images sera de

$$\frac{360}{a} - 1.$$

Étudions le cas de l'angle droit en regardant la figure 3.14. Les images  $A_1$  et  $A_2$  sont juste les images usuelles par les deux miroirs, pas besoin d'explications pour elles. La troisième image provient du fait que les rayons réfléchis par le miroir  $M_1$  arrivent sur le miroir  $M_2$  et s'y réfléchissent en produisant une image virtuelle  $A_3$ .

À ton avis, où vont se couper les prolongations des rayons rouges et bleus qui se propagent entre les deux miroirs ?

Ce phénomène d'images multiple peut être souvent observé dans les toilettes des trains quand plusieurs miroirs sont placés.

## 3.3 Miroirs sphériques

Cette section va parler de **miroirs sphériques**. Ce sont des calottes sphériques. Selon que la surface intérieure ou extérieure est réfléchissante, le miroir est dit **concave** ou **convexe**.

L'optique des miroirs sphériques se résume en trois règles simples.

#### Loi numéro 1.

*Tout rayon passant réellement ou virtuellement par le centre de courbure se réfléchit sur lui-même.*

#### Loi numéro 2.

*Tout rayon parallèle à l'axe principal se réfléchit en passant réellement ou virtuellement par un point appelé **foyer**.*

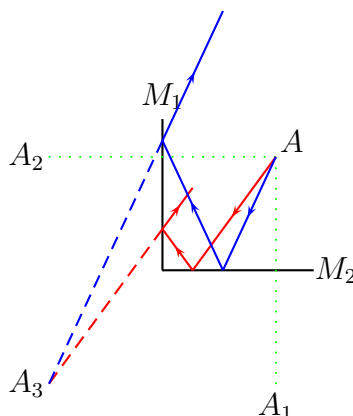


FIG. 3.14 – Comment se construit la troisième image dans le cas de deux miroirs perpendiculaires

### Loi numéro 3.

*Tout rayon passant réellement ou virtuellement par le foyer se réfléchit parallèlement à l'axe principal.*

Le foyer dont il est question dans la seconde loi se trouve sur l'axe principal juste au milieu entre le centre et le miroir. La distance entre le miroir et le foyer  $F$  (voir la figure 3.15) s'appelle la **distance focale** et se note  $f$  :

$$f = \frac{R}{2} \quad (3.7)$$

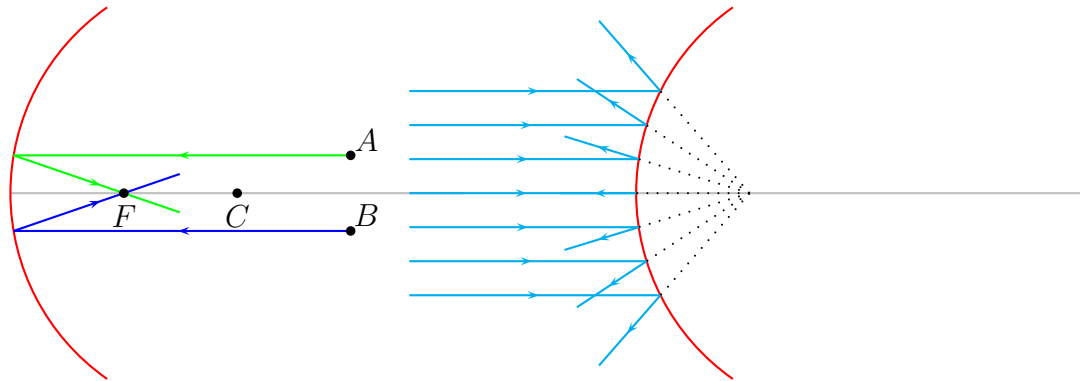
où  $R$  est le rayon du miroir. La figure 3.15 montre des rayons lumineux qui sont réfléchis vers le foyer.

### 3.3.1 Construction de l'image d'un objet

Muni des lois de la page 39, nous sommes à même de construire l'image d'un objet  $AB$ . La figure 3.16 donne un exemple de la construction de l'image d'un point. Lorsqu'on a un segment  $AB$  dont il faut calculer l'image, le plus simple est de choisir l'axe optique de telle façon à contenir le point  $A$  et être perpendiculaire à  $AB$ .

Regardons pas à pas la construction de la figure 3.17. Sur la figure 3.17(a), nous avons tracé le rayon issu de  $B$ , et trouvé son intersection avec le miroir. En vertu d'une des lois (laquelle?) de la page 1, ce rayon va se refléter en passant par le foyer (qui se trouve, rappelons-le, au milieu du segment d'axe optique joignant le centre du miroir et le miroir), comme montré sur la figure 3.17(b). Pour terminer de fixer





(a) Passage réel, miroir concave

(b) Passage virtuel, miroir convexe

FIG. 3.15 – Miroir sphérique : admirez comme tous les rayons parallèles à l'axe se réfléchissent en passant par le foyer !

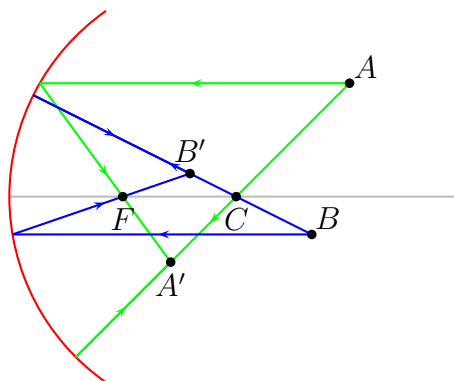
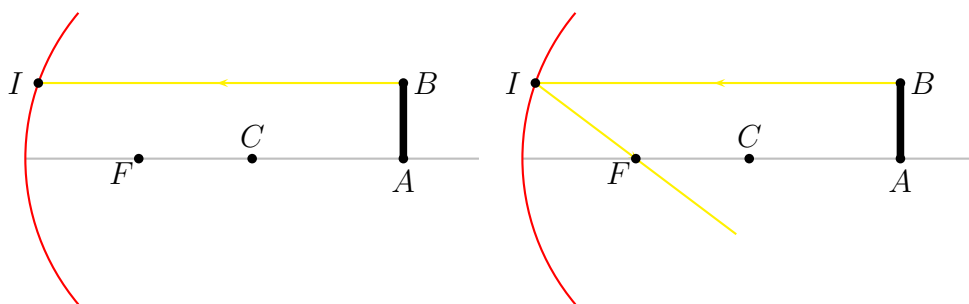
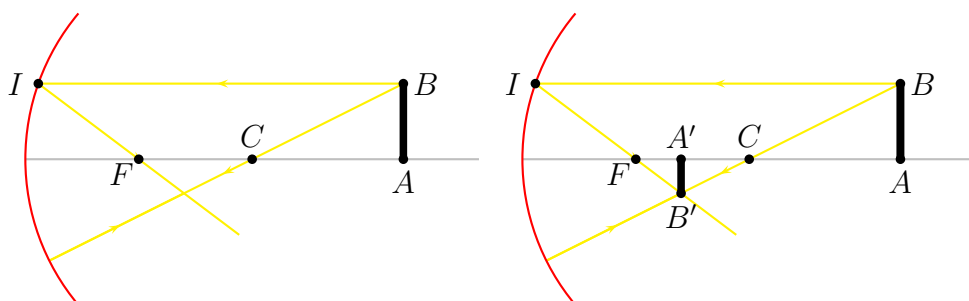


FIG. 3.16 – Miroir sphérique : deux exemples de construction d'images de points. Un peu confus hein ? Essaie de refaire le dessin toi-même, et ça te paraîtra plus simple.



(a) D'abord, tracer le rayon issu de  $A$  parallèlement à l'axe optique, et trouver le foyer point  $I$  où ce rayon tombe sur le miroir



(c) Le rayon issu de  $B$  passant par le centre optique est reflété sur lui-même. (d) L'intersection des deux rayons donne l'image de  $B$ , et permet de construire l'image de l'objet

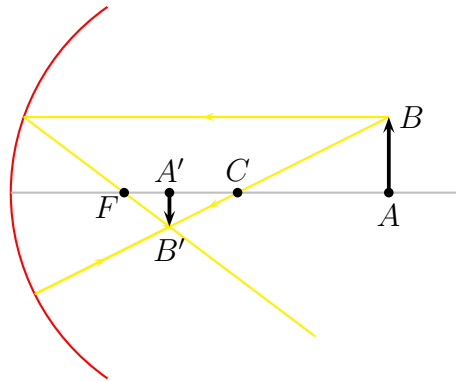
FIG. 3.17 – Construction de l'image d'un objet

l'objet, on construit l'autre chemin facile : celui du rayon issu de  $B$  qui tombe sur le miroir en passant par le centre. Celui-là est dessiné sur la figure 3.17(c).

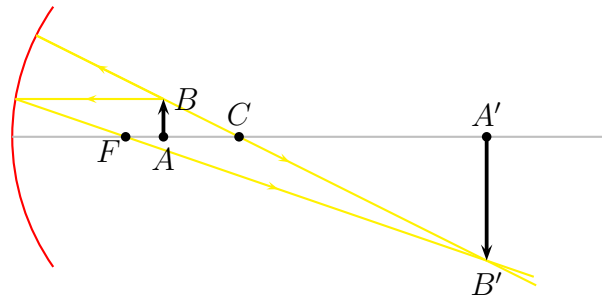
Admironons maintenant sur la figure 3.18 différents cas que l'on peut trouver parmi les miroirs concaves.

Il faut en particulier remarquer le passage virtuel sur la figure 3.18(c) : le trajet que les rayons font en réalité est de se refléter sur le miroir et de diverger (contrairement aux deux autres cas).

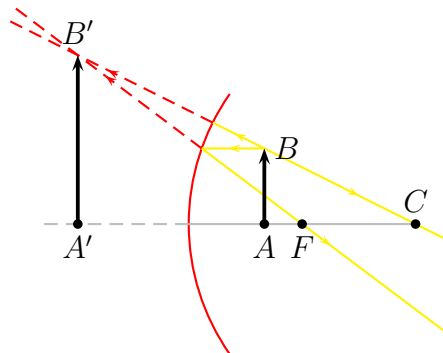
Le cas des miroirs convexes est exactement le même, sauf qu'on a plus souvent des passages virtuels. En suivant la méthode montrée à la figure 3.17, nous obtenons la figure 3.19.



(a) Si l'objet se trouve au-delà du centre de courbure, l'image est renversée et plus petite que l'objet. De plus l'image est faite de rayons issus de l'objet lui-même, elle est donc réelle.



(b) Si l'objet se trouve entre le centre de courbure et le foyer, l'image est renversée, plus grande que l'objet et réelle.



(c) Si l'objet se trouve entre le foyer et le miroir, l'image est droite, plus grande que l'objet et virtuelle. Les lignes en traits discontinus ne correspondent pas à un trajet que la lumière suit réellement : il n'y a pas de lumière à cet endroit.

FIG. 3.18 – Différents cas possibles avec un miroir concave.

### 3.3.2 Quelques formules

En étudiant des triangles semblables sur la figure 3.18(a) par exemple, nous pouvons établir les formules suivantes :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \quad (3.8a)$$

$$-\frac{h'}{h} = \frac{d'}{d} \quad (3.8b)$$

où  $d' = \|SA'\|$  est la distance entre le miroir et l'image de l'objet,  $d = \|SA\|$  est celle entre le miroir et l'objet,  $h = \|AB\|$  et  $h' = \|A'B'\|$  sont les tailles respectivement de l'objet et de son image ( $f$  est la distance focale, c'est à dire la moitié du rayon du miroir sphérique). Nous prenons les conventions suivantes :

- $f$  = distance focale
  - $> 0$  pour un miroir concave
  - $< 0$  pour un miroir convexe
- $d$  = distance de l'objet au miroir,
- $d'$  = distance de l'image au miroir
  - $> 0$  pour une image réelle
  - $< 0$  pour une image virtuelle
- $h$  = hauteur de l'objet
- $h'$  = hauteur de l'image
  - $> 0$  pour une image droite
  - $< 0$  pour une image renversée

Le rapport  $h'/h$  est souvent appelé l'**agrandissement** du miroir.

## 3.4 Lentilles minces

### 3.4.1 Généralités et un peu de vocabulaire

En parlant de lentilles minces, nous n'allons parler que de **lentilles sphériques**, c'est à dire des milieux transparents **homogènes**<sup>3</sup> limité par des surfaces sphériques. Commençons par un peu de vocabulaire :

---

<sup>3</sup>Dictionnaire.

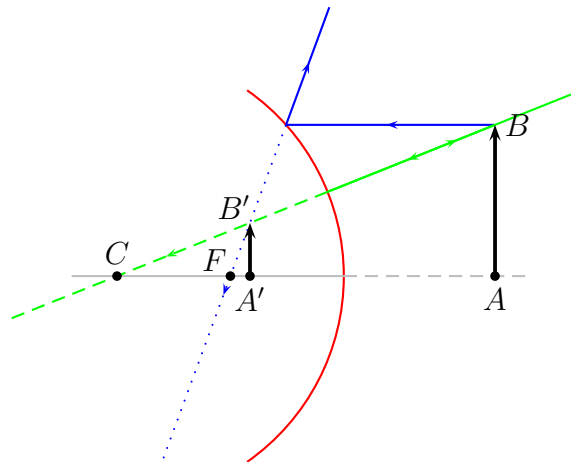


FIG. 3.19 – L'image est droite, plus petite que l'objet et virtuelle.

**Rayons de courbure** ce sont les rayons  $R$  et  $R'$  des surfaces sphériques qui délimitent la lentille,

**Centres de courbure** les centres  $C$  et  $C'$  des surfaces sphériques,

**Axe principal** la droite joignant les deux centres de courbure

**Lentilles à bords minces** celles de la figure 3.20,

**Lentilles à bords épais** celles de la figure 3.21.

**Lentilles convergentes** Si on fait passer de la lumière solaire à travers une lentille à bords minces, on constate que la lumière se concentre en un point. On dit que la lentille est convergente et ce point s'appelle **foyer** de la lentille.

**Lentilles divergentes** À travers une lentille à bords épais, il se forme un faisceau divergent. Une telle lentille est dite divergentes. Les rayons semblent issus d'un point appelé **foyer** de la lentille.

**Centre optique** Lorsque les deux lentilles ont le même rayon, le centre optique est le centre de la lentille. Ce centre optique n'est pas spécialement le centre d'aucune des deux lentilles.

À propos, est-ce que tu sais pourquoi on dit qu'une droite est un cercle de rayon infini ? Parce que plus le rayon d'un cercle est grand, moins le cercle est courbé, plus il ressemble à une droite. La Terre par exemple fait 6500 km de rayon, et effectivement elle semble assez plate.

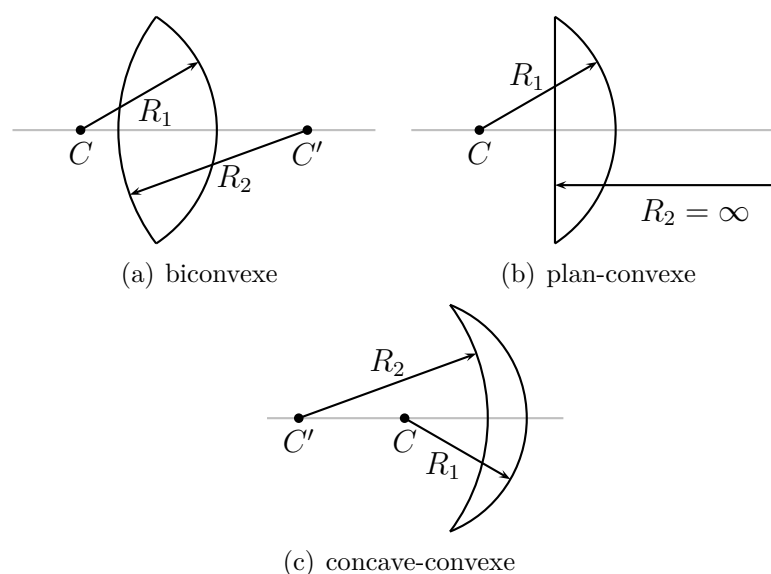


FIG. 3.20 – Des lentilles à bords minces

**Exercice 9.**

À quel type de miroir te fait penser un croissant de Lune ? Et quand la Lune est pleine ?

**3.4.2 Propriétés des lentilles minces**

Un rayon lumineux qui traverse une lentille subit deux réfractions<sup>4</sup>, ce qui rend l'étude du trajet plus compliquée. Heureusement, si la lentille est suffisamment mince, nous pouvons quand même suivre les lois simples suivantes :

**Loi numéro 1.**

*Un rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille mince ne subit aucune déviation.*

**Loi numéro 2.**

*Un rayon lumineux parallèle à l'axe principal se réfracte en passant réellement ou virtuellement par le foyer.*

**Loi numéro 3.**

*Un rayon passant réellement ou virtuellement par le foyer se réfracte parallèlement à l'axe principal.*

---

<sup>4</sup>Une en passant de l'air au verre au moment de rentrer et une du verre à l'air au moment de sortir.

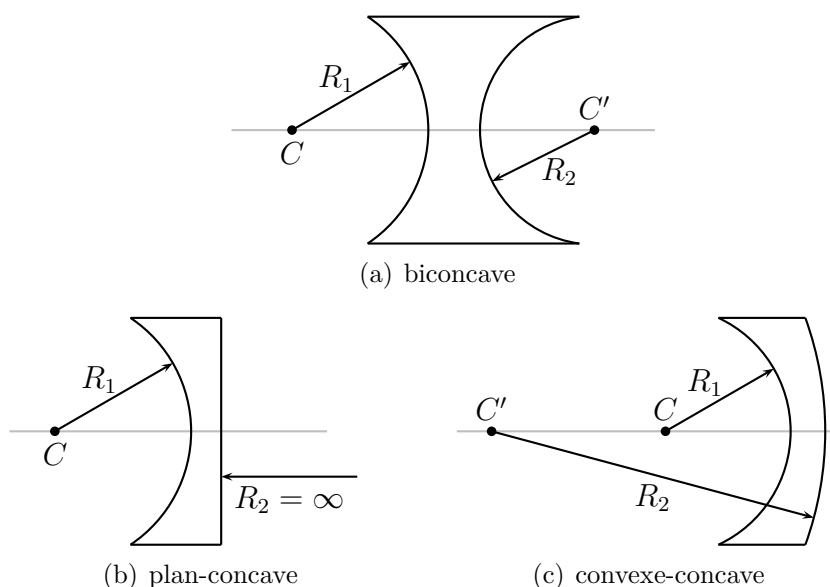


FIG. 3.21 – Des lentilles à bords épais

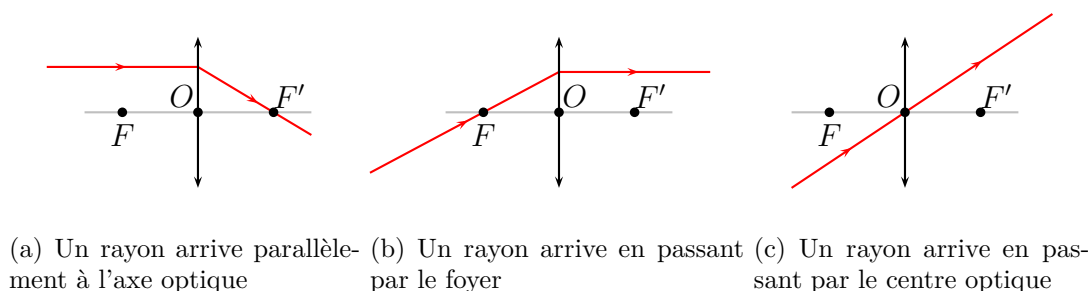


FIG. 3.22 – Trois passages possibles à travers une lentille convergente.

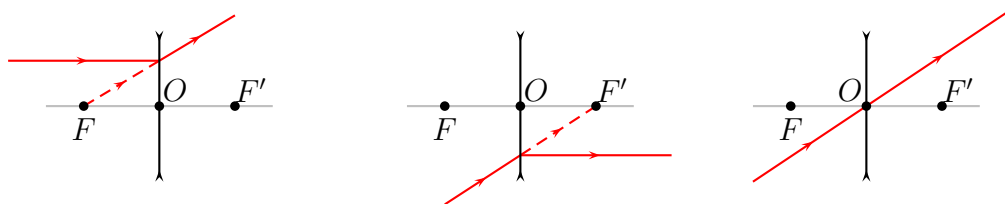
Ces lois ne sont que des approximations de la réalité, mais il se fait que ces approximations restent bonnes même pour des rayons fortement inclinés (pourvu que la lentille soit suffisamment mince).

Une lentille possède toujours deux foyers : un de chaque côté. Donc il faut un peu préciser les deux dernières lois pour savoir de quel foyer on parle.

**Lentilles convergentes** Un rayon arrivant parallèlement à l'axe principal se reflète en passant par le foyer se trouvant *de l'autre côté* de la lentille.

**Lentille divergente** Un rayon arrivant parallèlement à l'axe principale se reflète en passant (virtuellement) par le foyer situé *du même côté* de la lentille.

Des exemples de passages à travers une lentille convergente sont donnés à la figure 3.22, et des passages à travers une divergente sont donnés à la figure 3.23



(a) Un rayon arrive parallèle-  
ment à l'axe optique  
(b) Un rayon arrive en passant  
par le foyer  
(c) Un rayon arrive en pas-  
sant par le centre optique

FIG. 3.23 – Trois passages possibles à travers une lentille divergente.

### 3.4.3 Image d'un objet

Lorsque nous avons un objet dont il faut trouver l'image, c'est très simple : nous devons trouver le trajet de deux rayons qui s'en échappent et l'image sera à l'intersection (réelle ou virtuelle d'après les cas).

#### Exercice 10.

Complète les figures 3.24(b)-3.24(d) en dessinant les rayons qui partent de  $A$  en passant par le foyer, comme le rouge de la figure 3.24(a).

#### Exercice 11.

Il est dit dans la légende de la figure 3.24(b) que l'image était de la même taille que l'objet. Peux-tu le prouver en utilisant ce que tu sais de la géométrie dans le plan ?

#### Exercice 12.

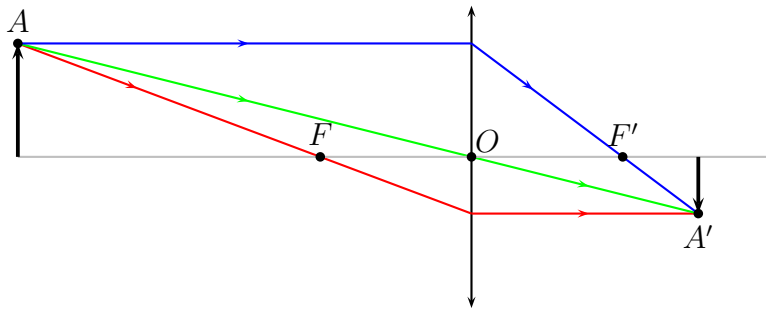
Prouve, en t'inspirant des figures 3.24 que lorsque l'objet est placé *sur* le foyer, les rayons réfléchis par la lentille sont parallèles. Dans ce cas, on dit que l'image est rejetée à l'infini.

#### Remarque 5.

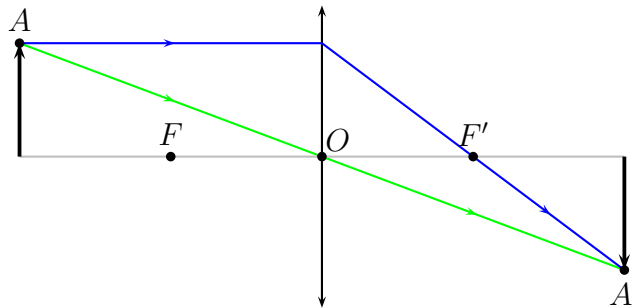
Dans le cas où l'objet est placé sur le foyer, on dit que l'image est rejetée à l'infini en vertu de l'adage selon lequel « deux droites parallèles se rejoignent à l'infini ». Sache que la géométrie euclidienne ne possède pas d'infini. En géométrie euclidienne, deux droites parallèles ne se rencontrent jamais. Ce n'est qu'au cours du XIX<sup>e</sup> siècle que l'on inventa des points à l'infini dans le cadre de la *géométrie projective*. Cette géométrie fut entre autres inventée pour les besoins des peintres et des architectes qui voulaient dessiner du relief. La géométrie projective et la façon dont deux droites parallèles se rejoignent à l'infini fait partie des choses que tu ne sauras que si tu décides de faire de la mathématique plus avancée.

Jusqu'à la figure 3.24(d) (non comprise), l'image s'est toujours éloignée. Elle est arrivée à l'infini quand l'objet était sur le foyer. Et à la figure 3.24(d), elle

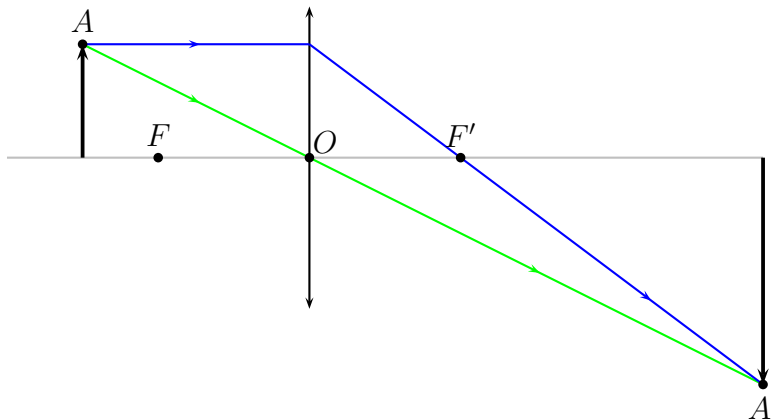




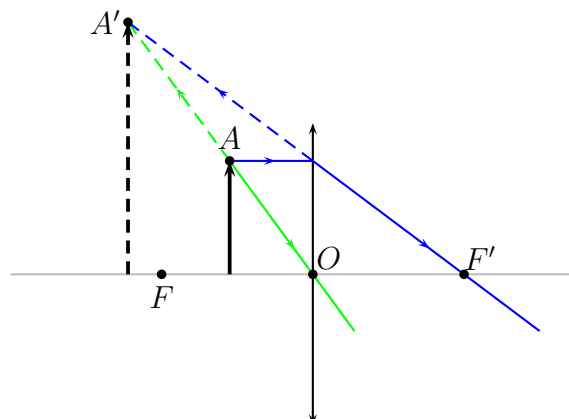
(a) Si l'objet se trouve à une grande distance de la lentille, l'image est réelle, renversée et plus petite que l'objet. Remarque que les rayons rouges suivent le trajet de la figure 3.22(b), tandis que les bleus correspondent à 3.22(a). Je te laisse voir à quoi correspond le rayon vert.



(b) Si l'objet se trouve à une distance égale au double de la distance focale, l'image est réelle, renversée et de même grandeur que l'objet.



(c) Si l'objet se trouve à une distance comprise entre  $f$  et  $2f$  ( $f$  = distance focale), l'image est réelle, renversée et plus grande que l'objet.



(d) Si l'objet se trouve entre le foyer et le centre optique, l'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet.

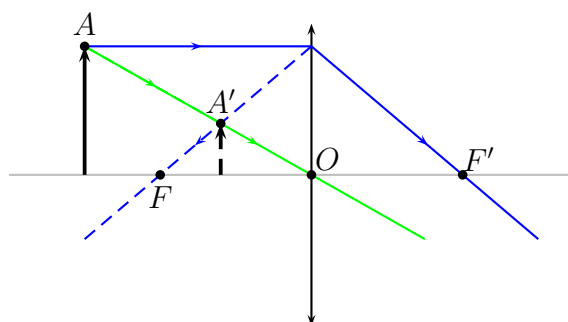


FIG. 3.25 – Un exemple de lentille divergente. Les lentille divergente ne fournissent que des images virtuelles, droites et plus petites que l’objet.

revient *de l’autre côté*. Un peu comme si l’infini à droite est accroché à l’infini à gauche. Cela est une des grande nouvelles en géométries projective : il n’y a qu’un seul infini pour chaque direction, et non un dans chaque sens.

**Image floue ?** Prends n’importe quelle figure 3.24 sauf la 3.24(d) et demande-toi ce que tu vois si tu places ton œil au point  $F$  et que tu regardes dans la direction du rayon bleu. Ce que tu vois, c’est le point  $A$ . En effet, la lumière que ton œil reçoit provient de  $A$ . Mais si tu regardes de la même manière le rayon vert au point  $O$ , tu verras aussi le point  $A$ . C’est à dire que l’image du point  $A$  s’étale au moins sur tout le segment  $OF$ . Pas étonnant que ce soit flou !

Au point  $A'$ , tous les rayons issus de  $A$  se coupent. Donc autour de  $A'$ , les rayons issus de  $A$  sont fort « regroupés », ils ne s’étalent pas beaucoup. C’est pour cette raison que l’image de  $A$  est nette au point  $A'$ .

### Exercice 13.

Qu’est-ce que tu verrais si tu mettais ton œil au point  $A'$  de la figure 3.24(d) ?

#### 3.4.4 Formules pour les lentilles minces

Il est possible d’établir les deux formules suivantes :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad -\frac{h'}{h} = \frac{d'}{d} \quad (3.9)$$

où  $d$  est la distance entre le centre optique et l’objet,  $d'$  est celle entre le centre optique et l’image,  $f$  est la distance focale,  $h$  est la taille de l’objet et  $h'$  est celle de l’image. Fais un dessin et indique dessus ces différentes grandeurs. Les conventions

suivantes ont cours :

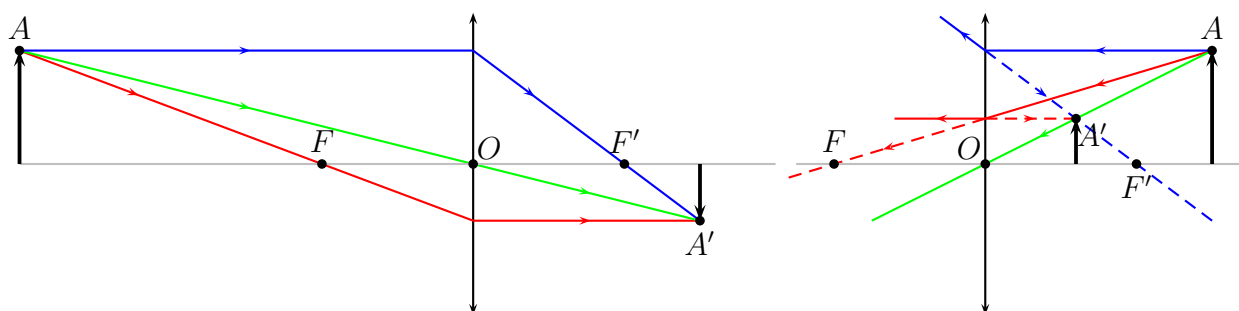
- $f$  = distance focale
  - $> 0$  pour une lentille convergentes
  - $< 0$  pour une lentille divergente
- $d'$  = distance de l'image centre optique
  - $> 0$  pour une image réelle
  - $< 0$  pour une image virtuelle
- $h'$  = hauteur de l'image
  - $> 0$  pour une image droite
  - $< 0$  pour une image renversée

Ces conventions sont en accord avec ce que nous disions à la page 3.4.2 à propos du fait que pour une lentille convergente, il fallait utiliser le foyer de l'autre côté pour les lentilles convergentes et le foyer du même côté pour les divergentes. À ce propos, regarde la figure 3.26.

Nous définissons aussi la **vergence** d'une lentille par

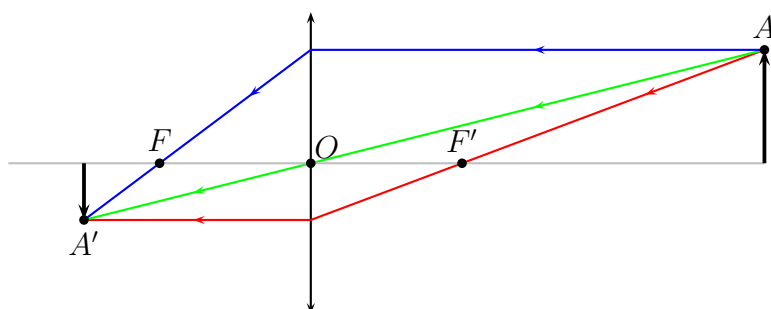
$$C = \frac{1}{f}$$

dont les unités sont  $\text{m}^{-1}$ . Dans le cas des lentilles, l'unité  $\text{m}^{-1}$  est appelée **dioptrie** ; on parle d'une lentille de 4 dioptrie pour dire que sa vergence vaut  $4\text{m}^{-1}$ . Les conventions que nous avons prises font que  $C > 0$  pour les lentilles convergentes et  $C < 0$  pour les lentilles divergentes.



(a) Un cas classique avec la formation de l'image d'un objet à travers une lentille convergente.

(b) Ce qu'il ne faut pas faire quand l'objet est de l'autre côté, c'est d'utiliser le même foyer pour trouver l'image. Ce dessin est complètement faux !



(c) Ce qu'il faut faire, c'est d'utiliser l'autre foyer. D'ailleurs, tu dois avouer que ce dessin-ci est nettement plus crédible que le précédent, vu qu'il est simplement le symétrique du premier.

FIG. 3.26 – Ce qu'il faut faire quand l'objet est à droite au lieu d'être à gauche.

# Chapitre 4

## Un petit peu d'algèbre

### 4.1 Démonstration par l'absurde

Dans la vie en math, il n'y a que trois choses importantes à retenir. Et pas de bol, ce sont justement les trois choses que apparemment les élèves ont le plus de mal à comprendre. Ce sont

- la règle de trois
- la preuve par récurrence
- la preuve par l'absurde.

Aujourd'hui, on se met à la preuve par l'absurde.

Supposons que tu aies un ami au Canada qui t'écrit un courriel qui dit « demain, si il fait beau, je serai en ballade toute la journée ». Or le lendemain, tu reçois un nouveau courriel de la même personne qui dit « Je suis chez moi et je lis le journal ». Est-ce que tu peux dire si il a fait beau au Canada le second jour ?

En fait, il a fait mauvais le second jour. En effet, si il avait fait beau, l'ami serait en ballade toute la journée. Or il n'est pas en ballade (il est chez lui), donc c'est qu'il faisait pas beau.

Posé sous forme un peu plus mathématique, le raisonnement qui conduit à dire qu'il n'a pas fait beau se présente ainsi :

- a. Supposons qu'il ait fait beau (le second jour)
- b. Comme il a fait beau, l'ami est en ballade
- c. Aïe ! Ça ne colle pas avec la réalité : en fait il est chez lui.
- d. L'hypothèse « supposons qu'il ait fait beau » est donc en contradiction avec des faits avérés.
- e. Conclusion, il n'est pas vrai qu'il a fait beau.

Un exemple simple.

**Proposition 6.**

*Deux droites distinctes dans le plan ont au maximum un point d'intersection.*

*Démonstration.* Supposons que la proposition soit fausse, c'est à dire qu'il existe deux droites distinctes qui ont deux points d'intersection. Soient  $A$  et  $B$  ces deux droites et  $x$  et  $y$  les deux points d'intersection.

Or tu sais qu'il existe une et une seule droite passant par deux points donnés. Soit  $C$  l'unique droite qui passe par  $x$  et  $y$ . Comme  $A$  passe par  $x$  et  $y$ , on a que  $A = C$ . Mais  $B$  passe par  $x$  et  $y$ , donc  $B = C$ .

On se retrouve avec  $A = C = B$ , et donc  $A = B$  : les deux droites  $A$  et  $B$  sont confondues. Donc dès qu'on a deux droites qui ont deux points en commun, elles sont confondues. Il n'existe donc pas deux droites distinctes possédant deux points d'intersection. □

Un autre exemple.

**Proposition 7.**

*Si  $x^2$  est un nombre pair, alors  $x$  est un nombre pair.*

*Démonstration.* Supposons que  $x$  ne soit pas un nombre pair. De toutes façons, on peut le décomposer en facteurs premiers. Le fait que  $x$  ne soit pas pair signifie qu'il n'y a pas de 2 dans sa décomposition. Quid de la décomposition de  $x^2$  en nombres premiers ?

On sait que  $x^2 = x \cdot x$ . Donc  $x^2$  a les même facteurs premiers que  $x$ , sauf qu'il les a en double. Par exemple,  $21 = 3 \cdot 7$ , et  $21^2 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$ . Si il n'y a pas de 2 dans la décomposition de  $x$ , alors il n'y en a pas dans la décomposition de  $x^2$ , et donc  $x^2$  n'est pas pair.

Il y a donc une contradiction entre le fait que  $x$  soit impair et le fait que  $x^2$  soit pair. Donc si  $x^2$  est pair,  $x$  ne peut pas être impair. □

Si on remet les choses dans l'ordre, regardons ce qu'on a démontré. On a prouvé en fait que

Si  $x$  est impair, alors  $x^2$  est impair.

## 4.2 Premier degré à une inconnue

### 4.2.1 Vocabulaire

Donnons une idée de ce que signifient certains mots qui arriveront dans la suite.

**Équation** égalité liant des nombres inconnus (généralement notés  $x$ ) à des paramètres connus à partir de laquelle on espère trouver la valeur de l'inconnue,

**Racine d'une équation** valeur de l'inconnue qui fait en sorte que l'équation soit satisfaite. On dit aussi qu'une racine est une **solution** de l'équation,

**Ensemble des solution** ensemble des racines. On le note  $S$ ,

**Équation impossible** aucun réel n'est racine, autrement dit,  $S = \emptyset$ . On est dans ce cas quand on tombe par exemple sur une équation du type :  $x \cdot 0 = 37$ ,

**Équation indéterminée** tout réel est racine, c'est à dire  $S = \mathbb{R}$ . Par exemple :  $x \cdot 0 = 0$  ou encore  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ,

**Résoudre une équation** trouver son ensemble de solution  $S$ .

Un exemple d'équation est celle-ci :  $x + 1 = 3$ . Une racine est facile à trouver : c'est  $x = 2$  parce que quand on remplace  $x$  par 2, l'équation est satisfaite :  $2 + 1 = 3$ .

### Remarque 8.

Tu verras dans ce cours et dans les cours de math suivant que l'on peut résoudre énormément d'équations. Mais détrompe toi : pour la vaste majorité des problèmes concrets, on ne connaît pas les solutions des équations qui arrivent. Lorsque  $x$  est inconnu, tu verras qu'il est possible de trouver toutes les solutions (pour n'importe quelles valeurs de  $a, b, c, d, e$  et  $f$ ) des équations

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= 0. \end{aligned}$$

En fait tu ne verras que les deux premières, mais il se fait que les deux suivantes sont également possibles. Eh bien il se fait que personne ne connaît les solutions de

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Pire : on a pu prouver qu'il n'est pas possible d'en déterminer toutes les solutions pour n'importe quelle valeurs des paramètres.

Un autre exemple d'équation **très célèbre** et très compliquée est celle-ci :

$$x^n + y^n = z^n.$$

Trouver, en fonction de  $n$ , les valeurs *entières* que peuvent prendre  $x, y$  et  $z$ . Lorsque  $n = 2$ , on a par exemple  $3^2 + 4^2 = 5^2$  comme solution. Il a fallu attendre 1995 pour prouver que lorsque  $n$  est plus grand que 2, il n'y a aucune solutions !

J'avais parlé de problèmes concrets pour lesquels on ne connaît pas de solutions. Tu reste sur ta faim ? Regarde la Lune. La Lune tourne autour de la Terre grâce à la gravité. Hélas, le Soleil agit aussi sur la Lune par sa gravité ; certes pas très fort, mais assez quand même pour rendre les prévisions d'éclipses inexactes si

on n'en tient pas compte. Eh bien le système Soleil-Terre-Lune en interaction gravitationnelle conduit à des équations que l'on est incapable de résoudre exactement (on peut malgré tout avoir de très bonnes approximations).

### 4.2.2 Les conditions d'existence

Prenons un certain nombre  $a$ , et disons que  $a = b$ . C'est à dire que nous désignons juste par  $a$  et  $b$  le même nombre. Nous pouvons faire le calcul suivant :

$a = b$	l'hypothèse	(4.1a)
$a^2 = ab$	multiplier les deux membres par $a$	(4.1b)
$a^2 - b^2 = ab - b^2$	retrancher $b^2$ des deux côtés	(4.1c)
$(a + b)(a - b) = b(a - b)$	produit remarquable et mise en évidence	(4.1d)
$a + b = b$	simplification par $a - b$	(4.1e)
$2b = b$	parce que $a = b$	(4.1f)
$2 = 1$	simplification par $b$ .	(4.1g)

La dernière ligne indique comme qui dirait une faute quelque part, non ? Essayons de trouver la faute en remplaçant  $a$  et  $b$  par un chiffre. Disons  $a = b = 3$ .

$a = b$	$3 = 3$	(4.2a)
$a^2 = ab$	$3^2 = 3 \cdot 3$	(4.2b)
$a^2 - b^2 = ab - b^2$	$9 - 9 = 9 - 9$	(4.2c)
$(a + b)(a - b) = b(a - b)$	$(3 + 3)(3 - 3) = 3(3 - 3)$	(4.2d)
$a + b = b$	$3 + 3 = 3$	Faux! (4.2e)
$2b = b$		(4.2f)
$2 = 1$		(4.2g)

La faute est clairement la simplification par  $3 - 3$  (celle par  $a - b$  en général). Pourquoi ? Parce que  $3 - 3 = 0$ , et on ne peut pas simplifier par zéro. La faute générale était de simplifier par  $a - b$  à l'équation (4.1e) : par hypothèse  $a = b$  et donc  $a - b = 0$ .

Retiens ceci :

#### Loi numéro 1.

*On ne peut jamais simplifier par zéro, ni diviser quoi que ce soit par quelque chose qui pourrait valoir zéro. Les multiplications et divisions par zéro sont interdites dans les résolutions d'équations.*



**Loi numéro 2.**

*Si tu es en latin-grec et que tu enfreins la loi numéro 1, on te pardonnera peut-être avec condescendance et mépris.*

Voici ce qu'il se passerait au cas où tu enfreindrais cette loi : d'abord,  $1 = 2$  ensuite voilà ce qu'il se passe :

$$1 = 2 \quad \text{hypothèse} \quad (4.3a)$$

$$0 = 1 \quad \text{retrancher 1 de chaque côté} \quad (4.3b)$$

$$0 = 10 \quad \text{multiplier les deux côtés par 10,} \quad (4.3c)$$

ce qui ferait que même avec tout faux dans ton interrogation, tu pourrais avoir 10/10! Hélas, dans la même circonstance, tu pourrais très bien avoir zéro. Tout est possible.

À partir de maintenant, à chaque fois que tu verras une fraction  $\frac{A}{B}$ , tu t'exclamera immédiatement « Il faut que  $B \neq 0$ ! ».

Tu n'as pas compris? Pas grave, disons la même chose autrement. Suppose que tu lises quelque part que

$$3 = 7.$$

Nous sommes d'accord que cette égalité est fausse. Si nous multiplions par 5 des deux côtés, nous trouvons

$$15 = 35,$$

qui est tout aussi faux. La multiplication par 5 ne change pas le caractère faux ou vrai d'une égalité. Si par contre nous multiplions par zéro les deux membres de  $3 = 7$ , nous trouvons

$$3 \cdot 0 = 7 \cdot 0$$

$$0 = 0,$$

ce qui est vrai! La multiplication par zéro a masqué l'erreur.

Je parie que tu es en train de te dire que ça ne sert à rien et que c'est encore un de ces trucs inventés pour t'ennuyer. Il faut avouer que pour l'instant, c'est partiellement vrai; mais avec le temps tu tomberas sur des cas pour lesquels les conditions d'existences sont importantes. En attendant voici déjà un exemple.

Mettons que quelqu'un qui se déplace à 12 m/s se demande combien de temps il met pour parcourir 100 m. Il fait un petit calcul mental et il trouve  $100/12 = 8.3$  s. Une personne qui se déplace à 57 m/s trouveras la réponse  $100/57 = 1.75$  s. Plus généralement si quelqu'un qui se déplace à la vitesse  $v$  veut savoir en combien de temps il parcourt une distance  $x$ , il se souvient de cette super équation du mouvement rectiligne uniforme :

$$x = vt, \quad (4.4)$$

et il résout par rapport à  $t$  (et non  $x$  hein !). Il trouve

$$t = x/v,$$

avec la condition d'existence  $v \neq 0$ . Réfléchissons deux secondes à ce que signifie physiquement cette condition. Quand  $v = 0$ , c'est qu'on ne se déplace pas. Ça n'a donc aucun sens de se demander en combien de temps on parcourra cent mètres. On ne les parcourra jamais. D'ailleurs avec  $v = 0$ , l'équation (4.4) devient  $x = 0$ . Avec une telle équation, on ne risque pas de trouver  $x = 100$ . Si tu vois quelqu'un simplement assis par terre et que tu lui demande en combien de temps il parcourt cent mètres à cette vitesse, on va tout bonnement te prendre pour un fou ; bref, oublier une condition d'existence dans la résolution d'une équation, c'est de la folie pure.

Tu vois dans cet exemple que la condition d'existence est contenue dans la physique de l'énoncé.

### 4.2.3 Quand l'inconnue n'est pas au dénominateur

La méthode consiste à tout mettre au même dénominateur et puis à isoler l'inconnue. Une long exemple vaut mieux qu'on petit discours.

$$\frac{3x}{5} - \frac{4+6x}{3} = x - 2 \quad (4.5a)$$

$$\frac{3(3x) - 5(4+6x)}{15} = \frac{15(x-2)}{15} \quad \text{Réduction au même dénominateur} \quad (4.5b)$$

$$9x - 30x - 20 = 15x - 30 \quad \text{multiplier les deux membres par 15} \quad (4.5c)$$

$$9x - 30x = -30 + 20 \quad \text{mettre tous les } x \text{ du même côté} \quad (4.5d)$$

$$-36x = -10 \quad \text{Un tout petit peu de calcul} \quad (4.5e)$$

$$36x = 10 \quad \text{multiplier par } -1 \quad (4.5f)$$

$$x = \frac{5}{18} \quad \text{diviser par 18.} \quad (4.5g)$$

On conclut que  $S = \{5/18\}$ .

### 4.2.4 Exercices

#### Exercice 14.

Est-ce que tu peux inventer un exercice avec au moins trois fractions dont la réponse est  $x = 2$  ?

**Exercice 15.**

Résous l'équation

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x+5}{3} = \frac{3x+15}{18}.$$

Quel enseignement en tires-tu ?

**Exercice 16.**

L'équation suivante est exactement la même que celle de l'exercice 15, sauf que l'on a remplacé le 5 du deuxième terme par  $m$  :

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x+m}{3} = \frac{3x+15}{18}.$$

Est-ce que tu peux trouver une valeur de  $m$  pour laquelle cette équation a une solution ? Lorsque tu as trouvé ce  $m$ , remplace-le dans l'équation de départ, et puis résous.

**4.2.5 Lorsque l'inconnue est au dénominateur**

Étant donné que l'on ne peut pas avoir de zéro au dénominateur, il faut poser des conditions d'existence. Lorsqu'on voit  $A/B$ , le réflexe est de dire  $B \neq 0$ . Un petit exemple « simple » :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}. \quad (4.6)$$

On a trois fractions. Avant de commencer quoi que ce soit, on dit :

- a.  $x-1 \neq 0$  pour la première,
- b.  $x+1 \neq 0$  pour la deuxième,
- c.  $x^2-1 \neq 0$  pour la dernière.

Coup de chance : étant donné que  $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ , la troisième condition ne dit rien de nouveau par rapport aux deux premières. Nous écrivons donc

$$x \neq 1 \qquad x \neq -1. \quad (4.7)$$

Cela dit on peut commencer à travailler :

$$\frac{(x+1) + (x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \quad \text{Réduction au même dénominateur} \quad (4.8a)$$

$$(x+1) + (x-1) = 1 \quad \text{simplifier par } (x+1)(x-1) \quad (4.8b)$$

$$2x = 1 \quad (4.8c)$$

$$x = 1/2. \quad (4.8d)$$

La simplification à l'étape (4.8b) demande que les conditions d'existence (4.7) soient satisfaites. Étant donné que la solution  $x = 1/2$  n'est pas à rejeter par les conditions d'existence, on peut conclure que

$$S = \{\frac{1}{2}\}. \quad (4.9)$$

## 4.2.6 Équations avec coefficients paramétriques. Discussions

On dit qu'une équation possède un **paramètre** quand certains coefficients ne sont pas des nombres, mais des lettres qui représentent un nombre *a priori* quelconque.

Par exemple, si on te demande combien de temps tu dois prendre pour te déplacer de 150 km si tu te déplaces à la vitesse  $v$  tu dois résoudre  $150 = vt$  par rapport à  $t$ . La réponse est évidemment  $t = 150/v$ . Dans ce problème,  $v$  est le paramètre. Tu vois que la solution en dépend. Si on choisit de se déplacer à 120 km/h, on trouve  $t = 150/120 =$  une heure et 15 minutes. Si on se déplace à 100 km/h, on trouve  $t = 150/100 =$  une heure et 30 minutes<sup>1</sup>.

Exemple : on se donne l'équation suivante dans laquelle  $m$  est un paramètre et  $x$  est l'inconnue :

$$mx - 1 = 3m - 2x$$

Les premières étapes de la résolution sont classiques :

$$mx + 2x = 3m + 1 \quad (4.10a)$$

$$(m + 2)x = 3m + 1 \quad (4.10b)$$

L'étape suivante consiste à diviser par  $m + 2$  pour isoler  $x$ . Hélas, si on ne sait pas la valeur de  $m$ , il se peut que  $m + 2$  soit nul, et on risque d'enfreindre la loi numéro 1 (page 56). Faisons comme **Sherlock Holmes** et envisageons une par une toutes les possibilités.

D'abord supposons que  $m + 2 \neq 0$ . Dans ce cas on peut diviser et on trouve comme solution :

$$S = \left\{ \frac{3m + 1}{m + 2} \right\},$$

affaire réglée.

Ensuite supposons que  $m + 2 = 0$ , c'est à dire que  $m = -2$ . Si nous prenons cette hypothèse, le plus simple est de recommencer toute l'enquête au début (parce

---

<sup>1</sup>Petite note au passage : tu remarqueras que rouler à 120 km/h ne fait gagner que un quart d'heure (sur une heure et demi !) par rapport à 100 km/h, et pourtant cela pollue beaucoup plus. Limiter sa vitesse sur l'autoroute est donc un moyen très simple d'économiser énormément de  $CO_2$  dans l'atmosphère.

que dans le cas  $m = -2$ , l'équation (4.10b) a l'air d'être un cul de sac). L'équation de départ avec  $m = -2$  donne :

$$-2x - 1 = -6 - 2x,$$

ce qui donne

$$-1 = -6.$$

Dans ce cas, il n'y a aucune solutions :  $S = \emptyset$ .

Conseil : quand cela est possible, il est bon de *factoriser* le coefficient de l'inconnue et le terme indépendant.

### 4.3 Systèmes linéaire de deux équations à deux inconnues

La bonne nouvelle est qu'il existe des tonnes de manières de résoudre ces systèmes d'équations ; tu auras donc le choix des armes. La mauvaise nouvelle, c'est qu'elles sont toute compliquées ; il est donc normal que tu sois un peu perdu au départ.

#### 4.3.1 Méthode de substitution

Prenons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 6y = 1 & (4.11) \\ 3x + 4y = 2. & (4.12) \end{cases}$$

Si on résout la première équation par rapport à  $x$ , on trouve  $x = \frac{6y+1}{2}$ . Si on remplace maintenant tous les  $x$  de la seconde équation par cette valeur, nous tombons sur une équation qui ne possède plus que du  $y$  :

$$3\left(\frac{6y+1}{2}\right) - 4y = 2.$$

Cette équation, on la résout comme on veut, pour trouver  $y = 1/26$ . En voilà déjà une de trouvée. Maintenant il faut déduire  $x$ . Pour cela on revient au système initial dans lequel on remplace les  $y$  par  $1/26$  :

$$\begin{cases} 2x - 6\frac{1}{26} = 1 & (4.13) \\ 3x + 4\frac{1}{26} = 2. & (4.14) \end{cases}$$

Ce sont deux équations en  $x$  qui doivent avoir la même solution. En l'occurrence,  $x = 8/13$ . Finalement la solution est un couple :

$$S = \left\{ \left( \frac{8}{13}, \frac{1}{26} \right) \right\}.$$

Attention : si après avoir remplacé tous les  $y$  des deux équations de départ par la valeur trouvée tu ne trouves pas deux équations en  $x$  qui ont la même solution, c'est que tu t'es trompé quelque part.

### 4.3.2 Méthode de combinaison

Nous pouvons toujours multiplier une égalité par un nombre : si  $a = b$ , alors  $3a = 3b$  ; si  $3a = 6b + 3$ , alors  $7(3a) = 7(6b + 3)$  c'est à dire  $21a = 42b + 21$ . Ça c'est une chose que tu sais déjà depuis longtemps.

Une autre chose que tu sais peut-être déjà, c'est qu'on peut additionner des équations. Si  $a = b$  et  $c = d$ , alors  $a + c = b + d$ . Exemple : une enclume pèse autant que dix épées deux mains<sup>2</sup>,

$$\text{enclume} = 10 \text{ épées deux mains},$$

et une calculatrice pèse autant qu'une pochette de CD,

$$\text{calculatrice} = \text{pochette de CD}.$$

Évidemment une enclume et une calculatrice pèsent autant qu'une pochette de CD et que 10 épées deux mains :

$$\text{calculatrice} + \text{enclume} = 10 \text{ épées deux mains} + \text{pochette de CD}.$$

Maintenant que nous sommes d'accord avec ces deux principes, prenons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 & (4.15) \\ x + 8y = 3. & (4.16) \end{cases}$$

En multipliant par deux la seconde équation, on trouve  $2x + 16y = 6$ . En soustrayant cela de la première équation, nous trouvons

$$2x + 4y - (2x + 16y) = 3 - 6,$$

c'est à dire  $-12y = -3$ , et donc  $y = 1/4$ . Maintenant que l'on connaît  $y$ , on trouve  $x$  en remplaçant  $y$  par sa valeur dans les équations de départ :

$$\begin{cases} 2x = 2 & (4.17a) \\ x = 1. & (4.17b) \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>3d6 + 7 de dommages.

Ces deux équations donnent  $x = 1$ , la solution du système est donc :

$$S = \{(1, \frac{1}{4})\}.$$

Où est le tour de passe-passe ? Nous avons multiplié la seconde équation par 2, c'est à dire juste ce qu'il faut pour que le coefficient de  $x$  devienne le même que celui dans la première équation. Ainsi, le  $x$  disparaît lorsqu'on fait la différence.

### Remarque 9.

Dans le cas des systèmes de deux équations à deux inconnues tels qu'on les a vus, toutes les méthodes fonctionnent toujours. Saches quand même que la substitution continue à fonctionner dans beaucoup de cas où les autres méthodes échouent<sup>3</sup>.

La substitution a donc l'avantage de fonctionner à tous les coups et de ne pas demander de réfléchir : on isole une inconnue dans la première équation, on remplace dans la seconde, on résout. Cette méthode a par contre l'avantage de souvent amener des calculs plus compliqués et donc des chances de fautes.

### Remarque 10.

Tu dois toujours veiller à mettre d'abord le système sous la forme

$$\begin{cases} ax + by & = p \\ cx + dy & = q. \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.18a) \\ (4.18b) \end{matrix}$$

Si une des équations est par exemple

$$\frac{3x+1}{5} - \frac{5y-1}{3} = 5,$$

tu dois écrire

$$\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} - \frac{5}{3}y - \frac{1}{3} = 5,$$

et puis mettre à droite tous les termes qui ne contiennent ni de  $x$  ni de  $y$  :

$$\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y = 5 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}.$$

Je te laisse mettre le membre de droite au même dénominateur et faire la somme de fractions comme il se doit.

### Exercice 17.

Est-ce que tu peux trouver un système de deux équations à deux inconnues n'ayant aucune solutions ?

### Exercice 18.

Construit un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont la solution est  $(5, 3)$ .

---

<sup>3</sup>Un peu comme [sainte Rita](#).

### 4.3.3 Avec ou sans solutions ?

Je suppose que tu sais que  $ax + by = p$  est l'équation de la droite de coefficient angulaire  $a/b$  et passant par  $(0, p/b)$ . Faisons des dessins pour le système

$$\begin{cases} x + 2y = 9 & (4.19a) \\ x - y = -1. & (4.19b) \end{cases}$$

La première équation décrit la droite  $y = \frac{9}{2} - \frac{x}{2}$  qui passe par les points  $(5, 2)$  et  $(9, 0)$ , tandis que la seconde est la droite  $y = x + 1$  qui contient les points  $(0, 1)$  et  $(1, 2)$ . Regarde la figure 4.1. Prends deux ou trois points de chacune des deux droites et vérifie que ces droites représentent bien le système. Convaincs-toi que

- tous les points de la droite rouge vérifient l'équation (4.19a),
- tous les points de la droite bleue vérifient (4.19b).

Du coup, le point d'intersection vérifie les deux équations en même temps et représente donc la solution au système. Comme je suis gentil, je te donne la solution du système :  $S = \{(7/3, 10/3)\}$ . Prends ta latte et vérifie que c'est bien le point d'intersection. Ensuite fais  $x = 7/3$  et  $y = 10/3$  dans les deux équations du système et vérifies que le système est satisfait.

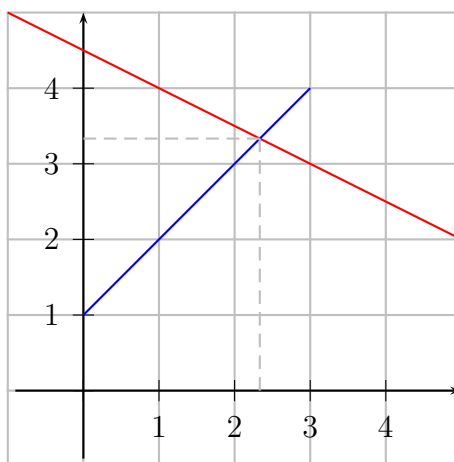


FIG. 4.1 – L'intersection de deux droites fourni la solution du système.

Maintenant nous sommes convaincus d'une chose : les systèmes de deux équations ne sont rien d'autres que des recherches d'intersections de droites. Combien de points d'intersection peuvent avoir deux droites ?

- Le plus souvent, deux droites ont un et un seul point d'intersection (c'est le cas de la figure 4.1),
  - quand les deux droites sont parallèles, il n'y a pas de points d'intersection,
  - quand les deux droites sont confondues, il y a toute une droite d'intersection.
- Je me permets de te rappeler que deux droites confondues sont parallèles.



C'est le moment de se demander comment sont les équations de deux droites parallèles. Regardons le système général

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q. \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.20a) \\ (4.20b) \end{matrix}$$

Deux droites sont parallèles quand elles ont le même coefficient angulaire. Le coefficient angulaire de la première droite est  $-a/b$ , tandis que celui de la seconde est  $-c/d$ , donc elles seront parallèles si et seulement si  $-a/b = -c/d$ , c'est à dire quand  $ad = bc$ , ou encore quand

$$ad - bc = 0.$$

**Le cas  $ad - bc = 0$**

Lorsque cette condition est remplie, les deux droites sont parallèles. Dans ce cas, soit elles sont confondues, soit elles ne se coupent pas. Comment distinguer les deux cas ? Facile : prends un point au hasard d'une des deux droites, et regarde si il est sur l'autre. Si il y est, c'est qu'elles sont confondues, si il n'y est pas, c'est qu'elles ne se coupent pas. En effet, on sait que soit *tous* les points sont communs, soit *aucun* point n'est commun !

**Exemple 11.**

Regarde le système

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x + 8y = 7, \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.21a) \\ (4.21b) \end{matrix}$$

c'est à dire  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d = 8$ . Cela vérifie bien  $ad - bc = 0$ . Est-ce que ce système n'a pas de solutions, ou bien est-ce que les deux droites sont confondues ? Prenons un point au hasard sur la première droite :  $(0, 9/4)$ , et vérifions si cela rentre bien dans la seconde :

$$2 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{2} \neq 0.$$

Le point choisit sur la première droite n'est pas sur la seconde. Les deux droites étant parallèles, c'est qu'elles ne se coupent pas.

**Exemple 12.**

Si par contre je prends le système

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 2x + 6y = 18, \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.22a) \\ (4.22b) \end{matrix}$$

alors, le point  $(0, 9/4)$  rentre bien dans les deux équations et donc on est dans le cas des droites confondues. D'ailleurs si tu regardes bien, la seconde équation est juste la première multipliée par deux. Donc il n'y a pas deux équations, mais une seule. Or une équation, c'est une droite.

### Le cas $ac - bd \neq 0$

Lorsque  $ac - bd$  n'est pas égal à zéro, c'est que les deux droites représentées par le système ne sont pas parallèles. Dans ce cas, il y a un et un seul point d'intersection : l'ensemble des solutions du système est un seul point.

### 4.3.4 Petit truc de notation et de vocabulaire

Dans le système

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q, \end{cases} \quad (4.23a)$$

$$\begin{cases} cx + dy = q, \end{cases} \quad (4.23b)$$

le nombre  $ac - bd$  est appelé le **déterminant** du système. Il est noté comme ceci :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

et il se lit en faisant la première diagonale moins la seconde :

### 4.3.5 Discussions de systèmes

Lorsqu'on a des paramètres dans le système, les solutions (et même l'existence des solutions) peuvent dépendre de la valeur des paramètres. Un petit exemple :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ (m-1)x + 2y = 3, \end{cases} \quad (4.24a)$$

$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 3, \end{cases} \quad (4.24b)$$

$x$  et  $y$  étant les inconnues et  $m$ , un paramètre réel. L'existence et le nombre de solutions dépendent du déterminant, en l'occurrence :

Ce déterminant vaut  $m + 1$ . Aïe aïe aïe ! Ça peut s'annuler d'après les valeurs de  $m$  ! Pas de panique, procédons dans l'ordre.

**Supposons d'abord, que le déterminant est non nul** Pour que le déterminant soit non nul, il faut

$$m \neq -1$$

Substituons. Le plus simple est d'isoler  $y$  dans la première équation :  $y = 1 - mx$ . Replaçons ça dans la seconde :

$$(m - 1)x + 2(1 - mx) = 3.$$

En résolvant par rapport à  $x$ , on tombe sur

$$ym(3 - m) = m(3 - m),$$

on isole  $y$  en divisant par  $m(3 - m)$  :

$$x = -\frac{1}{m + 1}, \quad (4.25)$$

avec condition d'existence  $m \neq -1$ . Heureusement, vient de se dire que le déterminant est non nul, c'est à dire précisément que  $m \neq -1$ . On trouve donc bien avec cette valeur de  $x$ . Ce n'est pas un miracle que la condition d'existence soit justement le déterminant : nous avons vu que le déterminant est ce qui assure l'existence des solutions. Donc quand on suppose que le déterminant est non nul, on a *toujours* une solution.

En remettant la valeur (4.25) dans les équations de départ, on trouve facilement que la réponse est  $y = \frac{2m+1}{m+1}$ , et finalement que

$$S = \left\{ \left( -\frac{1}{m+1}, \frac{2m+1}{m+1} \right) \right\}.$$

**Supposons que le déterminant est nul** On suppose que  $m + 1 = 0$ , c'est à dire que  $m = -1$ . Dans ce cas, le système de départ s'écrit

$$\begin{cases} -x + y = 1 & (4.26a) \\ -2x + 2y = 3. & (4.26b) \end{cases}$$

Nous sommes dans le cas de deux droites disjointes, et le système n'admet pas de solutions dans ce cas.

### 4.3.6 Le coup de l'isotope mystère

Tentons de savoir la masse du proton et du neutron en comparant les masses de deux **isotope** d'éléments différents. Prenons par exemple le **deutérium**  ${}^2_1\text{H}$  et l'hélium-4, noté  ${}^4_2\text{He}$ . Le premier est composé de un proton et un neutron, tandis

que le second est composé de deux protons et deux neutrons. Donc on suppose que la masse d'un atome de deutérium fait la somme des masses du proton et du neutron, tandis que la masse d'un atome d'hélium-4 ferait la somme de deux fois la masse d'un proton et de deux fois la masse d'un neutron.

Notons  $m_p$  et  $m_n$  les masses du proton et du neutron. Il se fait que la masse d'un atome de deutérium est de 2.013553 u et que celle d'un atome d'hélium-4 est de 4.0026 u. Nous posons donc le système

$$\begin{cases} m_p + m_n = 2.013553 & (4.27a) \\ 2m_p + 2m_n = 4.0026. & (4.27b) \end{cases}$$

La première équation indique que la masse d'un atome contenant un proton et un neutron est la somme des masses du proton et du neutron, tandis que la seconde équation indique que la masse d'un atome composé de deux protons et de deux neutrons est la somme des masses de deux neutrons et de deux protons. Bref, ces deux équations disent que la masse d'un ensemble est la somme des masses des parties.

Essayons de résoudre le système. Pour cela, on commence par calculer le déterminant :  $1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$ . Hum... ce déterminant est nul. Or la seconde équation n'est pas un multiple de la première. Donc il n'y a pas de solutions.

Où est l'erreur ?

Je ne te cache pas qu'il te faudra attendre ton cours de physique de rétho pour avoir la solution.

## 4.4 Inéquations à une inconnue

### 4.4.1 Rappel théorique

#### Addition et soustraction

La première règle est que si Laurent est plus grand que Xavier, et si ils se mettent tout les deux sur des échasses de 1 m de haut, ça ne changera rien : Laurent restera plus grand que Xavier.

En termes plus formels, on dit que quand on a une inégalité, si on ajoute la même chose aux deux membres, l'inégalité reste. En formule :

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c.$$

Exemple : tu es d'accord que  $4 > 3$ . Eh bien sans surprises, on a que  $4+10 > 3+10$ .

La bonne nouvelle c'est que ça marche aussi quand on retranche au lieu d'ajouter. En effet, si Gaston a fait une meilleur interrogation que Gustave, mais

que le prof décide de leur enlever deux points à chacun, Gaston aura toujours de meilleurs points que Gustave. En formule :

$$a \leq b \iff a - c \leq b - c.$$

En résumé, on peut dire que *Quand on ajoute ou quand on retranche un même réel aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation de même sens*. Cette s'exprime en formule sous la forme suivante :

$$a \leq b \iff a \pm c \leq b \pm c.$$

### Multiplication et division

Maintenant les choses se compliquent. Si Arthur a plus d'argent que Léon, et qu'ils multiplient tout les deux par trois leur argent, évidemment Arthur reste plus riche :  $a > b$  implique que  $3a > 3b$ .

Petit exemple de cinématique. Louis et Michel font du vélo dans le même sens et la même direction. Louis avance à 15 km/h, tandis que Michel pédale un peu moins bien et avance à seulement 10 km/h. On choisit bien entendu de placer l'axe de notre repère dans le sens de leur mouvement. Ainsi ces vitesses sont positives.

À un moment donné, les deux enfants entendent qu'une camionnette de glace s'est arrêtée un peu derrière eux. Immédiatement, ils font demi tour et pédalent deux fois plus vite qu'avant. Louis avance maintenant à 30 km/h et Michel à 20 km/h. Oui, mais ils vont maintenant *dans le sens négatif* par rapport aux axes !

Donc en bon physicien qui respecte ses choix d'axes, Louis avance en réalité à -30 km/h et Michel à -20 km/h. C'est donc Michel qui avance le plus vite parce que  $-20 > -30$ .

Un exemple d'arithmétique. Tu sais que  $8 > 5$ . Maintenant multiplie ces deux chiffres par -3. Tu obtiens -24 et -15. Or,  $-15 > -24$ . On a donc trouvé que  $a > b$  implique que  $-3a < -3b$ .

Quand on multiplie deux membres d'une inéquation par un même réel strictement négatif (c'est à dire négatif et non nul), on obtient une équation *de sens contraire*.

En formule :

$$\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \implies a \cdot c < b \cdot c$$



# Chapitre 5

## De la géométrie

### 5.1 Vecteurs

Il y a plusieurs façons de voir un vecteur. Un vecteur, c'est une flèche que l'on peut placer un peu partout dans le plan. Un vecteur c'est la donnée d'un déplacement dans le plan : la donnée de combien on s'est déplacé vers le haut et vers la droite.

Bref, un vecteur c'est la donnée de deux point du plan : le point de départ et celui d'arrivée. On peut distinguer deux types de vecteurs.

**Les vecteurs liés** sont des vecteurs accrochés à un point du plan. Si la figure 5.1 représente des vecteurs liés, alors les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{XY}$  sont différents. Ce type de vecteurs se pense comme des forces : ils ont un point d'application. Deux forces de même intensité et même direction qui s'appliquent à des points différents sont différentes.

**Les vecteurs libres** sont, comme leur nom l'indique, libre de se déplacer dans le plan. Si la même flèche est placée à différents endroits, elle représente le même vecteur libre. Donc sur la figure 5.1,  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{XY}$  représentent le même vecteur libre.

FIG. 5.1 – Figure à faire

## 5.2 Équations de droites

## 5.3 Système de coordonnées polaire

Tu sais comment il est possible de repérer un point dans le plan à partir de ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Si tu as fait un peu de scoutisme, tu connais sans doute déjà le système de coordonnées polaires (même si tu n'en est pas conscient).



# Chapitre 6

## Les fonctions

### 6.1 Quelques exemples de fonctions

Dans ce chapitre, nous ne parleront que de fonctions définies sur l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  et qui prennent des valeurs réelles. Une **fonction** est donc un truc qui prends un nombre et qui en retour donne un nombre.

#### Exemple 13.

Considérons une dictée au cours de Français cotée sur 10 avec un point par faute. Si j'ai deux fautes, j'aurai 8/10, si j'ai 7 fautes, j'ai 3/10 etc. La fonction « les points que j'ai » est une fonction de la variable « le nombre de fautes commises » qui est définie par

$$\text{Points}(n) = 10 - n$$

où  $n$  est le nombre de fautes. Cette fonction prends un nombre entier (les fautes) et rends un nombre entier (les points). Nous notons ça

$$\text{Points}: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Cette fonction est représentée à la figure 6.1.

Cette fonction comporte encore quelques surprises dont on parlera plus tard.

#### Exemple 14.

Tu te souviens de ton cours sur le mouvement rectiligne uniforme ? Si un cycliste se trouvant à 3 km de chez lui rentre à la vitesse de 5 m/s, la distance (en mètres) entre le vélo et la maison du cycliste sera donnée par

$$d(t) = 3000 - 5t.$$

Cette fonction  $d$  prend un nombre réel  $t$  et donne un autre nombre réel  $d(t)$ . Contrairement à la fonction des points d'une dictée, cette fonction-ci accepte de manger n'importe quel réel, et pas seulement des entiers.

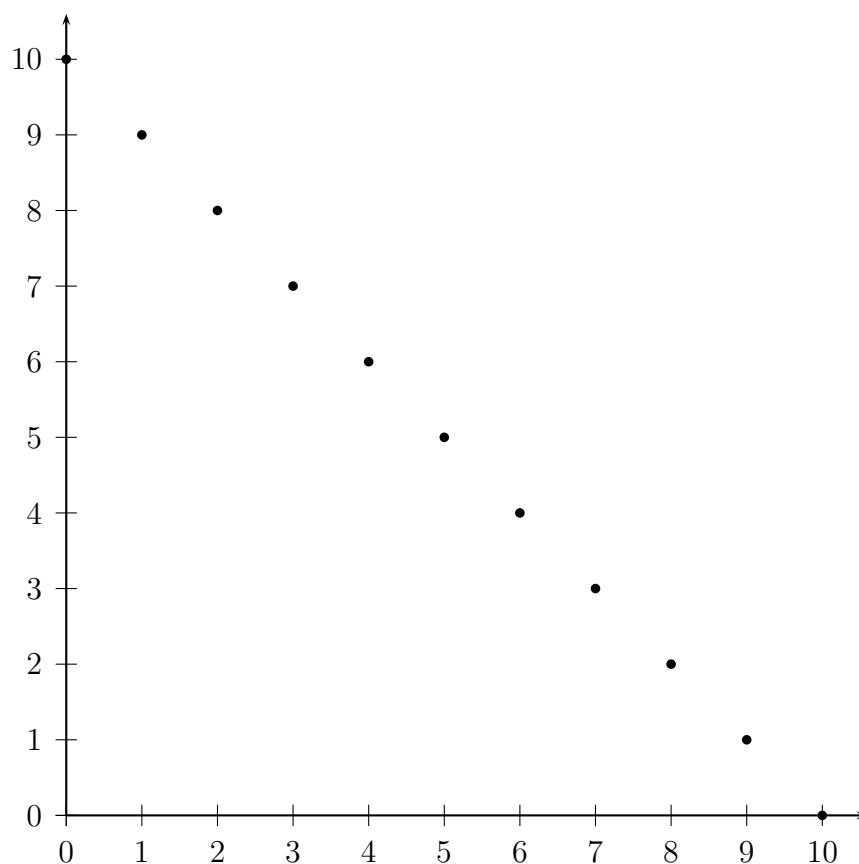


FIG. 6.1 – Le graphe des points que tu as en fonction du nombre de fautes

**Exemple 15.**

Allons-y pour de la physique un peu plus brutale. Un mobile de masse  $m$  qui part du repos est tiré par une force  $F$ . Quelle distance parcourt le mobile durant un temps  $t$  ?

Par les formules classique de physique, l'accélération du mobile vaut  $a = F/m$  et la distance parcourue en un temps  $t$  sous une accélération  $a$  vaut  $at^2/2$ . Ici,

$$d(t) = \frac{Ft^2}{2m}.$$

En voilà une belle fonction a deux paramètres. Discutons un peu. D'après la situation physique, on sait que l'on ne considère que des temps positifs; la fonction  $d$  est donc une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ . La masse  $m$  est toujours positive, par contre la force  $F$  peut être positive ou négative.

**Le cas où la force est positive** Si la force est positive, alors  $d(t)$  sera toujours positif, et  $d$  est donc une fonction  $d: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Le cas où la force est négative** Si la force est négative, alors  $d(t)$  sera toujours négatif, et  $d$  est une fonction  $d: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$ .

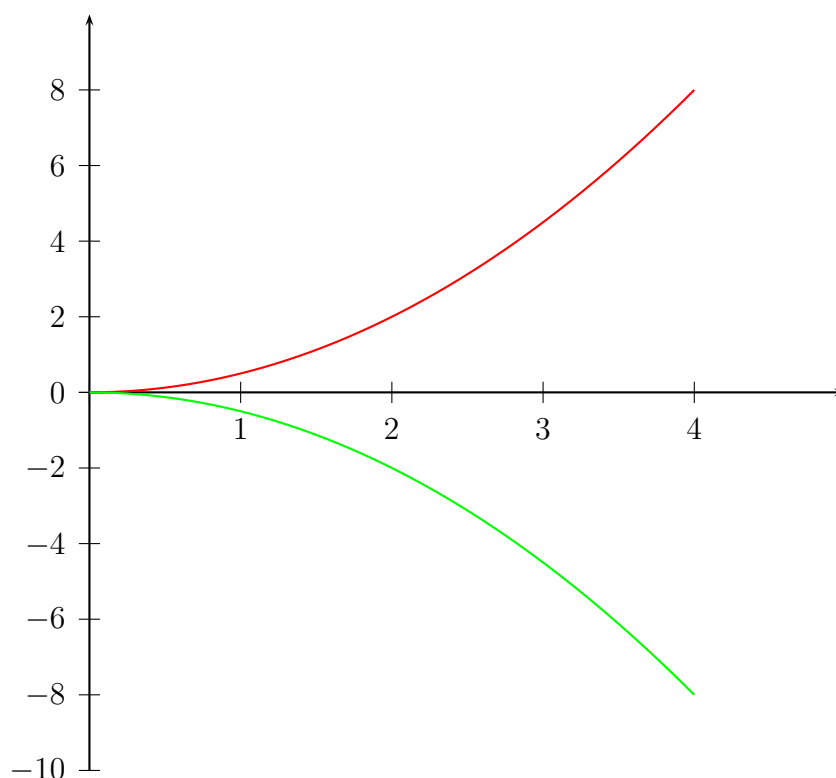


FIG. 6.2 – En rouge : l’avancée en fonction du temps d’un mobile tiré avec une force positive, et en vert le cas de la force négative. La première prends des valeurs positives ou nulles tandis que la seconde prends des valeurs négatives ou nulles. Toute deux sont définies sur les réels positifs ou nuls.

### Exemple 16.

Reprenons le mobile de l’exemple précédent, en supposant maintenant que  $F > 0$  et posons la question inverse : combien de temps il lui faut pour parcourir la distance  $d$ ? La réponse est manifestement

$$t(d) = \sqrt{\frac{2md}{F}}.$$

Comme la force est positive, la condition d'existence de cette racine carré est  $d > 0$ . Et encore heureux ! avec une force positive, on ne fait qu'avancer, et seules les distances positives ont un sens physique. Cette fonction  $t$  de la distance n'est donc définie que pour  $d > 0$ , et on note  $t: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

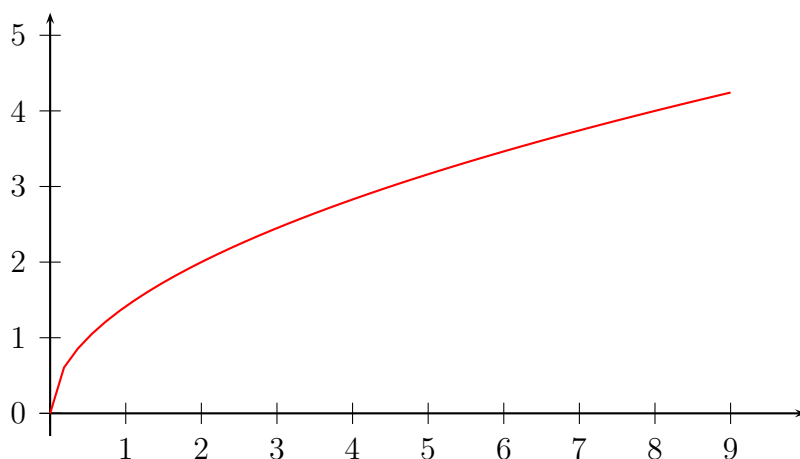


FIG. 6.3 – Le temps qu'il faut pour parcourir une distance quand le mobile est tiré avec une force constante.

## 6.2 Addition et multiplication de fonctions

Nous allons maintenant définir quelques raccourcis de notations. D'abord, quand on parle de la fonction  $x \rightarrow f(x)$ , on peut simplement parler de la fonction  $f$ . Ensuite, quand on a une fonction  $f$ , on peut la multiplier par un nombre :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x). \quad (6.1)$$

Nous pouvons donc maintenant parler de la fonction  $(\alpha f)$ . Le membre de gauche de la définition (6.1) représente la fonction  $(\alpha f)$  évaluée au point  $x$ , tandis que le membre de droite représente le nombre  $f(x)$  multiplié par  $\alpha$ . Autrement dit, nous définissons  $(\alpha f)$  comme étant la fonction qui au nombre  $x$  associe le nombre  $\alpha f(x)$ .

Dans le même ordre d'idée, quand  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, nous définissons  $(f + g)$  comme étant la fonction qui à  $x$  fait correspondre le nombre  $f(x) + g(x)$  :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x). \quad (6.2)$$

Et en ce qui concerne la multiplication de deux fonctions, nous faisons de même :

$$(fg)(x) := f(x)g(x). \quad (6.3)$$

Tout ceci semble très raisonnable.

## 6.3 Domaine d'une fonction

Par définition, lorsqu'on a une fonction  $f: x \mapsto f(x)$  à variable réelle  $x$ , on appelle **domaine de définition** l'ensemble des réels sur lesquels  $f$  est définie. On le note  $\text{dom } f$ .

Dans l'exemple 13, la fonction Points n'est définie que pour les entiers positifs : le nombre de fautes dans une dictée est toujours positif et entier. Donc on note

$$\text{dom Points} = \mathbb{N}.$$

Prenons maintenant quelques exemples plus mathématiques. Quels sont les cas où une fonction peut ne pas être définie ? Il y en a essentiellement deux pour l'instant (mais d'autres cas viendront) :

- dénominateur nul,
- nombre strictement négatif sous la racine.

Donc dès que tu vois une fraction, tu exclus du domaine ce qui annule le dénominateur, et dès que tu vois une racine, tu exclus ce qui rends négative l'expression sous la racine.

### Exemple 17.

Prenons la fonction  $f(x) = \sqrt{2-x}$ . On a une racine carrée, donc on demande d'exclure du domaine les  $x$  tels que  $2-x < 0$ .

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} = ]-\infty, 2].$$

### Exemple 18.

Soit la fonction  $f(x) = 2x^3 - 1x^2 + 4x + 8$ . Pas de racines, pas de dénominateurs. Tout est bon.

$$\text{dom } f = \mathbb{R}.$$

Quand on a des fonctions qui contiennent plusieurs fractions ou racines, il faut

bien poser toutes les conditions. Quelques exemples :

$$\frac{x-3}{x+1} \quad \text{demande} \quad x+1 \neq 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{\sqrt{x-3}}{x+1} \quad \text{demande} \quad x+1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x-3 \geq 0, \quad (6.5)$$

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} \quad \text{demande} \quad x+1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x-3}{x+1} \geq 0, \quad (6.6)$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1} \quad \text{demande} \quad x-3 \geq 0 \quad \text{et} \quad x+1 \geq 0. \quad (6.7)$$

Donc à partir de maintenant, à chaque fois que tu vois  $A/B$ , tu sursaute et tu t'exclames «  $B \neq 0!$  ». Et à chaque fois que tu vois  $\sqrt{A}$ , tu sursaute et t'exclames «  $A \geq 0!$  ». Et cela même si  $A$  ou  $B$  sont des fonctions très compliquées.

Attention : les racines *carré* posent un problème de conditions d'existence et donc de domaine. Pas les racines cubiques. La figure 6.4 explique pourquoi.

Nous avons donc que si  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ , alors  $\text{dom } h = \text{dom } f$ . En particulier :

$$\sqrt[3]{\frac{x-3}{x+1}} \quad \text{demande} \quad x+1 \neq 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[3]{x+1}} \quad \text{demande} \quad x+1 \neq 0 \quad (6.9)$$

$$(6.10)$$

## 6.4 Fonctions croissantes et décroissantes

Une fonction est **strictement croissante** sur l'intervalle  $[a, b]$  si pour tout  $x, y \in [a, b]$ ,

$$f(y) > f(x) \quad (6.11)$$

dès que  $y > x$ .

## 6.5 L'application réciproque

Lorsque tu considères une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une des questions que tu peux te poser, c'est de savoir pour quelles valeurs de  $x$ , le nombre  $f(x)$  est égal à 5 par exemple. Tu cherches donc à déterminer l'ensemble

$$\{x \in \text{dom } f \mid f(x) = 5\}.$$

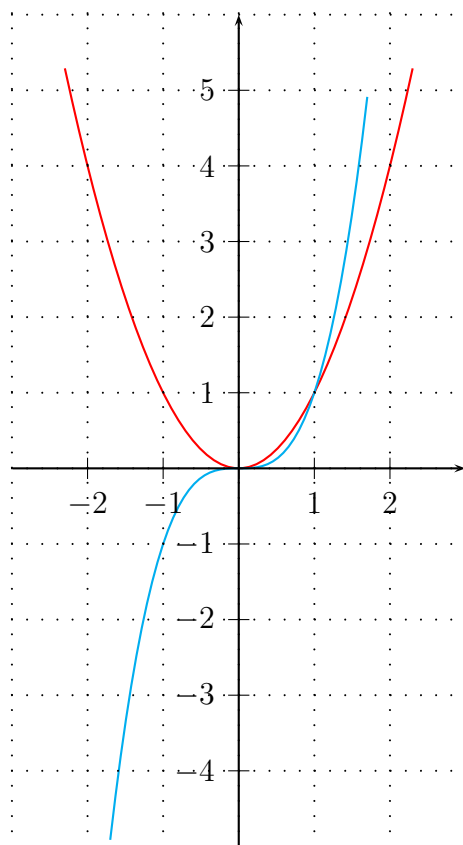


FIG. 6.4 – En rouge, la fonction  $x \mapsto x^2$ . Comme tu le vois, seuls les réels positifs sont atteints, donc il n'est pas possible de chercher un réel dont le carré vaut  $-2$  par exemple ; par conséquent  $\sqrt{-2}$  n'existe pas. En cyan, la fonction  $x \mapsto x^3$ . Cette fois, tous les réels sont atteints. Tu vois qu'il existe un réel dont le cube vaut  $-2$  (c'est environ  $-1.26$ ), et donc  $\sqrt[3]{-2}$  existe.

Cet ensemble est ce que nous notons  $f^{-1}(5)$ . Si  $f(x) = x^2$ , nous avons

$$f^{-1}(5) = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}.$$

Tu remarques immédiatement que *la réciproque d'une fonction n'est pas une fonction* parce que le résultat de la réciproque n'est pas un seul nombre, mais tout un ensemble de nombres.

Parfois, il arrive que  $f^{-1}(x)$  soit un seul nombre. Par exemple si  $c(x) = x^3$ , alors  $c^{-1}(27) = \{3\}$ . Cette fonction  $x^3$  est tout à fait particulière parce que l'application réciproque donne *toujours* un seul nombre :

$$c^{-1}(y) = \{\sqrt[3]{y}\}.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, nous dirons que l'on a une *fonction inverse*. La racine cubique est l'inverse du cube. Il est pour l'instant hors de question de dire que la racine carré est l'inverse du carré.

**Définition 19.**

*L'application réciproque de la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application définie par*

$$f^{-1}(y) = \{x \in \text{dom } f \mid f(x) = y\}.$$

*Lorsque pour tout  $y \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $f^{-1}(y)$  est un singleton, alors on dit que  $f^{-1}$  est la **fonction inverse** de  $f$ .*

### 6.5.1 Remarques sur les domaines

Quel est le domaine de  $f^{-1}$ ? Son domaine est  $\mathbb{R}$  tout entier, et non juste l'image de  $f$  comme on pourrait le penser. En effet si  $f$  est la fonction  $x \mapsto x^2$ , on pourrait se dire que ça n'a pas de sens de chercher  $f^{-1}(-4)$  vu que  $f$  ne prend jamais la valeur  $-4$ . Mais en fait oui, ça a un sens :

$$f^{-1}(-4) = \emptyset.$$

C'est l'ensemble vide et puis c'est tout.

La première subtilité à remarquer, c'est que l'image de l'application réciproque sera toujours des parties du domaine de la fonction.

La seconde subtilité, c'est que c'est quand même frustrant de ne pas pouvoir dire que la racine carré est l'inverse du carré. Admire la mauvaise foi des mathématiciens quand ils veulent que quelque chose **existe** alors que ça n'existe pas : nous allons juste fermer l'œil gauche et pan, la racine carré va devenir l'inverse du carré. Voyons ça.

D'habitude la fonction carré se définit par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Mais ce que nous allons faire, c'est fermer l'œil gauche, c'est à dire oublier  $\mathbb{R}^-$  et définir

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Maintenant le domaine de  $f$  est les réels positifs, et nous avons que

$$f^{-1}(4) = \{x \in \text{dom } f \mid f(x) = 4\} = \{\sqrt{4}\}.$$



Crak! On n'a plus que des singletons ... ah non pas tout à fait. Il reste encore des ensembles vides :  $f^{-1}(-7) = \emptyset$ . Qu'à cela ne tienne : on refait le coup de la mauvaise foi et on restreint le domaine de  $f^{-1}$  aux réels positifs.

Finalement la racine carrée est l'inverse du carré au sens que

$$\begin{aligned}\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}\end{aligned}\tag{6.14}$$

est la restriction aux positifs de l'application réciproque de la restriction du carré à  $\mathbb{R}^+$ . Tu peux méditer cette phrase.

Et maintenant nous allons nous permettre de parler d'*applications réciproques* à tors et à travers. À chaque fois que nous allons dire « application réciproque » ou « image inverse », nous allons sous-entendre que nous prenons toutes les restrictions de tout ce qu'il faut. C'est une tare commune chez les mathématiciens que de donner des définitions très précises et très subtiles pour immédiatement les oublier et sous-entendre 1000 trucs derrière chaque mot quand ils parlent. Cependant, remarque importante, afin de ne pas faire de fautes, quand nous énonçons un théorème et quand nous le démontrons, nous ne nous permettrons aucun abus de langage ; les mots seront utilisés dans le sens exact de leur définitions. Cela est tout l'art de la mathématique : il faut pouvoir penser et parler de façon souple, et puis énoncer et démontrer de façon rigide.

### Remarque 20.

Dans certains livres de math, l'application réciproque de  $f$  est directement définie comme étant restreinte à l'image de  $f$ . Cela fait que l'ensemble vide n'est jamais obtenu. Nous n'avons pas tenu à procéder de cette manière parce qu'il est souvent plus poétique de dire

$$f^{-1}(a) = \emptyset$$

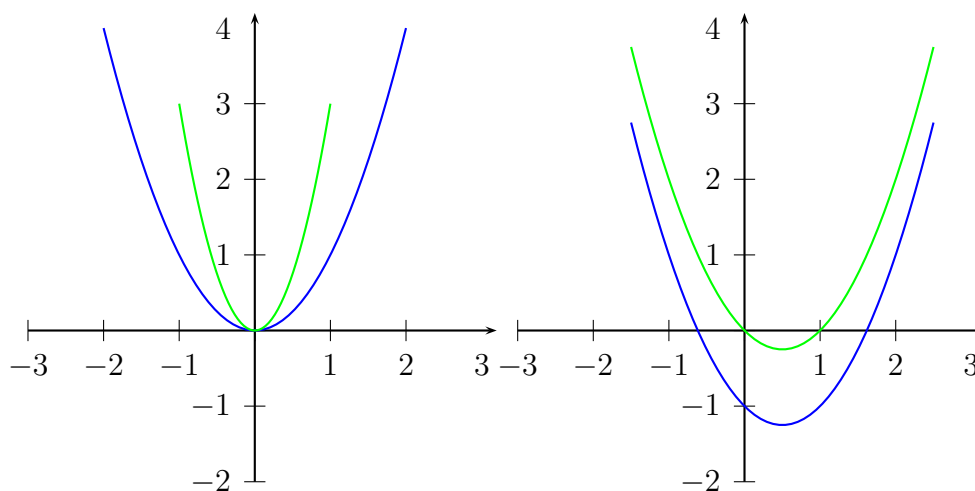
que de dire « l'équation  $f(x) = a$  n'a pas de solutions ». En définissant la réciproque comme nous le faisons, résoudre une équation revient toujours à trouver la réciproque d'une fonction, même quand l'équation n'a pas de solution.

## 6.6 Maximum, supremum et majoration de fonctions

### 6.7 Le second degré

Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction donnée par le **trinôme**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . La figure 6.5 montre quelques exemples de graphes dont la

concavité est tournée vers le haut. Les graphes se distinguent les uns des autres par leur largeur, et la position de leur sommet.



(a) La fonction  $f(x) = 3x^2$  en vert est moins large que la fonction  $x \mapsto x^2$  en bleu. (b) La fonction  $x \mapsto x^2 - x + 1$  en vert est simplement décalée vers le haut par rapport à la fonction  $x^2 - x$  en bleu.

FIG. 6.5 – Quelques exemples de graphes de fonctions du type  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Sur cette figure, tu remarqueras que les concavités sont tournées vers le haut, et que comme par hasard, le terme en  $x^2$  apparaît positivement.

La figure 6.6 montre des exemples de fonctions dont la concavité est tournée vers le bas. Encore une fois, les graphes se distinguent les uns des autres par leur largeur, et la position de leur sommet.

Les graphes des fonctions de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  sont appelés des **paraboles**. Nous allons à partir de maintenant complètement confondre la parabole et la fonction qui la définit.

### 6.7.1 Trouver les racines de la parabole

Les **racines** du trinôme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ . Graphiquement, cela correspond aux points d'intersection entre la parabole et l'axe horizontal. La figure 6.5(a) montre deux paraboles n'ayant qu'une seule intersection avec l'axe horizontal, tandis que la figure 6.5(b) montre deux paraboles qui ont deux intersections avec l'axe horizontal.

Dans la vie, il y a certains mathématiciens qui sont très forts. L'un d'eux est celui qui a trouvé les solutions à l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ . D'abord, remarque que quand  $a = 0$ , c'est très facile parce qu'il ne reste même plus de second degré.

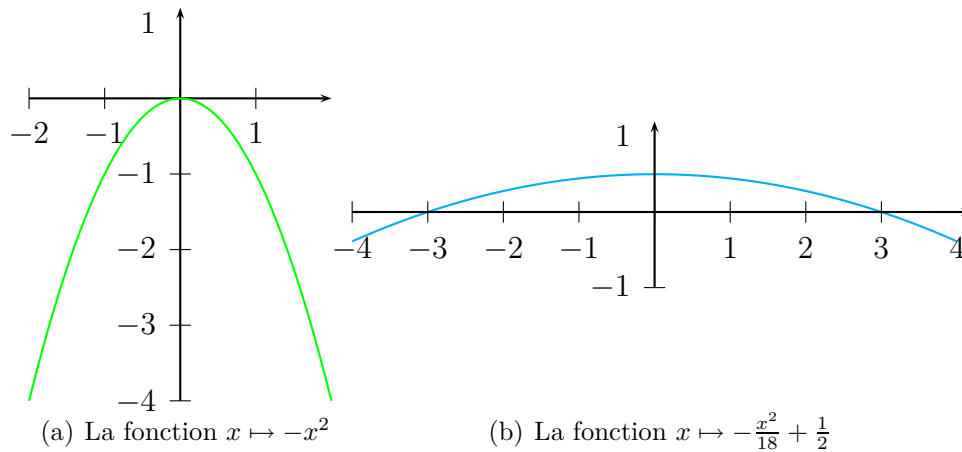


FIG. 6.6 – D'autres exemples de graphe de fonctions du type  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Sur cette figure, tu remarqueras que les concavités sont tournées vers le bas et que cette fois, le terme en  $x^2$  apparaît négativement.

Donc on peut supposer que  $a \neq 0$  et maintenant admire le travail :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (6.15a)$$

$$= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \quad (6.15b)$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \quad (6.15c)$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad (6.15d)$$

Le sens de la manœuvre est ainsi :

- d'abord, on enlève le coefficient devant  $x$  en le mettant en évidence devant tout le monde,
- ensuite, on essaye de faire en sorte que  $x$  n'arrive plus que une seule fois ; pour cela on fait du semblant que  $x^2 + \frac{b}{a}x$  est une partie du carré parfait  $(x + \frac{b}{2a}x)^2$ , mais alors pour recoller les pots cassés, il faut retrancher le terme  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ,
- enfin, on remet tout en place pour qu'il ne reste plus que deux termes.

Évidemment  $4a^2$  est toujours positif, donc le signe de  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  dépend du signe de  $b^2 - 4ac$ . Cette quantité est très importante. On l'appelle le **discriminant** :

$$\rho = b^2 - 4ac.$$

Nous divisons maintenant notre étude en trois cas selon que le discriminant est négatif, positif ou nul.

### Quand le discriminant est positif

Si  $b^2 - 4ac > 0$ , alors la quantité  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  est positive, ce qui fait que c'est le carré d'un nombre. Ce qui se trouve dans le crochet de (6.15d) est donc une différence de carré. Donc on peut utiliser la formule archi-connue  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , et nous trouvons

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left( x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\rho}{4a^2}} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\rho}{4a^2}} \right) \\ &= a \left( x + \frac{b + \sqrt{\rho}}{2a} \right) \left( x + \frac{b - \sqrt{\rho}}{2a} \right). \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi les solutions à l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  sous la forme

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6.16)$$

Tu n'en as pas fini avec ces deux formules; donc débrouilles toi pour les connaître. Rien que dans ton cours de physique, tu vas devoir les utiliser environ un million de fois.

### Quand le discriminant est nul

Supposons que  $\rho = 0$ . Dans ce cas, l'expression (6.15d) se simplifie notablement :

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2,$$

qui ne s'annule que quand

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Note que les solutions  $x_1$  et  $x_2$  données par (6.16) se réduisent toutes les deux à  $-b/2a$  quand  $\rho = 0$ . La solution  $x_0$  pour  $\rho = 0$  n'est donc pas nouvelle.

### Quand le discriminant est négatif

Lorsque  $b^2 - 4ac < 0$ , la fraction  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  est strictement négative. Or évidemment  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  est toujours positive ou nulle (parce que c'est un carré). Ce qu'il y a dans le crochet de (6.15d) est donc toujours strictement positif et ne peut donc pas s'annuler.

Conclusion : lorsque le discriminant est négatif,  $f(x) = 0$  n'a pas de solutions.

### 6.7.2 Exercices

#### Exercice 19.

Les trinômes suivants ont deux racines entières entre  $-10$  et  $10$ . Trouves les.

$$f_1(x) = 9x^2 + 72x + 135$$

$$f_3(x) = 10x^2 - 40x - 600$$

$$f_5(x) = -4x^2 - 8x + 12$$

$$f_7(x) = -5x^2 + 65x - 150$$

$$f_9(x) = -6x^2 + 216$$

$$f_2(x) = 4x^2 + 8x$$

$$f_4(x) = -10x^2 + 90x$$

$$f_6(x) = -7x^2 - 70x - 147$$

$$f_8(x) = -x^2 + 5x + 24$$

$$f_{10}(x) = -3x^2 + 18x + 21$$

#### Correction de l'exercice 19

$$S_1 = \{-3, -5\}$$

$$S_3 = \{10, -6\}$$

$$S_5 = \{-3, 1\}$$

$$S_7 = \{3, 10\}$$

$$S_9 = \{-6, 6\}$$

$$S_2 = \{0, -2\}$$

$$S_4 = \{0, 9\}$$

$$S_6 = \{-7, -3\}$$

$$S_8 = \{-3, 8\}$$

$$S_{10} = \{-1, 7\}$$

Afin d'avoir deux solutions entières, un trinôme doit s'écrire sous la forme  $a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les deux racines entières. Le trinôme aura donc toujours la forme  $ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ . C'est pour cela que *tous* les trinômes de cet exercice peuvent commencer par simplifier le coefficient de  $x^2$ .

#### Exercice 20.

Les trinômes suivants ont deux racines rationnelles -10 et 10. Trouves les.

$$f_1(x) = \frac{17}{6}x^2$$

$$f_3(x) = -\frac{7}{3}x^2 - \frac{91}{36}x - \frac{35}{72}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{19}{16}x + \frac{45}{16}$$

$$f_7(x) = -\frac{21}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4$$

$$f_9(x) = -\frac{16}{5}x^2 - 18x - \frac{99}{5}$$

$$f_2(x) = -\frac{9}{10}x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{3}{70}$$

$$f_4(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{92}{15}x + \frac{26}{5}$$

$$f_6(x) = \frac{9}{8}x^2 + \frac{55}{64}x - \frac{7}{64}$$

$$f_8(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{33}{10}x - \frac{9}{10}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 7x + \frac{55}{2}$$

**Correction de l'exercice 20**

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{0, 0\} & S_2 &= \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right\} \\
S_3 &= \left\{-\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}\right\} & S_4 &= \left\{\frac{26}{9}, \frac{6}{5}\right\} \\
S_5 &= \left\{5, \frac{9}{2}\right\} & S_6 &= \left\{\frac{1}{9}, -\frac{7}{8}\right\} \\
S_7 &= \left\{-\frac{8}{7}, \frac{2}{3}\right\} & S_8 &= \left\{3, -\frac{1}{4}\right\} \\
S_9 &= \left\{-\frac{33}{8}, -\frac{3}{2}\right\} & S_{10} &= \left\{-\frac{11}{5}, 5\right\}
\end{aligned}$$

**Exercice 21.**

Les trinômes suivants sont aléatoires ; trouves les solutions quand il y en a.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= -10x^2 + x + 9 & f_2(x) &= 3x^2 - 7x - 9 \\
f_3(x) &= 5x^2 - 5x - 9 & f_4(x) &= x^2 - 3x - 3 \\
f_5(x) &= -2x^2 + 2 & f_6(x) &= -x^2 + x - 4 \\
f_7(x) &= -8x^2 + 10x - 6 & f_8(x) &= x^2 + x - 9 \\
f_9(x) &= -9x^2 + 2x + 3 & f_{10}(x) &= 7x^2 - 4x + 9
\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 21**

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\{-\frac{9}{10}, 1\right\} & S_2 &= \left\{\frac{7 + \sqrt{157}}{6}, \frac{7 - \sqrt{157}}{6}\right\} \\
S_3 &= \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{205}, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{205}\right\} & S_4 &= \left\{\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right\} \\
S_5 &= \{-1, 1\} & S_6 &= \emptyset \\
S_7 &= \emptyset & S_8 &= \left\{\frac{-1 + \sqrt{37}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{37}}{2}\right\} \\
S_9 &= \left\{\frac{1 - 2\sqrt{7}}{9}, \frac{1 + 2\sqrt{7}}{9}\right\} & S_{10} &= \emptyset
\end{aligned}$$

### 6.7.3 Trouver le sommet d'une parabole

Lorsque la concavité est tournée vers le haut, le sommet est le point le plus haut de la parabole, tandis que lorsque la concavité est tournée vers le bas, le sommet est le point le plus bas. Nous allons maintenant montrer comment on peut calculer les coordonnées de ce point pour la courbe  $y = ax^2 + bx + c$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Regarde la figure 6.7. Les deux lignes horizontales rouges sont trop haute

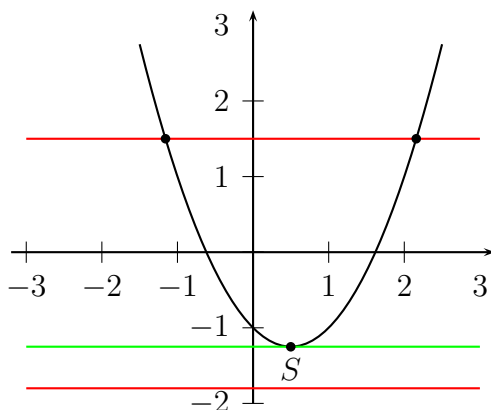


FIG. 6.7 – Étude de la position du sommet de la parabole.

et trop basses. La première a deux points d'intersections avec la parabole tandis que la seconde n'en a pas. La droite horizontale verte par contre est exactement à la hauteur du sommet : elle a un et un seul point d'intersection avec la parabole. Essayons de trouver ce point de façon analytique.

Les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  d'intersection entre la parabole  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et la droite horizontale à la hauteur  $y_S$  sont données par les racines de l'équation  $ax^2 + bx + c = y_S$ , ce qui revient à

$$ax^2 + bx + c - y_S = 0.$$

Le discriminant de cette équation est  $\rho = b^2 - 4a(c - y_S)$ . Afin qu'il n'y ait qu'une seule solution, on demande que ce discriminant soit nul. Trouver la hauteur  $y_S$  du sommet de la parabole revient donc à résoudre l'équation

$$b^2 - 4a(c - y_S) = 0$$

par rapport à  $y_S$ . La solution est  $y_S = c - \frac{b^2}{4a}$  qui peut être réécrite en mettant les deux termes au même dénominateur sous la forme

$$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\rho}{4a}. \quad (6.17)$$

Nous savons maintenant la hauteur du sommet. Il faut encore voir l'abscisse. Pour cela ce n'est pas très compliqué : il faut voir pour quel  $x$ , la fonction  $f$  a la valeur  $y_S$ . En d'autres termes, il faut résoudre l'équation  $f(x) = y_S$  :

$$ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Cela reste une équation du second degré comme d'habitude. Et même une équation de type facile parce c'est gagné d'avance que le discriminant va être nul : on a construit le sommet de telle manière à ce que la parabole ne passe qu'une fois par la hauteur  $y_S$ . La solution est

$$x_S = -\frac{b}{2a}.$$

Finalement, on écrit les coordonnées du sommet :

$$S = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\rho}{4a} \right). \quad (6.18)$$

## 6.8 Étude de signe d'une fonction

Pour qu'une fonction change de signe, il faut qu'elle passe par zéro (voir figure 6.8). Donc la technique pour faire un tableau de signe constitue à

- a. trouver où la fonction s'annule ; ces zéros de la fonction coupent  $\mathbb{R}$  en différentes zones
- b. trouver, dans chaque zone, le signe. Pour cela, le plus simple est souvent de choisir un nombre dans la zone et de voir si la fonction est positive ou négative.

### Exemple 21.

La fonction  $f: x \mapsto x^2 - 1$  s'annule en  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 1$ . Nous découpons donc  $\mathbb{R}$  en trois zones :

- avant  $-1$ ,
- entre  $-1$  et  $1$ ,
- après  $1$ .

Pour savoir le signe de  $f$  dans la première zone, on choisit par exemple  $x = -10$  et on voit que  $f(-10) = 99$ . Donc  $f$  est positive dans la première zone. Dans la seconde zone, on choisit  $x = 0$ , et on voit que  $f(0) = -1$ , ce qui fait que  $f$  est négative dans la seconde zone. En prenant  $f(10) = 99$ , on voit que  $f$  est à nouveau positive dans la troisième zone.



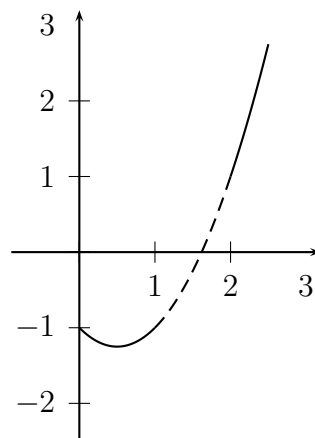


FIG. 6.8 – Avant 1, la fonction est négative ; après 2 elle est positive. C'est qu'entre les deux, elle a dû passer par zéro. Cela sera démontré de façon rigoureuse par le théorème [51](#).



# Chapitre 7

## Limite, topologie et continuité

### Résumé

Ce chapitre se découpe de la façon suivante : d'abord nous voyons comment on définit le concept de limite quand il y a de l'infini en jeu ; limites en l'infini ou vers l'infini. Cela permet de s'habituer à manipuler des conditions qui contiennent des  $\forall$ , des  $\exists$ , des  $\epsilon$  et des  $\delta$  dans des situations simples... ou disons, si pas simples, en tout cas attractives. C'est attractif hein l'infini ?

Ensuite, au lieu de continuer avec les limites dans les autres cas, nous en profitons pour traiter la continuité en détail.

Le reste de la manière sur les limites est alors vu dans l'optique du lien entre limite et continuité, et en particulier le principe de prolongement par continuité.

### 7.1 Limites avec des infinis

Le concept de limite est essentiellement fait pour traiter l'infini. Regarde par exemple les figures 7.1, 7.6, et 7.15. À tous les coups, la fonction dessinée a un comportement qui a quelque chose à voir avec l'infini : parfois c'est la fonction qui devient presque plate quand on regarde les  $x$  très grands, parfois c'est la fonction elle-même qui devient très grande quand on regarde des  $x$  tout proches d'un certain nombre. Nous allons donc commencer par définir les limites quand il y a de l'infini en jeu.

Mais ce qui est génial, c'est qu'il y a un bonus. Quand tu vois la fonction  $\frac{x+4}{3x^2+10x-8}$ , la première chose que tu fais, c'est de dire qu'il y a une condition d'existence  $x \neq -4$  et  $x \neq 2/3$ . Mais quand même, tu flaires une arnaque parce que  $3x^2 + 10x - 8 = (x + 4)(3x - 2)$ , ce qui fait que tu te dis qu'on doit pouvoir simplifier :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)(3x-2)} = \frac{1}{3x-2},$$

ce qui fait que la condition d'existence  $x \neq -4$  n'en est pas vraiment une. Nous allons voir que notre travail sur les limites va nous permettre de dire que dans ce cas, on peut effectivement jarter la condition d'existence et dire que dans un certain sens,  $f(-4) = -1/14$ .

### 7.1.1 Conversation avec mon ordinateur

Voici d'ailleurs un extrait d'une conversation que j'ai eue avec mon ordinateur, et plus précisément avec le logiciel [wxMaxima<sup>1</sup>](#), en préparant ces notes.

Je dis :

$$f(x) := (x+4)/(3x^2+10x-8)$$

Il répond

$$f(x) := \frac{x+4}{3x^2+10x-8}, \quad (7.1)$$

c'est à dire : « j'ai bien compris que tu veux définir comme ça la fonction  $f$  ». Alors moi je tente ma chance et je lui demande :

$$f(-4),$$

et mon ordinateur me répond très élégamment que

Division by 0

#0 : f(x=-4)

- an error. Quitting. To debug this try debugmode(true) ;

c'est à dire qu'il refuse de faire le calcul que je lui demande pour cause de division par zéro. Qu'à cela ne tienne, je lui donne l'ordre

$$\text{radcan}(f(x)),$$

c'est à dire que je lui demande poliment de simplifier la fonction  $f$ . Sans surprise, mon ordinateur me répond

$$\frac{1}{3x-2}.$$

C'est alors que j'essaye de l'arnaquer et redemande

$$f(-4),$$

---

<sup>1</sup>Dont je te recommande chaudement l'utilisation pour résoudre tes devoirs de math. Ce logiciel étant un [logiciel libre](#), tu peux le télécharger et l'installer sans payer ni demander quoi que ce soit à qui que ce soit sans avoir peur de pirater ; c'est légal et c'est fait pour.

mais mon ordinateur m'a vu venir et me répond encore une fois que j'ai demandé une division par zéro :

Division by 0

#0 : f(x=-4)

- an error. Quitting. To debug this try `debugmode(true)` ;

Il a donc retenu que même si  $f(x)$  est égal à  $1/(3x-2)$ , il reste malgré tout derrière une condition d'existence qui provient de la définition initiale de  $f$ .

Dans quelque pages, nous allons devenir plus malin que mon ordinateur.

### 7.1.2 Limites du côté de l'infini

Regarde le graphe de la fonction  $x \rightarrow 1/x$  sur la figure 7.1. Tu remarques que c'est une fonction qui décroît assez vite quand on avance dans les  $x$ . Regarde aussi la figure 7.2 qui représente la même fonction un peu plus loin.

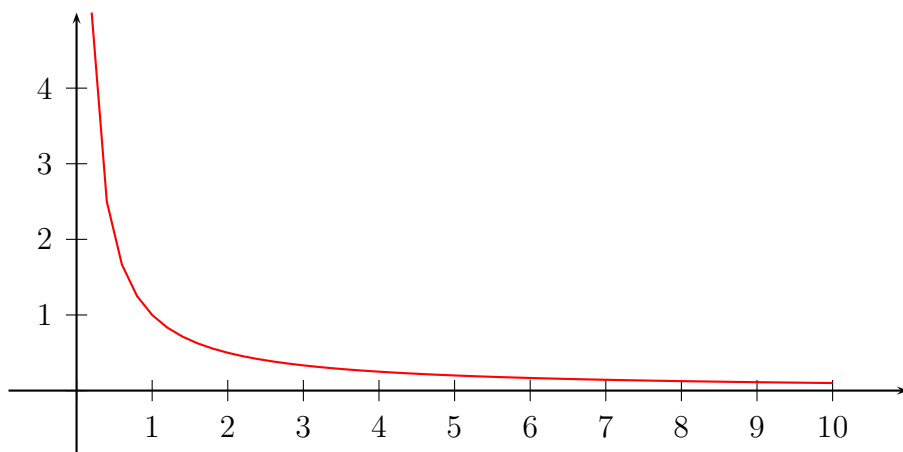


FIG. 7.1 – La fonction  $f(x) = 1/x$  du côté des positifs. Ça devient vite petit hein ?

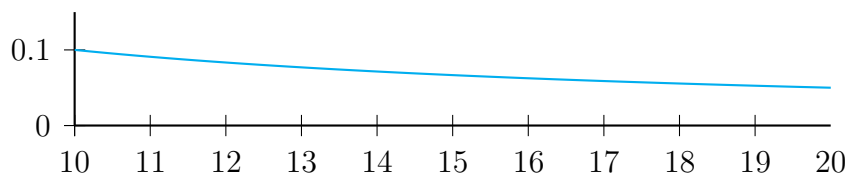


FIG. 7.2 – La fonction  $f(x) = 1/x$ , entre 10 et 20. On voit qu'elle ne descend plus très vite, mais qu'elle continue à descendre.

Maintenant en regardant cette fonction, nous allons essayer de donner un sens à l'affirmation « la fonction  $x \rightarrow 1/x$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini ».

La première constatation facile est de voir que plus  $x$  est grand, plus  $f(x)$  est petit. Cela ne suffit pas pour dire conclure que  $f(x)$  tends vers zéro. En effet, la fonction  $\frac{1}{x} + 1$  est aussi de plus en plus petite, mais elle reste toujours plus grande que 1. Afin de pouvoir dire que  $f(x)$  tend vers zéro, nous remarquons que quand  $x$  est de plus en plus grand, le graphe de  $f$  vient s'écraser sur l'axe  $y = 0$ .

- Quand  $x = 10$ , la fonction passe en-dessous de 0.1 et y reste,
- Quand  $x = 100$ , la fonction passe en-dessous de 0.01 et y reste,
- Quand  $x = 1000$ , la fonction passe en-dessous de 0.001 et y reste,
- Quand  $x = 10000$ , la fonction passe en-dessous de 0.0001 et y reste,
- Quand  $x = 100000$ , la fonction passe en-dessous de 0.00001 et y reste,

mais partir de là, ça devient un peu longuet à écrire. Heureusement on peut continuer avec des puissances de 10.

- Quand  $x = 10^6$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-6}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^7$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-7}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^8$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-8}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^9$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-9}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^{10}$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-10}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^{11}$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-11}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^{12}$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-12}$  et y reste,
- Quand  $x = 10^{13}$ , la fonction passe en-dessous de  $10^{-13}$  et y reste,

et maintenant on a compris comment ça se passe :

la fonction  $x \rightarrow 1/x$  devient aussi petite que l'on veut pourvu qu'on aille assez loin.

C'est exactement cette idée que l'on met dans l'essai de définition suivant

### Définition 22.

On dit que la fonction positive  $x \rightarrow f(x)$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers l'infini si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $r$  tel que  $x > r$  implique  $f(x) < \epsilon$ . En formule compacte :

$$\forall \epsilon > 0, \exists r | (x > r) \Rightarrow f(x) < \epsilon. \quad (7.2)$$

Cette définition ne fonctionne en fait pas. Pourquoi? Pense bêtement à la fonction  $f(x) = -x$  représentée sur la figure 7.3. Ce n'est évidemment pas une fonction dont tu dirais qu'elle tend vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini. Et pourtant, elle vérifie la condition donnée dans l'essai de définition.

Le problème de cet exemple est que la fonction devient négative et est donc toujours plus petite que le  $\epsilon$  choisit. Réfléchissons donc maintenant à comment adapter la définition 22 au cas d'une fonction pas nécessairement positive. Prenons par exemple une fonction qui tourne autour de zéro, tout en s'y écrasant inéluctablement. Une telle fonction est représentée à la figure 7.4.

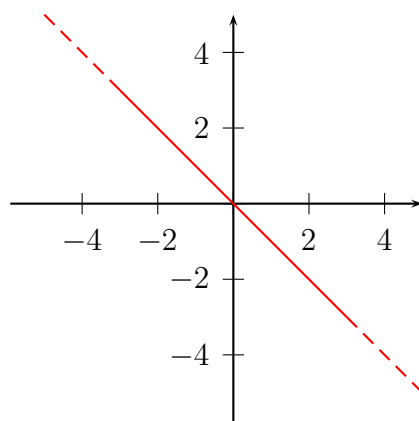


FIG. 7.3 – La fonction  $f(x) = -x$ . Elle n’a pas l’air de tendre vers zéro, et pourtant elle vérifie l’essai de définition 22.

Visuellement, c’est clair qu’on va dire que la fonction  $2 \sin(x)/x$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers l’infini, mais comment le formaliser ? L’idée qui nous sauve, c’est de remarquer que ce qui compte, c’est que la distance entre zéro et la fonction est de plus en plus petite. Que cette distance soit vers le haut ou vers le bas, ça n’a pas tellement d’importance. Nous posons donc la définition suivante (tu peux oublier la définition 22) :

**Définition 23.**

*On dit que la fonction  $f(x)$  **tend vers 0 quand  $x$  tend vers l’infini** si pour toute nombre  $\epsilon$ , la distance entre  $f(x)$  et l’axe  $y = 0$  devient plus petit que  $\epsilon$  à partir d’un certain moment et reste plus petit. En notations compactes :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x > r) \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon. \quad (7.3)$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad (7.4)$$

Nous avons inventé cette définition en regardant deux exemples. Si nous ne nous sommes pas trompé, il faut qu’au moins la définition fonctionne dans les deux exemples. Prouvons cela.

**Proposition 24.**

*La fonction  $f(x) = 1/x$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers l’infini.*

*Démonstration.* Prenons un  $\epsilon > 0$  quelconque et prouvons que quand  $x$  est assez grand, alors  $f(x) \leq \epsilon$ . Cela revient à résoudre l’inéquation

$$\frac{1}{x} \leq \epsilon$$

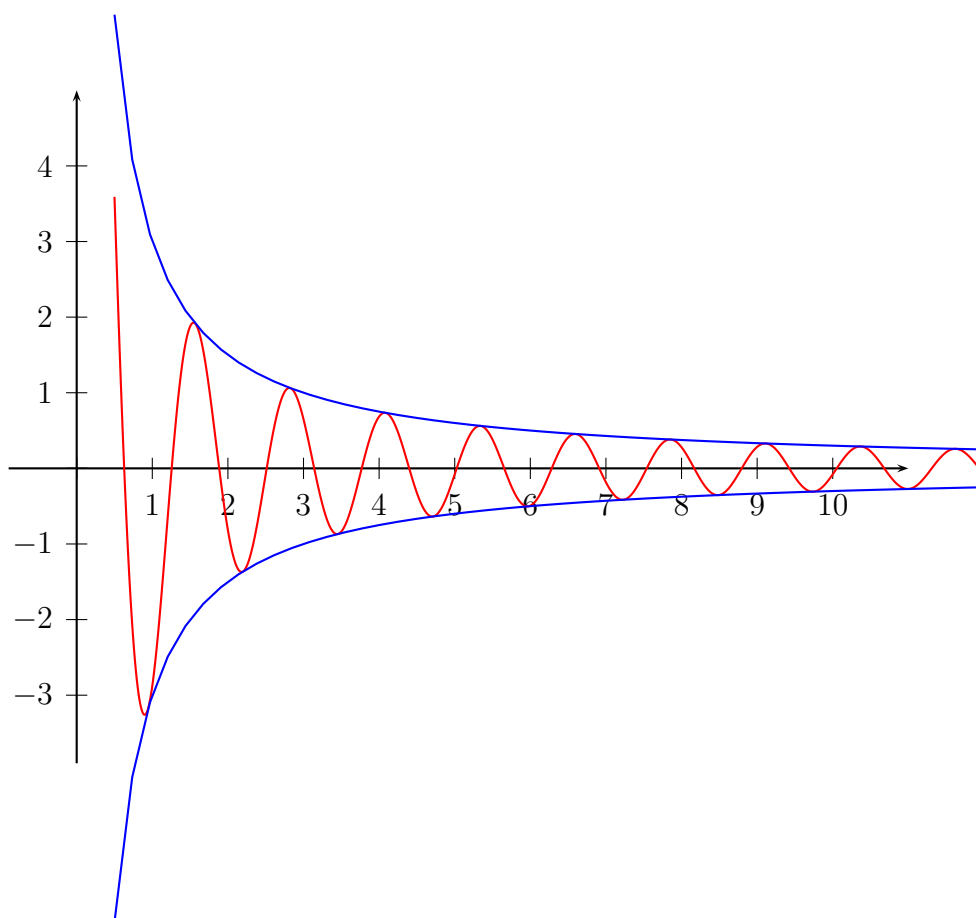


FIG. 7.4 – La fonction  $f(x) = 3 \sin(x)/x$  en rouge qui s'écrase sur zéro parce qu'elle est encadrée par  $3/x$  et  $-3/x$

dont la solution est  $x \geq \frac{1}{\epsilon}$ . Ce  $1/\epsilon$  est le  $r$  dont on parle dans la condition (7.3). En effet, par construction quand  $x > \frac{1}{\epsilon}$ , on a  $|f(x)| \leq \epsilon$ .  $\square$

**Proposition 25.**

La fonction  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini.

*Démonstration.* Étant donné que  $|\sin(x)| \leq 1$  pour tout  $x$ , on a que  $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$  pour tout  $x$ . Nous venons de démontrer à la proposition 24 que pour tout  $\epsilon$ , il existait un  $r$  (en l'occurrence  $r = 1/\epsilon$ ) tel qu'au-delà de  $r$ , on ait toujours  $\frac{1}{x} \leq \epsilon$ . Tout l'astuce est de remarquer que pour le même  $r$ , on a la même chose pour  $|f(x)|$  : dès que  $x > \frac{1}{\epsilon}$ , on a

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \epsilon.$$



□

Quand on a compris ce qu'il se passe jusqu'ici, la définition suivante ne doit pas étonner grand monde.

**Définition 26.**

On dit que la fonction  $f(x)$  **tend vers 0 quand  $x$  tend vers moins l'infini** si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $r$  tel que  $f(x)$  soit plus petit que  $\epsilon$  dès que  $x$  est plus petit que  $r$ . En formules compacte :

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{R} \mid (x \leq r) \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon. \quad (7.5)$$

Nous noterons ce fait par

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \quad (7.6)$$

Nous allons prouver que la fonction  $f(x) = 1/x$  est dans ce cas. Avant la démonstration, jette un œil sur la figure 7.5.

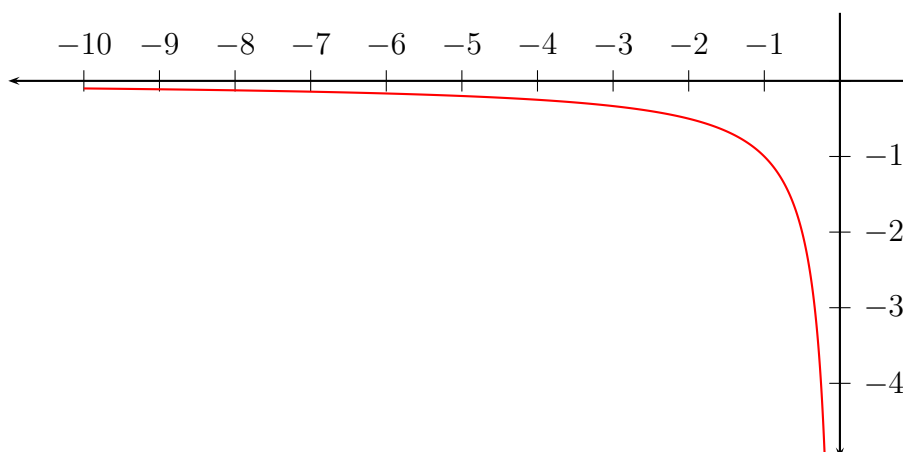


FIG. 7.5 – La fonction  $f(x) = 1/x$  du côté des négatifs. Elle est du même tonneau que celle de la figure 7.1, mais à l'envers.

**Proposition 27.**

La fonction  $f(x) = 1/x$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers moins l'infini.

*Démonstration.* Soir  $\epsilon > 0$  et prouvons que si on est assez loin vers la gauche, alors  $|f(x)| \leq \epsilon$ . La réponse est  $r = -1/\epsilon$ . Affin de prouver ça, nous allons devoir jouer avec  $|f(x)| = \frac{1}{|x|}$ . On a ceci :

$$x < -\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \epsilon \quad (7.7)$$

où la première implication est juste une multiplication par  $-1$  : étant donné que  $x$  est négatif,  $-x = |x|$ . En utilisant ce résultat, nous trouvons que quand  $x$  est plus petit que  $-1/\epsilon$ ,

$$|f(x)| = \frac{1}{|x|} < \epsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

Il faut maintenant se rendre compte qu'il y a des fonctions qui ne tendent pas vers zéro quand  $x$  tend vers plus ou moins l'infini. La figure 7.6 montre par exemple la fonction

$$\frac{5x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 7}.$$

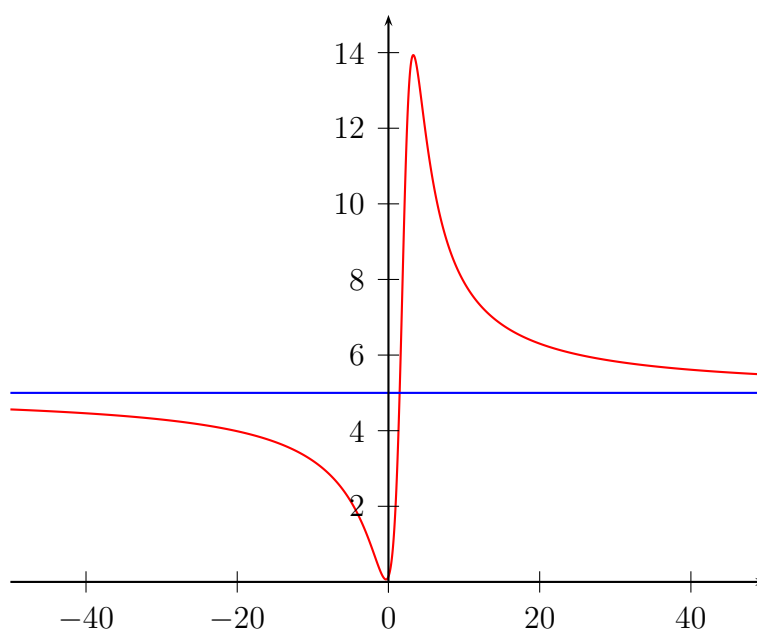


FIG. 7.6 – Une fonction dont la limite en  $\pm\infty$  n'est manifestement pas zéro.

À vue de nez, on a plutôt envie de dire que la limite de cette fonction est 5 tant à l'infini qu'à moins l'infini. On a envie de dire que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -5 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5. \qquad (7.8)$$

En fait, quand on regarde le dessin, ce qu'on voit, c'est que le graphe vient s'écraser sur la ligne  $y = 5$ . C'est à dire que la distance entre  $f(x)$  et 5 devient de plus en plus petite. D'où la définition

**Définition 28.**

On dit que la fonction  $x \rightarrow f(x)$  **tend vers  $a$  quand  $x$  tend vers l'infini** si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $r \in \mathbb{R}$  tel que dès que  $x$  est plus grand que  $r$ , alors la distance entre  $f(x)$  et  $a$  est plus petite que  $\epsilon$ . En formule compacte,

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{R} \mid (x > r) \Rightarrow |f(x) - a| \leq \epsilon.$$

La définition de  $f(x)$  qui **tend vers  $a$  quand  $x$  tend vers moins l'infini** est

$$\forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{R} \mid (x < r) \Rightarrow |f(x) - a| \leq \epsilon.$$

On écrit respectivement

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a. \quad (7.9)$$

Maintenant nous sommes capables d'exprimer clairement ce que signifie que  $f(x)$  tend vers un nombre quand  $x$  tend vers plus ou moins l'infini. Que dire de la fonction représentée à la figure 7.7? Cette fonction a comme propriété qu'elle dépasse n'importe quelle valeur donnée. Par exemple :

- Quand  $x = 1$ , la fonction passe au-dessus de 1 et y reste,
- Quand  $x = 2$ , la fonction passe au-dessus de 4 et y reste,
- Quand  $x = 3$ , la fonction passe au-dessus de 10 et y reste,
- Quand  $x = 4$ , la fonction passe au-dessus de 27 et y reste,
- Quand  $x = 5$ , la fonction passe au-dessus de 74 et y reste,
- Quand  $x = 6$ , la fonction passe au-dessus de 202 et y reste,
- Quand  $x = 7$ , la fonction passe au-dessus de 548 et y reste,
- Quand  $x = 8$ , la fonction passe au-dessus de 1490 et y reste,
- Quand  $x = 9$ , la fonction passe au-dessus de 4052 et y reste,
- Quand  $x = 10$ , la fonction passe au-dessus de 11013 et y reste.

Et le même genre de comportement se voit du côté des négatifs :

- Quand  $x = -1$ , la fonction passe en-dessous de -1 et y reste,
- Quand  $x = -2$ , la fonction passe en-dessous de -4 et y reste,
- Quand  $x = -3$ , la fonction passe en-dessous de -10 et y reste,
- Quand  $x = -4$ , la fonction passe en-dessous de -27 et y reste,
- Quand  $x = -5$ , la fonction passe en-dessous de -74 et y reste,
- Quand  $x = -6$ , la fonction passe en-dessous de -202 et y reste,
- Quand  $x = -7$ , la fonction passe en-dessous de -548 et y reste,
- Quand  $x = -8$ , la fonction passe en-dessous de -1490 et y reste,
- Quand  $x = -9$ , la fonction passe en-dessous de -4052 et y reste,
- Quand  $x = -10$ , la fonction passe en-dessous de -11013 et y reste.

Nous allons donc dire que la fonction  $f$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers l'infini si pour chaque valeur  $M$ , la fonction passe au-dessus de  $M$  à partir d'un certain moment et y reste.

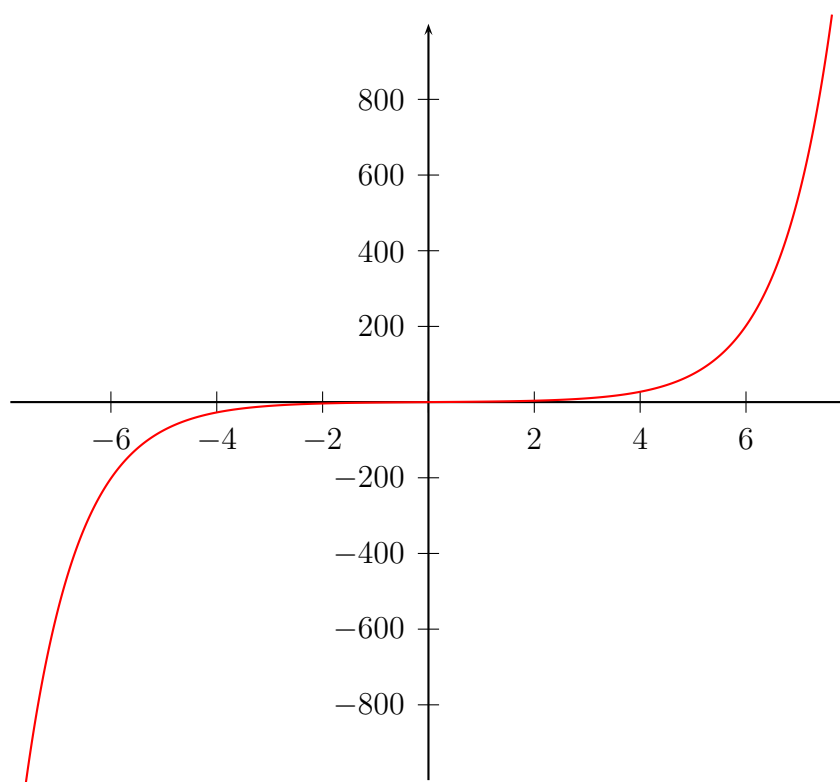


FIG. 7.7 – Une fonction dont on a envie de dire que la limite en l’infini est l’infini :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , et que la limite en moins l’infini vaut moins l’infini :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**Définition 29.**

Nous disons que la fonction  $x \rightarrow f(x)$  *tend vers l’infini quand  $x$  tend vers l’infini* si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid (x > x_0) \Rightarrow f(x) \geq M. \quad (7.10)$$

Dans ce cas, on écrit que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Dans le même ordre d’idée, on définit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid (x < x_0) \Rightarrow f(x) \leq M. \quad (7.11)$$

**Exercice 22.**

Invente la définition de

- a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ,
- b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .

Pour ce faire, recopie les définitions qui y ressemblent, et change juste ce qu’il faut changer.

**Correction de l'exercice 22**

- a.  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid (x > x_0) \Rightarrow f(x) \leq M.$   
 b.  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \mid (x < x_0) \Rightarrow f(x) \geq M.$

## 7.2 Topologie

Maintenant que nous avons vu des choses amusantes avec l'infini, nous devons passer à une partie moins drôle et un peu plus formelle. Tu verras plus tard que ce qui intéresse le physicien, c'est les dérivées. Mais hélas pour toi, ô lecteur poly-dégouté par les math, pour pouvoir au mieux tirer parti de la notion de dérivée, il faut d'abord savoir correctement manipuler des limites ainsi savoir déterminer si une fonction est continue ou non. Or le cadre naturel de l'étude de la continuité est la topologie.

Les concepts de topologie et de continuité ne seront pour ainsi dire jamais invoqués dans des problèmes concrets de physique<sup>2</sup>. Ceci pour la simple raison que pratiquement toutes les fonctions qui arrivent en physique sont continues. Le physicien ne s'embarrasse donc jamais de savoir si les fonctions qu'il manipule sont continues ou non. D'ailleurs, une des seules façons de distinguer à coup sûr un physicien d'un mathématicien, c'est que le mathématicien vérifie la continuité de ses fonctions avant de travailler tandis que le physicien pas : le physicien suppose que tout va bien, et quand il a vraiment un problème, il va aller pleurer chez un ami mathématicien pour qu'il lui dise si il n'y a pas un problème de topologie caché quelque part.

### 7.2.1 Maximum et supremum

#### Un tout petit peu de théorie...

Ce n'est un secret pour personne que  $\mathbb{R}$  est un **ensemble ordonné** : il y a des éléments plus grands que d'autres, et mieux : à chaque fois que je prends deux éléments différents dans  $\mathbb{R}$ , il y en a un des deux qui est plus grand que l'autre. Il n'y a pas d'*ex aequo* dans  $\mathbb{R}$ .

Si je regarde l'intervalle  $I = [0, 1]$ , je peux même dire que 10 est plus grand que tous les éléments de  $I$ . Nous disons que 10 est un *majorant* de  $[0, 1]$ . La définition est la suivante.

**Définition 30.**

Lorsque  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $s$  est un **majorant** de  $A$  si  $s$

---

<sup>2</sup>Si si : des limites en l'infini, tu vas en voir dans tes cours de physique.

est plus grand que tous les éléments de  $A$ . En d'autres termes, si

$$\forall x \in A, s \geq x.$$

Je me permet d'insister sur le fait que l'inégalité n'est pas stricte. Ainsi, 1 est un majorant de  $[0, 1]$ . Dès qu'un ensemble a un majorant, il en a plein. Si  $s$  majore l'ensemble  $A$ , alors évident  $s + 1$ ,  $s + 4$ ,  $s + \pi^2$  majorent également  $A$ .

### Exemple 31.

Une petite galerie d'exemples de majorants.

- L'intervalle fermé  $[4, 8]$  admet entre autres 8 et 130 comme majorants,
- l'intervalle ouvert  $]4, 8[$  admet également 8 et 130 comme majorants,
- 7 n'est pas un majorant de  $[1, 5] \cup ]8, 32]$ ,
- 10/10 majore les côtes qu'on peut obtenir à une interrogation,
- l'intervalle  $[4, \infty[$  n'a pas de majorants.

Maintenant nous allons voir le premier concept vraiment subtile de toute l'histoire de tes cours de math<sup>3</sup>.

### Définition 32.

Le **supremum** d'un ensemble est le plus petit majorant. En d'autres terme,  $s$  est un supremum de  $A$  si tout nombre plus petit que  $s$  ne majore pas  $A$ , ou encore,

$$\forall x < s, \exists y \in A \text{ tel que } y > x.$$

Nous disons que  $M$  est un **maximum** de  $A$  si  $M$  est un supremum et  $M \in A$ .

Quand  $s$  est un supremum de  $A$ , ça veut dire que le moindre pas vers la gauche que l'on fait à partir de  $s$  (c'est à dire le moindre  $\epsilon$ ), et on tombe dans  $A$ , ou tout au moins, il existe des éléments de  $A$  qui sont plus grand que  $s - \epsilon$ .

### ... et quelque exemples

En matières de notations, le maximum de l'ensemble  $A$  est noté  $\max A$ , le supremum est noté  $\sup A$ . Le minimum et l'infimum sont notés  $\min A$  et  $\inf A$ .

### Exemple 33.

Exemples de différence entre majorant, supremum et maximum.

- Le nombre 10 est un supremum, majorant et maximum de l'intervalle fermé  $[0, 10]$ ,
- Le nombre 10 est un majorant et un supremum, mais pas un maximum de l'intervalle ouvert  $]0, 10[$ ,

---

<sup>3</sup>Quoi ? Il y a déjà des trucs que tu avais trouvé compliqué ? Eh bien rassures-toi : ce qui suit n'est pas spécialement *compliqué* ; c'est *subtil* !

- Le nombre 136 est un majorant, mais ni un maximum ni un supremum de l'intervalle  $[0, 10]$ .

En utilisant les notations concises, ces différents cas s'écrivent ainsi :

$$10 = \max[0, 10] = \sup[0, 10] \qquad 10 = \sup[0, 10[$$

### Exemple 34.

Si on dit que un pont s'effondre à partir d'une charge de 10 tonnes, alors 10 tonnes est un *supremum* des charges que le pont peut supporter : si on met 9,999999 tonnes dessus, il tient encore le coup, mais si on ajoute un gramme, alors il s'effondre (on sort de l'ensemble des charges acceptables).

### Exemple 35.

Si on dit qu'un pont résiste jusqu'à 10 tonnes, alors 10 tonnes est un *maximum* de la charge acceptable. Sur ce pont-ci, on peut ajouter le dernier gramme. Mais à partir de là, le moindre truc qu'on ajoute, il s'effondre.

### Exemple 36.

Lorsqu'on dit que 50% est le minimum requis pour passer son année, alors 50% est un supremum des côtes avec lesquelles on rate, mais pas un maximum. En effet, pour tout  $\epsilon$  plus grand que zéro, il y a une côte plus grande que  $50 - \epsilon$  qui fait rater : la côte  $(50 - \epsilon/2)$  par exemple.

### Exercice 23.

Imagine la définition des mots *minorant*, *minimum* et *infimum* d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  qui sont à n'en pas douter exactement les mêmes que majorant, maximum et supremum, mais vers le bas.

### Correction de l'exercice 23

Le minimum d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est un élément qui est plus petit que tous les éléments de  $A$ . En formule, on dit que  $m$  est un **minorant** de  $A$  si

$$\forall x \in A, x \geq m.$$

L'**infimum** de  $A$  est le plus grand minorant. Si  $m$  est l'infimum, alors  $\forall x > m$ , il existe  $y \in A$  avec  $y < x$ . Et enfin, un **minimum** de  $A$  est un infimum qui appartient à  $A$ .

Maintenant il est important de se rendre compte d'une chose : un ensemble ne peut avoir qu'un seul maximum et supremum. Jusqu'à présent nous avons toujours dit *un* supremum. À partir de maintenant nous pouvons dire *le* supremum. La preuve de cela est assez simple.

**Proposition 37.**

*Si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  admettant un supremum, alors il n'a qu'un seul supremum ; et si il accepte un maximum, il n'en accepte un seul, et le maximum est égal au supremum.*

*Démonstration.* Commençons par l'affirmation concernant le supremum. Supposons que  $x$  et  $y$  soient tous les deux suprema différents de  $A$ . Étant donné que  $x \neq y$ , nous pouvons supposer que  $x < y$ , et donc, par définition du fait que  $y$  est un supremum, il existe un élément de  $A$  qui est plus grand que  $x$ . Cela contredit le fait que  $x$  soit supremum. En conclusion, il ne peut pas y avoir deux suprema différents pour un même ensemble.

Étant donné qu'un maximum est un supremum, il ne peut pas y avoir deux maxima différents vu qu'il ne peut pas y avoir deux suprema différents.  $\square$

**Exercice 24.**

Trouve des exemples d'ensembles  $A$  et de points  $a$  pour les situations suivantes (ou précise quand ce n'est pas possible) :

$a$ est un	majorant	supremum	maximum	de $A$
	oui	oui	oui	
	oui	oui	non	
	oui	non	non	
	oui	non	oui	
	non	non	oui	
	non	non	non	
	non	oui	non	
	non	oui	oui	

Par exemple la seconde ligne te demande un exemple d'ensemble  $A$  et de point  $a$  tels que  $a$  soit un majorant de  $A$ , qu'il soit un supremum, mais pas un maximum.

**Correction de l'exercice 24**

$a$ est un	majorant	supremum	maximum	de $A$
	oui	oui	oui	1 pour $[0, 1]$
	oui	oui	non	1 pour $[0, 1[$
	oui	non	non	2 pour $[0, 1]$
	oui	non	oui	maximum implique supremum
	non	non	oui	idem
	non	non	non	$-1$ pour $[0, 1]$
	non	oui	non	supremum implique majorant
	non	oui	oui	idem



Maintenant je t'encourage fortement à recommencer la même chose en remplaçant *majorant*, *supremum* et *maximum* par *minorant*, *infimum* et *minimum*.

### 7.2.2 Espaces métriques

Nous allons présenter maintenant les bases de la topologie sur des espaces métriques en prenant  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  comme exemple principaux. La topologie est un des fondements de la mathématique et est une prolongation de la théorie des ensembles. Nous n'en trouvons hélas pas beaucoup d'application directes en physique.

Si  $E$  est un ensemble quelconque, nous disons qu'une **distance** sur  $E$  est une fonction  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

**Symétrie**  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

**Séparation**  $d(x, y) = 0$  ssi  $x = y$ . Insistons sur le fait que dans tous les cas, nous devons avoir  $d(x, y) \geq 0$ ,

**Inégalité triangulaire**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

pour tout  $x, y, z \in E$ . Un ensemble muni d'une loi de distance s'appelle un **espace métrique**.

Le premier exemple d'espace métrique que nous connaissons est  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle entre deux nombres :

$$d(x, y) = |y - x|. \quad (7.12)$$

Je me permet de te faire remarquer la valeur absolue.

#### Exercice 25.

Que penses-tu de la formule  $d(x, y) = y - x$  pour définir une distance sur  $\mathbb{R}$  ?

À partir de là, nous définissons la notion de **boule ouverte** sur l'ensemble  $E$  centrée au point  $x$  et de rayon  $r > 0$  comme

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\}.$$

La **boule fermée** centrée en  $x$  et de rayon  $r > 0$  est définie par

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) \leq r\}.$$

La différence est que dans la première l'inégalité est stricte.

#### Théorème 38.

*Une boule ouverte contient une boule ouverte autour de chacun de ses points.*

*Démonstration.* Prenons  $y \in B(x, r)$ , et prouvons que la boule  $B(y, r - d(x, y))$  est contenue dans  $B(x, r)$ . Première chose :  $r - d(x, y) > 0$  parce que  $y$  est dans la boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $r$ . Pour prouver que  $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$ , prenons un point dans le premier ensemble et montrons qu'il est dans le second ensemble.

Soit donc  $z \in B(y, r - d(x, y))$  et testons  $d(x, z)$  que nous voudrions être plus petit que  $r$ . Et, miracle, il l'est parce que

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) && \text{inégalité triangulaire} \\ &< d(x, y) + (r - d(x, y)) && z \in B(y, r - d(x, y)) \\ &= r. \end{aligned}$$

Remarquez que la première inégalité n'est pas stricte, tandis que la seconde est stricte. Nous avons donc bien  $d(x, z) < r$  (strictement) comme le demandé pour que  $z$  soit dans la boule *ouverte* de centre  $x$  et de rayon  $r$ .  $\square$

Lorsque  $x \in E$ , nous disons qu'un **voisinage** de  $x$  est n'importe quel sous-ensemble de  $E$  qui contient une boule ouverte centrée en  $x$ . Nous disons qu'un ensemble est **ouvert** si il contient un voisinage de chacun de ses points. Évidemment les boules ouvertes sont les prototypes d'ouverts par le théorème 38. Par convention, nous disons que l'ensemble vide est ouvert.

### Définition 39.

*L'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique forment la **topologie** de l'espace.*

Un ensemble est ouvert si et seulement si il contient une boule autour de chacun de ses points.

Nous allons dire qu'une partie  $A$  d'un espace métrique est **bornée** si il existe une boule<sup>4</sup> qui contient  $A$ .

### Lemme 40.

*Le supremum d'un ensemble ouvert n'est pas dans l'ensemble (et n'est donc pas un maximum).*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}$ , un ensemble ouvert et  $s$ , son supremum. Si  $s$  était dans  $\mathcal{O}$ , on aurait un voisinage  $B = B(s, r)$  de  $s$  contenu dans  $\mathcal{O}$ . Le point  $s + r/2$  est alors à la fois dans  $\mathcal{O}$  et plus grand que  $s$ , ce qui contredit le fait que  $s$  soit un supremum de  $\mathcal{O}$ .  $\square$

---

<sup>4</sup>À titre d'exercice, je te laisse te convaincre que l'on peut dire boule *ouverte* ou *fermée* au choix sans changer la définition.

**Exercice 26.**

Par le même genre de raisonnements, montrez que l'union et l'intersection de deux ouverts sont encore des ouverts.

**Remarque 41.**

L'intersection d'une *inifinté* d'ouverts n'est pas spécialement un ouvert comme le montre l'exemple suivant :

$$\mathcal{O}_i = ]1, 2 + \frac{1}{i}[.$$

Tous les ensembles  $\mathcal{O}_i$  contiennent le point 2 qui est donc dans l'intersection. Mais quel que soit le  $\epsilon > 0$  que l'on choisisse, le point  $2 + \epsilon$  n'est pas dans  $\mathcal{O}_{(1/\epsilon)+1}$ . Donc aucun point au-delà de 2 n'est dans l'intersection, ce qui prouve que 2 ne possède pas de voisinages contenus dans  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$ .

**Exercice 27.**

Prouver que, quels que soient les ensembles  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}$ , nous avons

$$\sup(A \cap B) \leq \sup A \leq \sup(A \cup B).$$

**7.2.3 Connexité**

Dès qu'un ensemble est muni d'une métrique, nous pouvons définir les boules ouvertes, les voisinages et les sous-ensembles ouverts. Dès que l'on a identifié les sous-ensemble ouverts de  $E$ , nous disons que  $E$  devient un **espace topologique**. Nous allons maintenant un pas plus loin.

Nous voulons maintenant décrire ce qu'est un ensemble connexe. La notion intuitive d'un ensemble connexe est le fait que l'on puisse aller d'un point à l'autre sans sortir. En d'autres mots, nous voulons dire qu'un ensemble est connexe quand il est en un seul morceau. Nous avons donc envie de dire que le sous-ensemble  $A$  de  $E$  est connexe quand il ne peut pas être écrit comme une union disjointe de deux ensembles.

Cette définition ne peut pas fonctionner telle quelle, parce que tout ensemble peut être écrit comme l'union disjointe de deux ensembles. Il faut donc un peu contraindre le choix d'ensembles en lesquels on ne veut pas que  $A$  se décompose. Il se faut que la bonne définition est la suivante :

**Définition 42.**

Lorsque  $E$  est un espace topologique, nous disons qu'un sous-ensemble  $A$  est **non connexe** quand on peut trouver des ouverts  $O_1$  et  $O_2$  tels que

$$A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2), \quad (7.13)$$

et tels que  $A \cap O_1 \neq \emptyset$ , et  $A \cap O_2 \neq \emptyset$ . Si un sous-ensemble n'est pas non-connexe, alors on dit qu'il est connexe.

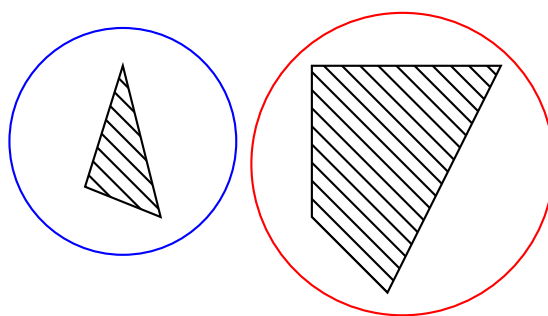


FIG. 7.8 – La figure hachurée n'est pas connexe parce qu'on peut dessiner deux ouverts disjoints qui la sépare.

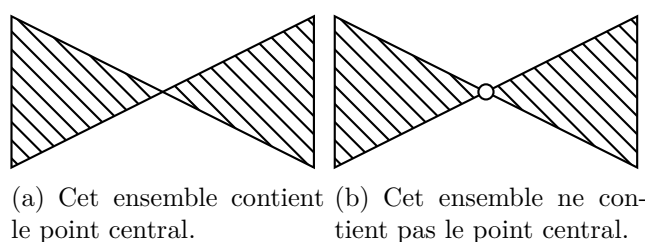


FIG. 7.9 – Exemple de deux ensembles dont la connexité se joue à un point près.

Une autre façon d'exprimer la condition (7.13) est de dire que  $A$  n'est pas connexe quand il est contenu dans la réunion de deux ouverts disjoints qui intersectent tous les deux  $A$ . Le cas de la figure 7.8 montre une surface dans  $\mathbb{R}^2$  qui est clairement non connexe. Mais il y a des cas nettement moins faciles à traiter. La figure 7.9 montre deux parties de  $\mathbb{R}^2$  qui ne diffèrent que de un seul point. Est-ce que tu pourrais dire si il y en a un des deux qui est connexe ? Nous n'allons pas traiter plus avant cet exemple. Au lieu de cela, nous allons déterminer tous les sous-ensembles connexes de  $\mathbb{R}$ . Pour cela nous avons besoin d'une définition précise de ce que l'on appelle un *intervalle* dans  $\mathbb{R}$ .

#### Définition 43.

Un **intervalle** est une partie de  $\mathbb{R}$  telle que tout élément compris entre deux éléments de la partie soit dedans. En formule, la partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si

$$\forall a, b \in I, (a \leq x \leq b) \Rightarrow x \in I.$$

Cette définition englobe tous les exemples que tu connais d'intervalles ouverts, fermés avec ou sans infini :  $[a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $] - \infty, a]$ ,  $\dots$

Une des nombreuses propositions qui vont servir à prouver le théorème des **valeurs intermédiaires** (théorème numéro 51) est la suivante.

**Proposition 44.**

*Une partie de  $\mathbb{R}$  est connexe si et seulement si c'est un intervalle.*

*Démonstration.* La preuve est en deux parties. D'abord nous démontrons que si un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  est connexe, alors c'est un intervalle ; et ensuite nous démontrons que tout intervalle est connexe. Je te préviens que les deux parties sont difficiles, alors ouvres bien grand tes oreilles.

Afin de prouver qu'un ensemble connexe est toujours un intervalle, nous allons prouver que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il n'est pas connexe. Prenons  $A$ , une partie de  $\mathbb{R}$  qui n'est pas un intervalle. Il existe donc  $a, b \in A$  et un  $x_0$  entre  $a$  et  $b$  qui n'est pas dans  $A$ . Comme le but est de prouver que  $A$  n'est pas connexe, il faut couper  $A$  en deux ouverts disjoints. L'élément  $x_0$  qui n'est pas dans  $A$  est le bon candidat pour effectuer cette coupure. Prenons  $M$ , un majorant de  $A$  et  $m$ , un minorant de  $A$ , et définissons (voir figure 7.10)

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= ]m, x_0[ \\ \mathcal{O}_2 &= ]x_0, M[.\end{aligned}$$

Si  $A$  n'a pas de minorant, nous remplaçons la définition de  $\mathcal{O}_1$  par  $] -\infty, x_0[$ , et si  $A$  n'a pas de majorant, nous remplaçons la définition de  $\mathcal{O}_2$  par  $]x_0, \infty[$ . Dans tous les cas, ce sont deux ensembles ouverts dont l'union recouvre tout  $A$ . En effet,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  contient tous les nombres entre un minorant de  $A$  et un majorant sauf  $x_0$ , mais on sait que  $x_0$  n'est pas dans  $A$ . Cela prouve que  $A$  n'est pas connexe.

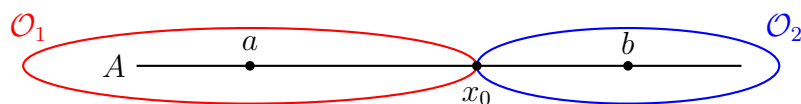


FIG. 7.10 – Le point  $x_0$  et les ouverts qui coupent en deux la partie  $A$ . Le fait déterminant dans la démonstration est que  $x_0$  se trouve à la frontière entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$

Jusqu'à présent nous avons prouvé que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il ne peut pas être connexe. Pour remettre les choses à l'endroit, prenons un ensemble connexe, et demandons-nous si il peut être autre chose qu'un intervalle ? La réponse est *non* parce que si il était autre chose, il ne serait pas connexe.

Prouvons à présent que tout intervalle est connexe. Pour cela, nous refaisons le coup de **la contraposée**. Nous allons donc prendre une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , supposer qu'elle n'est pas connexe et puis prouver qu'elle n'est alors pas un intervalle. Nous avons deux ouverts disjoints  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  tels que  $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Prenons  $a \in \mathcal{O}_1$  et  $b \in \mathcal{O}_2$ . Pour fixer les idées, on suppose que  $a < b$ . Maintenant, le jeu est de montrer qu'il existe un point  $x_0$  entre  $a$  et  $b$  qui ne soit pas dans  $A$  (cela montrerait que

$A$  n'est pas un intervalle). Nous allons prouver que c'est le cas du point

$$x_0 = \sup\{x \in \mathcal{O}_1 \mid x < b\}.$$

Étant donné que l'ensemble  $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{O}_1 \mid x < b\}$  est ouvert<sup>5</sup>, le point  $x_0$  n'est pas dans l'ensemble par le lemme 40. Nous avons donc

- soit  $x_0$  n'est pas dans  $\mathcal{O}_1$ ,
- soit  $x_0 \leq b$ ,
- soit les deux en même temps.

Nous allons montrer qu'un tel  $x_0$  ne peut pas être dans  $A$ . D'abord, remarquons que  $\sup \mathcal{A} \leq \sup \mathcal{O}$  parce que  $\mathcal{A}$  est une intersection de  $\mathcal{O}$  avec quelque chose. Ensuite, il n'est pas possible que  $x_0$  soit dans  $\mathcal{O}_2$  parce que tout élément de  $\mathcal{O}_2$  possède un voisinage contenu dans  $\mathcal{O}_2$ . Un point de  $\mathcal{O}_2$  est donc toujours strictement plus grand que le supremum de  $\mathcal{O}_1$ .

Maintenant, remarque que si  $x_0 \leq b$ , alors  $x_0 = b$ , sinon  $b$  serait un majorant de  $\mathcal{A}$  plus petit que  $x_0$ , ce qui n'est pas possible vu que  $x_0$  est le supremum de  $\mathcal{A}$  et donc le plus petit majorant. Oui mais si  $x_0 = b$ , c'est que  $x_0 \in \mathcal{O}_2$ , ce qu'on vient de montrer être impossible. Nous voilà déjà débarrassé des deuxièmes et troisième possibilités.

Si la première possibilité est vraie, alors  $x_0$  n'est pas dans  $A$  parce qu'on a aussi prouvé que  $x_0 \notin \mathcal{O}_2$ . Or n'être ni dans  $\mathcal{O}_1$  ni dans  $\mathcal{O}_2$  implique de ne pas être dans  $A$ . Ce point  $x_0 = \sup \mathcal{A}$  est donc hors de  $A$ .

Oui, mais comme  $a \in \mathcal{A}$ , on a obligatoirement que  $x_0 \geq a$ . Mais par construction, on a aussi que  $x_0 \leq b$  (ici, l'inégalité est même stricte, mais ce n'est pas important). Donc

$$a \leq x_0 \leq b$$

avec  $a, b \in A$ , et  $x_0 \notin A$ . Cela finit de prouver que  $A$  n'est pas un intervalle.  $\square$

### 7.3 Continuité

Nous allons considérer trois approches différentes de la continuité. La première sera de définir la continuité de fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  au moyen du critère usuel. Ensuite, nous définiront la continuité des applications entre n'importe quels espaces métriques, et nous montrerons que les deux définitions sont équivalentes dans le cas des fonctions sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles.

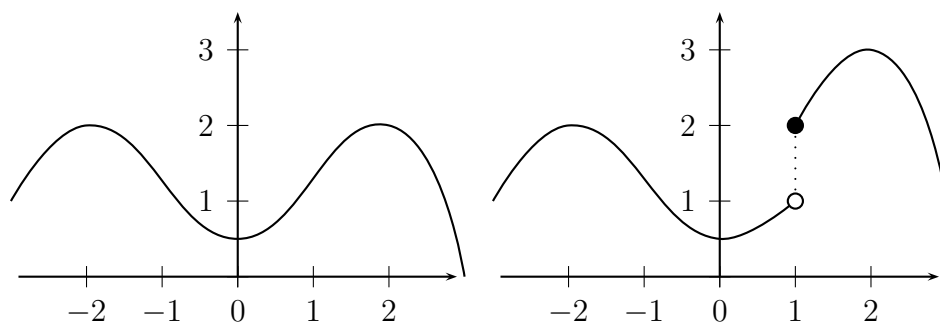
Enfin, un peu plus tard nous verrons que la continuité peut également être vue en termes de limites. Encore une fois nous verrons que dans le cas de fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  cette troisième approche est équivalente aux deux premières.

---

<sup>5</sup>C'est l'intersection entre l'ouvert  $\mathcal{O}_1$  et l'ouvert  $\{x \mid x < b\}$ .

### 7.3.1 Approche analytique

Une question qu'on peut se poser, c'est de savoir quand le graphe d'une fonction peut être dessiné sans lever le crayon. Regarde les exemples de la figure 7.11. Le premier graphe semble pouvoir être dessiné sans lever son crayon. C'est une courbe en un seul morceau. La seconde par contre ne peut pas être dessinée sans lever le crayon. Elle est en deux morceaux.



(a) Cette fonction peut manifestement être tracée au crayon sans lever la main. (b) Cette fonction ne peut pas être tracée au crayon sans lever la main. Le point noir signifie que  $f(1) = 2$ , et non 1.

FIG. 7.11 – Exemple d'une fonction continue et d'une fonction non continue.

Demandons nous ce exactement quelle propriété a la courbe de la figure 7.11(b) pour ne pas pouvoir être tracée sans lever le crayon. Mettons que tu dessines de gauche à droite. Dans ce cas, au fur et à mesure que tu avances en t'approchant de  $x = 1$ , la courbe te mène vers le point  $(1, 1)$  tandis qu'en réalité,  $f(1) = 2$ . C'est à dire que quand  $x$  s'approche de 1, eh bien  $f(x)$  ne s'approche pas de  $f(1)$ .

Nous allons donc dire qu'une fonction est continue quand plus  $x$  s'approche de  $a$  en suivant la courbe, plus  $f(x)$  s'approche de  $f(a)$ . Voici la définition précise.

#### Définition 45.

Nous disons que la fonction  $x \mapsto f(x)$  est **continue en**  $a$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon. \quad (7.14)$$

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences de cette définition. Je te préviens tout de suite qu'il va y avoir certaines conséquences qui ne collent pas bien avec l'intuition d'un graphe qu'on peut tracer sans lever le crayon.

- D'abord on voit que la continuité n'a été définie qu'en un point. On peut dire que la fonction  $f$  est continue *en tel point donné*, mais nous n'avons pas dit ce qu'est une fonction continue *dans son ensemble*.

- b. Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est **continue sur l'intervalle**  $I$  si elle est continue en chaque point de  $I$ .
- c. Comme la définition de  $f$  continue en  $a$  fait intervenir  $f(x)$  pour tous les  $x$  pas trop loin de  $a$ , il faut au moins déjà que  $f$  soit définie sur ces  $x$ . En d'autres termes, dire que  $f$  est continue en  $a$  demande que  $f$  existe sur un intervalle autour de  $a$ .  
Ceci couplé à la définition précédente laisse penser qu'il est surtout intéressant d'étudier les fonctions qui sont continues sur un intervalle.
- d. L'intuition comme quoi une fonction continue doit pouvoir être tracée sans lever la main correspond aux fonctions continues sur des intervalles. Au moins sur l'intervalle où elle est continue, elle est traçable en un morceau.

Nous allons démontrer maintenant une série de petits résultats qui permettent de simplifier la démonstration de la continuité de toute une série de fonctions.

#### **Théorème 46.**

*Si la fonction  $f$  est continue au point  $a$ , alors la fonction  $\lambda f$  est également continue en  $a$ .*

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . Nous avons besoin d'un  $\delta > 0$  tel que pour chaque  $x$  à moins de  $\delta$  de  $a$ , la fonction  $\lambda f$  soit à moins de  $\epsilon$  de  $(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$ . Étant donné que la fonction  $f$  est continue en  $a$ , on sait déjà qu'il existe un  $\delta_1$  (nous notons  $\delta_1$  afin de ne pas confondre ce nombre dont on est sûr de l'existence avec le  $\delta$  que nous sommes en train de chercher) tel que

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon_1.$$

Hélas, ce  $\delta_1$  n'est pas celui qu'il faut parce que nous travaillons avec  $\lambda f$  au lieu de  $f$ , ce qui fait qu'au lieu d'avoir  $|f(x) - f(a)|$ , nous avons  $|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)|$ . Ce que  $\delta_1$  fait avec  $(\lambda f)$ , c'est

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leq |\lambda| \epsilon_1.$$

Ce que nous apprend la continuité de  $f$ , c'est que pour chaque choix de  $\epsilon_1$ , on a un  $\delta_1$  qui fait cette implication. Comme cela est vrai pour chaque choix de  $\epsilon_1$ , essayons avec  $\epsilon_1 = \epsilon/|\lambda|$  pour voir ce que ça donne. Nous avons donc un  $\delta_1$  qui fait

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leq |\lambda| \epsilon_1 = \epsilon.$$

Ce  $\delta_1$  est celui qu'on cherchait. □

#### **Théorème 47.**

*Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$ , alors la fonction  $f + g$  est également continue en  $a$ .*



*Démonstration.* La continuité des fonctions  $f$  et  $g$  au point  $a$  fait en sorte que pour tout choix de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , il existe  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tels que

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon_1.$$

et

$$(|x - a| \leq \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| \leq \epsilon_2.$$

La quantité que nous souhaitons analyser est  $|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)|$ . Tout le jeu de la démonstration de la continuité est de triturer cette expression pour en tirer quelque chose en termes de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . Si nous supposons avoir prit  $|x - a|$  plus petit en même temps que  $\delta_1$  et que  $\delta_2$ , nous avons

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

en utilisant la formule générale  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Maintenant si on choisit  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  tels que  $\epsilon_1 + \epsilon_2 < \epsilon$ , et les  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  correspondants, on a que

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leq \epsilon,$$

pourvu que  $|x - a|$  soit plus petit que  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Le bon  $\delta$  à prendre est donc le minimum de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui eux-même sont donnés par un choix de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  tels que  $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \epsilon$ .  $\square$

Pour résumer ces deux théorèmes, on dit que si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , alors la fonction  $\alpha f + \beta g$  est également continue en  $a$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Parmi les propriétés immédiates de la continuité d'une fonction, nous avons ceci qui est souvent bien utile.

#### Corollaire 48.

*Si la fonction  $f$  est continue en  $a$  et si  $f(a) > 0$ , alors  $f$  est positive sur un intervalle autour de  $a$ .*

*Démonstration.* Prenons  $\epsilon < f(a)$  et voyons<sup>6</sup> ce que la continuité de  $f$  en  $a$  nous offre : il existe un  $\delta$  tel que

$$(|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon < f(a).$$

Nous en retenons que sur un intervalle (de largeur  $\delta$ ), nous avons  $|f(x) - f(a)| \leq f(a)$ . Par hypothèse,  $f(a) > 0$ , donc si  $f(x) < 0$ , alors la différence  $f(x) - f(a)$  donne un nombre encore plus négatif que  $-f(a)$ , c'est à dire que  $|f(x) - f(a)| > f(a)$ , ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. D'où la conclusion que  $f(x) > 0$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>ici, nous insistons sur le fait que nous prenons  $\epsilon$  *strictement* plus petit que  $f(a)$ .

### 7.3.2 La fonction la moins continue du monde

Si tu veux des exemples de fonctions qui ne sont pas continues, c'est pas compliqué : dessine n'importe quoi qui fait un saut comme sur la figure 7.11(b). Mais il y a moyen de donner des exemples de fonctions encore plus sales. Celle-ci par exemple :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple,  $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$ , et<sup>7</sup>  $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = \chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = 0$ . Malgré que  $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$ , il n'existe *aucun* voisinage de 1 sur lequel la fonction reste proche de 1, parce que tout voisinage va contenir au moins un irrationnel. À chaque millimètre, cette fonction fait une infinité de bonds !

Cette fonction n'est donc continue nulle part.

Tu sais que l'interprétation usuelle de la continuité est la capacité à pouvoir dessiner la fonction sans lever le crayon. Donc il te semblerait logique que si une fonction est continue en un point, elle soit au moins plus ou moins sympathique autour du point. En fait, ce que tu espères secrètement, c'est que si une fonction est continue en un point, alors elle est continue au moins sur un voisinage du point. Hélas, cela est faux : regarde la fonction

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en zéro. En effet, prenons  $\delta > 0$  ; il nous faut un  $\epsilon$  tel que  $|x| \leq \epsilon$  implique  $f(x) \leq \delta$  parce que  $f(0) = 0$ . Bon ben prendre simplement  $\epsilon = \delta$  nous contente. Cette fonction est donc très facilement continue en zéro.

Et pourtant, dès que l'on s'écarte un tant soit peu de zéro, elle fait des bonds une infinité de fois par millionième de millimètre ! Cette fonction est donc la plus discontinue du monde en tous les points sauf un (zéro) où elle est une fonction continue !

Oui, les math recèlent quelque exemples de monstres de ce type qui heurtent l'intuition et qui nous rappellent qu'il faut être très prudent. Tant qu'on n'a pas une démonstration complète d'un fait, des choses incroyables peuvent arriver.

### 7.3.3 Approche topologique

Nous avons vu que sur tout ensemble métrique, nous pouvons définir ce qu'est un ouvert : c'est un ensemble qui contient une boule ouverte autour de chacun de

---

<sup>7</sup>Pour prouver que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel, c'est pas trop compliqué, mais pour prouver que  $\pi$  ne l'est pas non plus, tu devras encore manger de la soupe.

ses points. Quand on est dans un ensemble ouvert, on peut toujours un peu se déplacer sans sortir de l'ensemble.

Le théorème suivant est une très importante caractérisation des fonctions continues (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) en termes de topologie, c'est à dire en termes d'ouverts.

**Théorème 49.**

*Si  $I$  est un intervalle ouvert contenu dans  $\text{dom } f$ , alors  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  dans  $\mathbb{R}$ , l'image inverse  $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$  est ouvert.*

Par abus de langage, nous exprimons souvent cette condition par « une fonction est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert ».

*Démonstration.* Dans un premier temps, nous allons transformer le critère de continuité en termes de boules ouvertes, et ensuite, nous passeront à la démonstration proprement dite. Le critère de continuité de  $f$  au point  $x$  dit que

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } (|x - a| < \epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta. \quad (7.15)$$

Cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } a \in B(x, \epsilon) \Rightarrow f(a) \in B(f(x), \delta),$$

ou encore

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } f(B(x, \epsilon)) \subset B(f(x), \delta). \quad (7.16)$$

Jusque ici, nous n'avons fait que du jeu de notations. Nous avons exprimé en termes de topologie des inégalités analytiques. Si tu veux, tu peux retenir cette condition (7.16) comme définition d'une fonction continue en  $x$ . Si tu choisis de vivre comme ça, tu dois être capable de retrouver (7.15) à partir de (7.16).

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème. Comme quasiment toutes les démonstrations de « si et seulement si », cette démonstrations est en deux parties. Une dans chaque sens.

D'abord, supposons que  $f$  est continue sur  $I$ , et prenons  $\mathcal{O}$ , un ouvert quelconque. Le but est de prouver que  $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$  est ouvert. Pour cela, nous prenons un point  $x_0 \in f|_I^{-1}(\mathcal{O})$  et nous allons trouver un ouvert autour de ce point contenu dans  $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ . Nous écrivons  $y_0 = f(x_0)$ . Évidemment,  $y_0 \in \mathcal{O}$ , donc on a une boule autour de  $y_0$  qui est contenue dans  $\mathcal{O}$ , soit donc  $\delta > 0$  tel que

$$B(y_0, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Par hypothèse,  $f$  est continue en  $x_0$ , et nous pouvons donc y appliquer le critère (7.16). Il existe donc  $\epsilon > 0$  tel que

$$f(B(x_0, \epsilon)) \subset B(f(x_0), \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Cela prouve que  $B(x_0, \epsilon) \subset f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ .

Dans l'autre sens, maintenant. Nous prenons  $x_0 \in I$  et nous voulons prouver que  $f$  est continue en  $x_0$ , c'est à dire que pour tout  $\delta$  nous cherchons un  $\epsilon$  tel que  $f(B(x_0, \epsilon)) \subset B(f(x_0), \delta)$ . Oui, mais  $B(f(x_0), \delta)$  est ouverte, donc par hypothèse,  $f|_I^{-1}(B(f(x_0), \delta))$  est ouvert, incluse à  $I$  et contient  $x_0$ . Donc il existe un  $\epsilon$  tel que

$$B(x_0, \epsilon) \subset f|_I^{-1}(B(f(x_0), \delta)),$$

et donc tel que

$$f(B(x_0, \epsilon)) \subset B(f(x_0), \delta),$$

ce qu'il fallait prouver.  $\square$

Avant de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires, nous avons encore besoin d'un petit lemme.

**Lemme 50.**

*L'image d'un ensemble connexe par une fonction continue est connexe.*

*Démonstration.* Tu sais quoi ? Nous allons encore faire la contraposée. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que  $f(A)$  ne soit pas connexe. Nous allons prouver que  $A$  elle-même n'est pas connexe. Dire que  $f(A)$  n'est pas connexe, c'est dire qu'il existe  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ , deux ouverts disjoints qui recouvrent  $f(A)$ . Je prétends que  $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$  et  $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$  sont ouverts, disjoints et qu'ils recouvrent  $A$ .

- Ces deux ensembles sont ouverts parce qu'ils sont images inverses d'ouverts par une fonction continue (théorème 49).
- Si  $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ , alors  $f(x) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ , ce qui contredirait le fait que  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont disjoints. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection de  $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$  et de  $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ .
- Si  $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$  et  $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$  ne recouvrent pas  $A$ , il existe un  $x$  dans  $A$  qui n'est dans aucun des deux. Dans ce cas,  $f(x)$  est dans  $f(A)$ , mais n'est ni dans  $\mathcal{O}_1$ , ni dans  $\mathcal{O}_2$ , ce qui contredirait le fait que ces deux derniers recouvrent  $f(A)$ .

Nous déduisons que  $A$  n'est pas connexe. Et donc le lemme.  $\square$

**Théorème 51** (Théorème des valeurs intermédiaires).

*Soit  $f$ , une fonction continue sur  $[a, b]$ , et supposons que  $f(a) < f(b)$ . Alors pour tout  $y$  tel que  $f(a) \leq y \leq f(b)$ , il existe un  $x$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(x) = y$ .*

*Démonstration.* Nous savons que  $[a, b]$  est connexe parce que c'est un intervalle (proposition 44). Donc  $f([a, b])$  est connexe (lemme 50) et donc est un intervalle (à nouveau la proposition 44). Étant donné que  $f([a, b])$  est un intervalle, il contient

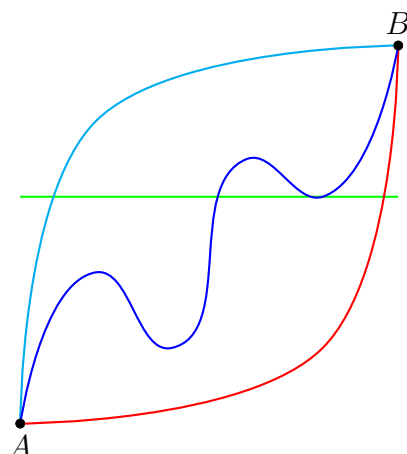


FIG. 7.12 – Comment passer du point  $A$  au point  $B$  sans couper la ligne verte? Avec une fonction continue, ce n'est pas possible.

toutes les valeurs intermédiaires entre n'importe quels deux de ses éléments. En particulier toutes les valeurs intermédiaires entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .  $\square$

### Corollaire 52.

*L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

La preuve est laissée à titre d'exercice.

Intuitivement, ce théorème est évident : si tu veux tracer une courbe qui commence en  $-1$  et qui finit en  $4$  sans lever ton crayon, tu devras bien passer par  $0$ ,  $1$ ,  $3$ ,  $3.56123$  et tous les intermédiaires. Mais comme tu le vois, ce résultat intuitivement évident est plutôt compliqué à prouver : ça demande des tonnes de subtilités en topologie<sup>8</sup>.

## 7.3.4 Exercices

### Exercice 28.

Un train démarre devant un panneau qui indique Bruxelles à  $100$  km et son mouvement est donné par

$$x(t) = 100 - t\sqrt{t}.$$

Est-ce que ce train passera à un moment devant le panneau qui indique Bruxelles à  $13$  km ?

---

<sup>8</sup>Il existe une preuve qui ne fait pas appel à la topologie, mais qui demande de savoir des propriétés avancées des limites de suites.

**Correction de l'exercice 28**

Prend par exemple  $t = 36$ . La position du train sera à ce moment

$$x(100) = 100 - 36 \cdot \sqrt{36} = -116.$$

Comme  $x(t)$  est une fonction continue qui vaut 100 en  $t = 0$  et  $-116$  en  $t = 25$ , c'est certain qu'elle passe par 13 à un certain moment.

**Exercice 29.**

Prouve que tout polynôme de degré impair accepte au moins une racine.

**Correction de l'exercice 29**

Si  $P(x)$  est un polynôme de degré impair en  $x$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ , tandis que  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$ . Cela prouve que  $P$  est négatif à un moment et positif à un autre moment, et donc le théorème des valeurs intermédiaires impose à  $P$  d'être nul entre les deux parce que un polynôme est toujours continu.

**Exercice 30.**

Prouve que toute fonction continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  possède au moins un point fixe, c'est à dire qu'il existe un  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

**Correction de l'exercice 30**

Si  $f$  est une telle fonction, il faut prouver que la fonction  $g(x) = f(x) - x$  passe par zéro. Que peut valoir  $g(0)$ ? Par définition,  $g(0) = f(0) \in [0, 1]$ . Première remarque : si  $g(0) = 0$ , c'est que  $f(0) = 0$ , et donc 0 est un point fixe de  $f$ . Supposons donc que  $g(0) \neq 0$ . Dans ce cas, nous avons  $g(0) > 0$  (j'insiste sur le strict de cette inégalité).

En faisant le même raisonnement (fais-le!), tu trouves que  $g(1) < 0$ . Le théorème de la valeur intermédiaire conclut parce que  $g$  est continue (pourquoi?).

**Exercice 31.**

Un poète fait sa ballade quotidienne de 10 km en deux heures, entre cinq heures (du matin) et sept heures. Comme il est un peu physicien aussi en plus d'être poète, il remarque que sa vitesse moyenne était de 5 km/h. Notre bonhomme étant de surcroît fana de hi-tech, il a son **podomètre**, et il remarque qu'entre cinq heures quart et six heures quart, il a parcouru exactement 5 kilomètres.

Il refait la même ballade le lendemain, toujours en deux heures ; et il remarque que cette fois, il a parcouru 5 kilomètres exactement entre cinq heures vingt sept et six heures vingt sept.

Intrigué, il refait la même ballade tous les jours de la semaine, et remarque que à tous les coups, il y a un intervalle de une heure durant lequel il a parcouru

exactement 5 kilomètres. Hélas pour lui, être poète, physicien et amateur de hi-tech ne suffit pas pour être bon en math, et il est incapable de prouver ce qu'il croit, à savoir que si il fait une ballade de dix kilomètres en deux heures, il y aura *toujours* un intervalle de une heure durant lequel il aura parcouru exactement 5 kilomètres. Prouve-le.

### Correction de l'exercice 31

Il est naturel de regarder la fonction  $d(t)$  qui indique la distance parcourue en un temps  $t$ . Si  $t$  se compte en heures et les distances en kilomètres, cette fonction vérifie évidemment

$$d(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad d(2) = 10.$$

Cela dit, ce qui nous intéresse vraiment, c'est la distance qu'il parcourt en une heure, c'est à dire la fonction

$$f(t) = d(t+1) - d(t).$$

Cette fonction satisfait

$$f(0) = d(1) \qquad \text{et} \qquad f(1) = 10 - d(1).$$

Ce que tu voudrais prouver, c'est que cette fonction passe par la valeur 5 entre  $t = 0$  et  $t = 1$ . Eh bien oui, le nombre 5 est quelque part entre  $d(1)$  et  $10 - d(1)$ , quelle que soit la valeur exacte de  $d(1)$ . En effet, 5 est la moyenne arithmétique :

$$\frac{d(1) + (10 - d(1))}{2} = 5.$$

### 7.3.5 Continuité de la racine carrée

Pourquoi nous intéresser particulièrement à cette fonction ? Parce qu'elle a une sale condition d'existence : son domaine de définition n'est pas ouvert. Or dans tous les théorèmes de continuité d'approche topologique que nous avons vus, nous avons donné des conditions *pour tout ouvert*. Nous nous attendons donc à avoir des difficultés avec la continuité de  $\sqrt{x}$  en zéro.

Prenons  $I$ , n'importe quel intervalle ouvert dans  $\mathbb{R}^+$ , et voyons que la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{7.17}$$

est continue sur  $I$ . Remarque déjà que si  $I$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}^+$ , il ne peut pas contenir zéro. Avant de nous lancer dans notre propos, nous prouvons un lemme qui fera tout le travail<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup>C'est toujours ingrat d'être un lemme : on fait tout le travail et c'est toujours le théorème qui est nommé.

**Lemme 53.**

Soit  $\mathcal{O}$ , un ouvert dans  $\mathbb{R}^+$ . Alors  $\mathcal{O}^2 = \{x^2 \mid x \in \mathcal{O}\}$  est également ouvert.

*Démonstration.* Un élément de  $\mathcal{O}^2$  s'écrit sous la forme  $x^2$  pour un certain  $x \in \mathcal{O}$ . Le but est de trouver un ouvert autour de  $x^2$  qui soit contenu dans  $\mathcal{O}^2$ . Étant donné que  $\mathcal{O}$  est ouvert, on a une boule centrée en  $x$  contenue dans  $\mathcal{O}$ . Nous appelons  $\delta$  le rayon de cette boule :

$$B(x, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Étant donné que cet ensemble est connexe, nous savons par le lemme 50 que  $B(x, \delta)^2$  est également connexe (parce que la fonction  $x \mapsto x^2$  est continue). Son plus grand élément est  $(x + \delta)^2 = x^2 + \delta^2 + 2x\delta > x^2 + \delta^2$ , et son plus petit élément est  $(x - \delta)^2 = x^2 + \delta^2 - 2x\delta$ .

Ce qui serait pas mal, c'est que ces deux bornes entourent  $x^2$ , de telle façon à ce qu'elles définissent un ouvert autour de  $x^2$  qui soit dans  $\mathcal{O}^2$ . Hélas, c'est pas gagné que  $x^2 + \delta^2 - 2x\delta$  soit plus petit que  $x^2$ .

Heureusement, en fait c'est vrai parce que d'une part, du fait que  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^+$ , on a  $x > 0$ , et d'autre part, pour que  $\mathcal{O}$  soit positif, il faut que  $\delta < x$ . Donc on a évidemment que  $\delta < 2x$ , et donc que

$$x^2 + \delta^2 - 2x\delta = x^2 + \underbrace{\delta(\delta - 2x)}_{<0} < x^2.$$

Donc nous avons fini : l'ensemble

$$B(x, \delta)^2 = ]x^2 + \delta^2 - 2x\delta, x^2 + \delta^2 + 2x\delta[ \subset \mathcal{O}^2$$

est un intervalle qui contient  $x^2$ , et donc qui contient une boule ouverte centrée en  $x^2$ .

□

Maintenant nous pouvons nous attaquer à la continuité de la racine carrée sur tout ouvert positif en utilisant le théorème 49. Soit  $\mathcal{O}$  n'importe quel ouvert de  $\mathbb{R}$ , et prouvons que  $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$  est ouvert. Par définition,

$$f|_I^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in I \mid \sqrt{x} \in \mathcal{O}\}. \quad (7.18)$$

Maintenant c'est un tout petit effort que de remarquer que  $f|_I^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^2 \cap I$ . De là, on a gagné parce que  $\mathcal{O}^2$  et  $I$  sont des ouverts. Or l'intersection de deux ouverts est ouvert.

Nous n'en avons pas fini avec la fonction  $\sqrt{x}$ . Ce que nous avons fait est représenté à la figure 7.13. Nous avons la continuité de la racine carrée pour tous les réels strictement positifs. Il reste à pouvoir dire que la fonction est continue en



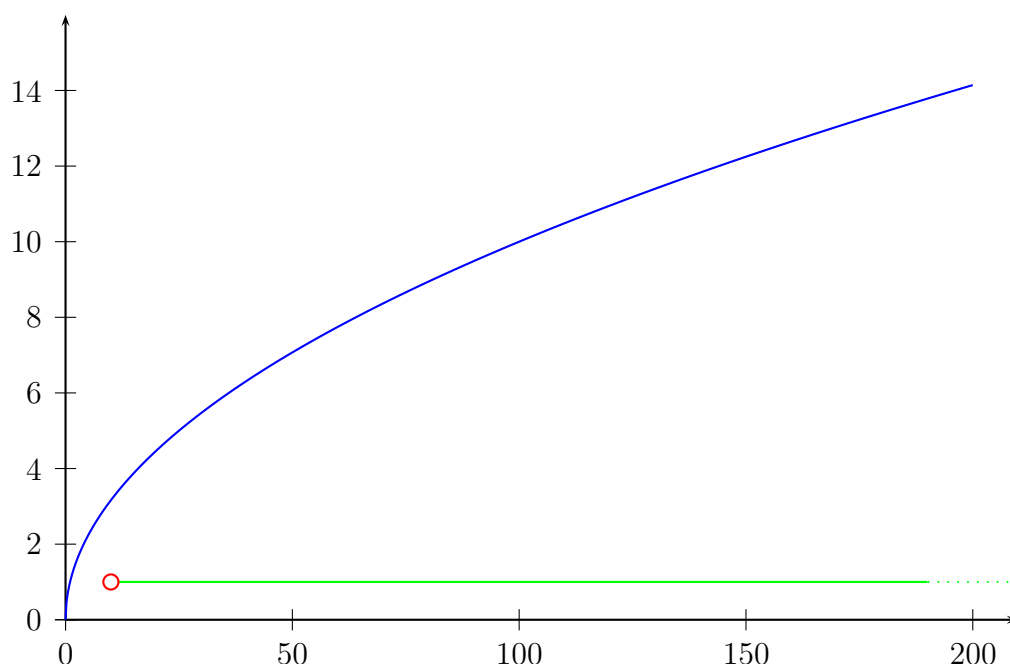


FIG. 7.13 – Nous avons prouvé la continuité de  $x \mapsto \sqrt{x}$  pour tous les intervalles du type de celui représenté en vert. Remarque que cet intervalle ne contient pas le premier point : il est ouvert à sa gauche. Mais ce premier point peut être en réalité aussi près que l'on veut de zéro, sans toutefois l'atteindre. Bref, il ne nous manque la continuité qu'en 0. Ce serait frustrant que cette fonction ne soit juste pas continue en ce point hein ?

zéro malgré qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de zéro. Encore de la mauvaise foi de mathématicien en perspective.

Il est possible de dire que la racine carrée est continue en 0, malgré qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de 0... en tout cas pas un ouvert au sens que tu as en tête. Nous allons rentabiliser un bon coup notre travail sur les espaces métriques.

Nous pouvons définir la notion de boule ouverte sur n'importe quel espace métrique  $A$  en disant que

$$B(x, r) = \{y \in A \mid d(x, y) < r\}.$$

#### Définition 54.

Soit  $f: A \rightarrow B$ , une application entre deux espaces métriques. Nous disons que  $f$  est **continue** au point  $a \in A$  si  $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$  tel que

$$f(B(a, \epsilon)) \subset B(f(a), \delta). \quad (7.19)$$

Tu reconnais évidemment la condition (7.16). Nous l'avons juste recopiée. Tu remarqueras cependant que cette définition généralise immensément la continuité que l'on avait travaillé à propos des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Maintenant tu peux prendre n'importe quel espace métrique et c'est bon.

Nous n'allons pas faire un tour complet des conséquences et exemples de cette définition. Au lieu de cela, nous allons juste montrer en quoi cette définition règle le problème de la continuité de la racine carré en zéro.

La fonction que nous regardons est

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Mais cette fois, nous ne la voyons pas comme étant une fonction dont le domaine est une partie de  $\mathbb{R}$ , mais comme fonction dont le domaine est  $\mathbb{R}^+$  vu comme un espace métrique en soi. Quelles sont les boules ouvertes dans  $\mathbb{R}^+$  autour de zéro ? Réponse : la boule ouverte de rayon  $r$  autour de zéro dans  $\mathbb{R}^+$  est :

$$B(0, r)_{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid d(x, 0) < r\} = [0, r[.$$

Cet intervalle est un ouvert. Aussi incroyable que cela puisse paraître !

Testons la continuité de la racine carré en zéro dans ce contexte. Il s'agit de prendre  $A = \mathbb{R}^+$ ,  $B = \mathbb{R}^+$  et  $a = 0$  dans la définition 54. Nous avons que  $B(\sqrt{0}, \delta) = B(0, \delta) = [0, \delta[$  pour la topologie de  $\mathbb{R}^+$ .

Il s'agit maintenant de trouver un  $\epsilon$  tel que  $f(B(0, \epsilon)) \subset [0, \delta[$ . Par définition, nous avons que

$$f(B(0, \epsilon)) = [0, \sqrt{\epsilon}[,$$

le problème revient donc à trouver  $\epsilon$  tel que  $\sqrt{\epsilon} \leq \delta$ . Prendre  $\epsilon < \delta^2$  fait l'affaire.

Donc voilà. Au sens de la **topologie propre** à  $\mathbb{R}^+$ , nous pouvons dire que la fonction racine carré est partout continue.

### 7.3.6 Limites en des nombres

Si tu regardes la fonction  $f(x) = 5x + 3$ , tu ne serais pas étonnée si je te disais par exemple que

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 53 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3. \tag{7.21}$$

En effet, plus  $x$  est proche de 10, plus  $f(x)$  est proche de 53 et plus  $x$  est proche de 0, plus  $f(x)$  est proche de 3. Pas grand chose de neuf sous le Soleil.

Oui, mais l'intérêt d'introduire le concept de limite dans le cas de l'infini était qu'on ne peut pas bêtement calculer  $f(\infty)$ . Il fallait donc une astuce pour parler du comportement de  $f$  quand on s'approche de l'infini.

Ici,  $f(10) = 53$  et  $f(0) = 3$ , donc on ne voit pas très bien pourquoi il faudrait s'inquiéter et introduire une notion de limite. Malheureusement, si tu prenais la peine de regarder encore une fois la figure 7.1, tu verrais qu'on a quand même besoin d'une astuce pour décrire ce qu'on voudrait dire : la fonction  $1/x$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers zéro. Je sais que c'est ce que tu veux dire, mais nous allons voir qu'en réalité c'est faux<sup>10</sup>. Cela va faire l'objet d'une subtilité très marrante. Mais faisons comme si de rien n'était et posons la définition suivante :

**Définition 55.**

Lorsque  $a \in \mathbb{R}$ , on dit que la fonction  $f$  **tend vers l'infini quand  $x$  tend vers  $a$**  si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \mid (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \geq M \text{ quand } x \in \text{dom } f.$$

Cela signifie que l'on demande que dès que  $x$  est assez proche de  $a$  (c'est à dire dès que  $|x - a| \leq \delta$ ), alors  $f(x)$  est plus grand que  $M$ , et que l'on peut trouver un  $\delta$  qui fait ça pour n'importe quel  $M$ . Une autre façon de le dire est que pour toute hauteur  $M$ , on peut trouver un intervalle de largeur  $\delta$  autour de  $a$ <sup>11</sup> tel que sur cet intervalle, la fonction  $f$  est toujours plus grande que  $M$ .

Montrons sur un dessin pourquoi je disais que la fonction  $x \rightarrow 1/x$  n'est pas de ce type. Regarde donc la figure 7.14. Le problème est qu'il n'existe par exemple

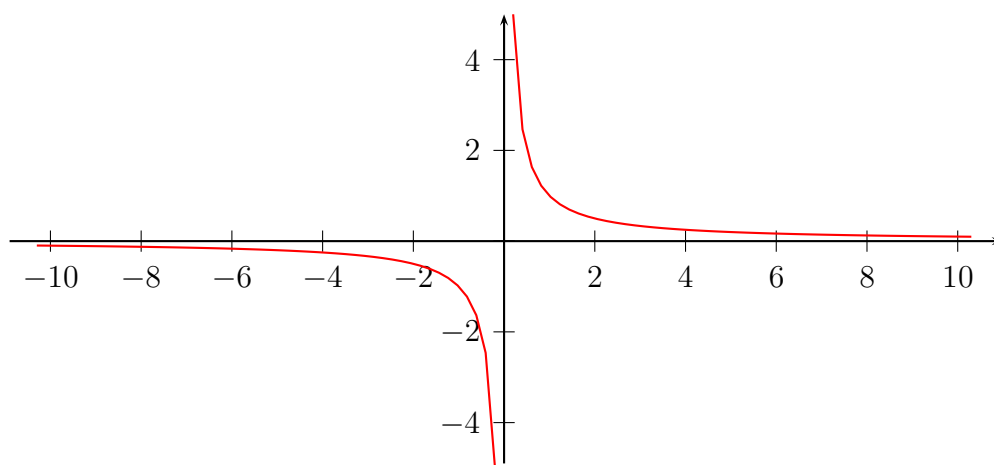


FIG. 7.14 – La fonction  $f(x) = 1/x$ . Le problème est que ça descend d'un côté et que ça monte de l'autre.

aucun intervalle autour de 0 sur lequel  $f$  serait toujours plus grande que 10. En effet n'importe quel intervalle autour de 0 contient au moins un nombre négatif.

<sup>10</sup>Surtout si ce que tu voulais dire est quelque chose du genre « je m'en fous! ».

<sup>11</sup>C'est à dire un intervalle de la forme  $[a - \delta, a + \delta]$ .

Or quand  $x$  est négatif,  $f$  n'est certainement pas plus grande que 10. Nous y reviendrons.

Pour l'instant, montrons que la fonction  $f(x) = 1/x^2$  de la figure 7.15 est une fonction qui vérifie la définition 55. Avant de prendre n'importe quel  $M$ , prenons

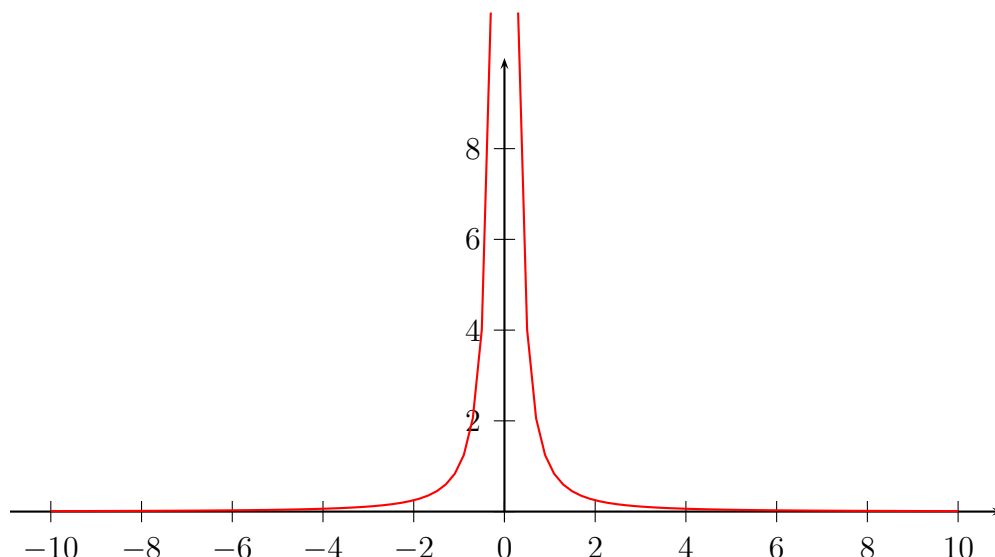


FIG. 7.15 – La fonction  $f(x) = 1/x^2$ . Elle monte bien vers l'infini quand  $x$  tend vers zéro ; tant du côté des négatifs que du côté des positifs.

par exemple 100. Nous avons besoin d'un intervalle autour de zéro sur lequel  $f$  est toujours plus grande que 100. C'est vite vu que  $f(0.1) = f(-0.1) = 100$ , donc l'intervalle  $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$  est le bon. Partout dans cet intervalle,  $f$  est plus grande que 100. Partout ? Ben non : en  $x = 0$ , la fonction n'est même pas définie, donc c'est un peu dur de dire qu'elle est plus grande que 100. C'est pour cela que nous avons ajouté la condition « quand  $x \in \text{dom } f$  » dans la définition de la limite.

Prenons maintenant un  $M \in \mathbb{R}$  arbitraire, et trouvons un intervalle autour de 0 sur lequel  $f$  est toujours plus grande que  $M$ . La réponse est évidemment l'intervalle de largeur  $1/\sqrt{M}$ , c'est à dire

$$\left[ -\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}} \right].$$

## 7.4 Limite et continuité

### 7.4.1 Limites quand tout va bien

D'abord définissons ce qu'on entend par la limite d'une fonction en un point quand il n'y a aucun infini en jeu.

**Définition 56.**

On dit que la fonction  $f$  **tend vers  $b$  quand  $x$  tend vers  $a$  si**

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \mid (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon \text{ quand } x \in \text{dom } f.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \quad (7.22)$$

Commençons par un exemple très simple : prouvons que  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . C'est donc  $a = b = 0$  dans la définition. Prenons  $\epsilon > 0$ , et trouvons un intervalle autour de zéro tel que partout dans l'intervalle,  $x \leq \epsilon$ . Bon ben c'est clair que  $\delta = \epsilon$  fonctionne.

Plus compliqué maintenant, mais toujours sans surprises.

**Proposition 57.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . On veut un intervalle de largeur  $\delta$  autour de zéro tel que  $x^2$  soit plus petit que  $\epsilon$  sur cet intervalle. Cette fois-ci, le  $\delta$  qui fonctionne est  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ . En effet un élément de l'intervalle  $[-\delta, \delta]$  est un  $r$  de valeur absolue plus petite ou égale à  $\delta$  :

$$|r| \leq \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

En prenant le carré de cette inégalité on a :

$$r^2 \leq \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

**Exercice 32.**

Prouve que

$$\lim_{x \rightarrow a} (6x) = 6a$$

pour n'importe quel  $a \in \mathbb{R}$ .

**Correction de l'exercice 32**

Il faut prendre un  $\epsilon > 0$ , et puis trouver un  $\delta$  tel que  $(|x - a|) \leq \delta$  implique  $|6x - 6a| \leq \epsilon$ . Par ce que l'on sait sur les inégalités,

$$|6x - 6a| \leq \epsilon$$

est équivalent à

$$|x - a| \leq \frac{\epsilon}{6}.$$

Donc prendre  $\delta = \epsilon/6$  répond à la question.

Calculer et prouver des valeurs de limites, mêmes très simples, devient vite de l'arrachage de cheveux à essayer de trouver le bon  $\delta$  en fonction de  $\epsilon$  si on n'a pas quelque théorèmes généraux. Nous allons donc maintenant en prouver quelque-uns.

**Théorème 58.**

*Si*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad (7.23)$$

*alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda b \quad (7.24)$$

*pour n'importe quel  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . Afin de prouver la propriété (7.24), il faut trouver un  $\delta$  tel que pour tout  $x$  dans  $[a - \delta, a + \delta]$ , on ait  $|(\lambda f)(x) - \lambda b| \leq \epsilon$ . Cette dernière inégalité est équivalente à  $|\lambda||f(x) - b| \leq \epsilon$ . Nous devons donc trouver un  $\delta$  tel que

$$|f(x) - b| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}. \quad (7.25)$$

soit vraie pour tout  $x$  dans  $[a - \delta, a + \delta]$ . Mais l'hypothèse (7.23) dit précisément qu'il existe un  $\delta$  tel que pour tout  $x$  dans  $[a - \delta, a + \delta]$  on ait cette inégalité.  $\square$

**Théorème 59.**

*Si*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \quad (7.26a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2, \quad (7.26b)$$

*alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b_1 + b_2. \quad (7.27)$$

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $\delta_1$  tel que

$$|f(x) - b_1| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (7.28)$$

dès que  $|x - a| \leq \delta_1$ . Il existe aussi  $\delta_2$  tel que

$$|g(x) - b_2| \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (7.29)$$

dès que  $|x - a| \leq \delta_2$ . Tu notes l'astuce de prendre  $\epsilon/2$  dans la définition de limite pour  $f$  et  $g$ . Maintenant, ce qu'on voudrait c'est un  $\delta$  tel que l'on ait  $|(f + g)(x) -$

$(b_1 + b_2)| \leq \epsilon$  dès que  $|x - a| \leq \delta$ . Moi je dit que  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  fonctionne. En effet, en utilisant l'inégalité  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , nous trouvons :

$$|(f + g)(x) - (b_1 + b_2)| = |(f(x) - b_1) + (g(x) - b_2)| \leq |f(x) - b_1| + |g(x) - b_2|. \quad (7.30)$$

Comme on suppose que  $|x - a| \leq \delta$ , on a évidemment  $|x - a| \leq \delta_1$ , et donc l'équation (7.28) tient. Mais si  $|x - a| \leq \delta$ , on a aussi  $|x - a| \leq \delta_2$ , et donc l'équation (7.28) tient également. Chacun des deux termes de (7.30) est donc plus petits que  $\epsilon/2$ , et donc le tout est plus petit que  $\epsilon$ , ce qu'il fallait montrer.  $\square$

Une formule qui résume ces deux théorèmes est que

$$\lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (7.31)$$

**Lemme 60.**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , alors il existe un  $\delta > 0$  et un  $M > 0$  tels que

$$(|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

Ce que signifie ce lemme, c'est que quand la fonction  $f$  admet une limite finie en un point, alors il est possible de majorer la fonction sur un intervalle autour du point.

*Démonstration.* Cela va être démontré par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de  $\delta$  ni de  $M$  qui vérifient la condition. Dans ce cas, pour tout  $\delta$  et pour tout  $M$ , il existe un  $x$  tel que  $|x - a| \leq \delta$  et  $|f(x)| > M$ . Cela est valable pour tout  $M$ , donc prenons par exemple  $b + 1000$ . Donc

$$\forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } |x - a| \leq \delta \text{ et } |f(x)| > b + 1000. \quad (7.32)$$

Cela signifie qu'aucun  $\delta$  ne peut convenir dans la définition de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , ce qui contredit les hypothèses.  $\square$

Dans le même ordre d'idée, on peut prouver que si la limite de la fonction en un point est positive, alors elle est positive autour de ce point. Plus précisément, nous avons la

**Proposition 61.**

Si  $f$  est une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ , alors il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $f$  est positive.

*Démonstration.* Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0$ . Par la définition de la limite fait que si pour tout  $x$  dans un voisinage autour de  $a$ , on ait  $|f(x) - a| < \epsilon$ . Cela est valable pour tout  $\epsilon$ , pourvu que le voisinage soit assez petit. Si je choisis un voisinage pour lequel  $|f(x) - a| < \frac{y_0}{2}$ , alors sur ce voisinage,  $f$  est positive.  $\square$

Cette proposition ne devrait pas être sans te rappeler le théorème 51 des valeurs intermédiaires. Et en effet, c'est la même idée : si on sait que la fonction est positive en un point, on en déduit la positivité autour du point. Cette proposition est toutefois un peu plus forte parce que l'on ne suppose pas que la fonction soit continue.

### **Théorème 62.**

*Si*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2, \quad (7.33)$$

*alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = b_1 b_2. \quad (7.34)$$

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ , et tentons de trouver un  $\delta$  tel que  $|f(x)g(x) - b_1 b_2| \leq \epsilon$  dès que  $|x - a| \leq \delta$ . Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - b_1 b_2| &= |f(x)g(x) - b_1 b_2 + f(x)b_2 - f(x)b_2| \\ &= |f(x)(g(x) - b_2) + b_2(f(x) - b_1)| \\ &\leq |f(x)(g(x) - b_2)| + |b_2(f(x) - b_1)| \\ &= |f(x)||g(x) - b_2| + |b_2||f(x) - b_1|. \end{aligned} \quad (7.35)$$

À la première ligne se trouve la subtilité de la démonstration : on ajoute et on enlève<sup>12</sup>  $f(x)b_2$ . Maintenant nous savons par le lemme 60 que pour un certain  $\delta_1$ , la quantité  $|f(x)|$  peut être majoré par un certain  $M$  dès que  $|x - a| \leq \delta_1$ . Prenons donc un tel  $\delta_1$  et supposons que  $|x - a| \leq \delta_1$ . Nous savons aussi que pour n'importe quel choix de  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$ , il existe des nombres  $\delta_2$  et  $\delta_3$  tels que  $|f(x) - b_1| \leq \epsilon_2$  et  $|g(x) - b_1| \leq \epsilon_3$  dès que  $|x - a| \leq \delta_2$  et  $|x - a| \leq \delta_3$ . Dans ces conditions, la dernière expression (7.35) se réduit à

$$|f(x)g(x) - b_1 b_2| \leq M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3. \quad (7.36)$$

Pour terminer la preuve, il suffit de choisir  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  tels que  $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leq \epsilon$ , et puis prendre  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ .

---

<sup>12</sup>Comme exercice, tu peux essayer de refaire la démonstration en ajoutant et enlevant  $g(x)b_1$  à la place.



Remettons les choses dans l'ordre. L'on se donne  $\epsilon$  au départ. La première chose est de trouver un  $\delta_1$  qui permet de majorer  $|f(x)|$  par  $M$  selon le lemme 60, et puis choisissons  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  tels que  $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leq \epsilon$ . Ensuite nous prenons, en vertu des hypothèses de limites pour  $f$  et  $g$ , les nombres  $\delta_2$  et  $\delta_3$  tels que  $|f(x) - b_1| \leq \epsilon_2$  et  $|g(x) - b_2| \leq \epsilon_3$  dès que  $|x - a| \leq \delta_2$  et  $|x - a| \leq \delta_3$ .

Si avec tous ça on prend  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , alors la majoration et les deux inégalités sont valables en même temps et au final

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leq M\epsilon_2 + b_2\epsilon_3 \leq \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

À l'aide de ces petits résultats, nous pouvons déjà calculer pas mal de limites. Nous pouvons déjà par exemple calculer les limites de tous les polynômes en tous les nombres réels. En effet, nous savons la limite de la fonction  $f(x) = x$ . la fonction  $x \mapsto x^2$  n'est rien d'autre que le produit de  $f$  par elle-même. Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right) = a^2.$$

De la même façon, nous trouvons facilement que

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n. \quad (7.37)$$

### Exercice 33.

En continuant ce petit jeu, prouvez que  $\lim_{x \rightarrow a} (x^3 - 5x + 8) = a^3 - 5a + 8$ , et puis que si  $P(x)$  est n'importe quel polynôme, alors  $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ .

Là, tu as un peu l'impression que l'on dit à tous les coups que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . D'ailleurs si tu relis la définition 56, tu vois que c'est un peu logique que la limite d'une fonction en un point soit la valeur de la fonction en ce point. Qu'est-ce qu'on a gagné alors ?

D'abord, est-ce que c'est toujours vrai que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ? Pour toute fonction ? Vraiment ? Eh bien non. Cela n'est pas vrai pour toutes les fonctions. Ce n'est vrai que pour une catégorie particulière de fonctions. L'important théorème suivant nous dit sans surprises pour quelles fonctions c'est vrai.

### Théorème 63 (Limite et continuité).

*La fonction  $f$  est continue au point  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par supposer que  $f$  est continue en  $a$ , et nous prouvons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Soit  $\epsilon > 0$  ; ce qu'il nous faut c'est un  $\delta$  tel que  $|x - a| \leq \delta$  implique  $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$ . Relis la définition 45 de la continuité, et

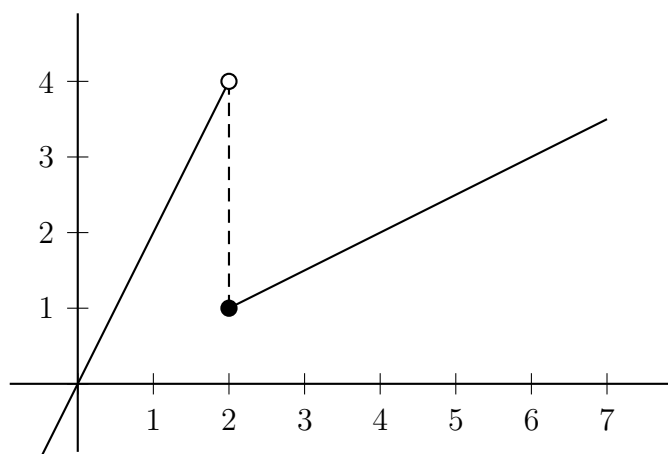


FIG. 7.16 – Une fonction discontinue en 2.

tu verras que l'hypothèse de continuité est *exactement* l'existence d'un  $\delta$  comme il nous faut.

Dans l'autre sens, c'est à dire prouver que  $f$  est continue au point  $a$  sous l'hypothèse que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , la preuve se fait de la même façon.  $\square$

Nous en déduisons que si nous voulons gagner quelque chose à parler de limites, il faut prendre des fonctions non continues. Prenons une fonction qui fait un saut comme celle tracée à la figure 7.11(b). Pour se fixer les idées, prenons celle-ci :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in ]\infty, 2[ \\ x/2 & \text{si } x \in [2, \infty[ \end{cases} \quad (7.38)$$

qui est représentée à la figure 7.16. Essayons de trouver la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers 2. Étant donné que  $f$  n'est pas continue en 2, nous savons déjà que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ . Donc ce n'est pas 1. Cette limite ne peut pas valoir 4 non plus parce que si je prends n'importe quel  $\epsilon$ , la valeur de  $f(2 + \epsilon)$  est très proche de 2, et donc ne peut pas s'approcher de 4. En fait, tu peux facilement vérifier que *aucun nombre ne vérifie la condition de limite pour  $f$  en 2*. Nous disons que la limite n'existe pas.

Pour résumer, les limites qui ne font pas intervenir l'infini ne servent à rien parce que

- si la fonction est continue, la limite est simplement la valeur de la fonction par le théorème 63,
- si la fonction fait un saut, alors la limite n'existe pas (nous n'avons pas prouvé cela en général, mais avoue que l'exemple est convainquant).

Nous avons même la proposition suivante :

**Proposition 64.**

Si  $f$  existe en  $a$  (c'est à dire si  $a \in \text{dom}(f)$ ) et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , alors  $f(a) = b$ .

*Démonstration.* Du fait que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , il découle que pour tout  $\epsilon$ , il existe un  $\delta$  tel que  $|x - a| \leq \delta$  implique  $|f(x) - b| \leq \epsilon$ . Il est évident que pour tout  $\delta$ ,  $|x - a| \leq \delta$ , donc nous avons que

$$|f(a) - b| \leq \epsilon$$

pour tout  $\epsilon$ . Cela implique que  $f(a) = b$ .  $\square$

Notons toutefois que l'inverse de cette proposition n'est pas vraie : la figure 7.16 montre justement une fonction qui prend la valeur 1 en 2 sans que la limite en 2 soit 1. Quoi qu'il en soit, cette proposition achève de nous convaincre de l'inutilité d'étudier les limites sans infinies : dès qu'on a une limite, à tous les coups c'est la valeur de la fonction ... heu ... en es-tu bien sûr ?

**7.4.2 Limites et prolongement**

À tous les coups ? Non ! La proposition 64 a une terrible limitation : il faut que la fonction existe au point considéré. Or si tu regardes bien la définition 56, tu verras que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  peut très bien exister sans que  $f(a)$  n'existe.

Voici maintenant le bonus dont on parlait à la page 91... bon d'accord, nous sommes à la page 131 ; le bonus est un peu cher !

Reprenons l'exemple de la fonction (7.1) que mon ordinateur refusait de calculer en zéro :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)}. \quad (7.39)$$

Cette fonction a une condition d'existence en  $x = -4$ . Et pourtant, tant que  $x \neq -4$ , cela a un sens de simplifier les  $(x+4)$  et d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{3}} = \frac{3}{3x-2}.$$

Étant donné que pour toute valeur de  $x$  différente de  $-4$ , la fonction  $f$  s'exprime de cette façon, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \left( \frac{3}{3x-2} \right).$$

Oui, mais la fonction<sup>13</sup>  $g(x) = 3/(3x-2)$  est continue en  $-4$  et donc sa limite vaut sa valeur. Nous en déduisons que

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\frac{3}{14}.$$

---

<sup>13</sup>Cette fonction  $g$  n'est pas  $f$  parce que  $g$  a en plus l'avantage d'être définie en  $-4$ .

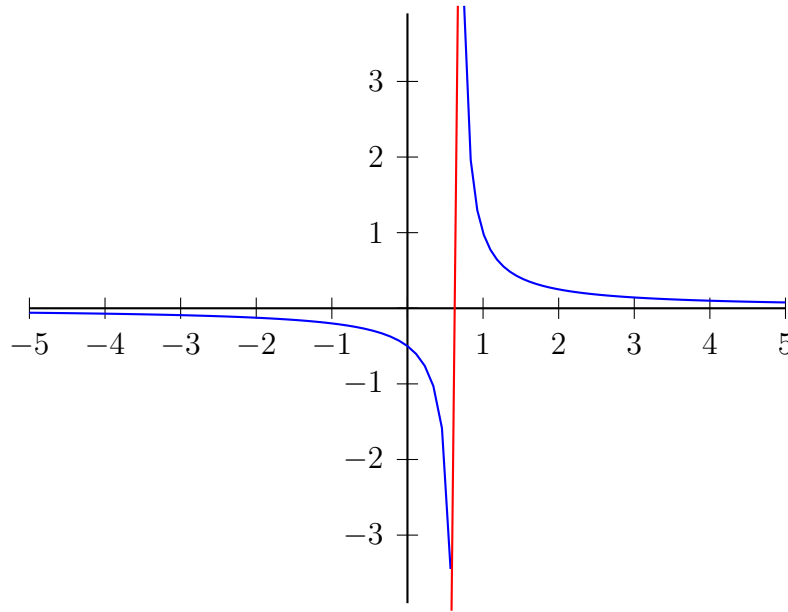


FIG. 7.17 – En  $x = -4$ , tu vois bien qu'il ne se passe en fait rien : on peut la prolonger. En  $2/3$  par contre, elle part vers l'infini et il n'y a aucun espoir de la prolonger par continuité.

Que dire maintenant de la fonction ainsi définie ?

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -4 \\ -3/14 & \text{si } x = -4. \end{cases} \quad (7.40)$$

Cette fonction est continue en  $-4$  parce qu'elle y est égale à sa limite. Les étapes suivies pour obtenir ce résultat sont :

- Repérer un point où la fonction n'existe pas,
- calculer la limite de la fonction en ce point, et en particulier vérifier que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas,
- définir une nouvelle fonction qui vaut partout la même chose que la fonction originale, sauf au point considéré où l'on met la valeur de la limite.

C'est ce qu'on appelle **prolonger la fonction par continuité** parce que la fonction résultante est continue. La prolongation de  $f$  par continuité est donc en général définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \text{ existe} \\ \lim_{y \rightarrow x} f(y) & \text{si } f(x) \text{ si cette limite existe et est finie.} \end{cases} \quad (7.41)$$

Dans le cas que nous regardions (voir la figure 7.17),

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8},$$

le prolongement par continuité est donné par

$$\tilde{f} = \frac{3}{3x-2}. \quad (7.42)$$

Remarque que cette fonction n'est toujours pas définie en  $x = 2/3$ .

## 7.5 Calcul de limites

Un résultat pratique pour calculer des limites est la

### Proposition 65.

*Quand la limite existe, nous avons*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon),$$

*ce qui correspond à un « changement de variables » dans la limite.*

*Démonstration.* Si  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , par définition,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta \text{ tel que } |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq \epsilon'. \quad (7.43)$$

La seule subtilité de la démonstration est de remarquer que si  $|x - a| \leq \delta$ , alors  $x$  peut être écrit sous la forme  $x = a + \epsilon$  pour un certain  $|\epsilon| \leq \delta$ . En remplaçant  $x$  par  $a + \epsilon$  dans la condition 7.43, nous trouvons

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta \text{ tel que } |\epsilon| \leq \delta \Rightarrow |f(x + \epsilon) - A| \leq \epsilon', \quad (7.44)$$

ce qui signifie exactement que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x + \epsilon) = A$ . □

Il y a une petite différence de point de vue entre  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon)$ . Dans le premier cas, on considère  $f(x)$ , et on regarde ce qu'il se passe quand  $x$  se rapproche de  $a$ , tandis que dans le second, on considère  $f(a)$ , et on regarde ce qu'il se passe quand on s'éloigne un tout petit peu de  $a$ . Dans un cas, on s'approche très près de  $a$ , et dans l'autre on s'en éloigne un tout petit peu. Ces deux points de vue sont évidemment équivalents, comme prouvé par la proposition 65.

### Exercice 34.

Prouver que la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  est une fonction continue.

**Correction de l'exercice 34**

En vertu du théorème 63 (limite et continuité), il est suffisant de montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a).$$

C'est bien pour ça que ce théorème est génial : il permet de prouver des continuités en calculant des limites. Nous avons par la proposition 65 :

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \cos(a + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \cos(a) \cos(\epsilon) - \sin(a) \sin(\epsilon) \right), \quad (7.45)$$

en utilisant la formule (7.31), nous trouvons à calculer

$$\cos(a) \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \cos(\epsilon) \right) - \sin(a) \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sin(\epsilon) \right).$$

## 7.6 Compacité

Aussi incroyable que cela puisse paraître, ce que nous allons faire va servir dans la démonstration de la formule (8.34). Soit  $E$ , un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ . Nous pouvons considérer les ouverts suivants :

$$\mathcal{O}_x = B(x, 1) \quad (7.46)$$

pour chaque  $x \in E$ . Évidemment,

$$E \subseteq \bigcup_{x \in E} \mathcal{O}_x. \quad (7.47)$$

Cette union est très souvent énorme, et même infinie. Elle contient de nombreuses redondances. Si par exemple  $E = [-10, 10]$ , l'élément  $3 \in E$  est contenu dans  $\mathcal{O}_{3.5}$ ,  $\mathcal{O}_{2.7}$  et bien d'autres. Pire : même si on enlève par exemple  $\mathcal{O}_2$  de la liste des ouverts, l'union de ce qui reste continue à être tout  $E$ . La question est : *est-ce qu'on peut en enlever suffisamment pour qu'il n'en reste qu'un nombre fini ?*

**Définition 66.**

Soit  $E$ , un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ . Une collection d'ouverts  $\mathcal{O}_i$  est un **recouvrement** de  $E$  si  $E \subseteq \bigcup_i \mathcal{O}_i$ . Un sous ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  tel que de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini est dit **compact**.

**Proposition 67.**

Les ensembles compacts sont fermés et bornés.

*Démonstration.* Prouvons d'abord qu'un ensemble compact est borné. Pour cela, supposons que  $K$  est un compact non borné vers le haut<sup>14</sup>. Donc il existe une suite infinie de nombres strictement croissante  $x_1 < x_2 < \dots$  tels que  $x_i \in K$ . Prenons n'importe quel recouvrement ouvert de la partie de  $K$  plus petite ou égale à  $x_1$ , et complétons ce recouvrement par les ouverts  $\mathcal{O}_i = ]x_{i-1}, x_i[$ . Le tout forme bien un recouvrement de  $K$  par des ouverts.

Il n'y a cependant pas moyen d'en tirer un sous recouvrement fini parce que si on ne prends qu'un nombre fini parmi les  $\mathcal{O}_i$ , on en aura fatalement un maximum, disons  $\mathcal{O}_k$ . Dans ce cas, les points  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$  ne seront pas dans le choix fini d'ouverts.

Cela prouve que  $K$  doit être borné.

Pour prouver que  $K$  est fermé, nous allons prouver que le complémentaire est ouvert. Et pour cela, nous allons prouver que si le complémentaire n'est pas ouvert, alors nous pouvons construire un recouvrement de  $K$  dont on ne peut pas extraire de sous recouvrement fini.

Si  $\mathbb{R} \setminus K$  n'est pas ouvert, il possède un point, disons  $x$ , tel que tout voisinage de  $x$  intersecte  $K$ . Soit  $B(x, \epsilon_1)$ , un de ces voisinages, et prenons  $k_1 \in K \cap B(x, \epsilon_1)$ . Ensuite, nous prenons  $\epsilon_2$  tel que  $k_1$  n'est pas dans  $B(x, \epsilon_2)$ , et nous choisissons  $k_2 \in K \cap B(x, \epsilon_2)$ . De cette manière, nous construisons une suite de  $k_i \in K$  tous différents et de plus en plus proches de  $x$ . Prenons un recouvrement quelconque par des ouverts de la partie de  $K$  qui n'est pas dans  $B(x, \epsilon_1)$ . Les nombres  $k_i$  ne sont pas dans ce recouvrement.

Nous ajoutons à ce recouvrement les ensembles  $\mathcal{O} = ]k_i, k_{i+1}[$ . Le tout forme un recouvrement (infini) par des ouverts dont il n'y a pas moyen de tirer un sous recouvrement fini, pour exactement la même raison que la première fois.  $\square$

Le résultat suivant le théorème de **Borel-Lebesgue**, et la démonstration vient de wikipédia.

**Théorème 68** (**borel-Lebesgue**).

*Les intervalles de la forme  $[a, b]$  sont compacts.*

*Démonstration.* Soit  $\Omega$ , un recouvrement du segment  $[a, b]$  par des ouverts, c'est à dire que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \quad (7.48)$$

Nous notons par  $M$  le sous-ensemble de  $[a, b]$  des points  $m$  tels que l'intervalle  $[a, m]$  peut être recouvert par un sous-ensemble fini de  $\Omega$ . C'est à dire que  $M$  est le sous ensemble de  $[a, b]$  sur lequel le théorème est vrai. Le but est maintenant de prouver que  $M = [a, b]$ .

---

<sup>14</sup>Nous laissons à titre d'exercice le cas où  $K$  est borné par le haut et pas par le bas.

**$M$  est non vide** En effet,  $a \in M$  parce que il existe un ouvert  $\mathcal{O} \in \Omega$  tel que  $a \in \mathcal{O}$ . Donc  $\mathcal{O}$  tout seul recouvre l'intervalle  $[a, a]$ .

**$M$  est un intervalle** Soient  $m_1, m_2 \in M$ . Le but est de montrer que si  $m' \in [m_1, m_2]$ , alors  $m' \in M$ . Il y a un sous recouvrement fini de l'intervalle  $[a, m_2]$  (par définition de  $m_2 \in M$ ). Ce sous recouvrement fini recouvre évidemment aussi  $[a, m']$  parce que  $[a, m'] \subseteq [a, m_2]$ , donc  $m' \in M$ .

**$M$  est une ensemble ouvert** Soit  $m \in M$ . Le but est de prouver qu'il y a un ouvert autour de  $m$  qui est contenu dans  $M$ . Mettons que  $\Omega'$  soit un sous recouvrement fini qui contienne l'intervalle  $[a, m]$ . Dans ce cas, on a un ouvert  $\mathcal{O} \in \Omega'$  tel que  $m \in \mathcal{O}$ . Tous les points de  $\mathcal{O}$  sont dans  $M$ , vu qu'ils sont tous recouverts par  $\Omega'$ . Donc  $\mathcal{O}$  est un voisinage de  $m$  contenu dans  $M$ .

**$M$  est un ensemble fermé**  $M$  est un intervalle qui commence en  $a$ , en contenant  $a$ , et qui finit on ne sait pas encore où. Il est donc soit de la forme  $[a, m]$ , soit de la forme  $[a, m[$ . Nous allons montrer que  $M$  est de la première forme en démontrant que  $M$  contient son supremum  $s$ . Ce supremum est un élément de  $[a, b]$ , et donc il est contenu dans un des ouverts de  $\Omega$ . Disons  $s \in \mathcal{O}_s$ . Soit  $c$ , un élément de  $\mathcal{O}_s$  strictement plus petit que  $c$ ; étant donné que  $s$  est supremum de  $M$ , cet élément  $c$  est dans  $M$ , et donc on a un sous recouvrement fini  $\Omega'$  qui recouvre  $[a, c]$ . Maintenant, le sous recouvrement constitué de  $\Omega'$  et de  $\mathcal{O}_s$  est fini et recouvre  $[a, s]$ .

Nous pouvons maintenant conclure : le seul intervalle non vide de  $[a, b]$  qui soit à la fois ouvert et fermé est  $[a, b]$  lui-même, ce qui prouve que  $M = [a, b]$ , et donc que  $[a, b]$  est compact.  $\square$

Note : il est également vrai que *tous* les compacts de  $\mathbb{R}$  sont fermés et bornés, mais nous n'allons pas démontrer cela ici.

Une propriété très importante des compacts est la suivante :

### **Théorème 69.**

*L'image d'un compact par une fonction continue est un compact*

*Démonstration.* Soit  $K \subset \mathbb{R}$ , un ensemble compact, et regardons  $f(K)$ ; en particulier, nous considérons  $\Omega$ , un recouvrement de  $f(K)$  par des ouverts. Nous avons que

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \quad (7.49)$$

Par construction, nous avons aussi

$$K \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} f^{-1}(\mathcal{O}), \quad (7.50)$$

en effet, si  $x \in K$ , alors  $f(x)$  est dans un des ouverts de  $\Omega$ , disons  $f(x) \in \mathcal{O}_0$ , et évidemment,  $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ . Les  $f^{-1}(\mathcal{O})$  recouvrent le compact  $K$ , et donc on peut en



choisir un sous-recouvrement fini, c'est à dire un choix de  $\{f^{-1}(\mathcal{O}_1), \dots, f^{-1}(\mathcal{O}_n)\}$  tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_i). \quad (7.51)$$

Dans ce cas, nous avons que

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i, \quad (7.52)$$

ce qui prouve la compacité de  $f(K)$ .  $\square$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et nous avons l'importante propriété suivante des fonctions continues sur un compact.

**Théorème 70.**

*Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle compact  $[a, b]$ . Alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et elle atteint ses bornes.*

*Démonstration.* Étant donné que  $[a, b]$  est un intervalle compact, son image est également un intervalle compact, et donc est de la forme  $[m, M]$ . Ceci découle du théorème 69 et le corollaire 52. Le maximum de  $f$  sur  $[a, b]$  est la borne  $M$  qui est bien dans l'image (parce que  $[m, M]$  est fermé). Idem pour le minimum  $m$ .  $\square$

En préparant ces notes, j'ai fait une très jolie faute en essayant de prouver ce théorème<sup>15</sup>. Voici comment je comptais prouver le fait que  $f$  est bornée. Supposons que  $f$  ne soit bornée ni vers le haut, ni vers le bas, donc son image est  $\mathbb{R}$  qui est ouvert. Mais  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc l'image inverse de  $\mathbb{R}$  par  $f$  doit être un ouvert. Oui, mais cette image inverse est exactement  $[a, b]$  qui est fermé. Cela est une contradiction qui prouve que  $f$  doit être bornée au moins soit vers le haut, soit vers le bas.

Peux-tu trouver la faute?

## 7.7 A mad tea party

*« Reprenez donc un peu de thé » propose le Lièvre de Mars.*

*« Je n'ai rien pris du tout, je ne saurai donc reprendre de rien ! »*

*« Vous voulez dire que vous ne sauriez reprendre de quelque chose » repartit le Chapelier.*

*« Quand il n'y a rien, ce n'est pas facile d'en reprendre ».*

---

<sup>15</sup>Qui ne fait pas de fautes en tapant à l'ordi couché sur son lit entre une et deux heures du matin ?

- Alors comme ça, vous êtes *étudiante* ?
- Oui, en mathématiques par exemple.
- Alors que vaut cette fraction : un sur deux sur trois sur quatre ?
- Eh bien ...
- Elle vaut deux tiers, la devança le Loir.
- Ou trois huitièmes si vous préférez, ajouta le Lièvre de Mars.
- Ou encore un sur vingt-quatre, affirma le *Chapelier*.
- En fait, je crois que...
- Aucune importance ! Dites-nous plutôt combien vous voulez de sucre dans votre thé ?
- Deux ou trois, ça dépend de la taille de la tasse.
- Certainement pas, car de toute façon, deux ou trois c'est pareil.
- Parfaitement ! approuva le Loir en fixant Alice qui écarquillait les yeux.
- Ce n'est pourtant pas ce qu'on m'a appris, fit celle-ci.
- Pourtant, ce n'est pas compliqué à comprendre, en voici une démonstration des plus élémentaires. On sait que pour tout entier  $n$  on a successivement

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - 2n - 1 = n^2$$

Retranchons  $n(2n+1)$  des deux côtés

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1).$$

Mézalor, en ajoutant  $(2n+1)^2/4$ , on obtient

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

Soit

$$\left( (n+1) - \frac{2n+1}{2} \right)^2 = \left( n - \frac{2n+1}{2} \right)^2$$

En passant à la racine carrée, on obtient

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

d'où

$$n+1 = n$$

Et si je prends  $n = 2$ , j'ai aussitôt  $3 = 2$

- Alors, qu'est-ce que vous en dites ?
- Je... commença Alice.

- D’ailleurs, cela prouve que tous les entiers sont égaux, la coupa le Lièvre de Mars.
- Pas mal du tout ! Qu’en dites-vous mademoiselle la mathématicienne ?
- Je vais vous dire tout de suite ce que j’en pense
- Ah non ! Nous préférierions de loin que vous pensiez ce que vous allez nous dire.
- C’est pareil ! grinça Alice qui commençait à en avoir assez.
- Comment ça, c’est pareil ? Dire ce que l’on pense ce serait pareil que penser ce que l’on dit ? s’étrangla le Lièvre de Mars.
- Incroyable ! Et manger ce qu’on voit ce serait pareil que voir ce qu’on mange ?
- Mais...
- Et respirer quand on dort pareil que dormir quand on respire ?
- En logique, nous vous mettons 3 sur 5.
- Autant dire moins que un.
- C’est à dire zéro, puisque si  $2 = 3$  alors  $1 = 0$ .
- Parce que chez vous, 3 c’est moins que 1 ? s’indigna Alice.
- On se demande ce qu’on vous apprend à l’école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez

$$f(x) = \frac{x^2 + 32}{2x^2 + 1} + \frac{|x| + 1}{2x + 51}$$

Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l’infini et 1 en plus l’infini.

- Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.
- Donc l’image par  $f$  de  $\mathbb{R}$  est l’intervalle  $]0, 1[$ , or  $f(0) = 3$ , donc 3 appartient à  $]0, 1[$  à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.
- C’est de la folie pure, pensa Alice...

### Remarque 71.

Cette partie de thé de fous est volée avec quelque modifications mineures (dont les liens) et sans en avoir honte de la série de cours de math de Guillaume Connan, [Tehessin le rezeen](#). À lire sans hésiter ! Le livre original de [Lewis Carol](#) d’où est tiré un très bon dessin animé est également à lire sans hésiter.



# Chapitre 8

## Dérivation et intégration

### 8.1 Des exemples

#### 8.1.1 La vitesse

Si tu lis ces lignes, c'est que tu as plus que probablement déjà entendu le baratin des physiciens à propos de la nuance entre les vitesses instantanées et vitesses moyennes. Relis par exemple la section 9.3, et en particulier les exemples 85 et 86 qui y sont donnés. Imprègne toi bien de ces idées.

Lorsqu'un mobile se déplace à une vitesse variable, nous obtenons la *vitesse instantanée* en calculant une vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. Si le mobile a un mouvement donné par  $x(t)$ , la vitesse moyenne entre  $t = 2$  et  $t = 5$  sera

$$v_{\text{moy}}(2 \rightarrow 5) = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2}.$$

Plus généralement, la vitesse moyenne entre 2 et  $2 + \Delta t$  est donnée par

$$v_{\text{moy}}(2 \rightarrow 2 + \Delta t) = \frac{x(2 + \Delta t) - x(2)}{\Delta t}.$$

Cela est une fonction de  $\Delta t$ . Oui, mais je te rappelle qu'on a dans l'idée de calculer une vitesse instantanée, c'est à dire de voir ce que vaut la vitesse moyenne sur un intervalle très très très très petit. La notion de limite de la définition 56 semble toute indiquée pour décrire mathématiquement l'idée physique de vitesse instantanée.

Nous allons dire que la vitesse instantanée d'un mobile est la limite quand  $\Delta t$  tends vers zéro de sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps  $\Delta t$ , ou en formule :

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (8.1)$$

### 8.1.2 La tangente à une courbe

Passons maintenant à tout autre chose, mais toujours dans l'utilisation de la notion de limite pour résoudre des problèmes intéressants. Comment trouver l'équation de la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(x_0, f(x_0))$  ?

Essayons de trouver la tangente au point  $P$  donné de la courbe donnée à la figure 8.1.

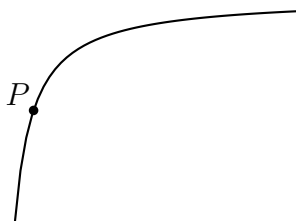


FIG. 8.1 – Comment trouver la tangente au point  $P$  à cette courbe ?

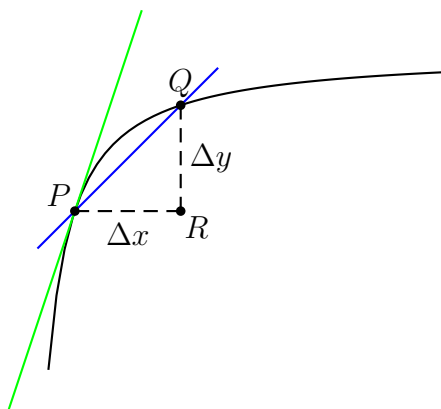


FIG. 8.2 – Nous plaçons le point  $P$  à l'abscisse  $x$ , et le point  $Q$  un peu plus loin : en  $x + \Delta x$ . En vert, la tangente que nous cherchons.

La tangente est la droite qui touche la courbe en un seul point sans la traverser. Afin de la construire, nous allons dessiner des droites qui touchent la courbe en  $P$  et un autre point  $Q$ , et nous allons voir ce qu'il se passe quand  $Q$  est très proche de  $P$ . Cela donnera une droite qui, certes, touchera la courbe en deux points, mais en deux point *tellement proche que c'est comme si c'étaient les mêmes*. Tu sens que la notion de limite va encore venir.

Nous avons placé le point  $P$  en  $x = x_P$  et le point  $Q$  un peu plus loin  $x = x_P + \Delta x$ . En d'autres termes leurs coordonnées sont

$$P = (x_P, f(x_P)) \qquad Q = (x_P + \Delta x, f(x_P + \Delta x)). \qquad (8.2)$$

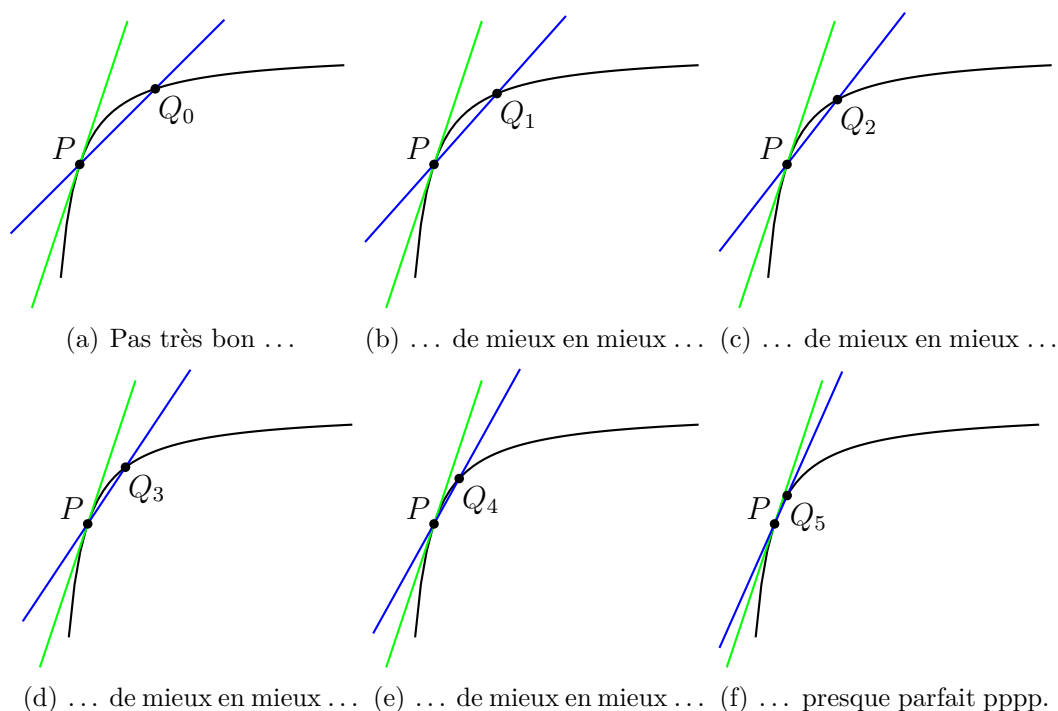


FIG. 8.3 – Au fur et à mesure que le point  $Q_i$  se rapproche de  $P$ , l'approximation se rapproche de la tangente.

Comme tu devrais le savoir sans même regarder la figure 8.2, le coefficient angulaire de la droite qui passe par ces deux points est donné par

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (8.3)$$

et bang ! Encore le même rapport. Si tu regardes la figure 8.3, tu verras que réellement en faisant tendre  $\Delta x$  vers zéro on obtient la tangente.

### Définition 72.

Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, la **dérivée** de  $f$  au point  $x_0$  est le nombre (si il existe)

$$f'(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}. \quad (8.4)$$

Imaginons que  $f'(x_0)$  puisse être calculée en chaque point  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, nous nous retrouvons avec une nouvelle fonction  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui s'appelle la **fonction dérivée** de  $f$ . Nous allons, durant les prochaines pages, étudier comment calculer  $f'$ .

La dérivée de la fonction  $f$  par rapport à  $x$  se note aussi souvent par

$$\frac{df}{dx}. \quad (8.5)$$

Cette notation a, au moins, l'avantage de préciser par rapport à quelle variable on dérive (ici :  $x$ ).

### 8.1.3 L'aire en dessous d'une courbe

Encore un exemple. Nous voudrions bien pouvoir calculer l'aire en-dessous d'une courbe. Nous notons  $S_f(x)$  l'aire en-dessous de la fonction  $f$  entre l'abscisse 0 et  $x$ , c'est à dire l'aire bleue de la figure 8.4. Si la fonction  $f$  est continue

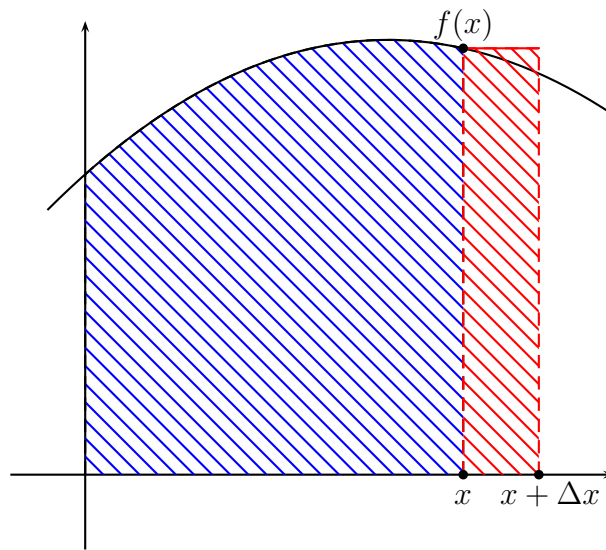


FIG. 8.4 – L'aire en-dessous d'une courbe. Le rectangle rouge, d'aire  $f(x)\Delta x$ , approxime de combien l'aire en-dessous de la fonction  $f$  augmente lorsqu'on passe de  $x$  à  $x + \Delta x$ .

et que  $\Delta x$  est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre  $x$  et  $x + \Delta x$ . L'augmentation de surface entre  $x$  et  $x + \Delta x$  peut donc être approximé par le rectangle de surface  $f(x)\Delta x$ . Ce que nous avons donc, c'est que quand  $\Delta x$  est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \quad (8.6)$$

c'est à dire

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \quad (8.7)$$

Donc, la fonction  $f$  est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en-dessous de  $f$ . Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.



Nous avons déjà vu que calculer la dérivée d'une fonction n'est pas très compliqué. Aussi étonnant que cela puisse paraître, il se fait que le processus inverse est très compliqué : il est en général extrêmement difficile (et même souvent impossible) de trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée.

Une fonction dont la dérivée est la fonction  $f$  s'appelle une **primitive** de  $f$ , et la fonction qui donne l'aire en-dessous de la fonction  $f$  entre l'abscisse 0 et  $x$  est notée

$$S_f(x) = \int_0^x f(t)dt. \quad (8.8)$$

Nous pouvons nous demander si, pour une fonction  $f$  donnée, il existe une ou plusieurs primitives, c'est à dire si il existe une ou plusieurs fonctions  $F$  telles que  $F' = f$ . La réponse sera donnée par le corollaire 82 : si on en connaît une, on les connaît toutes.

## 8.2 Règles de calcul

Le calcul de dérivées de fonctions se ramène toujours à un calcul de limite. C'est pas toujours très facile, mais ce n'est jamais un cauchemar<sup>1</sup>. Faisons-en une ou deux juste pour le plaisir.

### Lemme 73.

Si  $f(x) = x^2$ , alors  $f'(x) = 2x$ .

*Démonstration.* Utilisons la définition, et remplaçons  $f$  par sa valeur :

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \quad (8.9a)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} \quad (8.9b)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon} \quad (8.9c)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon(2x + \epsilon)}{\epsilon} \quad (8.9d)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2x + \epsilon) \quad (8.9e)$$

$$= 2x, \quad (8.9f)$$

ce qu'il fallait prouver. □

Une facile, maintenant.

---

<sup>1</sup>Un cauchemar ? Pfff ! Ne me fais pas croire que tu rêves de ton cours de math en dormant.

**Proposition 74.**

La dérivée de la fonction  $x \mapsto x$  vaut 1, en notations compactes :  $(x)' = 1$ .

*Démonstration.* D'après la définition de la dérivée, si  $f(x) = x$ , nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon) - x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1, \quad (8.10)$$

et c'est déjà fini. □

Pour continuer, nous allons en faire une un peu plus abstraite.

**Proposition 75.**

La dérivation est une opération linéaire, c'est à dire que

- a.  $(\lambda f)' = \lambda f'$  pour tout réel  $\lambda$  où, pour rappel, la fonction  $(\lambda f)$  est définie par  $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ ,
- b.  $(f + g)' = f' + g'$ .

*Démonstration.* Ces deux propriétés découlent des propriétés correspondantes de la limite. Nous allons faire la première, et laisser la seconde à titre d'exercice. Écrivons la définition de la dérivée avec  $(\lambda f)$  au lieu de  $f$ , et calculons un petit peu :

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\lambda f)(x + \epsilon) - (\lambda f)(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(f(x + \epsilon)) - \lambda f(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \\ &= \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \\ &= \lambda f'(x). \end{aligned} \quad (8.11)$$

□

Tu peux te persuader de ce résultat en regardant la tangente de la fonction, comme dessinée sur la figure 8.5.

**Proposition 76.**

La dérivée d'un produit obéit à la **règle de Leibnitz** :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (8.12)$$

Cette règle est souvent écrite sous la forme compacte  $(fg)' = f'g + g'f$ .

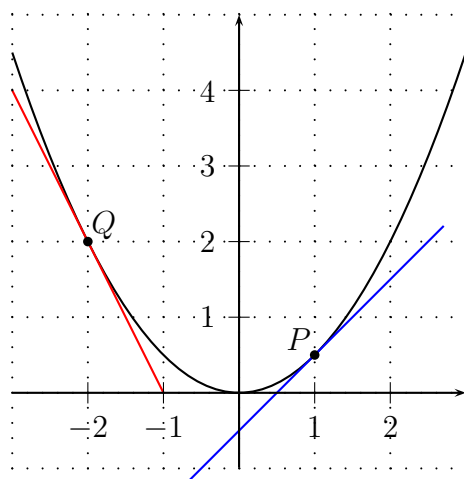


FIG. 8.5 – La dérivée à la fonction  $x \mapsto x^2/2$ . La dérivée vaut  $x \mapsto x$ , et, en effet, tu remarqueras que le coefficient angulaire de la tangente vaut  $-2$  en  $Q$  et  $1$  en  $P$ .

*Démonstration.* La définition de la dérivée dit que

$$(fg)'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon}. \quad (8.13)$$

La subtilité est d'ajouter au numérateur la quantité  $-f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon)$ , ce qui est permis parce que cette quantité est nulle<sup>2</sup>. Le numérateur de (8.13) devient donc

$$\begin{aligned} & f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon) - f(x)g(x) \\ &= g(x+\epsilon)(f(x+\epsilon) - f(x)) + f(x)(g(x+\epsilon) - g(x)), \end{aligned} \quad (8.14)$$

où nous avons effectué deux mises en évidence. Étant donné que nous avons deux termes, nous pouvons couper la limite en deux :

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x+\epsilon) \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x+\epsilon) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

où nous avons utilisé le théorème 62 pour scinder la première limite en deux, ainsi que la propriété (7.24) pour sortir le  $f(x)$  de la limite dans le second terme. Maintenant, dans le premier terme, nous avons évidemment<sup>3</sup>  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x+\epsilon) = g(x)$ .

<sup>2</sup>Le coup d'ajouter et enlever la même chose a déjà été fait durant la démonstration du théorème 62. C'est une technique assez courante en analyse.

<sup>3</sup>Pas tout à fait évidemment : selon le théorème 63, *limite et continuité*, il faut que  $g$  soit continue.

Les limites qui restent sont les définitions classiques des dérivées de  $f$  et  $g$  au point  $x$  :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) - f(x)g'(x), \quad (8.16)$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

### 8.3 Démystification du MRUA (première)

Nous allons maintenant donner une preuve (presque) complète de la formule du MRUA en physique. Pour rappel, lorsqu'un mobile se déplace en ligne droite en partant au repos à l'instant  $t = 0$  avec une accélération  $a$  parcourt une distance

$$x(t) = \frac{at^2}{2}. \quad (8.17)$$

Cela est l'équation (9.8), expliquée en long et en large dans la section 9.6. Nous avons donné, dans cette section, une longue et douloureuse preuve de cette formule. Notre but maintenant est d'en trouver une preuve beaucoup plus simple.

Avec la notation de la dérivée, la définition (8.1) de la vitesse devient simplement

$$v(t) = x'(t). \quad (8.18)$$

La vitesse est la dérivée de la position. D'autre part, selon la formule (9.2), l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$a(t) = v'(t) = x''(t). \quad (8.19)$$

Dans le cas d'un MRUA, la fonction  $a(t)$  est constante :  $a(t) = a$ . Donc la vitesse en fonction du temps est une fonction dont la dérivée par rapport au temps est la constante  $a$ . Sans rentrer dans les détails, tu remarqueras que la fonction  $v(t) = at$  remplit la condition<sup>4</sup>.

Maintenant, il nous faut une fonction  $x(t)$  telle que  $x'(t) = at$ . Là encore, une telle fonction n'est pas très compliquée à trouver :  $x(t) = at^2/2$ .

Et voilà, c'est terminé : tout ton cours de cinématique tient en trois lignes. Il suffit de faire deux dérivées inverses.

### 8.4 Dérivation et croissance

La dérivée d'une fonction a une propriété étonnante : elle dit si la fonction est croissante ou décroissante. La figure 8.6 montre une fonction et une série de

---

<sup>4</sup>Maintenant, tu sais pourquoi nous avons annoncé une preuve *presque* complète : rien ne prouve qu'il n'y a pas une autre fonction qui remplit la condition.

segments tangents. Étant donné que la courbe est « collée » à ses tangentes, tant que les tangentes montent, la fonction monte. Or, une tangente qui monte correspond à une dérivée positive, parce que la dérivée est le coefficient angulaire de la tangente.

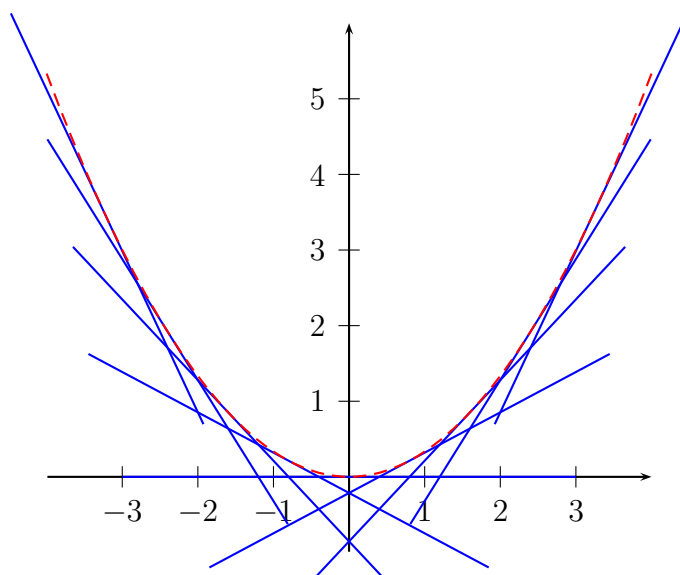


FIG. 8.6 – Quelques tangentes à la fonction  $x \mapsto x^2/3$ . Comme tu le vois, la fonction est « collée » à ses tangentes.

Ce résultat très intuitif peut être prouvé rigoureusement. C'est la tâche à laquelle nous allons nous atteler maintenant.

**Proposition 77.**

*Si  $f$  et  $f'$  sont des fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$  et si  $f'(x)$  est strictement positive sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ .*

*De la même manière, si  $f'(x)$  est strictement négative sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$ .*

*Démonstration.* Nous n'allons prouver que la première partie. La seconde partie se prouve en considérant  $-f$  et en invoquant alors la première<sup>5</sup>. Prenons  $x_1$  et  $x_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $x_1 < x_2$ . Par hypothèse, pour tout  $x$  dans  $[x_1, x_2]$ , nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \quad (8.20)$$

Maintenant, la proposition 61 dit que quand une limite est positive, alors la fonction dans la limite est positive sur un voisinage. En appliquant cette proposition

---

<sup>5</sup>Je te laisse méditer cela.

à la fonction

$$r(\epsilon) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (8.21)$$

dont la limite en zéro est positive, nous trouvons que  $r(\epsilon) > 0$  pour tout  $\epsilon$  pas trop éloigné de zéro. En particulier, il existe un  $\delta > 0$  tel que  $\epsilon < \delta$  implique  $r(\epsilon) > 0$ ; pour un tel  $\epsilon$ , nous avons donc

$$r(\epsilon) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \quad (8.22)$$

Étant donné que  $\epsilon > 0$ , nous avons que  $f(x + \epsilon) - f(x) > 0$ , c'est à dire que  $f$  est strictement croissante entre  $x$  et  $x + \delta$ .

Jusqu'ici, nous avons prouvé que la fonction  $f$  était strictement croissante dans un voisinage autour de chaque point de  $[a, b]$ . Cela n'est cependant pas encore tout à fait suffisant pour conclure. Ce que nous voudrions faire, c'est de dire, c'est prendre un voisinage  $]a, m_1[$  autour de  $a$  sur lequel  $f$  est croissante. Donc,  $f(m_1) > f(a)$ . Ensuite, on prend un voisinage  $]m_1, m_2[$  de  $m_1$  sur lequel  $f$  est croissante. De ce fait,  $f(m_2) > f(m_1) > f(a)$ . Et ainsi de suite, nous voulons construire des  $m_3, m_4, \dots$  jusqu'à arriver en  $b$ . Hélas, rien ne dit que ce processus va fonctionner. Il faut trouver une subtilité. Le problème est que les voisinages sur lesquels la fonction est croissante sont peut-être de plus en plus petit, de telle sorte à ce qu'il faille une infinité d'étapes avant d'arriver à bon port (en  $b$ ).

Heureusement, nous pouvons drastiquement réduire le nombre d'étapes en nous souvenant du théorème de Borel-Lebesgue (numéro 68). Nous notons par  $\mathcal{O}_x$ , un ouvert autour de  $x$  tel que  $f$  soit strictement croissante sur  $\mathcal{O}_x$ . Un tel voisinage existe. Cela fait une infinité d'ouverts tels que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{x \in [a, b]} \mathcal{O}_x. \quad (8.23)$$

Ce que le théorème dit, c'est qu'on peut en choisir un nombre fini qui recouvre encore  $[a, b]$ . Soient  $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_n}\}$ , les heureux élus, que nous supposons prit dans l'ordre :  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Nous avons

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i. \quad (8.24)$$

Quitte à les rajouter à la collection, nous supposons que  $x_1 = a$  et que  $x_n = b$ . Maintenant nous allons choisir encore un sous ensemble de cette collection d'ouverts. On pose  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{x_1}$ . Nous savons que  $\mathcal{A}_1$  intersecte au moins un des autres  $\mathcal{O}_{x_i}$ . Cette affirmation vient du fait que  $[a, b]$  est connexe (proposition 44), et que si  $\mathcal{O}_{x_1}$  n'intersectait personne, alors

$$\mathcal{O}_{x_1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=2}^n \mathcal{O}_{x_i} \quad (8.25)$$

forment une partition de  $[a, b]$  en deux ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible parce que  $[a, b]$  est connexe. Nous nommons  $\mathcal{A}_2$ , un des ouverts  $\mathcal{O}_{x_i}$  qui intersecte  $\mathcal{A}_1$ . Disons que c'est  $\mathcal{O}_k$ . Notons que  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  est un intervalle sur lequel  $f$  est strictement croissante. En effet, si  $y_{12}$  est dans l'intersection,  $f(a) < f(y_{12})$  parce que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathcal{A}_1$ , et pour tout  $x > y_{12}$  dans  $\mathcal{A}_2$ ,  $f(x) > f(y_{12})$  parce que  $f$  est strictement croissante dans  $\mathcal{A}_2$ .

Maintenant, nous éliminons de la liste des  $\mathcal{O}_{x_i}$  tous ceux qui sont inclus à  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ . Dans ce qu'il reste, il y en a automatiquement un qui intersecte  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ , pour la même raison de connexité que celle invoquée plus haut. Nous appelons cet ouvert  $\mathcal{A}_3$ , et pour la même raison qu'avant,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ .

En recommençant suffisamment de fois, nous finissons par devoir prendre un des  $\mathcal{O}_{x_i}$  qui contient  $b$ , parce qu'au moins un des  $\mathcal{O}_{x_i}$  contient  $b$ . À ce moment, nous avons fini la démonstration.

Ouf!

□

Il est intéressant de noter que ce théorème concerne la croissance d'une fonction sous l'hypothèse que la dérivée est positive. Il nous a fallu très peu de temps, en utilisant la positivité de la dérivée, pour conclure qu'autour de tout point, la fonction était strictement croissante. À partir de là, c'était pour ainsi dire gagné. Mais il a fallu un réel travail de topologie très fine et subtile<sup>6</sup> pour conclure. Étonnant qu'une telle quantité de topologie soit nécessaire pour démontrer un résultat essentiellement analytique dont l'hypothèse est qu'une limite est positive, n'est-ce pas ?

À quoi à servi toute cette topologie ? La réponse est simple : l'hypothèse de dérivée positive est une hypothèse locale. C'est à dire que l'on a une hypothèse qui concerne une limite, qui, par essence, ne lient que des points très proches : dire «  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  » ne donne des informations sur  $f(x)$  que pour des  $x$  très proches de  $a$ . Toute la topologie a servi à transporter un résultat local vrai partout (la fonction est croissante dans un voisinage de tout point) un seul résultat global : la fonction est croissante sur tout l'intervalle  $[a, b]$ .

La topologie a servi à recoller des morceaux. Cela est une philosophie assez générale en analyse. Une hypothèse analytique permet de monter un résultat sur plein de tout petit intervalles, et puis de la topologie vient en déduire un résultat sur un intervalle plus grand.

Une petite facile, maintenant.

### Proposition 78.

*Si  $f$  est croissante sur un intervalle, alors  $f' \geq 0$  à l'intérieur cet intervalle, et si*

---

<sup>6</sup>et je te rappelle que nous avons utilisé la proposition 44, qui elle même était déjà un très gros boulot !

$f$  est décroissante sur l'intervalle, alors  $f' \leq 0$  à l'intérieur de l'intervalle.

Note qu'ici, nous demandons juste la croissance de  $f$ , et non sa *stricte* croissance.

*Démonstration.* Soit  $f$ , une fonction croissante sur l'intervalle  $I$ , et  $x$  un point intérieur de  $I$ . La dérivée de  $f$  en  $x$  vaut

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (8.26)$$

mais, comme  $f$  est croissante sur  $I$ , nous avons toujours que  $f(x + \epsilon) - f(x) \geq 0$  quand  $\epsilon > 0$ , et  $f(x + \epsilon) - f(x) \leq 0$  quand  $\epsilon < 0$ , donc cette limite est une limite de nombre positifs ou nuls, qui est donc positive ou nulle. Cela prouve que  $f'(x) \geq 0$ .  $\square$

Les deux prochains théorèmes sont très importants.

**Théorème 79** (Théorème de Rolle).

Soit  $f$ , une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

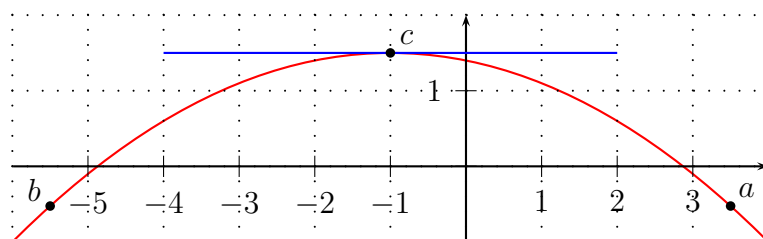


FIG. 8.7 – Illustration du théorème de Rolle. Nous avons  $f(a) = f(b)$ , et effectivement, au point  $c$ , la tangente est horizontale (dérivée nulle).

*Démonstration.* Une petite illustration est présentée sur la figure 8.7. Étant donné que  $[a, b]$  est un intervalle compact, l'image de  $[a, b]$  par  $f$  est un intervalle compact, soit  $[m, M]$  (théorème 69). Si  $m = M$ , alors le théorème est évident : c'est que la fonction est constante, et la dérivée est par conséquent nulle. Supposons que  $M > f(a)$  (il se peut que  $M = f(a)$ , mais alors si  $f$  n'est pas constante, il faut avoir  $m < f(a)$  et le reste de la preuve peut être adaptée).

Comme  $M$  est dans l'image de  $[a, b]$  par  $f$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = M$ . Considérons maintenant la fonction

$$\tau(x) = \frac{f(c + x) - f(c)}{x}. \quad (8.27)$$



Par définition,  $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = f'(c)$ . Par hypothèse, si  $u < c$ ,

$$\tau(u - c) = \frac{f(u) - f(c)}{u - c} > 0 \quad (8.28)$$

parce que  $u - c < 0$  et  $f(u) - f(c) < 0$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) \geq 0$ . Nous avons aussi, pour  $v > c$ ,

$$\tau(v - c) = \frac{f(v) - f(c)}{v - c} < 0 \quad (8.29)$$

parce que  $v - c > 0$  et  $f(v) - f(c) < 0$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) \leq 0$ . Mettant les deux ensemble, nous avons  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0$ , et  $c$  est le point que nous cherchions.  $\square$

Sur wikipédia, deux démonstrations complètement différentes sont proposées, celle qui est présentée ici est adaptée de celle qui est proposée par le célèbre mathématicien de [Téhessin le Rézéén](#).

Le corollaire suivant est le théorème des **accroissements finis**.

**Théorème 80** (accroissements finis).

*Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe au moins un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .*

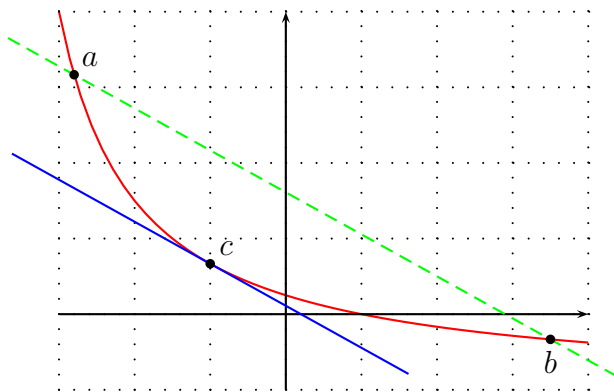


FIG. 8.8 – Illustration du théorème des accroissements finis. Nous avons effectivement qu’au point  $c$ , la tangente est parallèle au segment qui joint  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* Regardes l’illustration sur la figure 8.8. Considérons la fonction

$$\tau(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right), \quad (8.30)$$

c'est à dire la fonction qui donne la distance entre  $f$  et le segment de droite qui lie  $(a, f(a))$  à  $(b, f(b))$ . Par construction (et tu peux le vérifier),  $\tau(a) - \tau(b) = 0$ , donc le théorème de Rolle s'applique à  $\tau$  pour laquelle il existe donc un  $c \in ]a, b[$  tel que  $\tau'(c) = 0$ .

En utilisant les règles de dérivation, nous trouvons que la dérivée de  $\tau$  vaut

$$\tau'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (8.31)$$

donc dire que  $\tau'(c) = 0$  revient à dire que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

### Corollaire 81.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[a, b]$  telle que  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Si  $f$  n'était pas constante sur  $[a, b]$ , il existerait un  $x_1 \in ]a, b[$  tel que  $f(a) \neq f(x_1)$ , et dans ce cas, il existerait un  $c \in ]a, x_1[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \neq 0, \quad (8.32)$$

ce qui contredirait les hypothèses.  $\square$

### Corollaire 82.

Soit  $f$  et  $g$ , deux fonctions dérivables sur  $[a, b]$  telles que

$$f'(x) = g'(x) \quad (8.33)$$

pour tout  $x \in [a, b]$ . Alors existe un réel  $C$  tel que  $f(x) = g(x) + C$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

*Démonstration.* Considérons la fonction  $h(x) = f(x) - g(x)$ , dont la dérivée est, par hypothèse, nulle. L'annulation de la dérivée entraîne que  $h$  est constante. Si  $h(x) = C$ , alors  $f(x) = g(x) + C$ , ce qu'il fallait prouver.  $\square$

Exprimé en termes des primitives introduites dans la sous-section 8.1.3, ce corollaire signifie que

### Corollaire 82 (bis).

Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de la même fonction  $f$ , alors il existe une constante  $C$  pour laquelle  $F(x) = G(x) + C$ .

Cela signifie qu'il n'y a, en réalité, pas des milliards de primitives différentes à une fonction. Il y en a essentiellement une seule, et puis les autres, ce sont juste les mêmes, mais décalées d'une constante.

## 8.5 Démystification du MRUA (seconde)

### 8.5.1 Preuve de la formule

Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration complète de la formule du MRUA :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0. \quad (8.34)$$

Au niveau de la physique, nous considérons un mobile qui se déplace avec une accélération constante  $a$ . Nous notons par  $v_0$  sa vitesse initiale et par  $x_0$  sa position initiale.

Reprenons le cheminement suivi dans la section 8.3. Nous savons que, pour tout mouvement, si  $x(t)$  est la position en fonction du temps, et si  $v(t)$  et  $a(t)$  représentent la vitesse et l'accélération en fonction du temps, alors

$$v(t) = x'(t) \quad \text{et} \quad a(t) = v'(t) = x''(t). \quad (8.35)$$

Afin de trouver  $x(t)$  en connaissant  $a(t)$ , il « suffit » donc de prendre deux fois la primitive. Essayons ça dans le cas facile du MRUA où  $a(t) = a$  est constante.

La vitesse  $v(t)$  doit être une primitive de la constante  $a$ . Il est facile de voir que  $v(t) = at$  est une primitive de  $a$ . Par le corollaire 82(bis),

$$v(t) = at + C_1 \quad (8.36)$$

pour une certaine constante  $C_1$ . Afin de fixer  $C_1$ , il faut faire appel à la physique : d'après la formule (8.36), la vitesse initiale est  $v(0) = C_1$ . Donc il faut identifier  $C_1$  à la vitesse initiale :  $C_1 = v_0$ . Nous avons donc déjà obtenu que

$$v(t) = at + v_0. \quad (8.37)$$

Afin de trouver  $x(t)$ , il faut trouver une primitive de  $v(t)$ . Il n'est pas très difficile de voir que  $at^2/2 + v_0t$  fonctionne, donc il existe une constante  $C_2$  telle que

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + C_2. \quad (8.38)$$

Encore une fois, regardons la condition initiale : la formule donne comme position initiale  $x(0) = C_2$ , et donc nous devons identifier  $C_2$  avec la position initiale  $x_0$ . En définitive, nous avons bien

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0. \quad (8.39)$$

Cette formule est donc maintenant *démontrée* à partir de la seule définition de la vitesse comme dérivée de la position et de l'accélération comme dérivée de la vitesse.

Remarquons cependant que la preuve complète fut *très* longue. En effet, nous avons utilisé les règles de dérivation 75 et 73, pour la démonstration desquels, les résultats 59 et 58 ont été utiles. Mais nous avons surtout utilisé le corollaire 82(bis) qui repose sur le théorème de Rolle 79, qui lui-même demande le théorème de Borel-Lebesgue 68 dans lequel la notion d'ensemble compact a été cruciale.

### 8.5.2 Interprétation graphique

La distance parcourue  $x(t)$  en un temps  $t$  est la primitive de la vitesse. Nous avons, par ailleurs, vu au point 8.1.3 que l'opération inverse de la dérivée donnait la surface. Pour reprendre les mêmes notations, nous notons  $S_v(t)$  la surface contenue en-dessous de la fonction  $v$  entre 0 et  $x$ . Nous ne serions donc pas étonné que

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0 \quad (8.40)$$

soit la surface en-dessous de la fonction  $v(t) = at + v_0$ . Regardons cela sur la

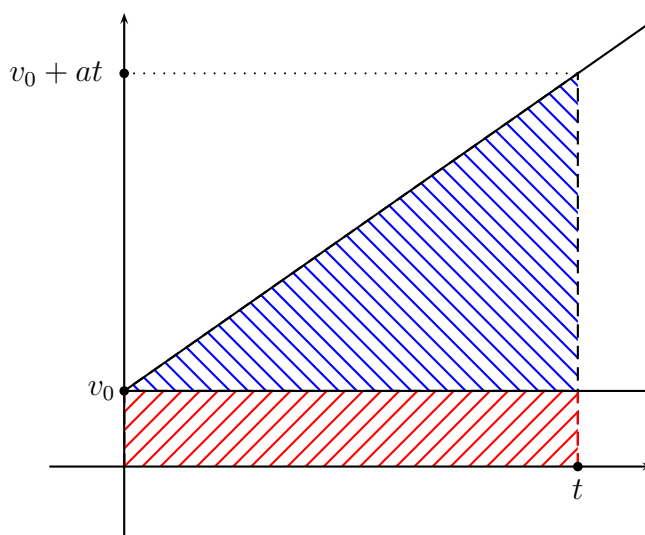


FIG. 8.9 – La surface bleue est un triangle de base  $t$  et de hauteur  $at$ , tandis que le rectangle rouge est de base  $t$  et de hauteur  $v_0$ .

figure 8.9. Nous voyons que la surface totale sous la fonction  $v(t) = at + v_0$  est exactement

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t. \quad (8.41)$$

Cela est un bon début, mais hélas nous ne retrouvons pas le terme «  $+x_0$  » de la formule (8.40). Cela n'est pas tout à fait étonnant parce que au point 8.1.3,

nous n'avons que montré que la surface sous une fonction était *une* primitive de la fonction, mais nous n'avons pas dit *laquelle*. D'après le fameux corollaire [82](#)(bis), la primitive n'est définie qu'à une constante près. Ici, c'est la constante  $x_0$  qu'on a perdue en chemin.

Nous parlerons plus en détail du lien entre les surfaces et les primitives dans la section dédié à l'intégration.



# Chapitre 9

## Mouvement, forces et travail

### 9.1 Système de référence

#### 9.1.1 Besoin d'un système de référence

Lorsqu'on traverse la campagne dans un joli petit train, il n'est pas rare d'observer une vache qui se déplace à 90 km/h. Oui, mais 90 km/h par rapport au train ! par rapport au sol, la vache se balade gentiment. Si je suis dans un TGV qui avance à 300 km/h et que je cours vers l'arrière le plus vite possible, un voyageur me verra passer à 25 km/h tandis qu'un piéton me verra passer à 275 km/h. Quand on donne une vitesse, il est donc indispensable de préciser par rapport à quel objet on la mesure.

Pour les distances, c'est pareil. Dire « Vienne est à 250 km » c'est presque comme demander la différence entre un canard. À 250 km *de quoi* ? Entre un canard *et quoi* ? Il faut prendre un point de repère.

Et en prime, pour désigner la position d'un objet, il faut non seulement donner la distance entre l'objet et le point de référence, mais il faut aussi donner la direction. En effet, si un élève dit qu'il habite à 5 km de l'école, ça n'aide pas tellement pour savoir comment aller chez lui.

Pour réaliser tout cela, on utilise la notion de **système d'axe** dont nous allons dire quelque mots dans les minutes qui viennent.

#### 9.1.2 Référentiel spatial

Sur un terrain de foot, on prend par exemple un coin comme point de repère (qu'on appelle l'**origine du système d'axe**) et les lignes blanches de la longueur et de la largeur du terrain comme axes. Disons qu'on les gradue en mètres. Pour désigner le goal proche du coin choisi, on va dire qu'il est à 20 m dans la direction de l'axe de la largeur, tandis que l'arbitre de ligne sera par exemple à 60 m dans la

direction de la longueur. Pour désigner l'autre goal, c'est plus compliqué. Il faut dire *à la fois* 20 m dans la direction de la largeur et 100 m dans la direction de la longueur.

Si on avait choisi le centre du terrain comme point de repère, on aurait eut un petit problème. Les deux goals sont à 50 m dans la direction de la longueur. Mais pour désigner l'un des deux, il faut dire *dans quel sens*. C'est pour cela qu'on oriente l'axe – c'est à dire qu'on met une flèche dessus. Disons qu'on a orienté l'axe vers le goal de l'équipe *A*. Alors on dit que le goal de *A* est situé à 50 m tandis que le goal de l'équipe *B* est à  $-50$  m. Le signe moins indique qu'il faut parcourir la distance dans le sens inverse de celui de la flèche placé sur l'axe.

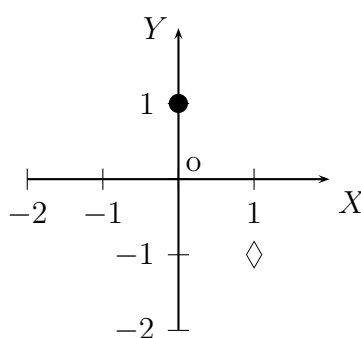


FIG. 9.1 – Un système d'axe

Un système d'axe induit des coordonnées. Sur la figure 9.1, le gros point noir est à la coordonnée  $(0, 1)$  tandis que le diamant est en  $(1, -1)$ . Traditionnellement on désigne l'origine des axes par la lettre « o ».

### Exercice 35.

En t'inspirant de ce qui a été dit, dessines une carte sur laquelle se trouve (approximativement) Bruxelles, Paris, Berlin, Londres et Genève

- Dessiner un repère à deux dimensions,
- choisir les unités et les échelles,
- donner sous la forme de couples  $(x, y)$  la position des 5 villes
- placer les points  $(1, 1)$ ,  $(-3, 2)$
- si tu connais le théorème de Pythagore, tu peux calculer la distance entre ces points et l'origine.



### 9.1.3 Combien de dimensions ?

#### Une dimension

Lorsqu'on traite un mouvement se déroulant sur une droite, on dit que le problème a *une dimension*. C'est le cas d'un train qui se déplace entre deux villes. La caractéristique d'un mouvement à une dimension est qu'il faut un seul nombre pour donner la position. Dans l'exemple du train : la distance entre le train et la ville de départ suffit.

Un mouvement à une dimension est un mouvement à deux paramètres : un pour la position et un pour la vitesse.

#### Deux dimensions

Lorsqu'un mouvement se passe dans un plan, on dit que le problème a *deux dimensions*. C'est le cas d'un joueur sur un terrain de foot. On a alors besoin de deux nombres pour donner la position : une abscisse et une ordonnée.

Un mouvement à deux dimensions est un mouvement à quatre paramètres : deux pour la position et deux pour la vitesse (qui est un vecteur à deux composantes).

#### Trois dimensions

Un mouvement se déroulant dans l'espace est un mouvement à *trois dimensions*. C'est le cas d'un avion pour lequel on a besoin de trois nombres pour donner sa position : longitude, latitude et altitude.

Un mouvement à trois dimensions est un mouvement à six paramètres : trois pour la position et trois pour la vitesse (qui est un vecteur à trois composantes).

### 9.1.4 Référentiel temporel

Qu'est-ce que le temps ? Voici une question qui a inspiré de looooogues pages de réflexions plus ou moins profondes. On va retenir cette définition simple et indémodable qu'Einstein a donnée : **le temps** c'est ce qu'on mesure avec *une horloge*.

Une **repère temporel** est le choix (arbitraire) d'un instant de référence à partir duquel on va compter les durées. Le repère temporel pour un film est l'instant où les lampes de la salle de cinéma s'éteignent. Quand on dit « à la quinzième minute du film », on veut dire « quinze minutes après que les lumières se soient éteintes ». Il y a des repères plus tordus comme le départ d'une fusée : quand on dit « à la troisième minute du vol », cela signifie « trois minutes après le décollage », et quand on est dans le compte à rebours *avant* le décollage, on compte avec des nombres *négatifs* : on dit « jour J-1 ».

## 9.2 Mouvement et repos

### 9.2.1 Définitions

Un point matériel est **en mouvement** par rapport à un référentiel spatial donné si sa position *varie* au cours du temps. Un point matériel est **au repos** par rapport à un référentiel spatial donné si sa position *reste constante* au cours du temps.

Il est important de comprendre que le concept de repos ou de mouvement n'est pas « absolu » mais *relatif* à un système de référence donné. On a envie de dire d'un enfant bien sage qui ne cours pas dans tout les sens et qui est gentiment assis en train de lire qu'il est au repos. Il n'en reste pas moins qu'il bouge à une vitesse de 10758 km/h autour du Soleil ! Dire qu'il ne bouge pas est tout relatif.

#### Exemple 83.

Si on fixe un repère spatial sur le quai d'une gare, le train qui passe sera bel et bien en mouvement. Mais si je fixe mon repère sur la banquette sur laquelle je suis assis, eh bien je dirai que les autres voyageurs sont au repos. Le type qui dort devant moi a beau avancer à 90 km/h par rapport au quai de la gare, il ne s'éloigne pas de moi ; pas plus que du roman d'Émile Zola que j'ai dans les mains !

Voir aussi les exercices 36 et 37.

### Trajectoire d'un point matériel

La **trajectoire** d'un objet qui bouge est la « trace » que l'objet laisse dans l'espace pendant son mouvement. C'est l'ensemble de tous les points par lesquels l'objet est passé durant son mouvement.

#### Exemple 84.

La trajectoire d'un cycliste au tour de France est une ligne fermée qui part de Paris et finit à Paris. En général cette trajectoire ne passe que par des routes. De temps en temps certains cyclistes empruntent une trajectoire qui passe par un champ (Amstrong 2004).

La trajectoire d'une balle de volley servie est une belle courbe allongée qui part du serveur et termine idéalement par terre de l'autre côté du filet. Sinon, la trajectoire suivra un trajet un peu compliqué pour passer dans les mains de trois joueurs avant de repasser le filet dans l'autre sens.

La figure 9.2 montre la trajectoire d'un boulet de canon tiré du sol en  $A$  qui suit une belle parabole (sommet en  $S$ ) pour toucher la terre en  $B$  et s'enfoncer dans le sol jusqu'à  $C$ . Vu que l'origine des axes se trouve au niveau du sol et que

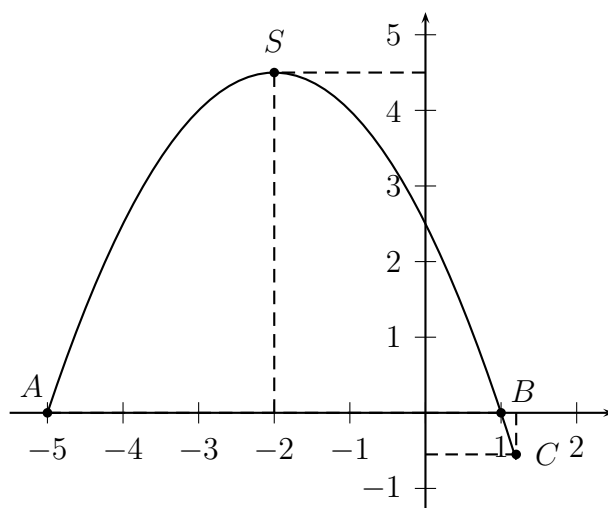


FIG. 9.2 – Trajectoire balistique d'un boulet de canon

l'axe est dirigé vers le haut, le point  $S$  a une composante verticale positive tandis que le point  $C$  a une coordonnée verticale négative.

### 9.2.2 Vecteur déplacement, vecteur position

La figure 9.3 montre la trajectoire d'un point au cours du temps. La position  $P(0)$  est la position à l'instant initial. Ce n'est pas spécialement le début du mouvement, c'est juste la position au moment où on a décidé de mettre le chrono à zéro. Pas plus que la Révolution française ne marque le début de l'histoire du monde malgré que les révolutionnaires aient décidés de faire commencer leur calendrier à ce moment (dans ce calendrier, nous sommes en l'an CCXVI).

Le point  $P(1)$  est l'endroit où est l'objet au temps 1, etc...

Les vecteurs  $\overrightarrow{OP(0)}$ ,  $\overrightarrow{OP(1)}$ ,  $\overrightarrow{OP(2)}$ ,  $\overrightarrow{OP(t)}$ , sont des *vecteurs position*, tandis que le vecteur  $\overrightarrow{P(1)P(t)}$  est un *vecteur déplacement*.

Voir l'exercice 38, 39.

### 9.2.3 Exercices

#### Exercice 36.

Un train se déplace entre deux garres. Vrai ou faux :

- le train est en mouvement par rapport au village qu'il traverse,
- le train est en mouvement par rapport aux sièges,
- le train est en mouvement par rapport aux voyageurs assis.
- le train est en mouvement par rapport aux voyageurs qui marchent.

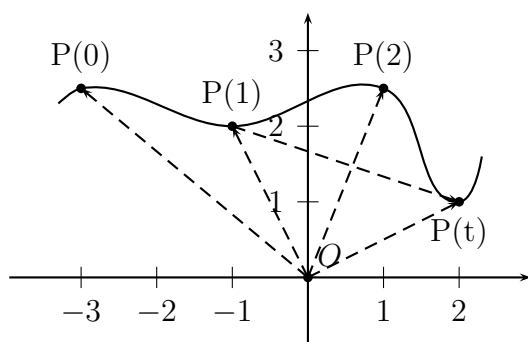


FIG. 9.3 – Vecteur position et déplacement

**Correction de l'exercice 36**

- a. C'est VRAI.
- b. C'est FAUX.
- c. C'est FAUX.
- d. C'est VRAI.

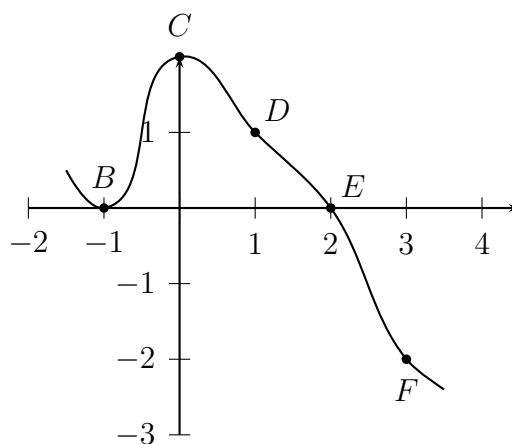


FIG. 9.4 – Petit exercice.

**Exercice 37.**

Un train traverse une gare lorsque un voyageur laisse tomber son gsm.

- a. Vu du voisin assis dans le train, quelle sera la forme de la trajectoire (droite, courbe, vers gauche, la droite?).

- b. Une personne assise sur la quai observe, lui aussi, la chute du GSM. Quelle est la forme de la trajectoire du GSM que cette personne va observer ?
- c. Quand tu auras trouvé que la réponse est  $y = \frac{g}{2v_0}x^2$ , fais une étude de cette fonction (comme au cours de math : continuité, dérivée première et seconde et tout ça) et interprète physiquement les résultats.

### Correction de l'exercice 37

- a. Il suffit de prendre un train pour se rendre compte que la trajectoire observée par le voisin est verticale.
- b. La seconde question est plus subtile. En effet, le GSM continue le mouvement horizontal que le train lui a communiqué, c'est à dire un mouvement uniforme. Mais en même temps, il effectue un mouvement en chute libre dans la direction verticale. En équation paramétriques on a donc  $x(t) = v_0 t$  et  $y(t) = \frac{gt^2}{2}$ . La conversion en coordonnées cartésiennes donne une parabole, c'est à dire une équation  $y = f(x)$  du second degré.

### Exercice 38.

Deux villes  $A$  et  $B$  sont distantes de 512 km. Un pèlerin va de  $A$  vers  $B$  en ligne droite. Arrivé en  $B$ , décide de rentrer chez lui et refait le trajet en sens inverse.

- a. Quel déplacement aura fait le pèlerin durant son long voyage ?
- b. Quelle distance aura-t-il marché ?

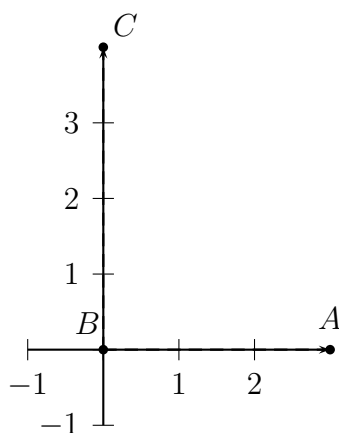


FIG. 9.5 – Itinéraire d'un limacon

### Exercice 39.

Un limacon marche en ligne droite de la salade qu'il vient de manger en  $A$  vers le pied du muret du potager en  $B$ . Ensuite, il monte jusqu'au sommet du muret en  $C$ .

- a. Quelle est la valeur du déplacement ?
- b. Quelle est la distance qu'a parcourue<sup>1</sup> notre ami gastéropode ?

Les axes de la figure 9.5 sont gradués en mètres. Donnez les réponses en centimètres, kilomètres et millimètres. Si le cœur vous en dit, donnez aussi les réponses en unités de longueur de la taille de votre pied et en mégaparsec.

### 9.3 Vitesse moyenne et instantanée

Lorsqu'un sportif cours le 100 mètres en 11 secondes, on dit qu'il le fait avec une *vitesse moyenne* de  $100/11 = 9.09$  mètres par secondes. Mais, le sportif partant à l'arrêt, il est évident qu'il n'a pas couru à vitesse constante : il a d'abord accéléré. Afin de décrire correctement le mouvement de la course, la vitesse moyenne de  $9.09 \text{ m/s}$  est intéressante, mais ce n'est pas tout. Il faudrait aussi savoir la vitesse après une seconde, après deux secondes, ...

La définition de la **vitesse moyenne** d'un mobile qui s'est déplacé d'une distance  $d$  en un temps  $\Delta t$  est :

$$v_{\text{moy}} = \frac{d}{\Delta t}. \quad (9.1)$$

Cela est une notion familière.

Si on veut savoir la vitesse du sportif exactement une seconde après le départ de la course, il faut être plus subtil. Une bonne idée est de mesurer la distance qu'il a parcourue entre 0.9 secondes et 1.1 secondes, et de diviser cette distance par 0.2. Ainsi on a la vitesse moyenne du sportif dans un intervalle de temps de 0.2 secondes autour du moment qui nous intéresse. Nous pouvons espérer que la vitesse du coureur n'ait pas trop variée pendant ce laps de temps, et donc on peut dire que cela est sa vitesse.

Pour quelqu'un qui cours, 0.2 secondes, c'est satisfaisant. Mais si on étudie une balle de fusil qui sort du canon, en réalité 0.2 secondes c'est énorme ! Il faudra utiliser des intervalles de temps beaucoup plus petit.

Donc, *plus on veut avoir une idée précise de la vitesse, plus il faut la mesurer sur un intervalle court*. D'où l'idée de définir la **vitesse instantanée** d'un mobile au temps  $t_0$  comme la vitesse moyenne du mobile pendant un temps *infinitement court* autour de  $t_0$ .

Si  $x(t)$  est la position du mobile au temps  $t$  ( $x$  est une fonction de  $t$ ), la vitesse moyenne du mobile durant un temps  $\Delta t$  après  $t_0$  est donnée par

$$v_{\text{moy}} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

---

<sup>1</sup>Exercice complémentaire : cet accord est-il correct ? Si oui, pourquoi ?

Le principe de la vitesse instantanée est de voir ce que cela donne lorsque  $\Delta t$  devient très petit. On note cela avec la formule

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

et tu verras au cours de math que c'est exactement la notion de *dérivée*.

### Exemple 85.

Comme exemple très simple, regardons quelle est la vitesse instantanée d'un mobile se déplaçant à vitesse constante  $v$  et partant d'une position initiale  $x_0$ . La position du mobile en fonction du temps est donnée par  $x(t) = x_0 + vt$ . On a donc le calcul suivant :

$$v(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{x_0 + v(t_0 + \Delta t) - (x_0 + vt_0)}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\Delta t} = v$$

Donc quand on a une vitesse constante, la vitesse instantanée est bien la vitesse que l'on connaît.

L'exemple suivant est à lire plus tard.

### Exemple 86.

Prenons un exemple à peine plus compliqué, mais que tu vas bouffer dans ton cours de math jusqu'à plus faim. Quelle est la vitesse instantanée d'un objet en chute libre après deux secondes ?

Tu sais que la distance parcourue en fonction du temps est  $h(t) = gt^2/2$ , donc le calcul à faire est

$$\begin{aligned} v(2) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(2 + \Delta t) - h(2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(2 + \Delta t)^2 - g2^2}{2\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(4 + 4\Delta t + (\Delta t)^2) - 4g}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} g \frac{4\Delta t + \Delta t^2}{2\Delta t}. \end{aligned}$$

Jusqu'ici, nous n'avons rien fait d'autre que remplacer  $h(t)$  par sa valeur en fonction du temps, appliqué un produit remarquable. Maintenant, nous allons gentiment simplifier<sup>2</sup> par  $\Delta t$ .

$$v(2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} g \frac{4 + \Delta t}{2}.$$

Maintenant on peut s'occuper de cette limite : quand  $\Delta t$  est franchement petit (prends par exemple  $\Delta t = 0.000001$ ), c'est pas lui qui change grand chose à côté du 4. Notre stratégie est donc de « faire comme si<sup>3</sup> »  $\Delta t = 0$ . On fait  $4 + \Delta t = 4$ ,

<sup>2</sup>Les puristes poseront la condition d'existence  $\Delta t \neq 0$ .

<sup>3</sup>Les puristes qui auront posé la condition d'existence doivent se dire que ce qu'on fait pour l'instant est le mal absolu. Ils verront cependant que cette « simplification par zéro » n'es pas totalement fautive.

ce qui est justifié parce qu'on suppose que  $\Delta t$  est aussi petit qu'on veut. En tout cas l'erreur que l'on fait en « oubliant » le  $\Delta t$  n'est pas très grande.

Nous avons donc que

$$v(2) = g \frac{4}{2} = 2g \text{ m/s.}$$

Et heureusement, nous avons retrouvé ce que l'on savait : avec une accélération  $g$ , on a une vitesse  $2g$  après deux secondes.

## 9.4 Accélération moyenne et instantanée

Un TGV part de Bruxelles vers Paris. Pendant un certain temps entre les deux, il a avancé à 300 km/h. Au départ à Bruxelles, le TGV était au repos, puis il a accéléré jusqu'à 300 km/h, il a gardé cette vitesse pendant un certain temps avant de ralentir pour s'arrêter sur le quai de Paris.

Mais le train n'a pas accéléré de façon constante, ne fut-ce que parce que tant qu'il est à l'intérieur de Bruxelles, il ne peut pas faire n'importe quoi ! Si il avance à 300 km/h (= 83,3 m/s) après une demi-heure de trajet (= 1800 s), on dit que son accélération moyenne est de  $83,3/1800 = 0,05 \text{ m/s}^2$ .

On définit l'**accélération moyenne** comme la variation de vitesse divisée par le temps :

$$a_{\text{moy}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Tu remarqueras les unités *a priori* un peu bizarres :  $\text{m/s}^2$ . En effet, les unités d'une vitesse (qui apparaît au numérateur) sont m/s, et celles de l'intervalle de temps (qui est au dénominateur) sont s.

De la même manière que pour déterminer une vitesse à un moment donné de façon précise il fallait considérer des intervalles de temps de plus en plus petit, pour avoir l'**accélération instantanée**, il faut mesurer la variation de vitesse sur des intervalles de temps infiniment courts :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad (9.2)$$

si  $v(t)$  est la vitesse du mobile au temps  $t$ .

En résumé, on peut dire que l'accélération est à la vitesse ce que la vitesse est à la position.

## 9.5 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

On dit qu'un mobile effectue un **mouvement rectiligne uniforme** quand il se déplace en ligne droite à vitesse constante. La formule qui donne la position en



fonction du temps d'un objet se déplaçant à la vitesse  $v$  est simple :

$$x(t) = x_0 + vt. \quad (9.3)$$

En effet, la définition de la vitesse au temps  $t$  est que

$$v(t) = \frac{x(t) - x_0}{t}.$$

Comme la vitesse est constante,  $v(t) = v$ , et en isolant  $x(t)$  dans cette équation, on trouve la formule annoncée.

### 9.5.1 Exercices

#### Exercice 40.

Supposons que le boulevard de la Plaine soit long de 800 m. Un cycliste le descend à 30 km/h tandis qu'une voiture arrive à<sup>4</sup> 50 km/h et le rejoint à la moitié du boulevard. À ce moment, il a l'idée de génie de klaxonner<sup>5</sup>.

Calculer combien de temps on peut gagner en roulant à 50 km/h plutôt que 30 sur la distance qu'il restait.

#### Correction de l'exercice 40

Nous calculons séparément le temps qu'il faut pour parcourir 400 m à 50 km/h et à 30. La formule qui donne le temps qu'il faut pour parcourir la distance  $\Delta x$  à la vitesse  $v$  est donnée par

$$t = \frac{\Delta x}{v}. \quad (9.4)$$

Le calcul à faire est donc

$$\frac{\Delta x}{v_1} - \frac{\Delta x}{v_2} = \Delta x \left( \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} \right) \quad (9.5)$$

où  $\Delta x = 400$  m,  $v_1 = 13.9$  m/s et  $v_2 = 8.3$  m/s. La réponse est 19 s.

En supposant qu'il ait de la chance avec les feux au bas de la descente du **boulevard de la Plaine**, et en supposant qu'il reste à du 50 sur toute la longueur (càd sans compter le fait qu'il doive faire un virage à 90° pour rentrer sur le boulevard général Jacques), cet automobiliste aurait donc pu gagner vingt secondes.

---

<sup>4</sup>Oui, nous sommes d'accord, c'est un non-sens total d'utiliser son moteur dans une descente. Mais si la personne avait deux sous d'intelligence et de conscience écologique, il ne serait pas en voiture hein ; rien d'étonnant donc.

<sup>5</sup>Malgré qu'il soit interdit de klaxonner en agglomération. Mais encore une fois, si cette personne réfléchissait à ses actes, il ne serait pas en voiture hein ; toujours rien d'étonnant.

**Remarque 87.**

L'auteur de cet exercice précise qu'il est parfaitement conscient qu'il y a une piste cyclable sur toute la longueur de la descente du boulevard de la Plaine. Il y a plusieurs raisons pour lesquelles cette piste ne doit pas être utilisée. L'une d'entre elles est qu'il y a régulièrement des bouteilles en verre cassées. Quant aux autres raisons ... je les laisse à la sagacité du lecteur et à son sens de l'observation.

Dans le sens de la montée, je conseille de prendre le trottoir du côté des banques.

## 9.6 Mouvement uniformément accéléré (MRUA)

### 9.6.1 Théorie

Nous avons vu ce qu'est l'accélération. Maintenant est venu le moment d'étudier le mouvement d'un objet qui connaît une accélération constante. Un tel mobile a une vitesse qui augmente avec le temps selon la formule

$$v(t) = at + v_0.$$

La définition de la vitesse moyenne entre le moment initial et le moment  $t$  est

$$v_{moy} = \frac{x(t) - x_0}{t}, \quad (9.6)$$

d'où on déduit que  $x(t) = v_{moy}t + x_0$ . Afin de trouver une expression satisfaisante pour  $x(t)$ , nous allons avoir besoin d'un petit calcul contenant deux subtilités. Ouvre grand tes neurones, ça ne va pas être facile ! D'abord, on sait que la vitesse moyenne peut également être calculée par la formule

$$v_{moy} = \frac{v(t) + v_0}{2}.$$

Cette formule est vraie parce que l'accélération est constante. En remettant cette forme pour  $v_{moy}$  dans la formule (9.6) on trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(v(t) + v_0)t + x_0 \\ &= \frac{1}{2}(v(t) - v_0 + v_0 + v_0)t + x_0. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Pour obtenir la deuxième ligne, on a ajouté  $+v_0 - v_0$  dans la parenthèse. C'est comme si au lieu d'écrire  $7 + 5$ , on avait écrit  $7 - 5 + 5 + 5$ . C'était la première subtilité. En remettant de l'ordre dans les termes,

$$x(t) = \frac{1}{2}(v(t) - v_0)t + \frac{2v_0}{2}t + x_0.$$

Deuxième subtilité : à côté de la première parenthèse, on remplace  $t \rightarrow \frac{t^2}{t}$ . Là encore c'est permis parce que ça revient à multiplier par 1. On a donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{v(t) - v_0}{t} \right) t^2 + v_0 t + x_0 \\ &= \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0, \end{aligned}$$

où la seconde ligne est obtenue en utilisant la définition de l'accélération. Il est important de retenir la dernière formule qui donne la position en fonction du temps et de l'accélération dans le cas d'une accélération constante :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0. \quad (9.8)$$

#### Exercice 41.

Un bon sportif de 73 kg cours une distance de 100 m en onze secondes. Quelle est sa vitesse moyenne ? En réalité, il commence la course au repos et accélère.

- Supposons qu'il accélère de façon uniforme durant toute la course. Quelle est cette accélération ?
- Supposons maintenant que son mouvement soit le suivant : il accélère uniformément durant la moitié de la longueur, et puis il continue à vitesse constante. Quelle est cette accélération, combien de temps dure-t-elle ?
- Mêmes questions si le sportif accélère uniformément durant la moitié du *temps* de la course.

#### Comment ? Pourquoi ?

Quelle est l'accélération d'un mobile qui accélère du repos jusqu'à une vitesse  $v$  sur une distance  $d$  ?

Le problème avec cette question est que la fameuse formule du MRUA  $d = at^2/2$  ne lie pas directement la vitesse à l'accélération. La vitesse, elle, est donnée par  $v = at$ . La subtilité est d'écrire le système

$$\begin{cases} v = at & (9.9a) \\ d = \frac{1}{2}at^2 & (9.9b) \end{cases}$$

D'après la question, les paramètres  $v$  et  $d$  sont donnés. Ces deux équations contiennent donc les inconnues  $t$  et  $a$ . Deux équations pour deux inconnues, ça doit être jouable. Nous pouvons isoler  $t$  dans la première équation :  $t = v/a$ , et substituer cette valeur de  $t$  dans la seconde équation :

$$d = \frac{1}{2}a \left( \frac{v}{a} \right)^2. \quad (9.10)$$

Nous pouvons extraire  $a$  de cette expression :

$$a = \frac{v^2}{2d}. \quad (9.11)$$

**Exercice 42.**

Un **cycliste** remarque qu'il accélère de 0 à 18 m/s sur une distance de 10 m. Quelle est son accélération ?

À quelle vitesse arrivera ce cycliste si il maintient la même accélération pendant 15 m.

**Exercice 43.**

Un train de masse  $m$ , initialement au repos, subit une accélération  $a$ . À quelle vitesse avance-t-il après qu'il ait parcouru une distance  $d$  ?

Maintenant, c'est plus tard, donc tu peux lire l'exemple 86 de la page 167.

### 9.6.2 La chute libre

Il y a une chose que tu ne sais peut être pas encore, mais que tu apprendra certainement, c'est que quand un objet tombe, il accélère avec une accélération de 9.81 m/s<sup>2</sup>. Disons le plus clairement : quand un objet est en chute libre (sur Terre), il subit une accélération verticale de 9.81 m/s<sup>2</sup>. À partir de maintenant, nous noterons  $g$  cette accélération.

Prends un objet en main, et lâche le. Au départ, mettons qu'il soit à un mètre du sol et il a une vitesse nulle (parce que tu le tenais). Étant donné que l'objet attrape une accélération  $g$ , la distance qu'il parcourt en un temps  $t$  est

$$\frac{gt^2}{2}.$$

Donc après un temps  $t$ , l'objet sera à un mètre moins cette distance du sol (parce qu'il tombe). Si maintenant on note  $h_0$  la hauteur d'où tu lâche l'objet, sa hauteur en fonction du temps sera

$$h(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Insistons sur un point. J'ai dit qu'un objet en chute libre aura *toujours* une accélération  $g$ . Oui, mais un objet plus lourd ne tombera pas un peu plus vite ? Non ! Fais l'expérience en laissant tomber une balle de basket et un stylo l'un à côté de l'autre ; tu verras qu'ils tombent ensemble.

**Loi numéro 3.**

*Tous les objets tombent avec la même accélération, indépendamment de leur masse.*

Oui, mais une feuille de papier tombe quand même moins vite qu'une enclume ! Cette loi n'est donc pas tout à fait exacte. Qu'est-ce qui se passe ?

### 9.6.3 Chute libre et frottements

Chiffonne la feuille de papier en boule, et tu verras que maintenant, elle tombe déjà presque à la même vitesse que la balle de basket.

Ce qui fait la différence entre une feuille de papier, une boulette de papier et une balle de basket, c'est le frottement de l'air. C'est ça qui ralentit fort la feuille, qui ralentit un peu la boulette et qui ne ralentit presque pas la balle de basket. Nous pouvons maintenant préciser la loi :

#### Loi numéro 4.

*Lorsqu'on peut négliger les frottements, tous les objets tombent avec la même accélération (et donc la même vitesse) quelle que soit leur masse. Cette accélération vaut  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  sur Terre.*

Remarque : cette valeur varie un peu d'un endroit à l'autre de la Terre, mais varie *énormément* d'une planète à l'autre.

#### Exercice 44.

Combien de temps il faut à une pierre de 5 kg en chute libre pour parcourir un Marathon (52 km) vertical ? Même question pour une pierre de 10 kg.

#### Correction de l'exercice 44

D'abord, comme dans tout problème ne faisant entrer que la gravitation en ligne de compte, la réponse ne dépend pas de la masse. La pierre de 5 kg et celle de 10 kg prendront un temps identique pour parcourir leur trajet vertical en chute libre.

En chute libre, la distance parcourue en un temps  $t$  est donné par la formule (9.8) dans laquelle il faut remplacer  $a$  par  $g$ . Dans le cas de la pierre en chute libre, nous supposons que la vitesse initiale est nulle, de telle manière à ce qu'il faille résoudre l'équation (pour  $t$ )

$$d = \frac{gt^2}{2}$$

avec  $d = 52 \text{ km} = 52000 \text{ m}$ . La solution est donnée par

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 103 \text{ s.}$$

Soit environ une minute et 45 secondes. Inutile de préciser que ce temps bat de très loin les meilleurs sportifs !

## 9.7 Les forces

Il n'y a pas moyen de comprendre les compositions de forces sans avoir un peu joué à GravityWars<sup>6</sup>

### 9.7.1 Quelques définitions

Une **force** *n'est pas* déterminée par sa seule intensité. Une force doit se penser comme une flèche attachée au point, c'est à dire à un *vecteur*. Il est important de garder en tête que les vecteurs ou les forces ne sont que des flèches. Mathématiquement, c'est donc juste donné par deux points : le point de départ de la flèche et son point d'arrivée, voir figure 9.6.

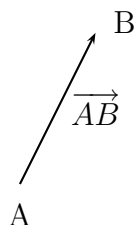


FIG. 9.6 – Un vecteur ou une force, c'est juste deux points. Le premier,  $A$ , est le point d'application tandis que le second,  $B$ , détermine à la fois le sens et la direction et l'intensité de la force ; cette dernière n'est autre que la longueur de la flèche, c'est à dire la distance entre  $A$  et  $B$ .

Une force se mesure à son effet : elle accélère le corps auquel elle est appliquée. Plus grande est la force, plus grande est l'accélération ; mais plus l'objet est lourd, moins il accélère. Ceci justifie la formule

$$a = \frac{F}{m}$$

que l'on notera souvent  $F = ma$ . Tu peux retenir qu'une force est grosso-moddo l'effort qu'on donne pour faire bouger un objet.

---

<sup>6</sup>`sudo apt-get install gravitywars`

Si tu finis le second niveau, tu seras en mesure de comprendre les compositions de forces, le tir balistique, ainsi que les décompositions de vitesses et de forces en composantes horizontales et verticales.

**Exemple 88.**

La force que la terre exerce sur une enclume déposée par terre est appelée **poids** de l'enclume. L'origine de cette force est la gravitation.

Une force se voit souvent à des effets indirects comme

- une déformation du corps
- l'échauffement du corps
- la modification de la vitesse du corps
- etc.

**Exercice 45.**

Donnez quelque exemples de ce qu'on pourrait mettre à la place du *et caetera*.

Il est cependant important de remarquer que d'un point de vue microscopique, une force a un seul effet possible : accélérer des particules. Échauffer un corps correspond bien à accélérer les molécules qui le compose. L'exemple de la déformation est plus compliqué, tu peux en discuter avec ton professeur. Disons simplement qu'une force peut stabiliser un objet qui autrement aurait accéléré.

### 9.7.2 Le dynamomètre

Le **dynamomètre**, est un appareil qui permet de mesurer une force. Le principe est simple : il s'agit d'un ressort sur lequel on applique la force. Bien entendu le ressort s'allonge. Mais on sait que l'allongement du ressort est proportionnelle à la force. Donc la première fois on met une force de 1 N, on note l'allongement (mettons 3 cm). Ensuite si on applique une force qui allonge le ressort de 7 cm, on saura que la force vaut  $7/3 = 3.5$  N.

### 9.7.3 Masse et poids

Dans la vie courante, on confond souvent la masse et le poids, par exemple en disant que « mon poids est 67 kg ». Cela est complètement faux parce que des kg, c'est une masse et non un poids. Bon alors ; c'est quoi, la différence ?

#### La masse

La masse d'un objet représente la quantité de matière qui constitue l'objet. La quantité de matière ne varie pas avec l'endroit où l'on se trouve dans l'univers. La masse est donc une propriété intrinsèque d'un objet ; elle est invariante.

L'unité principale de masse est le kilogramme (kg), et se mesure avec une balance.

## Le poids

Le poids d'un objet est la force de gravitation qui s'exerce sur l'objet. Le poids est une force qui varie donc en fonction de l'endroit où l'on se trouve dans l'univers parce que le champ de gravitation n'est pas partout le même ; nous en reparlerons au point 10.3.5. Sur Terre, nous subissons la gravité de la Terre ; sur la Lune, on a la gravité de la Lune ; quand on est dans l'espace, on n'a plus du tout de gravité,...

L'unité principale de poids est le newton (N), et se mesure à l'aide d'un dynamomètre.

Pour calculer le poids, nous utilisons la formule suivante :

$$P = mg$$

où les symboles signifient ceci :

- $P$ , le poids exprimé en newton,
- $m$ , la masse exprimée en kilogramme
- $g$ , la gravité (l'accélération ou l'intensité de la pesanteur) exprimée en  $\text{m/s}^2$ .  
Ce  $g$  est une propriété de l'endroit où l'on se trouve. Il ne sera pas le même sur Terre ou sur la Lune, voir tableau 9.1

Pourquoi, dans la vie de tous les jours, on peut se permettre de confondre le poids et la masse ? Parce que la vie de tous les jours se passe sur Terre. Or sur Terre, on a partout la même gravitation ; du coup *tant qu'on reste sur Terre*, le poids est aussi un invariant<sup>7</sup>.

Astre	Terre	Lune	Mercure	Vénus	Mars	Jupiter	Saturne
$g$ (N/kg)	9,8	1,6	2,9	8,3	3,6	26	11,5

TAB. 9.1 – La valeur de la gravitation sur quelques planètes

## 9.8 Les lois de Newton

Les lois de Newton contiennent, en trois énoncés, l'ensemble de la mécanique moderne. La *mécanique selon Newton* est parue en 1687 et a dû attendre la fin du dix-neuvième siècle pour que les physiciens commencent à avoir envie de la revoir parce que l'électromagnétisme ainsi que l'intérieur des atomes répondent à des lois plus compliquées. Quoi qu'il en soit, les lois simples de Newton permettent d'expliquer des tonnes de phénomènes et feront l'objet de toute notre attention dans ce cours.

La mécanique de Newton s'exprime en trois lois à partir desquelles on peut déduire tout le reste.

---

<sup>7</sup>Cela n'est même pas tout à fait vrai si on tient compte de la non-sphéricité de la Terre et d'autres joyeusetés du genre.



### 9.8.1 Première loi : inertie

#### Énoncé et exemples

##### Loi numéro 1.

*Lorsque que la somme des forces agissant sur un objet est nulle, l'objet sur un mouvement rectiligne uniforme.*

Autrement dit : derrière tout changement de vitesse (y compris de direction), se cache une force qui agit.

Sous forme mathématique moderne, le premier principe s'énonce avec une petite formule :

$$\text{MRU} \iff \sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0, \quad (9.12)$$

c'est à dire qu'on a un MRU si et seulement si la somme des forces externes s'appliquant à l'objet est nulle.

Il est difficile de donner des exemples de ce principe parce qu'il y a des forces partout ; sur Terre il y a au moins toujours la gravitation ou les frottements de l'air. Nous n'allons donc pas donner beaucoup d'exemples de mobiles qui suivent un MRU, mais nous allons surtout faire le contraire : des exemples de mobiles ne suivant pas de MRU sous l'action d'une force.

##### Exemple 89.

Le seul exemple que je connaisse de MRU est le cas tout bête de l'enclume posée sur le sol. Elle ne bouge pas, et ne va pas se mettre à bouger spontanément. Question force, elle est soumise à la gravitation qui la tire vers le bas, et à la réaction du sol qui la pousse vers le haut avec une intensité exactement égale à celle de la gravité. La somme des deux forces est donc nulle et donc l'enclume ne bouge pas.

##### Exemple 90.

Tu laisse tomber une pomme ; elle accélère vers le sol avant de s'y écraser (et donc de s'y arrêter). Dans la phase de chute, la pomme est soumise à la gravitation qui la fait accélérer vers le bas. Au moment d'entrer en contact avec le sol, les molécules qui forment le sol, qui sont très soudées entre elles et qui n'ont pas envie de laisser entrer la pomme, exercent une force énorme sur la pomme pour l'arrêter net (en une fraction de seconde).

##### Exemple 91.

Un cycliste avance à vitesse constante dans une montée. Dans ce cas, il y a au moins trois forces : la gravitation qui tire vers le bas, les frottements du pneu sur la route qui tirent vers l'arrière (qui freinent le vélo) et les mollets du cycliste qui tirent vers l'avant (et donc aussi un peu vers le haut).

Quand ces trois forces se compensent exactement, le vélo monte à vitesse constante. Si la gravitation est la plus forte, le vélo va perdre de la vitesse et finir par

descendre. Et si c'est le cycliste le plus fort, le vélo va même accélérer.

### Le problème de ce principe

Dépose une balle dans un train à l'arrêt. La balle ne bouge pas. Très bien. Mais quand le train va accélérer, la balle va partir vers l'arrière, alors aucune force apparente ne l'a poussée. Cela ne met pas à mal le principe d'inertie. En effet, la balle reste au repos *par rapport au sol* ; c'est le train qui part et la balle qui reste sur place. C'est à force de frotter contre le sol du train ou de se cogner contre un siège que la balle va prendre la vitesse du train.

On appelle **repère d'inertie** un repère dans lequel le principe d'inertie est vrai. Manifestement, un train qui accélère n'est pas un repère d'inertie. L'exemple de la balle dans le train suggère que la Terre soit notre repère d'inertie.

Pas de bol, quand on regarde les mouvements des nuages, on remarque que — dans l'hémisphère nord — ils sont toujours déviés vers leur droite sans qu'aucune force apparente ne s'applique. C'est la **force de Coriolis**. Encore une fois, cela n'est pas en contradiction avec le principe d'inertie : en fait c'est la Terre qui tourne en-dessous des nuages qui font croire que les nuages tournent.

On ne peut donc pas prendre la Terre comme repère fixe à partir duquel appliquer le principe d'inertie. On prendrait le Soleil (ça commence à être éloigné) ? Même pas : le Soleil tourne autour du centre de la galaxie. Et puis, la galaxie entière est en mouvement accéléré vers la galaxie d'Andromède ...

Sous son aspect anodin, le principe d'inertie pose une des questions les plus fondamentales de la physique : existe-t-il des référentiels d'inertie ? Le problème du principe d'inertie est que tout bouge dans l'univers, et rien ne suit de MRU !

Il faudra attendre le début du vingtième siècle, l'année 1915, pour que les physiciens se résignent à abandonner le principe d'inertie lorsque **Einstein** énonce sa **relativité générale**, géniale théorie de la gravitation et de la géométrie de l'espace-temps.

Dans le cadre de ce cours, nous allons considérer la Terre comme immobile, c'est à dire comme un repère d'inertie.

## 9.8.2 Deuxième loi (loi fondamentale de la dynamique)

La seconde loi complète la première. La première dit ce qu'il se passe quand il n'y a pas de forces (MRU). Lorsqu'il y a une force, la seconde loi dit qu'on a une accélération.

### Loi numéro 2.

*L'accélération est proportionnelle à la somme des forces extérieures, et le coefficient*

de proportionnalité est la masse :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m \vec{a} \quad (9.13)$$

Il faut remarquer que cette égalité est une égalité *vectorielle*. Cela a plusieurs conséquences :

- l'accélération suit la force résultante non seulement en norme, mais également en direction et en sens,
- si plusieurs forces tirent un objet selon des sens différents, il est possible que certaines forces s'annulent tandis que d'autres s'additionnent.

### 9.8.3 Troisième loi : action et réaction

Lorsqu'on dépose un ballon sur le sol, le ballon ne s'enfonce pas dans le sol, malgré que le ballon soit attiré vers le bas par la pesanteur. Il se fait que le sol exerce une force *de réaction* sur le ballon. Cela est un cas particulier d'une règle très générale : chaque fois qu'on a une force qui s'applique, on en a une autre en réaction.

#### Loi numéro 3.

*Si un corps A exerce une force  $\vec{F}$  sur le corps B, alors le corps B exerce une force  $-\vec{F}$  sur A. La première force est appelée action et la seconde réaction. Si on note  $\vec{R}$  la force de réaction, on a mathématiquement :*

$$\vec{F} = -\vec{R}. \quad (9.14)$$

#### Exemple 92.

Parfois ces deux forces s'annulent. Par exemple, quand une cruche est posée sur une table, elle subit **deux** forces.

- son poids dirigé vers le bas (qui fait une action sur la table)
- la réaction de la table, dirigée vers le haut.

Ces deux forces s'annulent parce qu'elle s'appliquent toutes les deux à la boule. La preuve : la cruche ne bouge pas, elle ne s'enfonce pas dans la table, et ne s'envole pas toute seule.

#### Exemple 93.

Parfois les deux ne s'annulent pas. Au moment où on lâche un objet, l'objet subit *une seule force* : son poids, l'action de la terre sur l'objet. La réaction de l'objet sur la terre s'applique à la terre. Par conséquent, l'objet tombe.

Dans ce cas-ci, ce qu'il faut bien remarquer c'est que l'action et la réaction ne s'appliquent pas au même point. Elles ne peuvent donc pas s'annuler.

Ce second exemple demande une précision sur l'égalité (9.14). En effet si on dit que pour être égales, deux forces doivent avoir le même point d'application, alors cette égalité est fausse. En réalité, l'égalité (9.14) est une égalité de *vecteurs libres*, c'est à dire une égalité de vecteurs « sauf peut-être de leur point d'application ».

## 9.9 Le ressort

## 9.10 Énergie

### 9.10.1 Avertissement

La façon dont l'énergie est présentée ici est *très* différente de la façon usuelle. J'ai essayé de mettre la conservation de l'énergie au centre de l'étude, et je prouve que d'une certaine manière, la formule

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

est la seule combinaison possible de  $h$  et  $v$  qui soit indépendante du temps pour un objet qui tombe. La preuve n'est pas simple parce qu'elle est longue.

Par contre, cela demande une *bonne* connaissance de la dynamique des forces. Il est inutile d'espérer comprendre du premier coup tout le raisonnement ; il faut le lire une première fois, faire 1000 exercices, puis le relire et recommencer.

### 9.10.2 De la notion d'énergie

Si l'on isole complètement une casserole remplie d'eau du monde extérieur, on ne peut pas s'attendre à ce qu'elle se mette à bouillir<sup>8</sup>. Une pierre déposée au sol ne va pas commencer à monter vers le ciel sans aide extérieure. Si un météorite se ballade dans le vide, il continue en ligne droite à vitesse constante jusqu'au moment où il percute quelque chose. On peut multiplier les exemples : il y a des tas de choses qu'un objet ne va pas faire sans apport extérieur.

Dans toutes ces situations, il y a quelque chose qui se conserve du fait que le système est isolé : la température de l'eau, la hauteur de la pierre, la vitesse de la météorite. Associée à ce quelque chose qui est conservé, on définit une grandeur qu'on appelle l'**énergie** du système.

---

<sup>8</sup>Il faut remarquer que l'eau ne va pas se refroidir non plus : quand de l'eau chaude se refroidit, c'est qu'elle transmet une partie de sa chaleur à l'air ambiant. Donc si la casserole est parfaitement bien isolée, elle ne changera pas de température du tout.

**Définition 94.**

*L'énergie d'un système isolé est ce qui est conservé du fait qu'il ne subit pas de forces.*

En voilà une définition bien mystérieuse. Nous allons voir dans les pages à venir que cette définition est suffisante pour définir une grandeur physique très intéressante.

Un principe fondamental en physique est la **conservation de l'énergie** : les différents formes d'énergies peuvent se transformer les unes en les autres<sup>9</sup>, mais aucune énergie ne se crée ni disparaît. C'est à dire que si une énergie a l'air de disparaître quelque part, c'est qu'elle s'est transformée. Il est *obligatoire* de retrouver *exactement* la même quantité d'énergie quelque part d'autre.

**9.10.3 Valeur de l'énergie****Position du problème**

La figure 9.7 montre une masse  $M$  qui tombe en tirant un chariot de masse  $m$ . Le système chariot+masse+Terre est un système isolé, et donc son énergie est conservée. Mais qu'est-ce que cette énergie? Pour répondre à la question, nous allons écrire toutes les variables qui décrivent le système et essayer d'en trouver une combinaison qui ne dépend pas du temps.

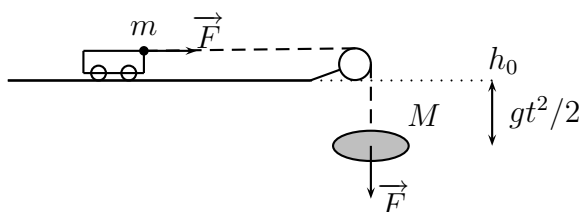


FIG. 9.7 – Expérience de pensée d'une masse qui tire un chariot en tombant.

La vitesse et le déplacement du chariot et de la masse sont identiques, il n'y a donc que deux variables pour décrire le système (en plus de la constante  $h_0$ ) :  $v(t)$ , la vitesse du chariot au temps  $t$  et  $h(t)$ , la hauteur de la masse qui tombe. Ces quantités sont données par les formules du mouvement accéléré par la force de gravitation s'appliquant à la masse  $M$  mais qui doit tirer  $m$  aussi bien que  $M$ . L'accélération n'est donc pas  $g$ , mais  $a = F/(M + m)$  où  $F = Mg$ . Étant donnée

<sup>9</sup>Les frottements transforment de l'énergie cinétique en chaleur par exemple.

cette accélération, les deux variables du problème sont

$$h(t) = h_0 - \frac{at^2}{2} \quad (9.15a)$$

$$v(t) = at. \quad (9.15b)$$

### Le petit calcul

Voyons si on peut trouver une quantité conservée ne contenant pas de puissances de  $h$  plus grande que un, c'est à dire pas de  $h^2$  ni  $h^3$  ni autres. On cherche des constantes  $\alpha$  et  $n$  telles que

$$h(t) + \alpha v(t)^n = cst.$$

Dans  $h(t)$ , on a un terme en  $t^2$  qui dépend de  $t$  et qu'il faut faire disparaître. Il doit être compensé par le terme en  $v(t)$  qu'on ajoute. Pour obtenir du  $t^2$  avec  $v(t)$ , il faut prendre  $v(t)^2$ . Donc on cherche  $\alpha$  tel que

$$-\frac{at^2}{2} + \alpha a^2 t^2 = 0.$$

Cela donne  $\alpha = -1/2a$ , et donc la quantité conservée que l'on trouve est  $h + \frac{1}{2a}v^2$ . Si une quantité est conservée, évidemment ses multiples sont aussi conservés. Pour des raisons pratiques, on va écrire l'énergie comme ceci, en remplaçant  $a$  par sa valeur  $a = \frac{F}{m+M}$  :

$$E = Fh + \frac{(m+M)v^2}{2}. \quad (9.16)$$

### Amusement 95.

Petite précision. Nous sommes parti de  $h$ , et nous avons regardé quelle combinaison de  $v$  il fallait ajouter pour trouver quelque chose de conservé. Et si on était parti de  $h^2$ , on aurait pu trouver une autre quantité conservée ? Eh oui : tu peux vérifier que

$$E_2 = gh^2 + hv^2 - \frac{v^4}{4g}$$

est une quantité qui ne dépend pas de  $t$ . Il se fait que cela n'est autre que  $E^2/g$ , et donc ce n'est pas vraiment une nouvelle quantité. Si tu as une grande sœur ou un grand frère qui fait des études un peu poussées en math, tu peux lui demander de prouver qu'avec n'importe quel polynôme en  $h$ , on peut trouver une quantité conservée, mais qu'à tous les coups, ce n'est rien d'autre qu'un polynôme en  $E$ .

Si tu veux une *vraie* démonstration que l'énergie telle qu'on la donne dans l'équation (9.16) est la seule quantité conservée du problème, il te faudra patienter jusqu'en deuxième année d'université en physique ou en mathématique. À ce moment, les outils mathématique que tu auras en main — entre autres les intégrales que tu verras en rétho — seront tellement puissants que tu trouveras que la preuve sera simple.

### 9.10.4 Énergie cinétique et potentielle

Intéressons nous maintenant à l'énergie de la pierre qui tombe. Pour cela, disons que  $m = 0$ , c'est à dire qu'elle ne tire plus le chariot. Son énergie est

$$E = Mgh + \frac{Mv^2}{2} \quad (9.17)$$

parce que  $F = Mg$ . Comme nous l'avions dit plus haut, ceci est une variable d'état, c'est à dire que tout objet de masse  $M$  se trouvant à une hauteur  $h$  avec une vitesse  $v$  possède cette énergie, indépendamment de la manière dont l'objet s'est trouvé dans cette situation. En particulier, l'énergie d'un objet au sol se trouve en posant  $h = 0$ , c'est à dire

$$E_c = \frac{Mv^2}{2}. \quad (9.18)$$

Étant donné que cette énergie n'est que due à la vitesse, on l'appelle **énergie cinétique**. Si un objet se trouve à une hauteur  $h$  sans vitesse, alors son énergie se calcule en posant  $v = 0$  dans la formule (9.17) :

$$E_p = Mgh. \quad (9.19)$$

Cette énergie est dite **énergie potentielle** pour des raisons qui apparaîtront plus tard.

#### Exercice 46.

Un château fort est assiégé, et des ennemis commencent à escalader la muraille haute de 15 m. Pour se défendre, un soldat laisse tomber une pierre de 3 kg du haut de la muraille sur la tête de l'assaillant qui mesure un mètre et 80 centimètres. Quelle sera l'énergie cinétique de la pierre au moment où elle touchera le crâne de l'ennemi ?

Même question si le soldat avait lancé la pierre avec une vitesse initiale de 1 m/s.

#### Correction de l'exercice 46

Le premier cas est très simple parce que l'énergie cinétique que la pierre acquière est l'énergie potentielle perdue durant sa chute de  $\Delta h = 15 - 1.8 = 13.2$  m, soit  $mg\Delta h = 388.5$  J.

Dans le second cas, il faut juste ajouter l'énergie cinétique initiale :  $mv^2/2$  avec  $m = 3$  kg et  $v = 1$  m/s. L'énergie cinétique initiale est donc 1.5 J, ce qui fait que l'ennemi prendra 390 joules sur la tête.

## 9.11 Travail

### 9.11.1 De la notion de travail

Un système isolé conserve son énergie. Mais, *a contrario*, un système non isolé a une énergie qui a de fortes chances de varier. C'est à dire que quand une force s'applique à un objet, l'objet gagne de l'énergie. Il n'est pas compliqué de comprendre pourquoi : une force provoque une accélération, et donc une variation de la vitesse. Or qui dit vitesse dit énergie cinétique. L'énergie qu'un objet gagne sous l'action d'une force s'appelle le **travail** de la force. Comment la calculer ?

Considérons une force constante  $F$  qui tire horizontalement un objet de masse  $m$  initialement au repos. L'accélération que l'objet acquiert est  $a = F/m$ , et sa vitesse après une durée  $t$  est  $v = at$ . Selon la formule de l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned}
 E_c(t) &= \frac{mv(t)^2}{2} \\
 &= \frac{ma^2t^2}{2} & v = at \\
 &= ma \frac{at^2}{2} & \text{réarrangement} \\
 &= Fd & F = ma \text{ et } d = \frac{at^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Cette énergie n'est pas conservée du fait de l'action d'une force extérieure sur l'objet.

Lorsqu'une force déplace son point d'application, on dit qu'elle **travaille**. Ce travail est l'énergie que la force fait gagner à l'objet sur lequel elle s'applique. Nous venons de traiter le cas où la force était parallèle au déplacement. Tu te souviens que la force et le déplacement sont des *vecteurs* ; que faire lorsque ces deux vecteurs ne sont pas parallèles ?

Le travail d'une force est le produit scalaire entre la force et le déplacement. En formules, si on a une force  $fF$  qui se déplace d'un vecteur  $\vec{\Delta x}$ , son travail noté  $W$  vaut

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}.$$

où le point signifie un produit scalaire. Au cas où tu ne serais pas familier avec les produits scalaires entre vecteurs, la figure 9.8 montre comment ça marche.

Si la force  $\vec{F}$  de norme  $|\vec{F}|$  se translate le long du vecteur  $\vec{AB}$ , le **travail** de  $\vec{F}$  est

$$W_{\vec{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} := |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha). \tag{9.21}$$

On comprend facilement pourquoi le produit des normes de  $\vec{F}$  et de  $\vec{AB}$  arrivent dans la formule : plus une force est grande plus elle va pouvoir faire de travail, et



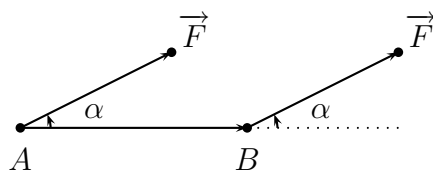


FIG. 9.8 – Travail d'une force

plus le chemin sur lequel elle se déplace est grand, plus il a fallu de travail pour la faire bouger : soulever une pierre de 20 kg de 10 m, c'est plus compliqué qu'une plume de 20 g de 10 cm !

Ce qui peut troubler, c'est le cosinus. Ce que le travail d'une force mesure, c'est l'énergie effectivement donnée à l'objet par la force. Prenons par exemple le cas du bateau de la figure 9.9 dans un canal étroit qu'on remorque en tirant depuis la berge entre le point  $A$  et le point  $B$ . Comme le bateau n'arrête pas de se cogner contre le bord (parce qu'on le tire de travers), en fait la composante de la force perpendiculaire à la berge est perdue : seule la composante parallèle  $\vec{F}_{\parallel}$  au canal est utilisée pour faire avancer le bateau.

Toute l'accélération que la composante  $\vec{F}_{\perp}$  essaye de donner au bateau est perdue à cause de la force de réaction  $\vec{R}$  de la berge.

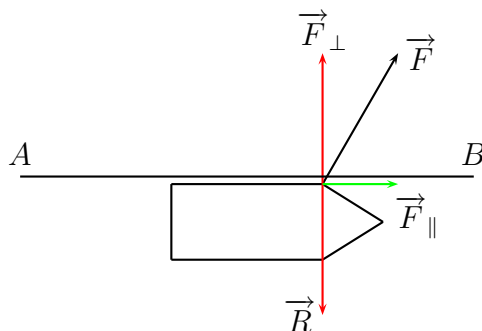


FIG. 9.9 – Bateau remorqué par une force non parallèle au canal

Or, ce que le travail mesure, c'est bien la capacité à faire bouger (plus précisément : accélérer) l'objet sur lequel la force agit. Voyons ça...

Que se passe-t-il si une force  $\vec{F}$  agit sur une masse  $m$  pendant un temps  $t$  ? L'accélération que l'objet sera  $a = F/m$ , mais  $\Delta x = \frac{at^2}{2}$ , donc

$$\Delta x = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m}.$$

Avec ça, on peut calculer le travail de la force :

$$W = F\Delta x = (ma)\left(\frac{mat^2}{2m}\right) = \frac{ma^2t^2}{2}.$$

Question énergie cinétique, on sait que la vitesse atteinte est  $v = at$ , et donc l'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2t^2}{2} = W.$$

Tout est cohérent ; pas mal hein !

On peut être encore plus précis en disant que le travail d'une force est l'énergie que la force donne à un objet, et pas seulement son énergie cinétique. Afin de voir ça, nous allons étudier plus en détail comment fonctionne le travail de la gravitation. Mais avant ça, donnons deux petits bonus. Le travail qu'on a accompli permet déjà de comprendre un objet mystérieux que tu as peut-être étudié l'année passée : le levier hydraulique. Il permet aussi de calculer plus simplement le mouvement sur un plan incliné.

### 9.11.2 Bonus : mouvement sur un plan incliné

Nous avons étudié le mouvement sur un plan incliné en considérant les forces en jeu au point 10.2.12. Une autre méthode consiste à considérer les énergies en jeu. Lorsque la masse avance de  $A$  à  $B$ , il gagne une énergie potentielle

$$E_p = mg \cdot BC.$$

Cette énergie provient du travail de la force  $F$ . Comme par ailleurs il n'y a pas d'accélération, le travail de  $\vec{F}$  ne fournit pas d'énergie cinétique, et donc *tout* le travail de  $\vec{F}$  est converti en énergie potentielle. Ceci fait que  $E_p = W_{\vec{F}}$ , mais le travail de  $\vec{F}$ , il est facile à exprimer : c'est  $W_{\vec{F}} = F \cdot AB$ . Donc

$$E_p = F \cdot AB.$$

En égalisant les deux expressions pour  $E_p$ , on trouve  $mg \cdot BC = F \cdot AB$ , et donc

$$F = mg \frac{BC}{AB}. \quad (9.22)$$

On peut noter la miraculeuse coïncidence de cette formule avec la formule (10.31) déduite par un autre chemin.

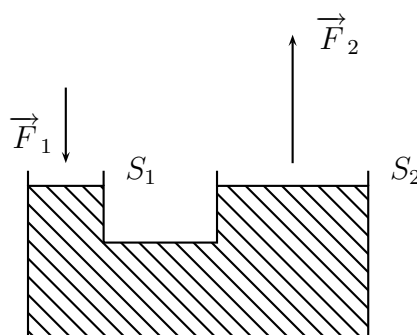


FIG. 9.10 – Le levier hydraulique

### 9.11.3 Bonus : le levier hydraulique

#### Comment on faisait avant

Remémorons nous comment on décrivait le levier hydraulique avec des questions de pressions et de principe de Pascal.

Une force  $F_1$  est appliquée sur la surface  $S_1$ . Quelle force est-ce que cela provoque sur la surface  $S_2$ ? Le principe de Pascal stipule que toutes les pressions sont égales<sup>10</sup>. En particulier, la pression sur la surface  $S_1$  est la même que celle sur la surface  $S_2$ .

La pression sur la surface  $S_1$  est imposée par la force qu'on y applique :

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1},$$

tandis que l'eau s'arrange pour créer la même pression partout. Sur la surface  $S_2$ , elle doit appliquer la force qu'il faut pour que  $P_2 = P_1$ , c'est à dire

$$F_2 = P_2 S_2 = P_1 S_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \quad (9.23)$$

#### La notion de travail simplifie les choses !

Il faut remarquer une chose : quand on pousse sur le premier piston, on l'enfonce d'une hauteur  $\Delta h_1$ , tandis que le second piston monte d'une hauteur  $\Delta h_2$  qui n'est pas spécialement la même. Nous allons tenir compte de deux choses :

- la conservation du volume d'eau : l'eau est incompressible,
- la conservation de l'énergie : le travail de la seconde force doit être le même que celui de la première.

---

<sup>10</sup>Si la pression était plus élevée en un point qu'au point d'à côté, il y aurait un courant qui se produirait jusqu'à égalisation. Comme le vent entre une haute et une basse pression.

Le volume d'eau déplacé par la première force est le cylindre de base  $S_1$  et de hauteur  $\Delta h_1$ , c'est à dire

$$V_1 = S_1 \Delta h_1.$$

Évidemment, le volume déplacé de l'autre côté est le même :

$$V_2 = S_2 \Delta h_2 \stackrel{!}{=} V_1.$$

Première conclusion : on sait de combien le second piston va se lever si on pousse le premier. Les égalités  $V_1 = S_1 \Delta h_1 = V_2 = S_2 \Delta h_2$  donnent

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 \frac{S_1}{S_2},$$

ou encore

$$\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (9.24)$$

Ça, c'était la subtilité : expliciter la conservation du volume d'eau. Maintenant, on fait la conservation de l'énergie comme d'habitude : le travail  $F_1 \Delta h_1$  que l'on exécute au niveau du premier piston doit être le même que celui que l'eau produit au niveau du second :  $F_2 \Delta h_2$ . Donc on a

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1}.$$

En y reportant l'équation (9.24), on trouve

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}, \quad (9.25)$$

ce qui est exactement la même chose que (9.23).

Cette nouvelle méthode pour décrire le piston hydraulique est beaucoup plus intéressante que la première parce qu'elle se base sur deux lois de conservation : le volume d'eau et l'énergie. Il est important de remarquer qu'on a déduit un résultat pas évident seulement en disant que telle et telle quantité sont conservées. La physique moderne attache une grande importance aux quantités conservées.

#### 9.11.4 Récapitulons

Il existe plusieurs types d'énergies dont les plus courants sont les énergies **cinétiques** et **potentielles**. Quand un objet ou un système est livré à lui même (quand il est *isolé*) son énergie est conservée. Le type d'énergie le plus facile à trouver est l'énergie cinétique : quand un objet de masse  $m$  se déplace avec une vitesse  $v$ , son énergie cinétique vaut

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \quad (9.26)$$

L'énergie potentielle d'un objet se calcule en général en se demandant par quel processus on peut transformer l'énergie potentielle en énergie cinétique : quelle vitesse peut acquérir l'objet grâce à son potentiel ? Quand on a répondu à cette question, l'énergie *potentielle* de l'objet est l'énergie cinétique que l'objet *pourrait* acquérir. Jusqu'ici, la seule énergie potentielle qu'on ait vue est celle liée à la gravitation.

Les forces servent à transformer les énergies : soit elles font passer de l'énergie d'un objet à un autre, soit elles transforment de l'énergie potentielle en énergie cinétique. La capacité qu'une force a à apporter de l'énergie à l'objet sur lequel elle s'applique est la *travail* de la force.

Quand un travail est positif, la force transforme de l'énergie potentielle en énergie cinétique. Quand le travail est négatif, ça transforme de l'énergie cinétique en énergie potentielle.

La somme des énergies cinétiques et potentielle est appelée **l'énergie mécanique**. L'énergie mécanique d'un système isolé est conservée. Elle varie quand une force extérieure travaille dessus.

$$E_t = E_c + E_p. \quad (9.27)$$

Le **théorème de l'énergie cinétique** dit :

**Théoreme 96.**

*Le travail effectué pendant une certaine durée par la résultante des forces appliquées à un corps est égal à la variation d'énergie cinétique du corps durant cette même durée.*

### 9.11.5 Exemples

Reprenons les situations vues plus haut à la lumière de ces explications. Quand je tire un objet qui se met en mouvement, je fais un travail positif : le mouvement va dans le sens de la force. La transformation d'énergie est la suivante : le potentiel de la source de la force (c'est à dire l'énergie contenue dans les cellules de mes muscles) est transformée en énergie cinétique pour l'objet tiré.

Quand un objet tombe, la gravitation fait un travail positif. L'énergie potentielle de l'objet est transformée en énergie cinétique : au fur et à mesure que l'objet tombe, il gagne en vitesse.

Quand on monte un objet, il y a deux forces : celle musculaire qui fait un travail positif et qui transforme l'énergie potentielle des muscles en énergie cinétique pour l'objet. Mais la force de gravitation fait un travail négatif : elle transforme l'énergie cinétique en énergie potentielle. Voilà pourquoi plus un objet est lourd, plus il est difficile à soulever : le travail qu'on fournit pour communiquer une accélération est constamment pompé par la gravitation qui en fait de l'énergie potentielle ! Si la

force qui tire vers le haut est plus grande que la gravitation, son travail sera plus grand, et l'un dans l'autre, l'objet gagnera en vitesse parce que la gravitation ne pompera pas l'énergie aussi vite qu'on la communique.

**Mouvement horizontal** Lorsqu'un objet se déplace horizontalement, la force de gravité ne travaille pas. C'est facile à voir dans le calcul : la force de gravité est verticale et donc perpendiculaire au déplacement ; le cosinus est donc nul. Pourtant, plus un objet est lourd, plus il est difficile à pousser ; on a bien l'impression que la gravité a quelque chose à voir là-dedans. D'abord remarquons qu'en mettant des roulettes sous l'objet ça va beaucoup mieux, tandis que pour le soulever, l'ajout de roulettes n'aide pas ; le phénomène n'est donc pas vraiment identique. En fait quand on pousse un objet, il faut travailler contre la force de frottement entre l'objet et le sol.

**Exercice 47.**

Demandes-toi le travail effectué par la gravitation sur un satellite qui orbite autour de la Terre. Quand tu auras compris pourquoi ce travail est nul, tu pourras te demander comment ça se fait que certains satellites retombent quand même sur Terre.

**Exercice 48.**

Un chercheur d'or pousse son chariot de 1.8 kg avec une force de 50 N. Il y a 700 g d'or dans le chariot. Quelle est la vitesse atteinte après un déplacement horizontal de 10 m ?

**Correction de l'exercice 48**

Une force de 50 N qui se déplace de 10 m effectue un travail de

$$W = Fd = 50 \cdot 10 = 500 \text{ J.}$$

Ce travail fourni par le chercheur d'or fait avancer le chariot et donc lui donne de l'énergie cinétique. Autrement dit, le chariot a gagné 500 J d'énergie cinétique. Pour trouver à quelle vitesse cela correspond, on utilise la formule de l'énergie cinétique :

$$E_c = 500 = \frac{mv^2}{2}.$$

Ici,  $m$  est la masse du chariot et  $v$  la vitesse atteinte. Donc

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{500}{2.5}} = 14 \text{ m/s.}$$

**Exercice 49.**

Afin de moins se fatiguer, le chercheur d'or de l'exercice 48 attache le chariot à une corde qu'il fait passer par une poulie et à laquelle il suspend une pierre de 5 kg de ferrite rouillée qu'il a trouvé sur son chemin dans la mine. Quelle vitesse atteint-il après avoir parcouru les mêmes 10 m ? Est-ce que tu peux savoir sans calculs si il ira plus vite ou moins vite que dans le cas précédent ?

Remarquez que la situation devient fort analogue à celle de l'exercice 58. Tu peux commencer par recopier le dessin en ne réécrivant que les éléments qu'il faut dans le cas présent.

**Correction de l'exercice 49**

L'erreur à ne pas commettre est de dire « j'ai une pierre de 5 kg et donc une force de 50 N, ce qui est équivalent à l'exercice précédent ». Pourquoi est-ce faux ? Parce que la force de 50 N s'applique cette fois-ci non seulement au chariot, mais **également à la pierre elle-même**. La force tire donc  $5 + 2.5 = 7.5$  kg et non seulement les deux kilos et demi du chariot !

Le système accélère donc moins qu'avant. Cependant, le chercheur d'or se fatigue moins parce que maintenant c'est la gravitation qui travaille.

En ce qui concerne les calculs, la situation est tout de même similaire : une force de 50 N qui se déplace de 10 m fournit une énergie de 500 J. Ces joules servent à faire avancer la pierre plus le chariot dont la masse totale est 7.5 kg. Donc

$$v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = \sqrt{\frac{500}{7.5}} = 8.164 \text{ m/s.}$$

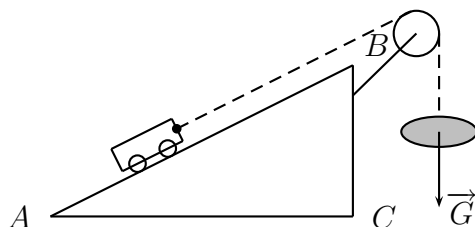


FIG. 9.11 – Masse qui tire un chariot rempli d'or via une poulie pour l'exercice 50.

**Exercice 50.**

Le chercheur d'or de l'exercice 49 n'en a pas fini. Il doit maintenant monter une pente. Il attache donc sa ferrite rouillée de 5 kg au bout d'une poulie et la lâche dans le vide comme dessiné sur la figure 9.11. Le chariot pèse toujours 2.5 kg en comptant l'or. Quelle vitesse atteint le chariot après 10 m si  $AB = 12$  m et  $CB = 2$  m. Remarquez que la corde est parallèle au plan incliné.

**Correction de l'exercice 50**

Juste pour s'amuser, nous allons tout laisser en lettres dans les calculs jusqu'à la réponse finale. Les données sont :

- $m_f$  la masse de ferrite qui tombe,
- $m_c$  celle du chariot,
- $h$  le déplacement du système,
- $BC$  et  $AB$ , la hauteur et l'hypothénuse du triangle rectangle.

En tombant d'une hauteur  $h$ , la masse fournit une énergie  $m_fgh$  au système. Cette énergie se distribue en énergie cinétique pour les deux masses (parce qu'elles se mettent à bouger) et en énergie potentielle de la boule parce qu'elle monte.

Commençons par analyser l'énergie cinétique des choses. On sait que les deux objets vont se déplacer à la même vitesse. Notons  $v$  cette vitesse. Les énergies cinétiques sont donc

$$\frac{m_f v^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{m_c v^2}{2}.$$

Ce qui est plus compliqué, c'est de voir comment se passe l'énergie potentielle de la boule. Si on note  $\alpha$  l'angle de la pente (c'est à dire l'angle au point  $A$ ), on a que la boule monte d'une hauteur  $h \sin \alpha$ . Mais  $\sin \alpha$  peut s'exprimer en termes des données :  $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$ . Le gain d'énergie potentielle que la boule engrange dans l'affaire vaut donc

$$m_c g h \frac{BC}{AB}.$$

Finalement, ce qu'on trouve comme bilan d'énergie, c'est que

$$m_f g h = \frac{m_f v^2}{2} + \frac{m_c v^2}{2} + m_c g h \frac{BC}{AB}.$$

La seule inconnue de cette équation est  $v$ . En remplaçant tout ce qu'on peut par des nombres, on trouve  $v = 8.08 \text{ m/s}$ .

**9.11.6 Travail et intégration**

Tu as déjà vu les intégrales au cours de mathématique? Une fois de plus, tu avais envie de dire que le prof de math est une peau de vache qui te fait étudier des trucs inutiles et compliqués dans le but de t'avoir en fin d'année; et une fois de plus, tu te trompes doublement : d'une part en fait les intégrales c'est facile, et d'autre part, c'est très utile en physique, c'est à dire pour comprendre le monde, la nature, les objets qui t'entourent ainsi le sens de la vie.

Nous avons vu comment se passe le calcul d'un travail pour une force constante, éventuellement non parallèle au déplacement. Voyons maintenant comment il faut faire pour calculer le travail d'une force non constante. Prenons comme exemple un train qui démarre alors que son moteur est froid. Au fur et à mesure que



moteur tourne, il s'échauffe et peut donc fournir une force de plus en plus grande. L'accélération du train n'est donc pas constante.

Mettons que la force que la locomotive déploie soit la fonction  $F(t)$ , et que la masse du train soit  $m$ . L'accélération au temps  $t$  est donc  $a(t) = F(t)/m$ . Bien sûr, la locomotive chauffe lentement, c'est à dire qu'entre le temps 10 secondes et 11 secondes, la force n'a pas beaucoup changée. En approximation, on peut dire qu'elle a été constante :

$$F_{\text{moyenne}}(10 \rightarrow 11) = \frac{F(10) + F(11)}{2}.$$

Pendant cette seconde, le train a avancé d'une distance<sup>11</sup>  $d$ . Durant cette seconde, le travail de la force est donc

$$W(10 \rightarrow 11) = F_m(10 \rightarrow 11)d.$$

Si on refait cette approximation à chaque seconde, le travail total pour 10 secondes de trajet vaut approximativement

$$\begin{aligned} W \simeq & F_m(1 \rightarrow 2)d(1) + F_m(2 \rightarrow 3)d(2) + F_m(3 \rightarrow 4)d(3) + F_m(4 \rightarrow 5)d(4) \\ & + F_m(5 \rightarrow 6)d(5) + F_m(6 \rightarrow 7)d(6) + F_m(7 \rightarrow 8)d(7) + F_m(8 \rightarrow 9)d(8) \\ & + F_m(9 \rightarrow 10)d(9). \end{aligned}$$

Bien entendu, si on veut plus de précision, on peut découper les dix secondes en petits intervalles d'un millièème de secondes. Ça ne te rappelle rien, ce genre de raisonnement ? On peut toujours remplacer  $d(t)$  par sa valeur  $v_m(t)\Delta t$  en fonction de la vitesse. Ici,  $\Delta t$  est l'intervalle de temps choisit (c'est à dire une seconde dans l'exemple). Disons qu'on découpe les 10 secondes en 1000 parties, c'est à dire  $\Delta t = 10/1000$  s. Dans ce cas, le travail sera approximé par

$$W \simeq \sum_{i=1}^{1000} F_m(i \rightarrow i+1)v_m(t \rightarrow i+1)\Delta t.$$

Là, tu l'as reconnue hein ? Quand on découpe de plus en plus, ce qu'on obtient à la limite du découpage de plus en plus précis, c'est

$$W = \int_0^{10} F(t)v(t)dt. \quad (9.28)$$

Montons d'un cran.  $l(t) = v(t)dt$ , c'est le déplacement effectué pendant le temps « infinitésimal »  $dt$ . Jusqu'à présent, nous avons parlé d'un train et supposé que le

---

<sup>11</sup>Je ne te cache pas qu'en pratique, c'est très difficile de savoir  $d$ , vu que l'accélération varie avec le temps. Mais pour l'instant, on fait de la théorie ; on n'est pas dans les calculs. Disons donc  $d$ , en gardant en tête que ce n'est en réalité pas facile à calculer.

déplacement se faisait sur des rails droites, de telle manière à ce que le travail soit la force multipliée par le déplacement sans problèmes de cosinus et de produits scalaires. Tu te souviens que quand la force n'est pas parallèle au déplacement, on doit faire  $W = \vec{F} \cdot \vec{l}$  si  $\vec{l}$  est le déplacement. Maintenant, c'est facile de voir comment modifier la formule (9.28) pour tenir compte de cet effet :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (9.29)$$

où l'intégrale est prise sur le chemin qui va du point  $A$  au point  $B$ . C'est à dire que si on veut savoir le travail que déploie une force pour déplacer un objet d'un point  $A$  à un point  $B$ , il faut intégrer sur la courbe qui représente le trajet.

## 9.12 Puissance

La **puissance** d'une machine (qui effectue un travail) est la quantité d'énergie dégagée par unité de temps. Qu'est-ce à dire? Pour soulever une pierre de 3 kg à une hauteur de 5 m, il faut un *travail* de  $mgh = 9.81 \cdot 3 \cdot 5 = 147 J$ . Que je soulève cette pierre en vingt secondes ou deux heures, ça ne change rien au résultat de travail effectué. Par contre, ça change quelque chose à la puissance développée par mes muscles. Dans le premier cas, j'ai dépensé 147 J en vingt secondes, c'est à dire 7.3 J/s. Dans le second cas, j'ai dépensé les mêmes 147 joules en 7200 secondes, ce qui fait la puissance plus modeste de 0.02041 J/s.

Dans le premier cas, on dira que j'ai une puissance de 7.31 W (watt) et dans le second, on dira 0.02041 W. On écrit :

$$\text{puissance} = \frac{\text{énergie}}{\text{durée}} = \frac{\text{travail}}{\text{durée}}.$$

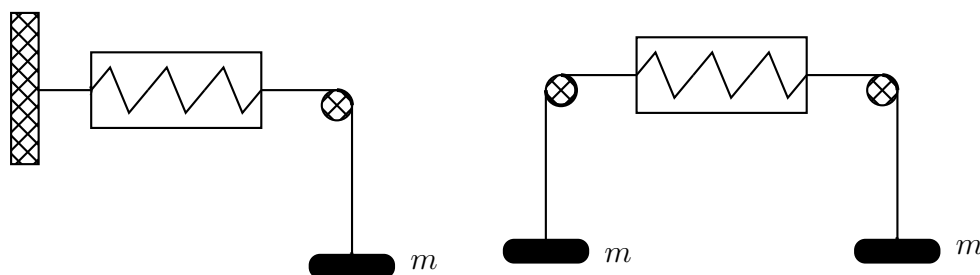
Ne pas confondre :

**Le joule** qui est l'unité d'énergie qui correspond au déplacement d'un mètre du point d'application d'une force de un newton.

**Le watt** qui est l'unité de puissance qui correspond à une énergie de un joule dépensé en une seconde. La puissance est vitesse à laquelle un moteur déverse des joules dans l'objet sur lequel elle travaille.

Il existe une petite formule sympa qui permet de trouver la puissance d'une force qui sert à déplacer un objet. Par exemple la puissance du moteur d'un train qui avance à une certaine vitesse. Mettons qu'on ait une force  $\vec{F}$  qui avance à une vitesse  $v$ . Le travail que la force effectue durant un temps  $\Delta t$  vaut

$$W = F \cdot d$$



(a) Dynamomètre qui porte une masse  $m$  (b) Dynamomètre qui porte une masse  $m$  de d'un côté, et qui est accrochée à un mur chaque côté de l'autre

FIG. 9.12 – Dynamomètres de l'exercice 51

où  $d$  est la distance parcourue par le moteur durant le temps  $\Delta t$ , c'est à dire  $v\Delta t$ . Ça c'est pour le travail :  $W = Fv\Delta t$ . En ce qui concerne la puissance, il faut diviser le travail par la durée que le moteur a mise pour effectuer le travail, c'est à dire  $\Delta t$ . Finalement on trouve :

$$P = Fv. \quad (9.30)$$

## 9.13 Exercices

### Exercice 51.

Qu'indique le dynamomètre de la figure 9.12(b), si celui de la figure 9.12(a) indique 9.81 N ? Que vaut la masse  $m$  ?

### Correction de l'exercice 51

Le second dynamomètre indique également 2 N parce que le mur agit de la même façon sur le premier que la masse sur le second. En effet, la masse qui pend tire sur le dynamomètre, et pour que celui-ci reste en équilibre, il faut qu'une force égale en grandeur et opposée tire le dynamomètre vers la gauche. Peu importe que cette force soit une force de réaction du mur ou une force de pesant d'une autre masse, le résultat est le même : le dynamomètre est tiré dans les deux sens et reste en équilibre.

### Exercice 52.

Sur la figure 9.13,

- composez les trois forces,
- décomposez la force  $\vec{F}_1$  en les deux autres.

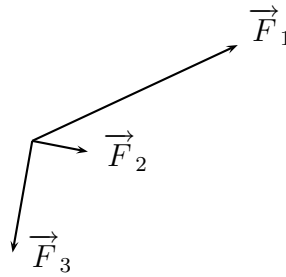


FIG. 9.13 – Exercice de composition de forces

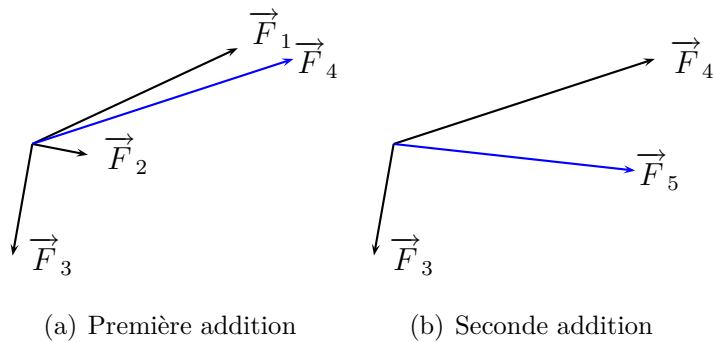


FIG. 9.14 – Exercice de composition de forces

**Correction de l'exercice 52**

Regardez la figure 9.14. D'abord on construit  $\vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  en ne regardant pas  $\vec{F}_3$ . Pour cela, on met juste  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  bout à bout. Peu importe si on met  $\vec{F}_1$  au bout de  $\vec{F}_2$  ou le contraire : le résultat sera le même.

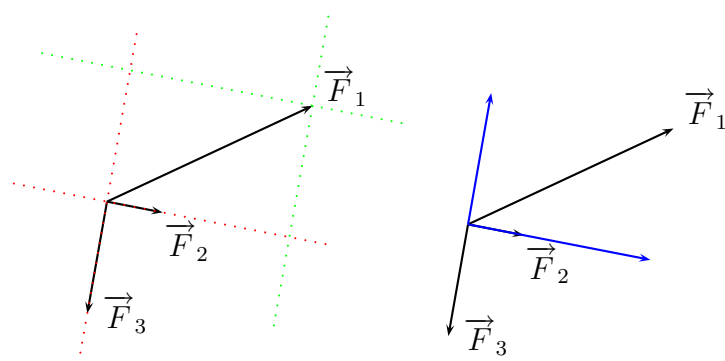
Ensuite on oublie  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  et on additionne  $\vec{F}_4$  avec  $\vec{F}_3$ .

Montrons à présent comment décomposer  $\vec{F}_1$  en  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$  sur la figure 9.15. La première chose à faire est de prolonger les axes *dans les deux sens* ainsi que dessiner des parallèles à ces axes passant par le bout de la force à décomposer. Ensuite, les points d'intersection donnent la décomposition.

Un autre exemple de décomposition de forces est donné à la figure 10.6 se trouvant à la page 220.

**Exercice 53.**

Un pot de Nutella fait 750 g. Quel est sa masse ? Quel est son poids ? Sur le Soleil,  $g = 274.2876 \text{ m/s}^2$ , quel est le poids et la masse de ce même pot à la surface de l'étoile ? Même question sur **Encelade** (un satellite de Saturne) où  $g = 0.1962 \text{ m/s}^2$ . La masse de **Encelade** est-elle plus grande ou plus petite que celle de la Terre ? Que dire du poids de **Titania** (satellite d'Uranus) sur lequel  $g = 0.3924 \text{ m/s}^2$  ?



(a) Prolonger les axes et trouver les points d'intersection (b) Décomposer la force

FIG. 9.15 – Décomposition de forces

### Correction de l'exercice 53

Le poids de Titania n'a aucun sens ; on ne peut rien en dire. Ou alors il faut dire le poids par rapport à quoi ; le Soleil ? Uranus ? En effet, le poids est la force de gravitation qui s'exerce sur un objet. Ça a donc un sens de parler du poids d'un objet sur Terre parce qu'on sous-entend qu'on regarde la force de gravitation que la Terre exerce sur l'objet. Mais on ne peut pas vraiment parler du poids d'une planète. Par contre, on peut parler de sa masse.

### Exercice 54.

Un déménageur pousse une caisse de 5 kg sur un plan horizontal. Pour ce faire, il déploie une force horizontale de 10 N qui suffisent à compenser exactement les frottements.

La caisse avance-t-elle à vitesse constante ? Expliquer. Quel est le travail effectué par le déménageur sur un déplacement de 2.3 m ?

### Correction de l'exercice 54

La caisse se déplace à vitesse constante. Pourquoi ? Parce qu'il y a *deux* forces qui s'y appliquent : la première est celle de frottement, tandis que la seconde la force qui tire dont on parle. Il est dit dans l'énoncé que ces deux forces se compensent exactement. Donc il n'y a globalement aucune force qui s'appliquent à la caisse, ce qui fait qu'il avance à vitesse constante.

Remarque qu'au début, pour faire démarrer la caisse, il a fallu pendant un certain temps appliquer une force supérieure à celle de frottement.

Le travail d'une force  $\vec{F}$  qui se déplace d'une distance  $d$  est par définition  $W = \|\vec{F}\|f$  quand la force est parallèle au déplacement, ce qui est le cas ici parce

qu'on parle d'un plan horizontal et d'une force horizontale. On a donc

$$W = 10 \text{ N} \cdot 2.3 \text{ m} = 23 \text{ J}$$

### Exercice 55.

Une grue soulève en 30 s à vitesse constante un bloc de béton de 50 kg d'une hauteur de 20 m. Quel est le travail effectué par la grue ? Quelle est sa puissance ? Avec la même puissance, combien de temps faudra-t-il à la grue pour soulever une masse de 100 kg de la même hauteur ?

### Correction de l'exercice 55

Le travail effectué par la grue est l'énergie qu'il faut donner au béton pour lui permettre d'avancer de 20 m dans le champ de gravitation. C'est à dire  $W = P \cdot h$  où  $P$  est le poids du béton ; donc

$$W = mgh = 50 \cdot 9.81 \cdot 20 = 9810 \text{ J.}$$

Si tu n'es pas sûre du signe, il y a au moins deux manières de savoir que c'est bien positif. La première est de remarquer que le déplacement se fait dans le même sens que la force (c'est pour ça qu'on a noté  $50 \cdot 9.81 \cdot 20$  et non des choses du genre  $(-50) \cdot 9.81 \cdot 20$  ou  $50 \cdot 9.81 \cdot (-20)$ ).

La seconde est de remarquer que la grue transforme de l'énergie potentielle (par exemple ses batteries ou son pétrole) en de l'énergie cinétique (de la charge qui monte). Cependant, la force de gravitation se charge de transformer immédiatement cette énergie cinétique en énergie potentielle (le travail de la gravitation est négatif, ce qui est cohérent avec le fait que son sens est le contraire de celui du déplacement), donc on ne « voit » pas bien ce passage par du cinétique.

La puissance d'une machine est la quantité de joules que la grue déverse par seconde dans l'objet sur lequel elle travaille. Ici, c'est donc le nombre de joules par secondes que reçoit le bloc de béton. En l'occurrence, le béton reçoit 9810 joules en 30 secondes, soit  $\frac{9810}{30} \text{ J/s} = 327 \text{ W}$ .

Il s'agit maintenant de soulever 100 kg, c'est à dire deux fois plus de masse. Étant donné que le travail de la gravitation est proportionnel à la masse, il faudra un travail deux fois plus grand. Autrement dit, il faut deux fois plus de joules à un objet de 100 kg pour monter de la même hauteur qu'un objet de 50 kg. Comme la puissance est la même, il reçoit autant de joules par seconde que le premier objet. Pour en avoir deux fois plus il faut donc deux fois plus de temps, soit une minute.

### Exercice 56.

Comme montré sur la figure 9.16, quelqu'un voudrais faire monter par sa boule de bowling la pente  $AB$  en exerçant une force constante horizontale  $\vec{F}$ . Que vaut le travail effectué entre  $A$  et  $B$  ?

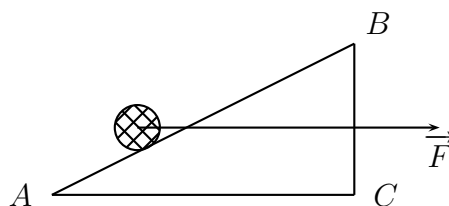


FIG. 9.16 – Travail d'une force mal placée pour l'exercice 56.

La personne qui est en train de tirer cet objet ne le fait pas de la manière la plus intelligente du monde. Comment devrait-t-il s'y prendre ?

### Correction de l'exercice 56

Le mobile effectue à la fois le déplacement  $AB$  et le déplacement  $AC$ . Mais on sait que dans le travail, seule compte la composante du déplacement parallèle à la force. Donc le problème serait exactement le même si on faisait  $\|BC\| = 0$ , c'est à dire si le mobile se déplaçait sur un plan horizontal. Dans ce cas, le déplacement est parallèle à la force et donc le travail vaut  $F\|AC\|$ .

Une autre façon de répondre est de considérer la formule du travail dans le cas non parallèle, c'est à dire  $W = F \cdot d \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d})$  où  $\cos(\vec{F}, \vec{d})$  désigne le cosinus de l'angle entre  $\vec{F}$  et le déplacement  $\vec{d}$ , c'est à dire l'angle  $\widehat{BAC}$ . Donc

$$W = F \cdot |AB| \cdot \cos(\widehat{BAC}),$$

mais  $|AB| \cos(\widehat{BAC}) = |AC|$ , et donc

$$W = F \cdot |AC|.$$

La façon la plus efficace de tirer cet objet est de le tirer parallèlement au déplacement (de façon à ce que le cosinus soit 1), c'est à dire avec une force parallèle au plan incliné. En effet, la composante perpendiculaire est annulée par une réaction du sol.

### Exercice 57.

Maintenant nous avons affaire à quelqu'un de plus malin que le joueur de bowling de l'exercice 56. Le chariot de la figure 9.18 est tiré avec une force constante  $\vec{F}$  parallèle à la pente. Il est également soumis à la gravitation  $\vec{G}$  et à une force de réaction  $\vec{R}$  perpendiculaire au plan incliné.

- Trouvez le travail de toutes forces pour un déplacement entre  $A$  et  $B$ , et puis pour un déplacement de  $B$  vers  $A$ .
- Si les forces  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  sont telles que  $\|\vec{F}\| = \|\vec{G}\|$ , est-ce que le chariot va monter, rester en place ou descendre ?

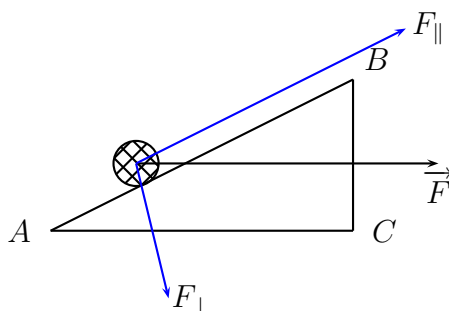


FIG. 9.17 – Décomposition de la force de la correction 9.13.

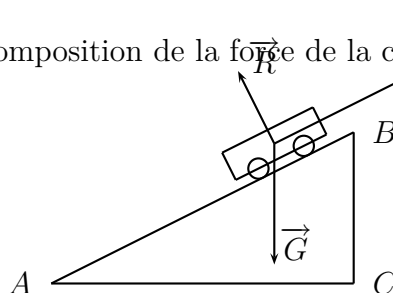


FIG. 9.18 – Chariot sur un plan incliné pour l'exercice 57.

**Correction de l'exercice 57**

Tu dois aller voir la figure 10.6 pour voir comment il faut traiter avec les problèmes de décomposition de forces sur un plan incliné.

La force  $\vec{R}$  est perpendiculaire au déplacement (que ce soit pour  $A$  vers  $B$  ou  $B$  vers  $A$ ), donc son travail est toujours nul.

La force  $\vec{F}$  est toujours parallèle au déplacement. Durant le déplacement de  $A$  vers  $B$ , elle est dans le même sens et donc  $W_{\vec{F}}^{A \rightarrow B} = F|AB|$ ; durant le déplacement de  $B$  vers  $A$ , elle est dans le sens inverse et donc  $W_{\vec{F}}^{B \rightarrow A} = -F|AB|$ .

Sur la figure 9.19, l'angle  $\beta$  entre  $\vec{G}$  et le déplacement  $B \rightarrow A$  vaut  $90 - \alpha$  tandis que l'angle  $\gamma$  entre  $\vec{G}$  et le déplacement  $A \rightarrow B$  vaut  $180 - (90 - \alpha) = 90 + \alpha$ . Durant le déplacement  $A \rightarrow B$ , le travail de  $\vec{G}$  vaut donc  $G \cdot |AB| \cos \gamma = -G \cdot |AB| \sin(\alpha) = -G|BC|$  parce que  $\cos(90 + \alpha) = -\sin(\alpha)$ . Durant le déplacement  $B \rightarrow A$ , le travail de  $\vec{G}$  vaut

$$G \cdot |AB| \cos(90 - \alpha) = G \cdot |AB| \sin(\alpha) = G \cdot |BC|.$$

Lorsque  $\|\vec{F}\| = \|\vec{G}\|$ , le chariot, l'objet monte. En effet, seule la composante parallèle de  $\vec{G}$  n'est utile pour faire descendre le chariot, mais chaque composante d'une force est toujours plus petite que la force elle-même, c'est à dire que  $\|\vec{G}_{\parallel}\| < \|\vec{G}\|$ .



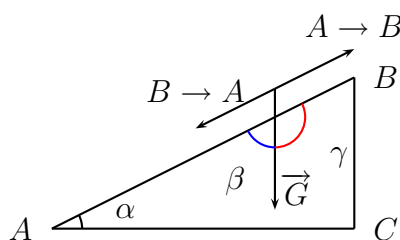


FIG. 9.19 – Angles entre la gravitation et les déplacements

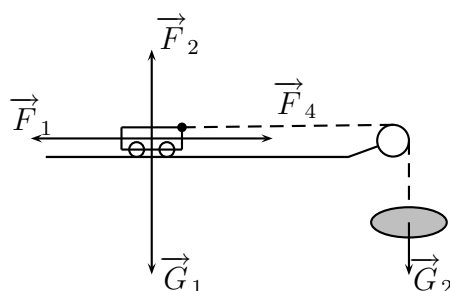


FIG. 9.20 – Chariot tiré par une masse pour l'exercice 58. La corde est dessinée en trait discontinu.

**Exercice 58.**

Tu te souviens du chariot de la figure 9.7? Prenons le cas un peu plus général de la figure 9.20. Après avoir relu ce qu'on a fait dans le premier cas, calcule le travail de toutes les forces dessinées lors d'un déplacement d'une longueur  $l$  vers la droite.

Sans faire plus de calculs, donne les travaux des mêmes forces si le chariot se déplace d'une distance  $s$  vers la gauche.

**Correction de l'exercice 58**

Les forces  $F_2$  et  $\vec{G}_1$  sont perpendiculaires au déplacement, donc leur travail est nul. Les forces  $\vec{F}_4$  et  $\vec{G}_2$  sont parallèles au déplacement, dans le même sens; donc leur travail vaut juste le produit de leurs normes par la longueur du déplacement :  $W_{\vec{F}_4} = \|\vec{F}_4\| \cdot d$  et  $W_{\vec{G}_2} = \|\vec{G}_2\| \cdot d$ . La force  $\vec{F}_1$  va dans le sens inverse de son déplacement, ce qui fait venir un signe moins (penser au cosinus de 180) :  $W_{\vec{F}_1} = -\|\vec{F}_1\| \cdot d$ .

Si le tout se déplace d'une distance  $d$  vers la gauche, il faut juste changer tous les signes.

**Exercice 59.**

Dessinez toutes les forces en présence dans la situation de la figure 9.21. Quel est le

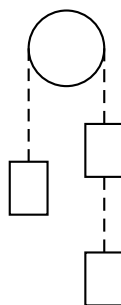


FIG. 9.21 – Des masses pendues à une poulie pour l'exercice 59. La corde est dessinée en trait discontinu.

travail de chacune de ces forces pour un déplacement  $h$  ? Nous supposons que toutes les masses sont égales et valent  $m$ .

### Correction de l'exercice 59

La masse de gauche va monter tandis que celles de droite vont descendre. Donc le travail de la force de pesanteur sera négatif sur la masse de gauche et positif à droite. Le travail est donné par  $W = G\Delta h = mg\Delta h$ . En l'occurrence :

$$W_{\text{gauche}} = -mgh,$$

et de la même manière :  $W_{\text{droite}} = mgh$ , avec un signe positif cette fois. Ce travail est effectué sur *chacune* des deux masses.

Nous pouvons aussi considérer que les deux masses de droite n'en font qu'une seule de  $2m$ , et alors dire qu'il n'y a qu'un seul travail

$$W_{\text{droite}} = 2mgh.$$

### Exercice 60.

Une pente de 5% est déjà une bonne pente. Si une ambulance de 500 kg est arrêtée dessus, quelle est la force exercée par les freins ?

### Correction de l'exercice 60

Le frein doit appliquer une force parallèle à la pente, dirigée vers le haut, sinon la voiture la dévalerait. Une telle force est donc indispensable pour le faire tenir en équilibre. Regardons la figure 10.5. Le fait que la pente soit de 5 % signifie que  $AB = 100$  m et  $BC = 4$  m, c'est à dire que  $\sin(\widehat{BAC}) = 5/100$ .

Disons que  $g = 10 \text{ m/s}^2$  pour avoir des nombres ronds.

Nous savons que la partie de  $\vec{G}$  perpendiculaire au plan incliné sera compensée par la réaction du plan. On ne s'y intéresse donc pas. En ce qui concerne la partie parallèle au plan incliné de la force de gravitation, la formule (10.29) nous enseigne que

$$G_{\parallel} = G \sin(\widehat{BAC}) = 5000 \cdot 5/100 = 250 \text{ N},$$

et est dirigée vers le bas. La force que l'on cherche, vaut la même chose en norme, mais est dirigée vers le haut.

### Exercice 61.

Une pierre de 5 kg est lâchée dans l'eau et y tombe doucement vers le fond à une vitesse de un demi mètre par seconde. Quelle est la valeur du frottement de l'eau sur la pierre ?

### Correction de l'exercice 61

La pierre subit deux forces : l'une est celle de la gravitation qui la tire vers le bas et le frottement de l'eau qui pousse vers le haut. Comme elle tombe à vitesse constante, c'est que ces deux forces sont égales en normes et opposées en sens. Quand on pèse 5 kg, la force de pesanteur qui s'applique est

$$P = mg = 5 \cdot 9.81 = 49 \text{ N}.$$

Les forces de frottements doivent donc valoir également 49 N.

### Exercice 62.

Un étudiant en mathématique rentre de Louvain-la-Neuve vers Bruxelles à vélo. Son poids<sup>12</sup> est de 80 kg, y compris le vélo. Il grimpe l'ultime et légendaire côte de Overijse à 7%. Il maintient une vitesse constante de 3 m/s sur son vélo dont la masse est de 5 kg. Calcule la force et la puissance développée.

Il est maintenant sur la petite pente vers Jezus-Eik et en profite pour prendre un repos bien mérité : il se laisse aller. Quel sera son mouvement ?

### Correction de l'exercice 62

Le cycliste et le vélo sont dans la même situation qu'une voiture<sup>13</sup> dont le moteur fournit la force  $F$  cherchée pour gravir à vitesse constante le plan incliné  $AB$ , voir figure 9.22.

---

<sup>12</sup>Est-ce bien un poids ? Comment il faudrait corriger l'énoncé pour ne pas commettre de faute ?

<sup>13</sup>Sauf que le cycliste n'aura pas de comptes à rendre aux générations futures pour ses émissions de  $CO_2$ .

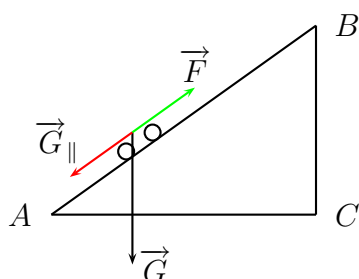


FIG. 9.22 – Certaines forces qui s'appliquent au cycliste.

Comme le cycliste avec son vélo font  $80 + 3 = 83$  kg, on a que

$$\|\vec{G}\| = 9.81 \cdot 83 = 814 \text{ N.}$$

D'autre part,  $\sin(\widehat{BAC}) = 7/100$ . Maintenant, il faut se souvenir de ce qu'on avait dit à propos de la décomposition de la force de pesanteur  $\vec{G}$  sur un plan incliné :

$$\|\vec{G}_{\parallel}\| = \|\vec{G}\| \cdot \sin(\widehat{BAC}) = 57 \text{ N.}$$

C'est cette force-là qui doit être compensée par les muscles du courageux cycliste. Il devra donc fournir une force de 57 N.

Il existe une **autre méthode** pour résoudre cet exercice. Le principe est que le cycliste produit une force qui travaille. Ce travail sert à d'une part à l'accélérer (gain d'énergie cinétique) et d'autre part à le monter le long du plan incliné (gain d'énergie potentielle). Ici, on a supposé que la vitesse était constante, c'est à dire que tout le travail passe à faire gagner de l'énergie potentielle.

Étudions ce qui se passe lorsque le cycliste parcourt le chemin  $AB$ . Si  $AB = 100$  m, alors  $BC = 7$  m et il monte de 7 m, c'est à dire qu'il gagne  $E_p = mgh = 83 \cdot 9.81 \cdot 7 = 5700$  J.

Ce faisant, le sportif à deux roues aura fait un travail  $W = F \cdot d = 100F$ . Quand on égalise ce travail au gain d'énergie potentielle, on trouve  $100F = 5700$ , ce qui permet de conclure  $F = 57$  N.

En ce qui concerne la puissance, il suffit d'utiliser la formule sympa (9.30). Nous avons une force de 57 N qui se déplace à la vitesse constante de 3 m/s. La puissance est donc de  $P = 57 \cdot 3 = 171$  W.

### Exercice 63.

Un automobiliste peu respectueux du code de la route, peu soucieux de sa propre vie ou de celle des autres<sup>14</sup> avance à 180 km/h avec une voiture dont la masse

<sup>14</sup>et du risque d'amende : de 55 à 2750 euros (montant doublé si trois récidives dans l'année), déchéance du permis de conduite entre 8 jours et 5 ans. [www.jesuispour.be/](http://www.jesuispour.be/). Sans compter les conséquences écologiques d'un tel comportement.

scandaleusement élevée vis-à-vis de Kyoto vaut 2000 kg sur une route horizontale, tout en émettant 225 g de  $CO_2$  par kilomètre<sup>15</sup>. La puissance du moteur est de 110 kW. Quelle est la force du moteur ? Quelles sont les forces de frottements ?

Et je n'invente rien : ce sont les caractéristiques de la Chrysler Grand Voyager fin 2007.

### Correction de l'exercice 63

Premier réflexe : convertir la vitesse en des unités du système international : 180 km/h = 50 m/s.

Étant donné que l'on connaît la vitesse et la puissance du moteur, la « petite formule sympa » (9.30) permet de trouver la force du moteur :

$$F = \frac{P}{v} = \frac{110000}{50} = 2200 \text{ N.}$$

Étant donné qu'on parle d'une vitesse constant, c'est que les forces de frottements compensent exactement la force du moteur. À partir de maintenant, l'idée d'égaliser les forces de frottements à la force d'un moteur quand on dit que la vitesse est constante devrait te venir automatiquement en tête. Donc les forces de frottements s'élèvent également à 2200 N.

### Exercice 64.

Un élève jette son cahier de 200 g par la fenêtre située à une hauteur de 5 m.

- À quelle vitesse le cahier atteindra le sol ?
- Même question en tenant compte du frottement de l'air que l'on prendra en moyenne égal à 0.7 N

### Correction de l'exercice 64

- Au départ l'énergie du cahier est potentielle, et à la fin elle est cinétique. L'énergie potentielle de départ est celle d'une masse de 0.2 kg à une hauteur de 5 m, c'est à dire  $E_P = mgh = 9.81 \text{ J}$ .

Pour trouver la vitesse  $v$  à laquelle la pierre va toucher le sol, il faut égaliser cette énergie à  $mv^2/2$  et en déduire  $v$  :

$$v = \sqrt{\frac{2E_P}{m}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m}} = \sqrt{2gh} = 9.904 \text{ m/s.}$$

Une fois de plus, **la réponse ne dépend pas de la masse !**

---

<sup>15</sup>Toute cette masse n'est pas à soustraire de la masse du véhicule parce qu'une bonne partie (exercice de chimie : combien ?) provient de l'air. En effet, l'essence fournit le carbone qui est accroché à des atomes d'oxygènes pris dans l'air. Voilà pourquoi il n'est pas du tout exagéré de dire que les voitures brûlent l'oxygène que l'on respire.

- b. Lorsque l'on tient compte des frottement, l'énergie potentielle de départ est convertie en énergie cinétique plus de l'énergie perdue. Cette énergie perdue vaut le travail des forces de frottement :  $Fh = 0.2 \cdot 40 = 8 \text{ J}$ . Donc,

$$\frac{mv^2}{2} - Fh = mgh,$$

et donc

$$v = \sqrt{\frac{2(mgh + Fh)}{m}} = 7.94 \text{ m/s}.$$

### Exercice 65.

On joue à pile ou face. Pour cela un joueur lance la pièce de 2 g verticalement avec une vitesse de 5 m/s.

- Quelle est la hauteur maximale atteinte par la pièce ?
- Même question en tenant compte d'un frottement moyen de l'air de 0.0012 N.
- Dans chacun des deux cas, dites le temps de vol de la pièce.

### Correction de l'exercice 65

- a. Sans frottements, il s'agit encore une fois d'égaliser l'énergie cinétique de départ à l'énergie potentielle au sommet de la trajectoire, et encore une fois, la réponse ne va pas dépendre de la masse. On reprend la formule  $h = v^2/2g$  déduite dans la sous-section 10.2.7 :

$$h = 1.27 \text{ m}.$$

- b. En comptant les frottements, le bilan d'énergie est plus subtil. Au départ, on a toujours l'énergie cinétique  $mv^2/2$ . Mais à la fin, bien que la pièce n'ait toujours que son énergie potentielle, il faut tenir compte de l'énergie perdue par le travail de la force de frottement :

$$E_C = mgh + Fh$$

où  $Fh$  est le travail de la force de frottement  $F$  sur la distance  $h$  que l'on cherche. Cette fois, la réponse dépend de la masse. Le calcul est d'isoler  $h$  dans

$$\frac{mv^2}{2} = (mg + F)h,$$

donc (en termes d'unités, je te rappelle que 2 g=0.002 kg),

$$h = \frac{mv^2}{2(mg + F)} = \frac{0.05}{2 \cdot (0.002 \cdot 9.81 + 0.0012)} = 1.2 \text{ m}.$$

# Chapitre 10

## De la gravitation

### 10.1 Prolégomènes : la propriété fondamentale de la gravitation

Ce qui distingue la **gravitation** des autres forces, c'est que dans un champ de gravitation donné, tous les objets, quelles que soient leurs masses, suivent le même mouvement. Ainsi, sur Terre tous les objets tombent à la même vitesse, et dans l'espace, tous les satellites orbitant à la même hauteur tournent à la même vitesse<sup>1</sup>.

Expérience : lâchez une noix et une enclume (un ballon de basket peut faire l'affaire) depuis la fenêtre de la classe et vous verrez qu'ils arrivent en même temps par terre.

Pourquoi est-ce ainsi ? Personne ne le sait. Il n'existe à l'heure actuelle aucune explication physique satisfaisante de cette incroyable propriété du champ de gravitation. Quoi qu'il en soit, nous acceptons cette propriété<sup>2</sup>.

### 10.2 La gravitation à la surface de la Terre

Comme indiqué dans les **prolégomènes**, nous faisons l'hypothèse suivante.

#### **Loi numéro 1.**

*Tous les corps (quelles que soient leurs masses) tombent avec la même accélération que nous notons  $g$ .*

D'après cette loi, tous les problèmes contenant des objets qui tombent se réduiront à des problèmes de MRUA, avec  $g$  comme accélération. Cette accélération

---

<sup>1</sup>Voir sous-section 10.3.7.

<sup>2</sup>On n'a pas le choix : la physique est une science expérimentale, donc elle se plie aux résultats expérimentaux. Cela est *la* différence avec l'astrologie.

vaut numériquement

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2. \quad (10.1)$$

### 10.2.1 Chute libre

Un objet est en **chute libre** si il est laissé à lui-même dans le champ de gravitation de la Terre, c'est à dire dans un champ de gravitation constant. C'est un mouvement très simple parce que c'est un MRUA dirigé vers le bas dont l'accélération vaut  $g$  et est dirigée vers le bas.

À titre d'exemple, considérons une personne qui tombe d'un gratte ciel (150 m). De combien de temps dispose Spiderman pour la sauver ? En d'autres termes, combien de temps on met pour tomber de 150 m ?

Nous utilisons la formule du MRUA, avec  $g$  en guise d'accélération :

$$\Delta x = \frac{gt^2}{2}. \quad (10.2)$$

L'équation à résoudre est  $150 = gt^2/2$ , d'où nous trouvons

$$t = \sqrt{300/g} \simeq 5.52 \text{ s}. \quad (10.3)$$

À partir du moment où la personne commence à tomber, Spiderman n'a que cinq secondes et demi pour agir.

Supposons que la personne soit rattrapée juste au niveau du sol. À quelle vitesse allait-elle s'écraser ? Encore une fois, c'est du MRUA. La vitesse acquise après un trajet d'une durée  $\Delta t$  avec une accélération  $g$  vaut  $v = g\Delta t$ . Ici,

$$v = 5.52 \cdot 9.81 = 54.24 \text{ m/s}. \quad (10.4)$$

### 10.2.2 Aurait dû censurer ...

... la scène d'ouverture du second film du Seigneur des anneaux est une hérésie qu'il convient de dénoncer comme une insulte envers l'intelligence humaine.

#### Exercice 66.

Le monstre tombe dans un précipice, suivit d'une épée, et Gandalf les suit, dix mètres plus haut. Tous trois sont en chute libre. Gandalf s'arrange pour rattraper l'épée puis le monstre.

Quelle partie de son cours de physique le scénariste de cette scène a-t-il négligé ?

Pour la comparaison, la scène d'ouverture de **Mooraker** pose également quelque problèmes. On remarquera cependant que les personnages jouent sur le frottements pour se diriger.



### 10.2.3 La force

La prochaine étape est de donner une expression mathématique de la force de gravitation sur Terre. Souvenons nous de la loi de Newton  $F = ma$ , et prenons un objet de masse  $m$ . Par hypothèse, cette masse acquiert une accélération  $g$ . La force qu'il faut pour qu'un objet de masse  $m$  subisse une accélération  $g$  est

$$G = mg. \quad (10.5)$$

Nous notons  $G$  la force de gravitation. Cette force est appelée le **poids** de l'objet.

### 10.2.4 De la difficulté de soulever un objet

Je ne saurais trop te conseiller de *réellement* jeter par la fenêtre (ou debout sur une table) deux objets de poids différents pour remarquer qu'ils tombent à la même vitesse. En général, personne n'y croit avant de l'avoir vu au moins cinq fois<sup>3</sup>.

La chose qui perturbe est la suivante : d'accord, tous les objets tombent à la même vitesse. Mais alors, pourquoi il est plus difficile de soulever un objet lourd qu'un objet léger ? Si réellement la gravitation ne faisait pas la différence entre les objets de poids différents, il devrait être aussi facile de soulever 10 kg que 1 kg.

Disons le haut et fort. La formule  $G = mg$  est on ne peut plus claire : la gravitation fait bel et bien la différence entre les objets en fonction de leur masse. Plus la masse est grande, plus la force est grande. C'est pour ça qu'il est difficile de soulever un objet lourd : il faut une force plus grande que celle de la gravitation.

Le point à remarquer est que **tomber n'est pas l'état « naturel » d'un objet**. Lâchez une enclume. Si ça ne dépendait que d'elle, elle resterait suspendue dans les airs sans bouger. Pire : même si une force veut la faire bouger, l'enclume va résister à la tentation de bouger par son inertie. Plus la masse de l'enclume est grande, plus, pour une force donnée, elle bougera lentement. C'est là qu'est toute l'astuce.

L'enclume a une masse  $m$  qui lui sert à avancer moins vite si une force veut la faire bouger. Mais la gravitation est une force qui est d'autant plus grande que  $m$  est grande. Plus la masse est grande, moins elle a envie de bouger, mais plus la gravitation est forte. Ces deux effets se compensent, et au final, tous les objets tombent à la même vitesse.

En formules mathématiques, cela se voit très bien : l'accélération due à une force  $F$  vaut  $a = F/m$  dans le cas de la gravitation, nous avons que la force est  $G = mg$ , donc

$$a = \frac{G}{m} = \frac{mg}{m} = g. \quad (10.6)$$

---

<sup>3</sup>Un peu comme le fait que quand un glaçon fond dans un verre d'eau, le niveau de l'eau ne bouge pas ; personne n'y croit non plus.

Il y a une simplification par  $m$  qui arrive. Cette simplification aura toujours lieu lorsqu'on regarde des objets dans le champ de gravitation terrestre.

### 10.2.5 Énergie potentielle (la vérité)

Nous voudrions savoir l'énergie potentielle d'un objet de masse  $m$  se trouvant à la hauteur  $h$  sur Terre.

#### Idée !

Comme souvent pour déterminer la formule de l'énergie potentielle, nous allons utiliser la conservation de l'énergie et considérer une situation dans laquelle l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique.

Prenons donc un objet de masse  $m$ , et lâchons le depuis une hauteur  $h$ . À mesure que l'objet tombe, il transforme son énergie potentielle en énergie cinétique. Au moment où il commence à tomber, il n'a pas d'énergie cinétique : toute son énergie est potentielle. À ce moment,  $E = E_p$ , et on voudrait bien déterminer  $E_p$ . Quand il touchera le sol, il n'aura plus d'énergie potentielle :  $E = E_c$ . Il y a moyen de calculer ce  $E_c = mv^2/2$  en trouvant  $v$ .

Pour trouver  $v$ , on utilise la même démarche que celle expliquée à la page 171, (relis les exercices 43 et 42).

Ce qu'il se passe, c'est que l'objet tombe d'une hauteur  $h$  avec une accélération  $g$ . Combien de temps faut-il ? Dans le cadre d'un mouvement uniformément accéléré, le temps et la distance sont liés par la formule

$$h = \frac{gt^2}{2},$$

et donc  $t = \sqrt{2h/g}$ . Avec une accélération  $g$  pendant cette durée, la vitesse atteinte est

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (10.7)$$

Ainsi l'énergie cinétique au moment de toucher le sol est

$$E_c = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2} \underbrace{g^2 \frac{2h}{g}}_{v^2 \text{ donné par (10.7)}} = mgh.$$

L'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet de masse  $m$  à une hauteur  $h$  est  $mgh$  :

$$E_p(h) = mgh. \quad (10.8)$$

### 10.2.6 Énergie potentielle (petit mensonge)

La force de gravitation qui s'applique à un objet de masse  $m$  est un vecteur  $\vec{G}$  de norme  $mg$  dirigé vers le bas. D'autre part, l'énergie potentielle de gravitation d'un tel objet situé à une hauteur  $h$  est  $E_g = mgh$ . Un calcul trop rapide montre que

$$W = \vec{G} \cdot \vec{h} = -mgh \quad (10.9)$$

parce que  $\vec{G}$  et  $\vec{h}$  ont des directions opposées, ce qui donne que le cosinus de l'angle entre les deux est  $-1$ . Un problème se pose : si l'objet retombe sur le sol, il va arriver à terre avec une certaine vitesse  $v$ , et donc une énergie cinétique  $mv^2/2$ . Mais cette énergie cinétique est *positive* !

**Y'a une faute ?**

L'équation (10.9) est manifestement fausse. Quelle est la faute ?

Disons que tu me donnes une boule de bowling de masse  $m$  et que je la soulève verticalement d'une hauteur  $h$ . Durant son trajet, la boule subit deux forces : celle de mon bras (dirigée vers le haut) et celle de la gravitation (dirigée vers le bas). Si je veux que la boule monte, j'ai intérêt à ce que la résultante soit dirigée vers le haut ; mais comme je veux que la boule arrive à la hauteur  $h$  avec une vitesse nulle, ma force ne peut pas être constante. Le problème la détermination de l'énergie potentielle comme le travail de la force qui fait monter l'objet contre la gravité s'annonce être difficile !

#### Travail et effort

Dans le cas de la gravitation, le travail d'une force mesure l'effort que déploie la personne qui produit la force. On peut même dire qu'un grand travail est un travail qui fatigue. En effet, ce qui fait la difficulté de soulever un objet, c'est son poids ( $mg$ ) et la hauteur à laquelle il faut le soulever ( $h$ ). Le travail à fournir pour lever une masse  $m$  à une hauteur  $h$  est justement  $mgh$ .

### 10.2.7 Tir vertical (second)

Nous lançons une pierre vers le haut avec une vitesse initiale  $v$ . À quelle hauteur va-elle monter avant de retomber ? Comme d'habitude, il s'agit d'une histoire de conservation de l'énergie. Au moment où la pierre est lancée, toute son énergie est cinétique, c'est à dire

$$E = \frac{mv^2}{2},$$

si  $m$  est la masse de la pierre. Au moment où la pierre est au plus haut, toute son énergie est potentielle. C'est à dire que l'énergie cinétique de départ s'est transformée en énergie potentielle :

$$E = mgh$$

où  $h$  est la hauteur que l'on cherche. Il est important de comprendre qu'il s'agit du même  $E$ . On égalise les deux expressions :  $mv^2/2 = mgh$ , et l'on remarque que les  $m$  se simplifient. La réponse ne dépend pas de la masse ! Ce qu'on trouve en isolant  $h$  est :

$$h = \frac{v^2}{2g}. \quad (10.10)$$

### 10.2.8 Course poursuite sur les toits

#### Comment ? Pourquoi ?

Trinity pouvait-elle atteindre l'immeuble d'en face ?

Nous discuterons de l'impossibilité de marcher verticalement sur un mur plus tard.

Au début de *Matrix*, Trinity saute depuis le toit d'un immeuble pour arriver dans la fenêtre de l'immeuble d'en face, un étage plus bas. Sa trajectoire est dessinée sur la figure 10.1. Nous supposons que Trinity arrive environ trois mètres

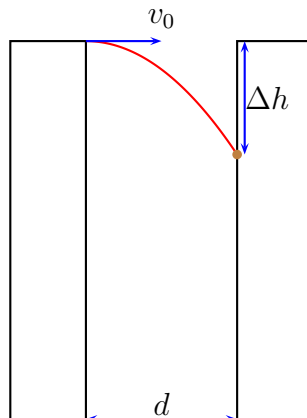


FIG. 10.1 – La trajectoire suivie par Trinity.

plus bas, la hauteur moyenne d'un étage. Cela signifie que sur la figure, nous avons  $\Delta h = 3$  m. De plus, nous évaluons à quatre mètres la largeur de la rue :  $d = 4$  m.

La question que nous nous posons est : à quelle vitesse devait-elle courir pour parcourir les trois quatre mètres horizontaux en ne tombant verticalement que de trois mètres ?

Première question : combien de temps il faut pour tomber de trois mètres ? Ça, c'est un problème de chute libre facile, c'est à dire un problème de MRUA. Il faut résoudre

$$\frac{gt^2}{2} = 3. \quad (10.11)$$

La réponse est que  $t = \sqrt{6/g}$ . Nous savons donc que Trinity doit faire son vol en exactement ce laps de temps : si elle mets plus de temps, elle arrivera trop bas, et si elle mets moins de temps, elle arrivera trop haut.

Maintenant, il faut chercher à quelle vitesse (horizontale) il faut sauter pour parcourir les 4 m de largeur de la rue en exactement ce laps de temps :

$$v_0 t = d = 4, \quad (10.12)$$

donc  $v_0 = 4/t = \sqrt{8g/3} \simeq 5.11 \text{ m/s} = 18.4 \text{ km/h}$ .

Cela n'est donc pas tellement rapide. Cela correspond à courir le 100 mètres en environ 20 secondes. À titre de comparaison, courir 100 m en dix seconde (ce qui est de niveau olympique) correspond à une vitesse de 10 m/s=36 km/h.

### 10.2.9 Tir horizontal

Il est maintenant bon de formaliser un petit peu ce que nous venons de voir. Nous considérons un objet lancé à la vitesse (horizontale)  $v_0$  à une hauteur  $h$ , comme par exemple un jet d'eau horizontal d'une fontaine.

Le mouvement d'un tel objet se passe en deux dimensions (c'est la nouveauté de ce chapitre : maintenant on fait des problèmes en  $2D$ ), il faut donc déterminer  $x(t)$  et  $y(t)$ .

En ce qui concerne  $x(t)$ , c'est à dire le mouvement horizontal, nous avons dit que la vitesse initiale était  $v_0$ . Aucune force horizontale n'est supposée dans le problème<sup>4</sup>, et donc il n'y a aucune raison que cette vitesse change. Nous pouvons donc voir  $x(t)$  comme un mouvement à vitesse constante :

$$x(t) = v_0 t. \quad (10.13)$$

Regardons maintenant le mouvement vertical. Nous avons supposé que la vitesse initiale était horizontale, c'est à dire que pour  $y(t)$ , nous sommes dans un cas sans vitesse initiale. Par contre, nous avons une force (la gravitation) et donc une accélération ( $g$ ). La position initiale est  $y(0) = h_0$ , donc

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (10.14)$$

---

<sup>4</sup>Je te rappelle que la gravitation est dirigée vers le bas, c'est à dire tout à fait *verticalement*.

Il n'y a donc rien de particulièrement nouveau sous le Soleil. Le seul truc est que nous avons un mouvement en deux dimensions, donc il nous faut travailler avec deux équations.

Juste par curiosité, tu voudrais savoir l'équation de la courbe rouge suivie par Trinity sur la figure 10.1 ? Il s'agit de trouver  $y(x)$  à partir des équation (10.13) et (10.14).

Ce qu'il faut faire, c'est éliminer la variable  $t$  qui est « en trop ». Pour cela, nous utilisons la bonne vieille technique de la substitution. L'équation (10.13) nous dit que

$$t = \frac{x(t)}{v_0}, \quad (10.15)$$

et donc l'équation (10.14) devient

$$y(t) = h - \frac{g}{2} \left( \frac{x(t)}{v_0} \right)^2 \quad (10.16)$$

Notre équation  $y(x)$  est donc

$$y(x) = h - \frac{gx^2}{v_0^2}. \quad (10.17)$$

### 10.2.10 Problème informatique

#### Comment ? Pourquoi ?

Dévoilons les coulisses : comment a été créé la figure 10.1 ?

Évidemment, créer les droites et les flèches, c'est facile. Tu peux par contre te demander comment créer la courbe pour que ce soit à l'échelle : tu peux mesurer que la courbe descend de 1.5 cm sur une distance de 2 cm, ce qui est l'échelle 1/200 par rapport à l'énoncé.

Si tu as deux sous de curiosité informatique, tu téléchargeras les sources de ce document [ici](#), et tu regarderas dans le fichier `figures_echa.py` la fonction `figure_Matrix`<sup>5</sup>.

Les lignes qui nous intéressent sont les suivantes :

```
g = 9.81
h = 10
d = 4
DeltaH = 3
vZero = math.sqrt(g*d^2/(2*DeltaH))
f = Fonction(h-(g*x^2)/(2*vZero^2))
```

---

<sup>5</sup>Sans dec, si tu aimes l'informatique, je te conseille de regarder ce fichier : ça te fera découvrir une manière de faire des dessins que tu ne soupçonnerais pas dans tes rêves les plus fous !

Les lignes qui définissent  $g$ ,  $h$  et  $d$  ne sont pas mystérieuses : il s'agit juste de poser les variables qui définissent la situation. Pour la suite, les trois lignes suivantes veulent dire

$$\Delta h = 3 \quad (10.18a)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2\Delta h}} \quad (10.18b)$$

$$f(x) = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (10.18c)$$

D'abord, on pose  $\Delta h = 3$ , ce qui correspond à l'énoncé du problème. La dernière ligne n'est rien d'autre que l'équation (10.17). La subtilité est que la valeur de  $v_0$  est posée *avant* de donner  $f$  parce que  $f$  a besoin de  $v_0$ . Mais il n'empêche que la valeur (10.18b) est choisie pour être la solution de l'équation  $f(d) = h - \Delta h$ .

### 10.2.11 Le tir oblique

#### Comment ? Pourquoi ?

#### Comment gagner au lancé du poids ?

Pour répondre à cette question, nous devons étudier le mouvement d'un objet que l'on lance en diagonal. La figure 10.2 montre quelques trajectoires. Nous verrons

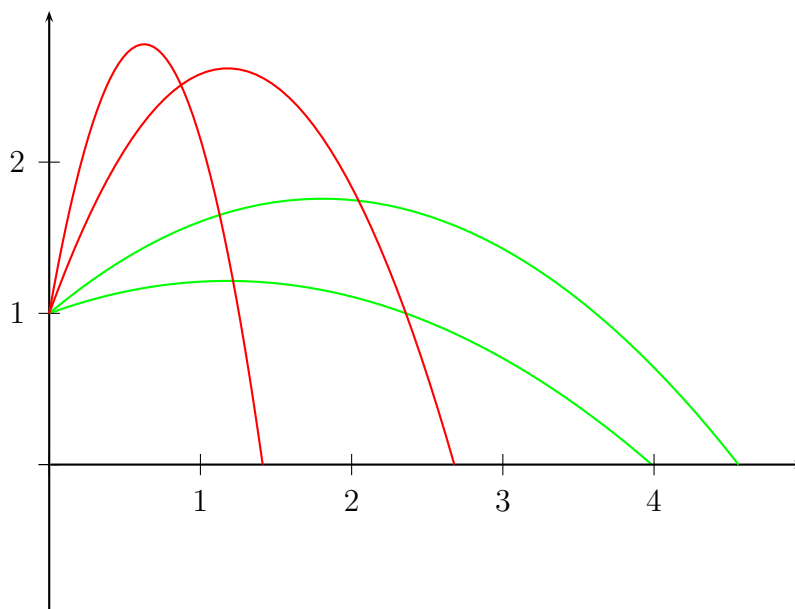


FIG. 10.2 – La trajectoire de quelques mobiles lancés en diagonal.

dans un instant le pourquoi, mais tu remarqueras (avec les trajectoires vertes) que, pour les petits angles, si on lance plus vers le haut, ça va plus loin, tandis que pour les grands angles (trajectoires rouges), lancer plus vers le haut fait aller moins loin. Nous en déduisons qu'il doit y avoir un angle optimal quelque part entre les deux. C'est cet angle optimal qu'il faudra déterminer si nous voulons gagner des médailles au lancer du poids.

Nous avons, essentiellement, la même situation qu'avant : nous devons déterminer les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  en sachant que  $x(t)$  est un MRU et  $y(t)$  est un MRUA. La difficulté est de savoir quelles sont les vitesses initiales de ces deux mouvements. Dans le cas du tir horizontal, c'était facile parce que la vitesse était complètement horizontale. Ici, la vitesse est en oblique.

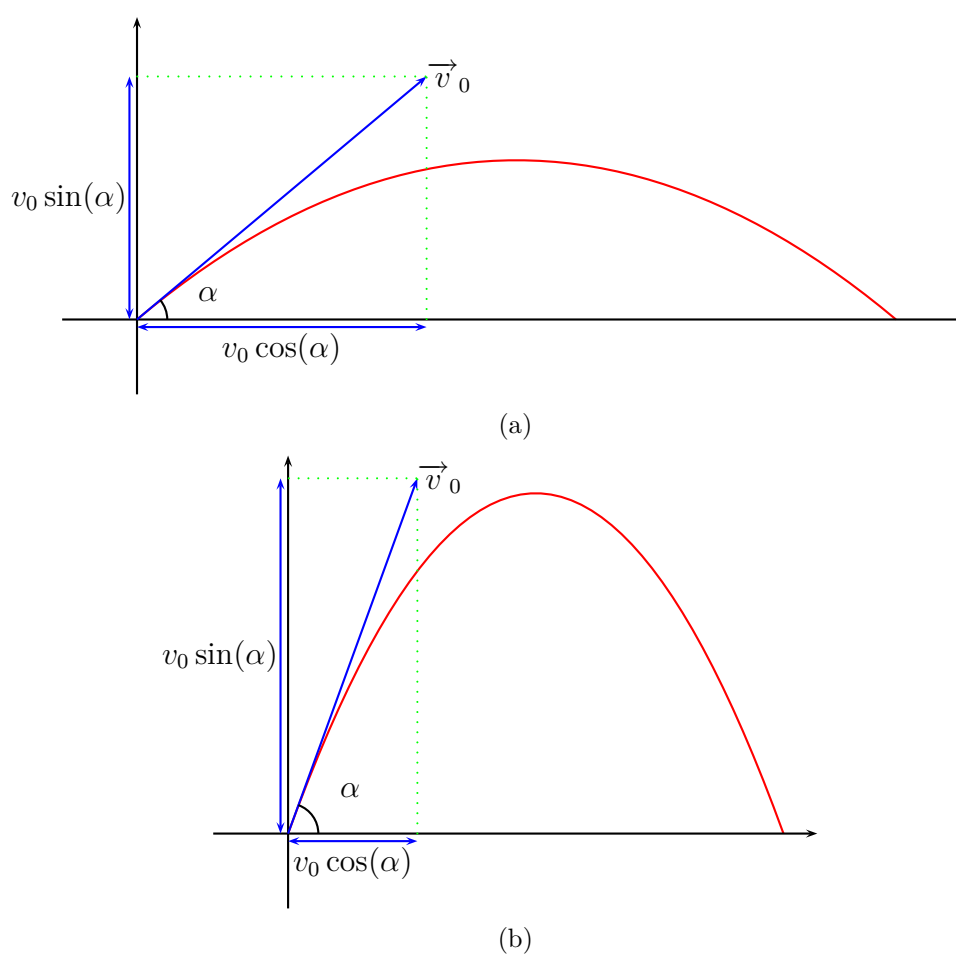


FIG. 10.3 – Tir oblique à différents angles. Un tout petit peu de trigonométrie nous donne les composantes de la vitesse initiale selon les deux axes.



**Idée !**

Nous allons décomposer le vecteur vitesse en ses composantes pour déterminer  $v_{0x}$  et  $v_{0y}$  comme sur la figure 10.3.

Si nous lançons un objet avec une vitesse  $v_0$  et un angle  $\alpha$ , le mouvement sera donné par les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  où  $x(t)$  est un simple MRU de vitesse initiale  $v_0 \cos(\alpha)$  et  $y(t)$  est le MRUA de la gravitation avec une vitesse initiale (verticale)  $v_0 \sin(\alpha)$ .

Les deux fonctions qui définissent le mouvement sont donc

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \quad (10.19a)$$

$$y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \quad (10.19b)$$

Voilà. Du point de vue de la physique profonde c'est déjà fini. Maintenant il n'y a plus qu'à un peu réfléchir sur ce que signifient les équations (10.19), et nous saurons quel est le bon angle pour gagner au lancer du poids.

L'équation pour  $y(t)$  dit à quelle hauteur se trouve le poids en fonction du temps. Notre question est de savoir à quelle distance le poids tombe. Il faut donc résoudre l'équation

$$y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad (10.20)$$

par rapport à  $t$ . Cela n'est jamais qu'une équation du second degré qu'on sait résoudre depuis la petite enfance<sup>6</sup>. Ici, c'est même plus facile parce qu'il n'y a pas de terme indépendant, et qu'on peut mettre  $t$  en évidence :

$$y(t) = t \left( v_0 \sin(\alpha) - \frac{gt}{2} \right), \quad (10.21)$$

et donc les solutions sont

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_2 &= \frac{2}{g} v_0 \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (10.22)$$

La solution  $t = 0$  n'est pas étonnante : nous avons supposé que l'on lançait le poids depuis la hauteur du sol. L'autre solution est celle qui nous intéresse : elle dit combien de temps l'objet lancé restera en l'air avant de toucher le sol.

Maintenant, pour savoir la distance parcourue par le poids, il suffit de reporter ce temps dans  $x(t)$  :

$$x(t_2) = \frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha). \quad (10.23)$$

---

<sup>6</sup>depuis le point 6.7.1.

Étant donné que le but de ce cours de physique est de gagner des médailles au lancer du poids, nous voulons trouver l'angle  $\alpha$  pour lequel cette fonction est la plus grande possible.

Le graphe de la fonction  $f(x) = \sin(x) \cos(x)$  est tracé sur la figure 10.4.

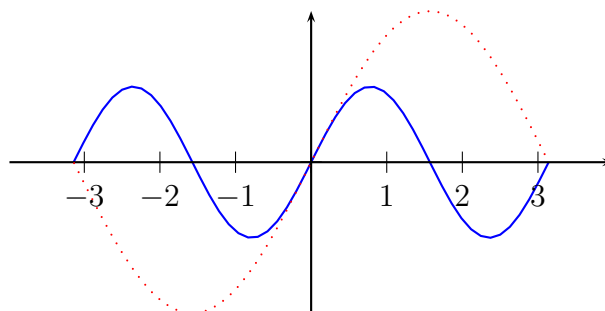


FIG. 10.4 – En bleu, la fonction qui nous intéresse :  $\sin(x) \cos(x)$ . Pour information, en rouge se trouve la fonction  $\sin(x)$

En regardant le graphe, on devine que le maximum est à la position  $x = \pi/4$ . Ne voulant rien laisser au hasard, nous allons calculer ce maximum. Pour cela, rien de tel qu'une petite formule de trigonométrie :

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}. \quad (10.24)$$

Donc notre score au lancer du poids sera maximum si on lance avec un angle  $\alpha$  tel que  $\sin(2\alpha)$  est le plus grand possible. Tu sais que  $\sin(x)$  est le plus grand possible (et vaut 1) lorsque  $x = \pi/2$ . Donc nous devons choisir  $2\alpha = \pi/2$ , ou encore

$$\alpha = \frac{\pi}{4}. \quad (10.25)$$

Il faut donc lancer à  $45^\circ$  pour lancer le plus loin possible.

À quelle distance est-ce que nous espérons que le poids retombe si nous suivons cette consigne de lancer à  $45^\circ$ ? Pour la trouver, il suffit de remettre  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  dans l'expression (10.23) qui donne la distance parcourue par le poids. En sachant que

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (10.26)$$

nous trouvons

$$x_{\text{gagnant}} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (10.27)$$

Noter qu'il y a quand même une morale : cette distance dépend encore fort de la vitesse à laquelle on lance. Pour gagner, il faudra donc non seulement lancer avec un angle de  $45^\circ$ , mais en plus lancer le plus fort possible.

À propos de « fort »...

**Y'a une faute ?**

Nous avons un vieux principe comme quoi toutes les masses se déplacent de la même façon dans le champ de gravitation. Cela se vérifie encore dans le fait que les équations que nous avons écrites ne dépendent pas de la masse des poids lancés. Or, dans la réalité, au lancer du *poids*, plus le poids est lourd, moins on lance loin.

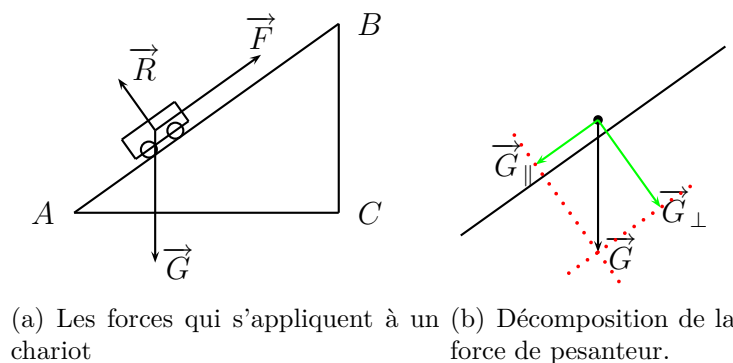
**10.2.12 Le plan incliné****Équilibre sur un plan incliné**

FIG. 10.5 – Chariot sur un plan incliné

La figure 10.5(a) montre les forces qui s'exercent sur un chariot que l'on tire sur un plan incliné avec une force  $\vec{F}$  qui lui est appliquée parallèlement au plan incliné. La force  $\vec{R}$  n'est autre que la réaction du support contre le chariot. C'est la force que la surface dure oppose au chariot pour éviter qu'il ne s'enfonce. La figure 10.5(b) montre comment la force de pesanteur (qui est verticale) se décompose en une partie  $\vec{G}_{\parallel}$  parallèle au plan et une partie  $\vec{G}_{\perp}$  perpendiculaire au plan. C'est la partie parallèle qui est responsable du fait que le chariot a tendance à retomber. La partie perpendiculaire est compensée par la force de réaction  $\vec{R}$ .

Pour que le chariot soit en équilibre, il faut que la résultante de toutes les forces qui s'y appliquent soit nulle. Le plan incliné se charge toujours tout seul de compenser avec  $\vec{R}$  la force  $\vec{G}_{\perp}$ ; on ne doit donc jamais se poser de questions à propos de cette dernière. La force qui nous intéresse (et qui intéresse surtout le gars qui est en train de fournir la force  $\vec{F}$ ) est la partie  $\vec{G}_{\parallel}$ . La condition d'équilibre est donc

$$\vec{F} = \vec{G}_{\parallel}. \quad (10.28)$$

**Exercice 67.**

Redessine la figure 10.5(b) avec un plan presque pas incliné. Remarque qu'alors, la

force  $\vec{G}_{\parallel}$  n'existe presque plus, ce qui correspond à l'intuition comme quoi moins le plan est incliné, moins le chariot a tendance à glisser vers le bas, et moins la force  $\vec{F}$  nécessaire à le maintenir en place est grande.

La figure 10.6 montre plus en détail comment traiter la décomposition de la force de pesanteur qui s'applique à un objet placé sur un plan incliné.

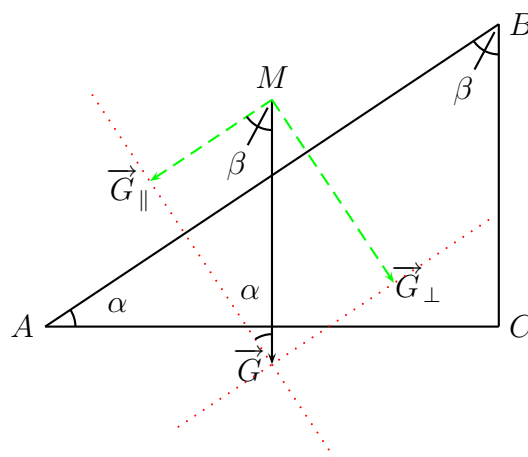


FIG. 10.6 – Décomposition d'une force de gravité sur un plan incliné

Afin d'obtenir la décomposition  $\vec{G} = \vec{G}_{\perp} + \vec{G}_{\parallel}$ , il faut dessiner quatre lignes : les perpendiculaires et parallèles au plan incliné passant par le début et la fin du vecteur  $\vec{G}$ . Aux intersections se trouvent les bouts de  $\vec{G}_{\perp}$  et  $\vec{G}_{\parallel}$ . Je laisse à la sagacité de la lectrice ou du lecteur de deviner laquelle est  $\vec{G}_{\parallel}$  et  $\vec{G}_{\perp}$ .

La difficulté est généralement de trouver les normes de  $\vec{G}_{\perp}$  et  $\vec{G}_{\parallel}$ . Pour cela, il faut faire un peu de trigonométrie dans les triangles rectangles formés par  $\vec{G}$ ,  $\vec{G}_{\perp}$  et  $\vec{G}_{\parallel}$ .

On suppose que la norme de  $\vec{G}$  est connue. Comme c'est la force de pesanteur appliquée à un objet,  $\|\vec{G}\| = mg$  où  $m$  est la masse de l'objet. On suppose aussi que l'on connaît les angles du triangle rectangle  $ABC$ . Comme il est rectangle,  $\beta = 90 - \alpha$  parce qu'il faut que la somme des angles internes du triangle soit 180.

Étant donné que  $\vec{G}_{\parallel}$  est parallèle à  $AB$  et que  $\vec{G}$  est parallèle à  $BC$  (car la gravitation est toujours verticale), on déduit que l'angle entre  $\vec{G}$  et  $\vec{G}_{\parallel}$  est égal à  $\beta$ .

### Exercice 68.

Comprendre pourquoi l'angle  $\alpha$  noté dans le triangle  $M\vec{G}_{\parallel}\vec{G}$  est bien le même

angle  $\alpha$  que celui à la base du plan incliné. Conseil : dans le même triangle, comprendre l'angle  $\beta$ .

À partir de là, on déduit que

$$\|\vec{G}_{\parallel}\| = \|\vec{G}\| \sin \alpha. \quad (10.29)$$

Maintenant nous pouvons récrire la condition d'équilibre  $\vec{F} = \vec{G}_{\parallel}$  en sachant que  $\|\vec{G}\| = mg$  si  $m$  est la masse de l'objet qui se trouve sur le plan incliné,

$$F = G \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha). \quad (10.30)$$

Cette formule signifie que si nous voulons tenir un chariot en équilibre sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$ , nous devons le tenir avec une force  $mg \sin(\alpha)$ .

Si nous appliquons une force moins grande, le chariot aura tendance à descendre, et si nous appliquons une force plus importante, nous faisons monter le chariot.

### Exercice 69.

En considérant des compléments d'angles droits et un peu de trigonométrie, déduire que

$$\|\vec{G}_{\perp}\| = \|\vec{G}\| \cos(\alpha).$$

### Mouvement uniforme sur un plan incliné

Une question classique est de savoir la force avec laquelle il faut tirer une masse sur un plan incliné pour que celle-ci avance à vitesse constante. La réponse est simple : la vitesse constante est obtenue avec la même force que l'équilibre. Il s'agit donc de compenser la composante parallèle de la force de gravitation : en utilisant la formule (10.29) se rapportant à la figure 10.6, on trouve

$$F = mg \sin \alpha = mg \frac{BC}{AB}. \quad (10.31)$$

Cette équation est la même que notre condition d'équilibre (10.30). Cela est tout à fait normal parce que c'est la force qu'il faut pour contrer la pesanteur. Si l'objet est au repos, il y reste, et si il a une vitesse initiale, il la garde.

### Accélération sur un plan incliné

Si nous laissons un chariot sur un plan incliné sans y toucher, il subit la composante parallèle de la force de pesanteur, c'est à dire  $mg \sin(\alpha)$ . Nous sommes donc dans le cas d'un mouvement accéléré dont l'accélération est

$$a = g \sin(\alpha). \quad (10.32)$$

Encore une fois, la masse n'apparaît pas.

## 10.3 Gravitation entre corps quelconques

### 10.3.1 La formule que Newton a trouvée

Il se fait que lorsque deux masses sont en présences, une force les attire (la force de **gravitation**). La principale caractéristique de cette force est que tous les corps, quelles que soient leurs masses se déplacent de la même manière dans un champ de gravitation donné.

Nous allons maintenant déduire une formule pour cette force.

### 10.3.2 Dépendance en les masses

En parlant du plan incliné, nous avons déjà vu des choses sur la façon dont la gravitation influence le mouvement des objets sur Terre. Nous allons maintenant étudier cette force plus en détail et voir comment la gravitation décrit les mouvements des planètes.

Encore une fois, c'est la propriété fondamentale du champ de gravitation qui va nous guider.

#### Idée !

Comme mentionné au début du chapitre que tous les objets se déplacent de la même façon dans un champ de gravitation donné. Cette propriété va nous permettre de deviner à quoi doit ressembler l'expression mathématique de la force exercée par un corps de masse  $m_1$  sur un corps de masse  $m_2$ .

Considérons un objet de masse  $m_1$  et un objet de masse  $m_2$ . Nous aimerions savoir quelle est la force de gravitation que  $m_1$  impose à  $m_2$ . Si cette force vaut  $F$ , alors l'accélération de  $m_2$  sera  $a_2 = F/m_2$ . Mais la propriété fondamentale de la gravitation nous dit que l'accélération de la masse  $m_2$  dans le champ de gravitation de  $m_1$  ne dépend pas de  $m_2$ . Affin que  $F/m_2$  ne dépende pas de  $m_2$ , il faut que  $F$  soit proportionnelle à  $m_2$ . Nous écrivons donc

$$F_{1 \text{ sur } 2} = km_2 \quad (10.33)$$

où  $k$  est encore à fixer. Par symétrie, la force que  $m_2$  impose à  $m_1$  doit être la même (loi d'action réaction). Mais l'accélération de  $m_1$  ne peut pas dépendre de  $m_1$ , donc

$$F_{2 \text{ sur } 1} = k'm_1. \quad (10.34)$$

Affin que ces deux expressions soient égales, il faut que

$$F_{2 \text{ sur } 1} = F_{1 \text{ sur } 2} = \alpha m_1 m_2 \quad (10.35)$$

où  $\alpha$  est encore à déterminer. Ce que nous venons de prouver, c'est que la force qu'une masse  $m_1$  impose à une masse  $m_2$  est proportionnelle au produit  $m_1 m_2$ . Cela est une conséquence nécessaire du fait que le mouvement d'un objet dans un champ de gravitation donné ne dépend pas de la masse de l'objet.

### 10.3.3 Dépendance en la distance

Il reste à voir comment la distance entre les deux masses joue. La réponse est que la force diminue comme le carré de la distance :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (10.36)$$

La raison en est subtile, mais assez profonde<sup>7</sup>.

#### Comment ? Pourquoi ?

Deux masses s'attirent. Mais comment fait le Soleil pour faire savoir aux planètes qu'il existe ? Comment les planètes savent qu'elles sont dans le champ de gravitation du Soleil ?

Comment une masse fait savoir aux autres qu'elle existe ?

Cela est une vaste question à laquelle nous n'allons pas répondre complètement. Nous allons juste amener un minuscule élément de réponse.

Supposons qu'une masse lance des petites particules<sup>8</sup> dans l'espace pour faire savoir qu'elle est là. Une masse un peu plus loin « verra » d'autant plus de masse (et donc subira d'autant plus de force de gravitation) qu'elle recevra de ces petites particules.

Cela est à voir comme une lampe émet de la lumière : plus on reçoit de cette lumière, plus on est éclairé. Ici, même combat : plus on reçoit de ces particules de gravitation, plus on subit une grande force.

Supposons qu'une masse émette 1000 de ces particules. Regarde la figure 10.7 pour te donner une idée de ce qu'il se passe quand on s'éloigne de la source.

Quand on est proche du centre, les particules sont encore très proches les unes des autres. Une autre masse qui serait là en verra donc beaucoup. Si on est plus loin, la densité de ces particules diminue, et une masse située plus loin en verra moins.

Au fait, est-ce que tu te souviens que la surface d'une sphère de rayon  $r$  est donnée par la formule

$$S(r) = 4\pi r^2, \quad (10.37)$$

<sup>7</sup>Pour l'électromagnétisme, ce sera la même chose.

<sup>8</sup>si tu veux frimer, tu peux les appeler **graviton**.

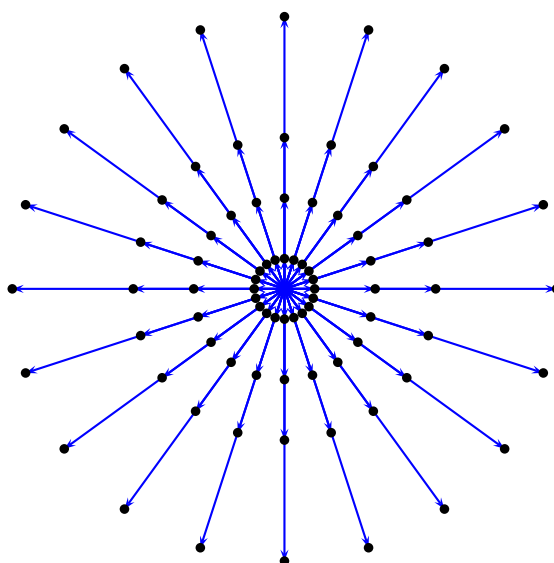


FIG. 10.7 – Les petites particules de gravitation. Plus on s'éloigne, plus elles s'espacent les unes des autres

ou bien tu avais déjà oublié? Bon, ben maintenant tu le sais. Supposons donc que notre masse ait envoyé 1000 particules. Quelle est la densité de ces particules lorsqu'on est à une distance de 1 m? Il y en a 1000 sur une surface de  $4\pi$ , donc la densité est de

$$\rho(1) = \frac{1000}{4\pi}. \quad (10.38)$$

Plus généralement, si on est à une distance  $r$ , la densité des particules de gravitation sera de

$$\rho(r) = \frac{1000}{4\pi r^2} = \frac{1000}{4\pi} \frac{1}{r^2}. \quad (10.39)$$

Le seul point à retenir est que cette densité est d'autant plus petite que  $r$  est grand, et que la densité décroît comme  $\frac{1}{r^2}$ .

Nous en déduisons que la gravitation est d'autant plus petite que le *carré* de la distance est petit. D'où la formule

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (10.40)$$

### 10.3.4 Petite vérification

Qui dit force dit accélération. Mettons qu'une planète de masse  $m$  soit dans le champ de gravitation d'une étoile de masse  $M$ . Quelle est l'accélération qui va se produire?



La force qui attire la planète vers l'étoile est

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (10.41)$$

L'accélération de la planète est cette force divisée par la masse de la planète, c'est à dire

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{1}{m} \frac{Mm}{r^2} = G \frac{M}{r^2}. \quad (10.42)$$

Il est à noter que cette accélération *dépend* de la masse de l'étoile, mais *ne dépend pas* de la masse de la planète parce que les  $m$  se sont simplifiés ! Ceci est conforme à notre hypothèse comme quoi le mouvement dans un champ de gravitation donné ne dépend pas de la masse de l'objet qui subit la gravitation de l'autre. Cela est un des faits les plus profonds de toute l'histoire de la physique<sup>9</sup>.

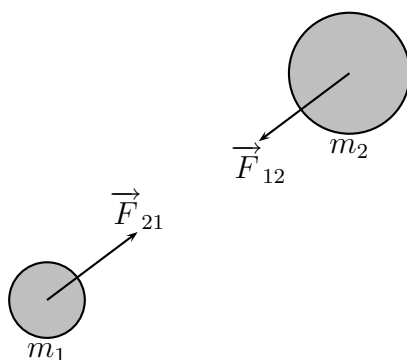


FIG. 10.8 – Les forces qui attirent les deux masses l'une vers l'autre. Tu noteras que les deux forces ont la même intensité, et ont une direction opposée. Ceci, en accord avec le principe d'action-réaction.

À ce point, nous devons faire quelques remarques.

- La loi donnée n'est valable que pour des masses ponctuelles. On peut prouver que cette loi est également valable pour des masses sphériques quand on suppose que toute la masse se trouve au centre. Ce dernier cas est le cas des planètes.
- Implicitement, cette loi suppose une action à distance et instantanée. Cela pose la question de savoir comment la force est transportée ? Comment une masse « sait » qu'une autre masse existe plus loin ? Ces questions ne sont pas encore réglées aujourd'hui, bien que la théorie de la relativité générale ait bien fait avancer la question.

---

<sup>9</sup>et donc de l'histoire des sciences et donc de l'histoire de l'humanité.

- La gravitation est la première force à avoir été étudiée en détail. Son étude a commencé avec Newton qui en a donné une très bonne formulation, bien avant que l'on ait découvert l'électricité ou le magnétisme. Paradoxalement, elle est encore aujourd'hui la force la plus mystérieuse. En 1915, Einstein a proposé la relativité générale comme théorie de la gravitation. Cette nouvelle théorie est bien plus précise que celle de Newton, mais certaines questions demeurent. Pourquoi le mouvement dans un champ de gravitation est-il indépendant de la masse, pourquoi la gravitation est-elle tellement plus faible que l'électricité? Pire, de nouveaux problèmes surviennent, par exemple la théorie prévoit des trous noirs, qui sont une faille dans la cohérence mathématique de la théorie.  
Bref, en 2009, nous pouvons dire que nous ne comprenons encore pas grand chose à la gravitation.

### 10.3.5 Le poids

On a déjà parlé du poids au point 9.7.3. À ce moment nous avons dit que le poids d'un objet était la force de gravitation qui s'applique à un objet. Nous avons en particulier parlé du poids sur Terre. Nous allons maintenant voir comment la loi de Newton décrit le poids d'un objet sur Terre.

Nous notons  $r_t$  le rayon de la Terre et par  $M_t$  la masse de la Terre. Comme la Terre est une sphère, nous pouvons supposer que toute sa masse est en son centre, c'est à dire à une distance de  $r_t$  en-dessous de nos pieds (à peu près 6500 km). Une personne qui a une masse  $m$  qui marche sur Terre subit la force de gravitation d'une masse  $M_t$  située à une distance  $r_t$ , c'est à dire

$$P = G \frac{M_t m}{r_t^2}.$$

Tant que l'on suppose que la Terre est bien sphérique, on voit sur cette formule que la force de gravitation ne dépend pas de l'endroit où l'on est sur Terre. Tout le monde subit la même force. L'accélération subie, que l'on note  $g$  dans le cadre de la gravitation, vaut  $g = P/m$ . Nous trouvons donc que

$$g = \frac{1}{m} \left( G \frac{M_t m}{r_t^2} \right) = G \frac{M_t}{r_t^2}.$$

Il est *très* important de remarquer que  $m$  s'est simplifié! La réponse ne dépend pas de la masse. En fait, la réponse dépend de  $G$  qui est une constante universelle (qui est la même partout dans l'univers), et de la masse et le rayon de la Terre, qui sont des caractéristiques de la Terre. En résumé :

Tous les objets tombent sur Terre avec la même accélération. Cela est dû au fait que la masse a une double signification.

**Masse inertielle** La masse d'un objet rentre dans la formule  $F = ma$ .

Dans cette formule, la masse a comme fonction de résister à une force : plus la masse est grande, moins l'accélération sera grande.

**Masse pesante** La masse du même objet rentre dans la formule de la force de gravitation :  $F = GMm/r^2$ . Dans cette formule, la masse a comme fonction d'attirer les autres masses : plus un objet est massif, plus il attirera les autres objets.

### 10.3.6 Diminution du poids avec la distance

Que se passe-t-il si la personne se promène au sommet de l'Éverest ? Cette montagne fait neuf kilomètres de haut. Au lieu d'être à 6500 kilomètres du centre de la Terre, cette personne est donc à 6509 kilomètres. Le rapport de son poids au sommet et de son poids niveau de la mer vaut :

$$\frac{GM_t m / (6509)^2}{GM_t m / (6500)^2} = 0.997.$$

C'est à dire qu'en montant au sommet de l'Éverest, certes notre poids diminue, mais on conserve quand même 99.7% de notre poids.

Un adage dit que dans l'espace, on est en apesanteur, c'est à dire qu'on est tellement loin de la Terre que l'on ne sent plus la gravitation. Du coup, on flotte. Vérifions ça. Que vaut le poids d'un ou d'une astronaute de masse  $m$  dans la **station spatiale internationale** ? Cette dernière orbite à une altitude de 390 km. Le rapport de poids d'un astronaute au sol ou dans la station vaut :

$$\frac{(6500)^2}{(6500 + 390)^2} = 0.889.$$

#### Y'a une faute ?

Pourquoi est-ce que les astronautes semblent ne pas subir la pesanteur, alors qu'ils subissent encore en réalité presque 90% de la gravitation qu'ils subissent sur Terre ?

Pourquoi la station spatiale ne tombe pas ? Pourquoi la Terre ne tombe pas sur le Soleil ?

### 10.3.7 Mise en orbite

Pourquoi la Terre ne tombe-t-elle pas sur le Soleil ?

### Première explication : force centrifuge

Notons  $m$  la masse de la Terre,  $M$  celle du Soleil et  $R$ , la distance entre la Terre et le Soleil. Ce qui est vrai, c'est que la Terre subit une force

$$F_g = G \frac{Mm}{R^2} \quad (10.43)$$

qui l'attire vers le Soleil.

Mais tu sais aussi que la Terre tourne autour du Soleil, et subit donc une force centrifuge qui l'éloigne du Soleil. Le truc vraiment miraculeux est que la Terre tourne exactement à la bonne vitesse pour que cette force centrifuge compense la force de gravitation, de telle manière à ce que l'orbite de la Terre soit stable.

Peut-on savoir à quelle vitesse elle tourne ? Ce n'est pas très difficile : il suffit d'égaliser la force centrifuge avec la force de gravitation :

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}. \quad (10.44)$$

Nous pouvons isoler  $v$  en fonction des autres paramètres :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (10.45)$$

Tu noteras encore une fois que  $m$  s'est simplifié. Nous verrons dans quelques minutes pourquoi ce fait sauve la vie des astronautes.

La formule (10.45) permet aussi de savoir  $M$  en fonction des autres paramètres :

$$M = \frac{Rv^2}{G}. \quad (10.46)$$

Cette formule est assez intéressante parce que si on connaît la constante  $G$ , on peut savoir la masse du Soleil rien qu'en mesurant le rayon de l'orbite terrestre et la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil. En particulier, on peut savoir la masse du Soleil sans devoir d'abord mesurer la masse de la Terre.

Sur la figure 10.9, la force centrifuge est donnée en vert, tandis que la force de gravitation est donnée en cyan. Il faut choisir la vitesse de mise en orbite de telle manière à ce que ces deux forces s'annulent.

### La simplification sauve la vie des astronautes

La formule (10.45) ne contient pas  $m$ . Cela est une chance parce que les astronautes n'ont pas la même masse que la station dans laquelle ils vivent. Si la vitesse de mise en orbite dépendait de la masse, il faudrait faire tourner les astronautes à une vitesse différente de la station !

### Seconde explication : la Terre « rate » le Soleil

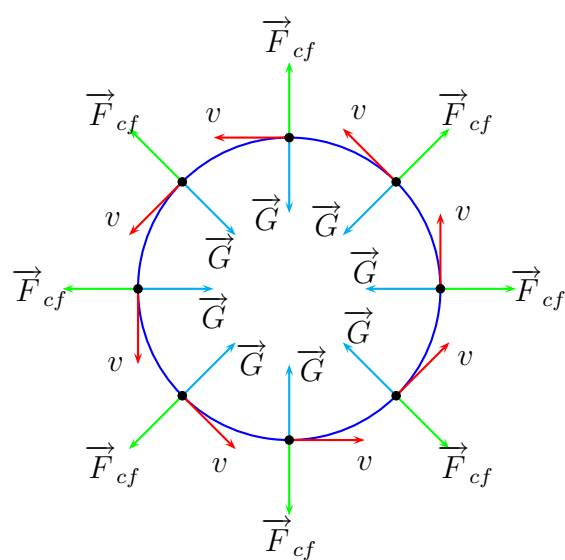


FIG. 10.9 – L'art de la mise en orbite est de donner la vitesse exacte qu'il faut pour que la force de gravitation soit exactement compensée par la force centrifuge.



# Chapitre 11

## Électricité

### 11.1 Généralité sur les courants électriques

### 11.2 Résistances

#### Exercice 70.

Lorsqu'un informaticien développant des logiciels pour des GSM travaille, il optimise son code pour que le GSM consomme le moins possible<sup>1</sup>, afin d'augmenter l'autonomie de la batterie.

Un développeur travaille sur un GSM dont la batterie fait 13 mAh. Suite à une optimisation du code, le GSM passe d'une consommation de 3 W à 2.5 W. Combien de temps le GSM peut resté allumé en plus ?

Le GSM fonctionne avec une tension de 3.6 V.

---

<sup>1</sup>Le monde de l'optimisation de code informatique est passionnant. Il faut savoir que la façon de diminuer la *consommation* n'est pas spécialement la même que celle pour diminuer les *temps de calcul*.





# Chapitre 12

## Relativité

### 12.1 Relativité en mécanique newtonienne

#### 12.1.1 Relativité du mouvement

Prenons quelqu'un qui cours le cent mètres en onze secondes. Par rapport à un spectateur dans les gradins, il se sera déplacé de cent mètres. Mais si je cours à côté de lui de telle façon à avoir parcouru 80 mètres le temps qu'il en fasse cent, alors par rapport à moi l'athlète ne se sera déplacé que de 20 mètres. Par contre, par rapport à mon chronomètre, il aura également mit onze secondes : ce n'est pas parce que je cours que mon chronomètre s'affole !

Entre moi et les spectateurs, on a donc une loi de transformation

$$x' = x - vt \qquad t' = t. \qquad (12.1)$$

C'est à dire que la distance  $x'$  qu'aura parcouru l'athlète par rapport à moi vaut la distance  $x$  parcourue par le spectateur moins la vitesse que j'ai courue moi-même, c'est à dire moins  $vt$ .

#### 12.1.2 Bob et Alice

Formalisons le concept de changement de repères. Pour cela, prenons deux amoureux, Bob et Alice<sup>1</sup>. Mettons que Bob reste assis sur un banc pendant qu'Alice cours en ligne droite à une vitesse  $v$ . Tout deux déclenchent leur chronomètre quand Alice passe devant Bob. À tout moment, Bob et Alice ont leur repères de temps et d'espace. Par exemple si après un temps  $t$ , Alice voit une peau de banane à 1 mètre devant elle, elle va dire « Il y a une peau de banane à un mètre . », tandis que Bob va dire « Il y a une peau de banane à  $(1 + vt)$  mètres ».

---

<sup>1</sup>C'est plus poétique que dire « soit  $A$  et  $B$ , deux observateurs ».

Plus généralement, si il se passe quelque chose à la position  $x$  au temps  $t$  pour Bob, ce quelque chose se passera au temps  $t' = t$  à l'endroit  $x' = x - vt$  pour Alice parce qu'en un temps  $t$ , elle aura déjà avancé d'une distance  $vt$ .

Ça c'est ce dont tout le monde était persuadé depuis Galilée ... jusqu'à Einstein.

## 12.2 Invariance de la vitesse de la lumière

### 12.2.1 Champ de gravitation et électrique

Nous avons vu à la page 223 que la force de gravitation s'écrivait

$$F_{grav} = G \frac{mm'}{r^2},$$

tandis que la force électrique entre deux charges  $q$  et  $q'$  est donnée par

$$F_{elec} = k \frac{qq'}{r^2}. \quad (12.2)$$

Nous avons aussi fait remarquer que dans le cas de la gravitation, la force a l'air d'être instantanée, et que cela posait quelques problèmes conceptuels. La force électrique a apparemment le même problème. Une différence entre les deux est qu'une charge électrique c'est tout petit et qu'on peut expérimenter à souhait, tandis que pour avoir une masse dont on peut mesurer le champ de gravitation correctement, il faut quelque chose grand comme la Terre<sup>2</sup>.

### Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique

Si un micro est placé juste à côté de ton oreille, et qu'il commence à faire biiiiip, tu l'entends directement. Quand il s'arrête, tu ne l'entends plus. Si le micro est placé à 600 m de toi, tu ne commenceras à l'entendre que deux secondes après le commencement du son, et tu continueras à l'entendre deux secondes après qu'il ait fini.

Eh bien, pour la force électrique, on a pu mesurer que c'est la même chose (sauf que ça va beaucoup plus vite). Si on place une charge quelque part, on ne ressent la force (12.2) qu'après qu'elle ait eut le temps d'arriver. Si on déplace la charge électrique, on continue à ressentir la même force pendant un certain temps : il faut

---

<sup>2</sup>Une autre différence fondamentale est qu'il existe des charges électriques négatives, mais pas de masses négatives ; de ce fait on ne peut pas construire d'isolant gravitationnel, contrairement aux isolants électriques qui existent. Cela augmente encore la difficulté de faire des expériences avec la gravitation.

que la modification du champ électrique ait le temps d'arriver. Exactement comme quand on fait des remous quelque part dans un étang : il faut du temps que les remous arrivent plus loin.

On a pu faire des dizaines d'expériences de ce type avec l'électricité, le magnétisme et la lumière ; et les résultats sont clairs : il faut du temps pour que ça se déplace. Tout cela provoque des ondes électromagnétiques qui se déplacent à une vitesse finie. On peut produire de telles ondes avec n'importe quel courant électrique alternatif.

### Pourquoi pas la gravitation ?

La gravitation telle que donnée par Newton pose le même problème de vitesse de propagation que l'électricité. Est-ce qu'en réalité la gravitation se propage également à une vitesse finie ?

Avec la gravitation c'est beaucoup plus compliqué parce qu'elle est beaucoup plus faible, et donc c'est beaucoup plus difficile à détecter. D'après la théorie d'Einstein de la gravitation, la gravitation devrait également produire des ondes gravitationnelles. Seulement, si un simple courant électrique suffit pour mesurer une onde électromagnétique, afin de mesurer une onde gravitationnelle, il faudrait un déplacement de masse de l'ampleur d'une étoile qui explose. Or ça, on ne sait pas produire dans un laboratoire. Les physiciens sont donc pour l'instant (2009) en train d'attendre qu'une étoile explose pas trop loin d'ici afin d'être capable de mesurer une onde gravitationnelle.

L'existence de ces ondes de gravitation ne fait aucun doute dans la tête d'aucun physicien parce qu'elles sont une conséquence logique (et mathématique) de la théorie de la relativité générale, laquelle a déjà eut beaucoup de confirmations expérimentales. Mais comme on est dans le cadre d'une science expérimentale, il faut être patient et attendre d'en avoir effectivement observée une avant de dire avec certitude que ça existe.

### 12.2.2 Support du champ : pas d'éther

Nous avons dit qu'une onde électromagnétique se propage comme une onde sonore (quoique beaucoup plus vite). Une question se pose alors. En effet, une onde sonore est matérialisée par de l'air qui vibre. Qu'est-ce qui vibre pour une onde électromagnétique ?

Étant donné que les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide (c'est pour ça que la radio fonctionne dans l'espace), la question est problématique. Les physiciens ont donc supposé que tout l'univers était rempli d'un fluide invisible appelé **l'éther**. L'électromagnétisme consiste en une vibration de l'éther, exactement comme l'acoustique consiste en une vibration de l'air.

En fait, vérifier cette hypothèse n'est pas très compliqué. En effet il n'y a aucune raison que l'éther suive la Terre dans son mouvement. Or la Terre se déplace à environ 30 km/s autour du Soleil. Donc les ondes électromagnétiques doivent se propager plus vite dans le sens du mouvement de la Terre que dans le sens perpendiculaire. Tout comme le son se propage plus vite dans le sens du vent.

La célèbre expérience de **Michelson-Morley** a mesuré cet effet ...et ce fut la consternation : il n'y a aucun effet ! Or, la lumière se déplace à 300.000 km/s ; une variation de 30 km/s devrait être détectable !

Mais rien ! On a recommencé les expériences dans tout les sens, à tous les mois de l'année, à tous les endroits de la Terre. On n'a pas observé un poil de variation de la vitesse de la lumière. Et ça, ça pose un gros problème à la physique.

### 12.2.3 Le problème

Si je joue au football dans un train qui avance à 100 km/h et que je lance une balle à 20 km/h, quelqu'un au sol mesura la vitesse de la balle soit à 120 km/h soit à 80 km/h d'après que l'on ait shooté vers l'avant ou l'arrière du train. Cela paraît logique. Mais ce qu'on vient de voir c'est que ça ne marche pas avec la lumière.

Si un train avance à 100.000 km/s et qu'on y allume une lampe de poche, la lumière avancera à 300.000 km/s par rapport au train et 400.000 km/s par rapport au sol. Non ! Justement pas ! La lumière avancera quand même à 300.000 km/s par rapport au sol.

Là encore, on a fait des dizaines d'expériences partout, sur Terre, dans des avions, dans l'espace avec des atomes, des lampes de poche et des horloges atomique, et dans tous les sens, le sens de déplacement de la Terre, le sens inverse, le sens perpendiculaire, vers le haut, vers le bas : rien ! Personne n'a jamais observé un rayon de lumière se déplacer à une autre vitesse que 300.000 km/s.

Le problème est que le principe d'addition des vitesses est faux pour la lumière. Puisque l'expérience nous force, nous devons faire avec.

#### Loi numéro 2.

*La réalité est que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. On note  $c$  cette vitesse. C'est une constante fondamentale de la Nature.*

Étant donné que c'est une loi expérimentale, nous n'en pouvons rien. C'est la nature qui est comme ça. En particulier tu ne peux pas en vouloir à ton prof de physique d'avoir inventé une théorie compliquée. Ce n'est pas lui qui l'a inventée et ce n'est pas de sa faute.

## 12.3 Conséquences

C'est maintenant que les choses vraiment graves commencent (cela soit dit sans vouloir te faire peur). Afin d'un peu simplifier les choses, nous n'allons étudier que les mouvements en une dimension, c'est à dire sur une droite.

### 12.3.1 Ligne d'univers

Un événement a une coordonnée  $(t, x)$ . Si je pose un objet juste à mes pieds (disons en  $x = 0$ ), ses coordonnées seront à tout moment  $(t, 0)$ . Il est bon de voir cette coordonnée comme l'équation paramétrique d'une droite horizontale dans le plan des coordonnées  $t$  et  $x$ . Plus généralement quand un mobile effectue un mouvement  $x(t)$ , on appelle la **ligne d'univers** du mobile la ligne (pas forcément droite)  $(t, x(t))$ . Dans le premier exemple, on avait  $x(t) = 0$  pour tout  $t$ .

Le cas d'un mobile se déplaçant à vitesse constante  $v$  donne comme ligne d'univers la droite<sup>3</sup>  $(t, x_0 + vt)$ , et un objet qui se déplace selon un MRUA a comme ligne d'univers

$$\left(t, x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\right).$$

### 12.3.2 Transformations de Lorentz

Reprenons les amours scientifiques de Bob et Alice, mais cette-fois, analysons celles-ci en tenant compte du fait que la vitesse de la lumière soit invariante. Maintenant, si Bob voit se passer quelque chose au temps  $t$  à l'endroit  $x$ , on va dire qu'Alice voit cette chose au temps  $t'$  à la position  $x'$ , et on va chercher  $(t', x')$  en fonction de  $(t, x)$ .

Posé en termes mathématiques, le problème s'énonce ainsi : trouver les fonctions  $f$  et  $g$  telles que les formules

$$t' = f(t, x) \tag{12.3a}$$

$$x' = g(t, x) \tag{12.3b}$$

donnent les coordonnées vues par Alice pour un événement vu par Bob à l'instant  $t$  au point  $x$ . Une première étape importante est franchie par la proposition suivante<sup>4</sup>.

#### Proposition 97.

*Les fonctions  $f$  et  $g$  contenues dans les transformations (12.3) sont nécessairement*

<sup>3</sup>bon exercice de révision de ton cours de math de vérifier que c'est une droite.

<sup>4</sup>dont je te suggère fortement de ne pas lire la preuve si tu ne veux pas que ton cerveau éclate.

linéaires (affines), c'est à dire qu'elles doivent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}t' &= \alpha t + \beta x + p \\x' &= \gamma t + \delta x + q\end{aligned}$$

pour certaines fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p$  et  $q$  de la vitesse d'Alice relativement à Bob.

*Démonstration.* Pendant qu'Alice court et que Bob la regarde, Ève tente de lancer une pierre sur Alice (Ève est jalouse). Bob et Alice regardent deux événements. Le premier est la pierre qui quitte la main de Ève, et le second est la pierre qui percute le sol. Pour Bob, le jet s'est passée au temps  $t_0$  au point  $x_0$ , et la pierre touche le sol un petit peu plus tard, au temps  $t_0 + \Delta t$  et un peu plus loin, au point  $x_0 + \Delta x$ . Bob écrit donc ceci sur sa feuille de papier :

$$\begin{aligned}E_1 &= (t_0, x_0) \\E_2 &= (t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x),\end{aligned}$$

tandis qu'Alice, en observant les mêmes deux événements, aura noté

$$\begin{aligned}E'_1 &= (f(t_0, x_0), g(t_0, x_0)) \\E'_2 &= (f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x), g(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)).\end{aligned}$$

Bob et Alice se demandent combien de temps la pierre est restée en l'air et quelle distance elle a parcourue. Comme on l'a vu dans les principes d'homogénéité à la section 2.1.3, les deux seules quantités pertinentes (qui ont un sens physique) pour Bob sont  $(t_0 + \Delta t) - t_0$  et  $(x_0 + \Delta x) - x_0$ , c'est à dire  $\Delta t$  et  $\Delta x$ . En effet, si Bob avait choisit de s'asseoir autre part et si Alice avait commencé à courir un peu plus tard, ça n'aurait rien changé à la longueur du jet de Ève.

D'une façon ou d'une autre, il doit exister une façon de déduire les mesures de Alice en connaissant celles de Bob ; je ne connais pas avec quelles formules, mais ces formules ne peuvent contenir que  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  et  $v$  parce que ce sont les seules quantités qui définissent tous les événements.

Cela dit, Alice va caractériser le mouvement de la pierre avec la différence des coordonnées entre le jet et la chute sur le sol mesurées par elle-même. En d'autres termes, pour Alice ce qui compte c'est la différence entre  $E'_1$  et  $E'_2$ , soit

$$(f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x), g(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)) - (f(t_0, x_0), g(t_0, x_0)). \quad (12.4)$$

Mais nous venons de signaler que ce qu'Alice mesurait devait pouvoir être exprimé en termes de  $\Delta t$  et  $\Delta x$ . Nous concluons que la différence (12.4) ne dépend en fait pas de  $x$  et  $t$  mais seulement de  $\Delta t$  et  $\Delta x$ .

Prenons maintenant une notation plus compacte et notons  $X = (t, x)$ ,  $\Delta X = (\Delta t, \Delta x)$  puis  $F = (f, g)$ . Avec ça, l'expression (12.4) se note  $F(X + \Delta X) - F(X)$ .

Comme mentionné, cette expression ne dépend que de  $\Delta x$ . En particulier, elle ne dépend pas de  $X$ .

Maintenant tu vas comprendre pourquoi on apprend les dérivées dans ton cours de math. Comme  $F(X + \Delta X) - F(X)$  ne dépend pas de  $X$ , le rapport  $(F(X + \Delta X) - F(X))/\Delta X$  non plus. La limite de ce rapport quand  $\Delta X$  tend vers zéro non plus :

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} \quad (12.5)$$

ne dépend pas de  $X$ . Tu reconnais là la dérivée de  $F$  au point  $X$ . En d'autres termes,  $F'(X)$  est constante, elle ne dépend pas de  $X$ . Disons donc que  $F'(X) = a$ . Tu connais beaucoup de fonctions dont la dérivée est constante ? Non ? En effet, il n'y en a pas beaucoup. Les fonctions qui vérifient  $F'(X) = a$  signifie sont toutes de la forme

$$F(X) = aX + b.$$

À ce niveau, il convient de re-déballer les notations compactes : si  $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  et  $b = (p, q)$  on trouve

$$f(t, x) = \alpha t + \beta x + p \quad (12.6a)$$

$$g(t, x) = \gamma t + \delta x + q, \quad (12.6b)$$

comme annoncé.

□

Nous savons que lorsque  $(t, x) = (0, 0)$ , alors  $(t', x') = (0, 0)$ . En effet, Bob et Alice ont lancés leurs chronos en même temps au moment où ils étaient au même endroit. En mettant  $(t, x) = (0, 0)$  dans les équations (12.6), on trouve  $(t', x') = (p, q)$ , et donc  $p = q = 0$ . Ça fait une chose de réglée ; on se retrouve avec

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = \gamma t + \delta x. \end{cases} \quad (12.7a)$$

$$(12.7b)$$

Quelles sont les contraintes à vérifier pour que ces transformations décrivent correctement la physique que l'on cherche à écrire ?

- Il faut que les transformations décrivent correctement que Alice avance à une vitesse  $v$  par rapport à Bob,
- dans le même ordre d'idée, il faut que l'on trouve que Bob avance à la vitesse  $-v$  par rapport à Alice,
- il faut que si Alice et Bob observent un rayon lumineux, ce rayon aille à la vitesse  $c$  par rapport à Alice et à la même vitesse  $c$  par rapport à Bob,

- d. enfin, il faut avoir le principe de relativité, c'est à dire que comme les équations (12.7) disent ce que Alice voit en fonction de ce que Bob voit, on demande que les équations qui disent ce que Bob voit en fonction de ce que Alice voit soient les mêmes. En d'autres termes, il faut que les transformations et les transformations inverses soient les mêmes au changement près du signe de  $v$ .

Étudions une à une ce que chacune de ses contraintes impose. Rappelons que  $(t, x)$  et  $(t', x')$  sont les coordonnées que Bob et Alice mettent sur le même événement. Par exemple sur l'événement qui consiste à ce que Ève, par jalousie envers Bob, jette une peau de banane sous les pieds d'Alice. Cet événement a lieu à un certain moment, à un certain endroit. C'est ce moment et cet endroit qui sont notés  $(t, x)$  et  $(t', x')$ .

- a. Les coordonnées  $(t, x)$  et  $(t', x')$  peuvent décrire n'importe quoi. Regardons les coordonnées de Alice qui cours. Pour Alice, cela correspond à  $(t', x') = (t', 0)$  parce que si  $x'$  désigne la position de Alice par rapport à Alice, alors  $x'$  est toujours nul. Pour Bob par contre, Alice ne reste pas en place, mais se déplace à une vitesse  $v$ . C'est à dire que si  $(t, x)$  sont les coordonnées de Alice pour Bob, alors  $x/t = v$ . Écrivons les équations (12.7) en tenant compte de tout ça : avec  $x' = 0$ , la seconde équation donne

$$0 = \gamma t + \delta x, \quad (12.8)$$

d'où on déduit que  $x/t = -\gamma/\delta$ . En imposant que cela soit  $v$ , on trouve  $\gamma = -v\delta$ , et on ré-écrit les transformations en tenant compte de ça :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = -v\delta t + \delta x. \end{cases} \quad (12.9a)$$

$$(12.9b)$$

Nous voila débarrassé d'un paramètre.

- b. Maintenant, on regarde ce qu'il se passe quand  $(t, x)$  et  $(t', x')$  décrivent les positions de Bob. On a que  $(t, x) = (t, 0)$  parce que selon Bob, Bob est au repos. Les équations deviennent :

$$t' = \alpha t \quad x' = -v\delta t. \quad (12.10)$$

La vitesse de Bob par rapport à Alice est  $-v$ , donc on exige que  $x'/t' = -v$ , c'est à dire que

$$\frac{-v\delta t}{\alpha t} = -v,$$

ce qui implique que  $\delta = \alpha$ . On avance encore un peu. Écrivons à nouveau les lois de transformation en en tenant compte :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = -v\alpha t + \alpha x. \end{cases} \quad (12.11a)$$

$$(12.11b)$$



- c. Si maintenant Bob et Alice regardent un même rayon de lumière (comme c'est romanesque!), on a que  $(t, x)$  et  $(t', x')$  expriment les coordonnées d'un rayon lumineux expriment les coordonnées d'un rayon lumineux. Le fait que Bob regarde un rayon lumineux fait que  $x = ct$ , et donc que les coordonnées du rayon lumineux, observé par Alice sont :

$$t' = \alpha t + \beta ct \qquad x' = -\alpha vt + \alpha ct. \qquad (12.12)$$

L'invariance de la vitesse de la lumière exige que Alice mesure une vitesse  $c$  pour le rayon de lumière, c'est à dire  $x' = ct'$ . On exige donc que

$$-\alpha vt + \alpha ct = c\alpha t + \beta c^2 t,$$

ce qui implique que

$$\beta = -\frac{\alpha v}{c^2}.$$

Une fois de plus, l'avant-dernière, on ré-écrit les lois de transformations en tenant compte de ce fait ; mais cette fois, on fait l'effort d'écrire aussi les transformations inverses :

$$t' = \alpha t - \frac{\alpha v}{c^2} x \qquad t = \frac{1}{\Delta} \left( \alpha t' + \frac{\alpha v}{c^2} x' \right) \qquad (12.13)$$

$$x' = -\alpha vt + \alpha x \qquad x = \frac{1}{\Delta} (\alpha vt' + \alpha x') \qquad (12.14)$$

où  $\Delta = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 v^2}{c^2}$  que tu noteras au passage être toujours positif, et nul uniquement quand  $v = c$ .

- d. Maintenant il reste à imposer le principe de relativité. Les transformations (12.13) montrent comment Alice voit le monde (c'est à dire  $(t', x')$ ) en fonction de la façon dont Bob voit le monde (c'est à dire  $(t, x)$ ). On se demande donc quelle seraient, pour Bob, les coordonnées  $(t, x)$  d'un point vu en  $(t', x')$  par Alice. Cela signifie que l'on impose que les deux systèmes (12.13) soient en réalité les mêmes, à un changement de signe près.

Attention : il *a priori* faux de dire qu'en changeant le signe de  $v$  dans  $\alpha v/c^2$ , j'obtiens  $-\alpha v/c^2$  parce que  $\alpha$  est une fonction de  $v$ . En réalité, il faut noter  $\alpha(v)v/c^2$  et donc le changement de signe de  $v$  donne  $-\alpha(-v)v/c^2$ . Ceci étant clair, on peut un petit peu calculer.

Commençons par égaliser le coefficient de  $x$  dans  $t'$  à celui de  $x'$  dans  $t$ , en changeant le signe de  $v$  :

$$\frac{\alpha(-v)v}{c^2} = \frac{\alpha(v)v}{c^2},$$

et donc  $\alpha(v) = \alpha(-v)$ . Ça c'est une bonne nouvelle. Égalisons maintenant le coefficient de  $t$  dans  $t'$  à celui de  $t'$  dans  $t$  en changeant le signe de  $v$  :

$$\alpha(-v) = \frac{\alpha(v)}{\Delta(v)} = \frac{\alpha(v)}{\alpha(v)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Comme  $\alpha(-v) = \alpha(v)$ , on en déduit que

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.15)$$

Maintenant qu'on a tout, on peut écrire les transformations de Lorentz. On met donc l'expression (12.15) dans les lois de transformations (12.13) :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) & t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) & x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (vt' + x'). \end{aligned} \quad (12.16)$$

Tu remarqueras que  $\Delta = 1$  ; si tu ne sais pas ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, ça n'a pas d'importance. Mais si tu sais ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, alors ce  $\Delta = 1$  est crucial !

Afin d'avoir des équations un peu plus courtes, à partir de maintenant nous allons noter

$$\gamma(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

### 12.3.3 Conditions d'existence

Comme tu vois une racine carrée et un dénominateur dans ces formules, tu dois te demander quelles sont les conditions d'existence. Étant donné que  $v < c$ , on a que  $v^2/c^2 \leq 1$  et en particulier,  $v^2/c^2 = 1$  si et seulement si  $v = c$ .

Ce qui se trouve dans la racine carrée ne pose donc jamais de problèmes parce que ce n'est jamais négatif.

Le dénominateur est par contre plus problématique : quand  $v = c$  il n'y a plus rien qui fonctionne. Quelle est la physique de ce problème ? Pour le comprendre, il faut se souvenir ce que représente  $v$ . Nous avons dit que  $v$  est la vitesse à laquelle Alice court. Ce que la condition d'existence nous enseigne, c'est que personne ne peut courir à la vitesse de la lumière. C'est une vitesse que l'on ne peut pas atteindre.

Dit en termes plus savants, on ne peut pas choisir un repère qui se déplace à la vitesse de la lumière.

La question qui se pose alors est « ah bon, on ne peut pas atteindre la vitesse de la lumière ! Et la lumière, comment elle fait ? ». Bonne question, merci de l'avoir posée. Hélas la réponse sort du cadre de ce cours.

### Loi numéro 3.

*Aucun objet ne peut atteindre la vitesse de la lumière.*

### Loi numéro 4.

*Tu ne dois pas te demander pourquoi la lumière elle-même se déplace à la vitesse de la lumière malgré la loi numéro 3.*

## 12.3.4 La notion d'intervalle

Un **événement** est quelque chose qui se passe à un endroit à un certain moment. C'est donc caractérisé par le moment et le lieu. Comme on travaille à une dimension, c'est un couple de réels  $(t, x)$ .

Regardons un rayon de lumière. Un événement est le fait d'allumer une lampe de poche, et un autre est le fait que la lumière arrive sur l'objet qu'on éclaire. Appelons-les  $(t_1, x_1)$  et  $(t_2, x_2)$ . Comme d'habitude, on note  $\Delta t = t_2 - t_1$  et  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Comme le rayon de lumière va à la vitesse  $c$ , on a  $c = \Delta x / \Delta t$ , ou encore

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0.$$

Pour cette raison, on va dire que l'**intervalle** entre deux événements  $(t_1, x_1)$  et  $(t_2, x_2)$  vaut en général

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2. \quad (12.17)$$

Par invariance de la vitesse de la lumière, si un intervalle est nul pour un observateur, il sera nul pour tous les observateurs.

### En mécanique newtonienne

Afin de voir un peu mieux l'enjeu de l'invariance de l'intervalle, regardons un exemple chiffré. Si par exemple je me déplace de 10 m en 5 s, mon intervalle mesuré par une personne extérieure est

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = (300.000.000)^2 \cdot (5)^2 - (10)^2 = 2,25 \cdot 10^{18} \text{ m}.$$

Si je fais le calcul pour moi, j'ai que  $\Delta x' = 0$  parce que je ne me déplace pas, et  $\Delta t' = 5$  parce que je me suis déplacé en 5 secondes. Le truc est que à côté de  $(300.000.000)^2$ , l'intervalle spatial  $\Delta x$  ne pèse pas grand chose. Ça ne change presque rien qu'il soit de 5 mètres ou de zéro. Ça ne change pas grand chose, mais ça

change quand même ! Entre moi qui calcule ou une personne extérieure, l'intervalle change de 100 sur un nombre de la grandeur de 200.000.000.000.000.000 !

Reprenons plus clairement le raisonnement. D'après la mécanique classique, l'intervalle mesuré par deux personnes est différent, mais très peu différent. Inutile de dire que du temps de Newton, on n'avait pas les moyens techniques de mesurer si cet intervalle est effectivement différent ou bien si il est en réalité égal. C'est un peu comme si on te mettait un spot dans les yeux et qu'on te demandait si c'est un spot de 1000 W ou de 1001 W. Bonne chance pour le dire !

### En mécanique relativiste

Maintenant qu'on a des moyens techniques nettement plus poussés que Newton, on a pu mesurer que l'intervalle est égal. L'intervalle est un invariant. Cela n'est pas un nouveau principe physique parce qu'il découle des transformations de Lorentz.

#### 12.3.5 Le cône de lumière d'un point

Il est intéressant de dessiner dans le plan  $(t, x)$  l'ensemble des points atteints par le rayon lumineux. Le point  $(t, x)$  est atteint si  $c^2 t^2 - x^2 = 0$ , ou encore si  $x = \pm ct$ . Cela forme deux droites dans le plan tracé par les coordonnées  $t$  et  $x$ . Ces deux droites forment ce qu'on appelle le **cône de lumière** du point  $(0, 0)$ .

#### 12.3.6 Contraction des longueurs

Bob prend un morceau de bois qu'il mesure de longueur  $l$  et le dépose devant lui. À l'instant  $t$  (de Bob), les deux extrémités sont aux coordonnées  $e_1 = (t, 0)$  et  $e_2 = (t, l)$ .

Afin de savoir quelle est la longueur de ce même morceau de bois pour Alice, il faut qu'elle mesure les deux extrémités en même temps (pour elle), et qu'elle fasse la différence. Comme Bob et Alice déclenchent leurs chronomètres en même temps, le plus simple est de faire la mesure à cet instant.

Pour Bob, c'est clair : les coordonnées des deux extrémités sont  $e_1 = (0, 0)$  et  $e_2 = (0, l)$ . La longueur du bois est  $l$ . Pour savoir quelle est la longueur mesurée par Alice, on utilise les transformations de Lorentz qui donnent les coordonnées  $e'_1$  et  $e'_2$  relatives à Alice. On trouve  $e'_1 = (0, 0)$  et

$$e'_2 = \left( \frac{-vl/c^2}{\gamma(v)}, \frac{l}{\gamma(v)} \right). \quad (12.18)$$

En d'autres termes, on a  $x_1 = 0$  et  $x_2 = l/\gamma(v)$ , ce qui fait que la longueur observée par Alice est  $l' = x_2 - x_1 = l/\gamma(v)$ .

Eh bien ce résultat est faux. Si tu vois pourquoi sans lire la suite, tu es très fort.

Pour mesurer la longueur d'un objet, il faut mesurer la position des deux bouts *en même temps* puis faire la différence entre les deux. Effectivement,  $e_1$  et  $e_2$  sont en même temps pour Bob, et donc Bob peut mesurer la longueur de son bout de bois en faisant la différence  $x_2 - x_1$ . Mais comme le montre les coordonnées (12.18), les événements  $e'_1$  et  $e'_2$  ne se passent pas en même temps pour Alice ! Eh oui :  $t'_1 = 0$  et  $t'_2 = -vl/c^2\gamma(v)$  ; c'est pas la même chose.

Il faut donc trouver un événement qui pour Alice correspond à l'extrémité du bout de bois au temps  $t' = 0$ . Comme l'événement général qui correspond au bout du bois pour Bob est  $(t, l)$ , l'événement général est pour Alice

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}l}{\gamma(v)} \qquad x' = \frac{l - vt}{\gamma(v)}. \quad (12.19)$$

Afin d'avoir  $t' = 0$ , il faut  $t = vl/c^2$ . En mettant cette valeur de  $t$  dans  $x'$ , on trouve

$$x' = \frac{l - v\left(\frac{vl}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l\gamma(v).$$

Et là, c'est la bonne formule. Si un objet a une longueur  $l$  dans le référentiel où il est au repos, il aura une longueur

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (12.20)$$

dans un référentiel qui se déplace à la vitesse  $v$  par rapport à l'objet.

### 12.3.7 Dilatation des intervalles de temps

Encore un petit effort et promis, je te donne une application concrète que tu connais des bizarreries de la relativité. Mais en attendant, regarde bien ta montre, tu ne va pas en croire tes yeux !

Reprenons Bob et Alice. On se rappelle que Bob et Alice avaient déclenchés leurs chronomètres en même temps quand Alice était passée devant Bob. Un peu plus tard, Alice regarde sa montre qui indique un temps  $t$ . Et elle se demande si Bob a aussi à ce moment une montre qui indique un temps  $t$ .

Ce serait dingue que non hein!?! En effet, si je synchronise ma montre avec quelqu'un et que je pars faire un tour, ma montre ne sera pas tout d'un coup désynchronisée. Oui, mais Alice, elle cours presque à la vitesse de la lumière ... et à ces vitesses-là, on a déjà vu des choses incroyables. Calculons donc pour en avoir le cœur net.

Le fait qu'Alice regarde sa montre est un événement qui se passe pour Alice aux coordonnées  $(t', 0)$  (le zéro c'est parce que par rapport à elle-même, Alice est toujours au repos). À quelles coordonnées  $(t, x)$  pour Bob correspond cet événement ?

L'équation de  $t$  en fonction de  $t'$  et  $x'$  dans les transformations de Lorentz (12.16) prise avec  $x' = 0$  donnent

$$t = \frac{t'}{\gamma(v)}.$$

Et si, juste pour le plaisir, on faisait l'inverse ? Bob regarde sa montre, il voit un temps  $t$  et sa coordonnée spatiale est  $x = 0$ . À quel temps d'Alice cela correspond ? Mettons  $x = 0$  dans la transformation de Lorentz de  $t'$  en fonction de  $t$  et  $x$ . Ce qu'on obtient c'est

$$t' = \frac{t}{\gamma(v)}.$$

N'est-ce pas génial ? C'est la même ! Évidemment, ça ne pouvait pas être autre chose : le principe de relativité demande qu'on ne puisse pas faire la différence entre Alice qui cours vers la droite avec Bob assis et Alice assise avec Bob qui cours vers la gauche. C'est exactement pour ça que dans une gare, quand le train d'à côté démarre, il t'arrive de croire que c'est ton train qui démarre : tu ne peux pas faire la différence, c'est un principe physique.

### 12.3.8 Invariance de l'intervalle

Dans deux secondes, je vais te montrer comment une utilisation intelligente des exponentielles permet de trouver un résultat très fort en relativité. Quoi ? Les exponentielles, les mêmes qu'au cours de math ? Eh oui : la même exponentielle que celle qu'on t'a introduit avec des populations de bactéries qui se multiplient, cette même exponentielle qui a la miraculeuse propriété d'être égale à sa propre dérivée.

Mais n'anticipons pas.

Nous avons déjà signalé que si la quantité  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$  était nulle pour un observateur, alors elle était nulle pour tous les observateurs. Supposons deux événements  $A$  et  $B$  observés par Alice et Bob. Bob les note aux coordonnées  $(t_a, x_a)$ , et  $(t_b, x_b)$  tandis qu'Alice les note en  $(t'_a, x'_a)$  et  $(t'_b, x'_b)$ .

L'intervalle entre les deux événements mesuré par Bob sera

$$s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2,$$

tandis que ce même intervalle mesuré par Alice sera

$$s'^2 = c^2(t'_b - t'_a)^2 - (x'_b - x'_a)^2.$$

On peut bien entendu remplacer dans la première équation les  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $x_a$  et  $x_b$  par leurs valeurs en termes de  $t'_a$ ,  $t'_b$ ,  $x'_a$  et  $x'_b$  données par les transformations de Lorentz. Tu paries que les trois quart des termes dans le calcul se simplifient et qu'il restera exactement  $s'^2$ ? Je te dis que oui, et je te conseille de me croire sur parole, sinon tu vas devoir lire le calcul suivant :

$$s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 = c^2 \left( \frac{1}{\gamma(v)}(t'_b + \frac{v}{c^2}x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(t'_a + \frac{v}{c^2}x'_a) \right)^2 - \left( \frac{1}{\gamma(v)}(vt'_b + x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(vt'_a + x'_a) \right)^2.$$

Jusqu'ici, on n'a fait que remplacer les choses par leurs valeurs données par les transformations de Lorentz. Maintenant on regroupe à l'intérieur de chaque parenthèse les termes de façon à faire apparaître  $\Delta x'$  et  $\Delta t'$  :

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2} \left( (t'_b - t'_a) + \frac{v}{c^2}(x'_b - x'_a) \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2} \left( (x'_b - x'_a) + v(t'_b - t'_a) \right)^2 \\ &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2} \left( (\Delta t')^2 + 2\frac{v}{c^2}\Delta t'\Delta x' + \frac{v^2}{c^4}(\Delta x')^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2} \left( (\Delta x')^2 + 2v\Delta x'\Delta t' + v^2(\Delta t')^2 \right). \end{aligned}$$

Là, on a utilisé le produit remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , et on a systématiquement renommé tous les intervalles avec la notation  $\Delta$  pour être plus compact. Maintenant, on va regrouper tous les termes contenant  $(\Delta t')^2$  ensemble, tous ceux qui contiennent  $\Delta t'\Delta x'$  ensemble et ceux qui contiennent  $(\Delta x')^2$  ensemble. Autre manière de le dire, on met les  $\Delta$  en évidence comme on peut. On trouve ceci :

$$\begin{aligned} (\Delta t')^2 \left( \frac{c^2}{\gamma(v)^2} - \frac{v^2}{\gamma(v)^2} \right) &+ \Delta t'\Delta x' \left( \frac{2vc^2}{\gamma(v)^2c^2} - \frac{2v}{\gamma(v)^2} \right) \\ &+ (\Delta x')^2 \left( \frac{c^2v^2}{c^4\gamma(v)^2} - \frac{1}{\gamma(v)^2} \right). \end{aligned}$$

À partir de là, je te laisse vérifier (en utilisant le fait que  $\gamma(v)^2 = 1 - v^2/c^2$ ) que les coefficients se simplifient beaucoup et valent finalement respectivement  $c^2$ , 0 et  $-1$  comme il se doit. Avec tout ça, nous avons montré le résultat très important suivant :

L'intervalle entre deux événements est invariant sous les changements de repères d'inertie, c'est à dire que la valeur mesurée par n'importe qui qui se déplace en MRU sera toujours la même.

Pourquoi cela est tellement important ? À cause de Pythagore et d'une petite démonstration à coups d'exponentielles<sup>5</sup>.

### Rappel de trigonométrie hyperbolique

Les fonctions de trigonométrie hyperboliques sont :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \qquad (12.21)$$

Elles ont pas mal de propriétés en commun avec les sinus cosinus et normaux. D'abord, leurs dérivées sont faciles à calculer :

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

où tu noteras qu'il n'y a pas de signe moins qui apparaît, contrairement au cas de la trigonométrie normale. Une autre propriété qui ressemble fort à une propriété de la trigonométrie est :

#### Proposition 98.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (12.22)$$

avec un signe moins comme différence avec la trigonométrie.

*Démonstration.* La preuve revient simplement à calculer en utilisant le produit remarquable de  $(a + b)^2$ . D'abord, on a :

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

où l'on a utilisé le fait que  $(e^x)^2 = e^{2x}$  et que  $e^x e^{-x} = 1$ . Il te reste à faire la même chose pour  $\sinh^2(x)$ , la réponse est :

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}).$$

En faisant la différence entre les deux, il reste 1. □

Une propriété qui est par contre très différente entre la trigonométrie plane et la trigonométrie hyperbolique, c'est la périodicité. Les fonctions usuelles cos et sin sont périodiques. Pas les fonctions hyperboliques.

---

<sup>5</sup>oui oui tout ton cours de math va finir par y passer.



**Proposition 99.**

La fonction  $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective.

*Démonstration.* Il faut démontrer que sinus hyperbolique est injective et surjective. Calculons d'abord les limites. Comme tu sais que  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , tu vois facilement que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty. \quad (12.23)$$

Par ailleurs, la fonction sinus hyperbolique est continue et respecte donc le théorème de la valeur intermédiaire<sup>6</sup> 51. Soit  $y \in \mathbb{R}$  et voyons si il existe un  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\sinh(x) = y$ . Les deux limites indiquent qu'il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $\sinh(x_1) < y$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $\sinh(x_2) > y$ . Le théorème de la valeur intermédiaire conclut qu'il existe un  $x$  entre  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $\sinh(x) = y$ . Cela prouve la surjectivité.

Pour l'injectivité, on va utiliser le **théorème de Rolle** et une petite preuve par l'absurde. Supposons que  $\sinh(x_1) = \sinh(x_2)$  avec  $x_1 \neq x_2$ . Dans ce cas, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un  $x$  entre  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $\sinh'(x) = 0$ . La dérivée de sinus hyperbolique étant cosinus hyperbolique, il faut se demander il existe un  $x$  tel que  $\cosh(x) = 0$ . Étant donné que  $e^x > 0$  pour tout  $x$ , en fait le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais.

□

Un très bon exercice serait de faire une étude complète des fonctions cosinus et sinus hyperbolique. Leur graphes sont donnés à la figure 12.1

Un corollaire de la surjectivité de  $\sinh$  sur  $\mathbb{R}$  est que si je prends n'importe quel deux nombres dont la différence des carrés vaut 1, alors ces carrés sont représentables avec des fonctions hyperboliques :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 - y^2 = 1, \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = \cosh(\xi) \text{ et } y^2 = \sinh(\xi).$$

La **tangente hyperbolique** est définie par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \quad (12.24)$$

Un bon exercice est de prouver les deux relations suivantes :

$$\sinh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} \qquad \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}. \quad (12.25)$$

---

<sup>6</sup>Je t'avais dit que tout tons cours de math allait y passer hein.

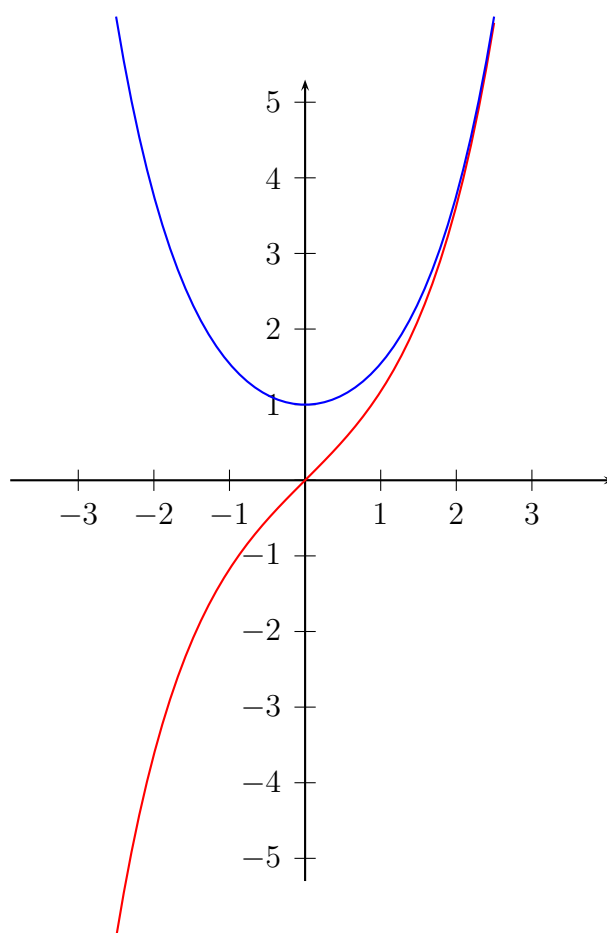


FIG. 12.1 – En rouge, la fonction  $x \mapsto \sinh(x)$  et en bleu, la fonction  $x \mapsto \cosh(x)$ .

### Les transformations de Lorentz (bis)

Nous avons prouvé qu'en relativité, l'intervalle est un invariant. Pour cela, nous avons utilisé les transformations de Lorentz démontrées à partir de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière. Eh bien, oublions un instant que la vitesse de la lumière soit invariante, et posons à la place comme hypothèse que l'intervalle soit invariant. C'est à dire que si Bob mesure un événement aux coordonnées  $(t, x)$  et Alice en  $(t', x')$ , alors  $c^2 t^2 - x^2 = c^2 (t')^2 - (x')^2$ .

#### **Théorème 100.**

*Les transformations de Lorentz sont les seules qui laissent l'intervalle invariant.*

*Démonstration.* Toute la partie comme quoi les transformations doivent être linéaires restent parce que cette partie ne demandait pas l'invariance de la vitesse

de la lumière. Nous cherchons donc les transformations entre Alice et Bob sous la forme

$$\begin{aligned}t' &= \alpha t + \beta x \\ x' &= \gamma t + \delta x\end{aligned}$$

telles que  $c^2(t')^2 - (x')^2 = c^2t^2 - x^2$ . Lorsque Alice passe devant Bob, ils déclenchent tout deux leurs chronomètre et leurs axes. C'est à dire que si à ce moment un événement se trouve à droite pour Alice, il est aussi à droite pour Bob. On doit donc avoir, quand  $t = t' = 0$ , que  $x > 0$  implique  $x' > 0$ . Cela donne la contrainte que  $\delta > 0$ . D'autre part, comme leurs chronomètres vont dans le même sens (ils choisissent tout les deux de *compter* le temps et non *décompter*), on a que  $\alpha > 0$ .

En développant l'expression de  $(s')^2$  en termes de  $t$  et  $x$ , on trouve la condition d'invariance de l'intervalle sous la forme :

$$c^2(\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta tx + \beta^2 x^2) - (\gamma^2 t^2 + 2\gamma\delta tx + \delta^2 x^2) = c^2 t^2 - x^2, \quad (12.26)$$

qui doit être valable pour tout  $t$  et pour tout  $x$ . En  $t = 0$  on trouve la condition

$$\delta^2 - c^2\beta^2 = 1. \quad (12.27)$$

Cela implique qu'il existe un  $\xi \in \mathbb{R}$  tel que  $\delta^2 = \cosh^2(\xi)$  et  $c^2\beta^2 = \sinh^2(\xi)$ . La première équation donne  $\delta = \cosh(\xi)$  (il faut rejeter  $\delta = -\cosh(\xi)$  parce qu'on a demandé que  $\delta > 0$ ). Pour la seconde, on trouve  $c\beta = \sinh(\xi)$  où l'on peut oublier la possibilité  $c\beta = -\sinh(\xi)$  parce que cela revient juste à renommer  $\xi \rightarrow -\xi$  (la fonction sinus hyperbolique est impaire). Bref, il existe un  $\xi$  tel que

$$\begin{aligned}\delta &= \cosh(\xi) \\ \beta &= \frac{\sinh(\xi)}{c}\end{aligned} \quad (12.28)$$

En mettant maintenant  $x = 0$  dans la condition (12.26), on trouve la condition

$$\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} = 1.$$

Pour les mêmes raisons qu'avant, il existe un  $\eta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned}\alpha &= \cosh(\eta) \\ \gamma &= c \sinh(\eta).\end{aligned} \quad (12.29)$$

Rien qu'en regardant deux cas très particuliers, on a déjà bien avancé, non ? Remettons maintenant les valeurs (12.28) et (12.29) dans la condition (12.26). En utilisant

l'identité  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ , et en séparant les termes en  $t^2$ ,  $x^2$  et  $tx$  pour satisfaire la condition, il faut

$$\cosh(\eta) \sinh(\xi) = \sinh(\eta) \cosh(\xi) \quad (12.30)$$

parce que les termes en  $t^2$  et  $x^2$  donnent exactement  $c^2 t^2 - x^2$  et qu'il faut que le terme en  $tx$  s'annule. Mettons la condition (12.30) au carré, et substituons  $\cosh^2(\eta) = 1 + \sinh^2(\eta)$  et  $\cosh^2(\xi) = 1 + \sinh^2(\xi)$ , il reste

$$\sinh^2 \xi = \sinh^2 \eta,$$

ce qui signifie  $\sinh \xi = \pm \sinh \eta$ , ou encore  $\xi = \pm \eta$ . On voit que  $\xi = -\eta$  ne fonctionne pas dans (12.30), donc on reste avec  $\xi = \eta$  et les transformations prennent la forme

$$\begin{aligned} t' &= \cosh(\xi)t + \frac{\sinh(\xi)}{c}x \\ x' &= c \sinh(\xi)t + \cosh(\xi)x. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Ce que nous avons prouvé, c'est qu'il existe un  $\xi \in \mathbb{R}$  tel que les transformations entre Alice et Bob aient cette forme. Il faut trouver ce que vaut  $\xi$  en fonction de la vitesse  $v$  à laquelle Alice court.

Pour ce faire, étudions le mouvement d'Alice. Bob la voit aux coordonnées  $(t, vt)$ , ce qui correspond à

$$x' = c \sinh(\xi)t + \cosh(\xi)vt$$

pour Alice. Mais ces coordonnées sont celles de Alice elle-même, donc  $x' = 0$ , ce qui donne<sup>7</sup>  $vt = -c \sinh(\xi)t / \cosh(\xi)$ , ou encore

$$\tanh(\xi) = -\frac{v}{c} \quad (12.32)$$

En utilisant les relations (12.25), on trouve

$$\cosh(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \sinh(\xi) = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.33)$$

En remettant ces valeurs dans les transformations (12.31), on trouve

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\gamma(v)} \quad (12.34)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\gamma(v)}, \quad (12.35)$$

exactement les transformations de Lorentz!

□

---

<sup>7</sup>Conditions d'existence :  $\cosh(\xi) \neq 0$ ; heureusement, nous avons vu que le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais.

Ce résultat est important pour une raison assez simple : maintenant, la théorie de la relativité est indépendante de toute considérations sur la lumière. En effet, ce que nous venons de prouver, c'est que si il existe une vitesse  $c$  telle que  $c^2 t^2 - x^2 = c^2 (t')^2 - (x')^2$ , alors  $(t, x)$  et  $(t', x')$  sont liés par les transformations de Lorentz.

### 12.3.9 Vitesse limite

Afin de nous passer de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière, nous avons prouvé que l'hypothèse d'invariance de l'intervalle était suffisante. Mais il faut avouer que cette hypothèse n'est pas très intuitive. Nous allons montrer maintenant que l'existence d'une vitesse limite est une troisième hypothèse qui peut être utilisée comme alternative aux deux premières.

## 12.4 Applications

Une première application sympa est le logiciel<sup>8</sup> *lightspeed*. Si tu es sous Ubuntu-Linux, installe juste le paquet nommé *lightspeed*, et régales-toi ! Tu verras c'est marrant. Si tu utilise des fenêtres, je laisse faire l'adage « Windows c'est facile ».

### 12.4.1 Le GPS

Pour qu'un système **GPS** puisse te localiser, en gros, il t'envoie un signal, tu lui réponds et il mesure le temps qu'il a fallu à la lumière pour faire l'aller-retour. Déjà, tu remarques que cela n'est possible que grâce au fait que la vitesse de la lumière soit finie. Sinon, le GPS ne fonctionnerait pas. Mais il y a mieux.

Comme pour te localiser il faut plusieurs satellites en plus de ton appareil, il faut que les horloges internes de tout ce petit monde soient bien synchronisées, sinon pour mesurer des intervalles de temps et calculer des distances, c'est mal parti. Eh mais un satellite, ça bouge assez vite (surtout que les mesures doivent être très précises), et en plus ça ne fait même pas un MRU, vu que ça tourne en rond. Comme tu vois tout le travail qu'il a fallu faire pour trouver les transformations de Lorentz d'un MRU, tu t'imagines le travail pour un mouvement circulaire ! Eh bien ce travail a été fait, et le résultat est que si on en tient pas compte, les contractions temporelles liées à la relativité sont suffisamment grandes pour complètement dérégler le GPS.

---

<sup>8</sup>jeu de mot sur « application » ! ah ah !

### 12.4.2 Les ondes électromagnétiques

Tu te souviens qu'au début du chapitre, nous avons dit que le problème qui a amené la relativité était la propagation du champ électrique. Maintenant que nous avons déjà vu une partie des conséquences du problèmes, il est temps de se rendre compte que les champs électriques et magnétiques sont les objets les plus soumis aux bizarreries relativistes du monde : elles se propagent à la vitesse de la lumière. Regarde un coup autour de toi ; tout ce qui est champ électromagnétique a besoin de la relativité pour être bien compris : GSM, lumière, four à micro-onde, radio, wifi, fibre optique, ...

Si un jour un ingénieur te dit qu'il n'y a pas besoin de connaître la relativité pour inventer la radio (c'est vrai : la radio a été inventée avant la relativité), ni pour construire une fibre optique, dis lui en pensant à moi qu'il utilise tout le temps les équations de Maxwell<sup>9</sup>, et que ces équations sont relativistes.

Bref, soit convaincu que tu vis dans un monde relativiste et que les transformations de Lorentz te suivent à chacun de tes pas.

## 12.5 Mécanique relativiste

Cela est bien beau, mais la dilatation du temps, et les contractions de longueurs doivent bien avoir des répercussions sur la cinématique et la dynamique des objets. Est-ce que le théorème de l'énergie cinétique est encore valable ? est-ce que les lois de Newton tiennent encore la route ?

### 12.5.1 Des problèmes, toujours des problèmes

Attardons-nous un peu pour faire quelques commentaires sur cette citation du chevalier pégase dans [les chevaliers du zodiaque](#) :

Ses coups vont à la vitesse de la lumière et pourtant je les vois distinctement arriver.

Est-ce possible ? Nous avons vu qu'il y avait des dénominateurs qui s'annulent quand des objets se déplacent plus vite que la lumière ; or pour voir venir un rayon de lumière qui vient vers soi, il faudrait que le rayon émette de la lumière devant elle. Ça semble un peu mal parti pour respecter les lois de la relativité, non ?

Cela pose en tout cas une question qu'il faudra résoudre. On *entend* venir une ambulance parce qu'elle émet du son qui avance plus vite qu'elle. Pas de problèmes avec ça. Mais quid de la *voir* venir ?

---

<sup>9</sup>C'est sous ce nom là qu'on nome l'ensemble des équations de l'électromagnétisme comme la loi de l'induction.

On peut voir venir un tram parce qu'il émet de la lumière ; cette lumière allant plus vite que le tram, elle arrive à nos yeux avant le tram lui-même. Cela est très bien. Mettons que le tram avance à 50 km/h ; pour le conducteur, la lumière de son phare avant avance devant lui à la vitesse  $c$ . Par conséquent pour un observateur au sol, cette même lumière devrait avancer à la vitesse  $c + 50$ . Encore une fois, on a un problème d'invariance de la vitesse de la lumière ; mais comme c'est de la lumière, on est habitué à ce que des trucs bizarres arrivent. On ne sera pas étonné que  $c + 50 = c$  d'une manière ou d'une autre<sup>10</sup>. Pire. Si un vaisseau spatial avance à la vitesse 200000 km/s et qu'il envoie en reconnaissance un vaisseau devant lui à la vitesse de 150000 km/s, le vaisseau de reconnaissance ira à la vitesse 150000 km/s par rapport au vaisseau principal. Et par rapport au sol, il ira à la vitesse  $150000 + 200000 = 350000$  km/s, ce qui est impossible. Il faudra trouver quelque chose pour que ça se passe bien.

Un autre problème maintenant.

Prenons une masse  $m$  que l'on soumet à une force constante  $F$ . Par la loi de Newton,  $a = F/m$  est constante et la vitesse après un temps  $t$  vaut  $v = Ft/m$ . Pas de bol, ça devient plus grand que la vitesse de la lumière à partir du temps  $t = cm/F$ . Ça est un problème hein ? Il faut trouver un truc pour qu'avec une force constante, l'accélération diminue.

### 12.5.2 Loi d'addition des vitesses

Si Bob observe un objet se déplacer à la vitesse  $V$ , alors Alice devrait l'observer bouger à la vitesse  $V - v$ . Tout comme si une vache voit passer un train à 90 km/h, alors le vélo qui avance à 25 km/h le voit passer à 65 km/h.

Maintenant, tu es habitué à ce que rien ne se passe comme d'habitude, donc tu te doutes bien qu'en réalité la bonne formule ne va pas être  $V - v$ .

Bob observe l'objet aux coordonnées  $(t, Vt)$ , ce qui fait pour Alice :

$$\left( \frac{t - \frac{v}{c^2} Vt}{\gamma(v)}, \frac{Vt - vt}{\gamma(v)} \right).$$

En divisant le  $x'$  d'Alice par le  $t'$  d'Alice, on trouve la vitesse mesurée par Alice :

$$V' = \frac{(V - v)t}{\gamma(v)} \frac{\gamma(v)}{t \left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

La loi de transformation des vitesses relativiste est donc

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}. \quad (12.36)$$

---

<sup>10</sup>et je ne te cache pas que c'est ce qui va arriver.

Qu'en est-il de notre  $c + 50 = c$  ? Disons que Bob lance un bisou à Alice pendant qu'elle arrive vers lui. Le bisou arrive à la vitesse de la lumière (càd  $V = c$ ) tandis que Alice s'approche de Bob à la vitesse 50 m/s (càd  $v = 50$ ). Donc la vitesse à laquelle Alice devrait voir arriver le bisou est bien  $c + 50$ . En utilisant la formule d'addition relativiste des vitesses (12.36), nous trouvons

$$V' = \frac{c - 50}{1 - \frac{50c}{c^2}} = \frac{c - 50}{1 - \frac{50}{c}} = \frac{c(c - 50)}{c - 50} = c.$$

Donc effectivement en relativité quand on additionne des vitesses il faut penser à la règle du «  $c + 50 = c$  ».

### 12.5.3 L'action d'une force

L'équation fondamentale de la mécanique classique est

$$F = ma.$$

Or tu n'es pas sans savoir que l'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. Nous noterions donc  $F = mx''(t)$ . Le problème est évidemment que si  $F$  est constante, on trouve  $v = Ft/m$  qui dépasse toujours la vitesse  $c$  quand  $t$  est assez grand. Il faudra donc modifier la loi  $F = ma$ . Pour cela, posons-nous des questions sur la dérivée  $x'(t)$ . On dérive par rapport au temps ; oui mais nous avons vu que le temps n'est pas le même pour tout le monde. Introduisons donc la notation

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{12.37}$$

qui ne signifie rien d'autre que nous dérivons  $x$  par rapport à  $t$  et non par rapport au temps  $t'$  de quelqu'un d'autre. Dans le cadre de la relativité, ce que signifie l'équation (12.37) est que  $v$  est la dérivée de  $x$  par rapport à  $t$ . Dans le cas où  $x$  et  $t$  sont les coordonnées de la position d'Alice mesurées par Bob, cela signifie qu'on dérive la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Bob*.

Ce que dit la relativité est que cette quantité  $v$  ne peut pas varier proportionnellement à la force sous peine de dépasser la vitesse de la lumière. La subtilité est de modifier la loi de Newton en disant que la quantité qui varie sous l'action d'une force n'est plus  $dx/dt = v$ , mais

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

c'est à dire la dérivée de la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Alice* ! La loi de Newton  $v = Ft/m$  devient donc

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m}. \tag{12.38}$$



Est-ce que cela résout le problème ? Pour le savoir, regardons la vitesse acquise par le mobile de masse  $m$  soumis à la force  $F$  pendant un temps  $t$ . Il faut résoudre l'équation (12.38) par rapport à  $v$  et voir si cela reste bien toujours inférieur à  $c$ . On commence par mettre la racine à droite et à élever toute l'équation au carré :

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{F^2 t^2}{m^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ v^2 \left( 1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2} \right) &= \frac{F^2 t^2}{m^2} \\ v &= \frac{\sqrt{F^2 t^2 / m^2}}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2}}}, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$v(t) = \frac{Ft}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2}}}. \quad (12.39)$$

Tu dois remarquer que si  $F$  et  $t$  ne sont pas trop grands, l'expression  $F^2 t^2 / c^2 m^2$  est minuscule parce que  $c$  est énorme. Si on fait l'approximation  $F^2 t^2 / c^2 m^2 = 0$  dans cette expression, on retrouve  $v = Ft/m$ . Cela montre qu'à moins de faire des expériences avec de très grandes forces pendant énormément de temps, on ne peut pas voir la différence entre la mécanique de Newton et la mécanique relativiste.

La figure 12.2 montre la fonction  $v(t)$ .

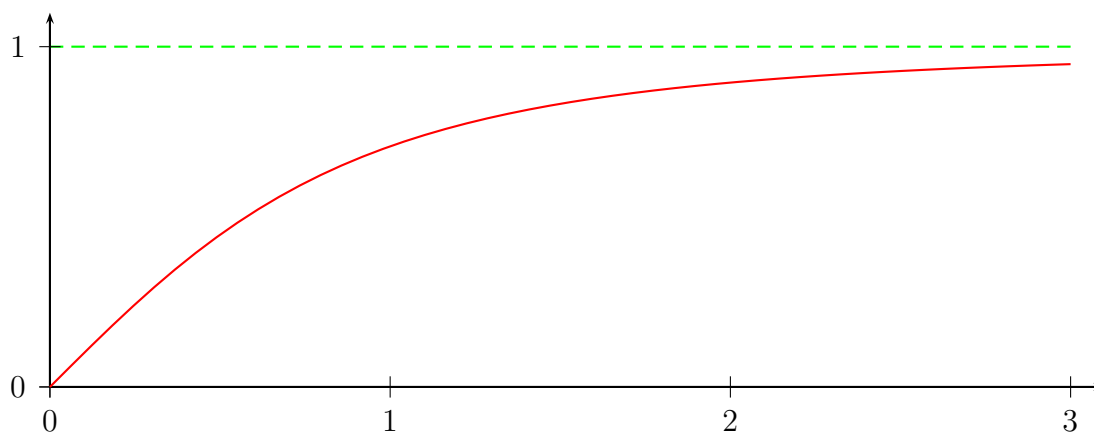


FIG. 12.2 – La vitesse en fonction du temps lorsqu'une particule est soumise à une force constante. Pour les besoins du graphique, nous avons mis à 1 la vitesse  $c$ . Tu vois que quand la vitesse n'est pas très grande, le graphique est presque celui d'une droite ; et à partir d'un certain moment, la courbe s'infléchit pour tendre vers 1 sans l'atteindre.

Remarque que si on maintient une accélération constante égale à celle de la gravité terrestre pendant deux heures, on arrive déjà sur la Lune, à une vitesse de 75 km/s, c'est à dire encore rien par rapport à la vitesse de la lumière ! Cela pour te dire que la formule (12.39) a l'air d'être très différente de la formule classique  $v = Ft/m$ , mais en réalité tant qu'on n'atteint pas des forces énormes, elle ressemble très fort.

Vérifions maintenant que la formule (12.39) n'est pas en contradiction avec l'impossibilité de dépasser la vitesse de la lumière. Pour cela, regardons ce qu'il se passe si on applique une force constante  $F$  sur un objet de masse  $m$  pendant un temps très long. C'est à dire : calculons la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t).$$

Tu vois tout de suite qu'on est sur un cas  $\frac{\infty}{\infty}$ , ce qui t'oblige à utiliser la règle de l'Hospital<sup>11</sup>. On peut cependant un peu réfléchir et deviner la réponse sans passer par des math trop compliquées.

En effet, quand  $t$  est vraiment énorme, l'expression  $\frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}$  devient très grande, et le 1 qui se trouve à côté ne vaut plus grand chose, on peut le négliger.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ft}{m\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2}}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ft}{m\sqrt{\frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Ft}{m\frac{Ft}{cm}} \\ &= c. \end{aligned} \tag{12.40}$$

Tout est bien : on arrive au maximum à la vitesse de la lumière, mais il faut un temps infini pour y parvenir. Conclusion : il n'est pas possible d'accélérer un objet jusqu'à atteindre la vitesse de la lumière.

### 12.5.4 Équivalence entre la masse et l'énergie

Le moment est venu de montrer ce que signifie la fameuse formule  $E = mc^2$ .

## 12.6 Principe de correspondance

Nous ne sommes pas parvenu à démontrer la formule (12.38) de la mécanique relativiste qui montre comme un objet accélère sous l'effet d'une force constante. Nous avons juste montré qu'il fallait modifier la loi  $v = Ft/m$  et nous avons prit la première modification qui nous soit tombée sous la main, à savoir qu'il faut dériver

---

<sup>11</sup> Je t'avais prévenu que tout ton cours de math allait arriver ; tu rigoles moins hein maintenant !

la position par rapport au temps de l'objet qu'on observe plutôt que par rapport au temps de l'observateur.

En fait, il est possible de prouver rigoureusement<sup>12</sup> la formule

$$\frac{Ft}{m} = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Mais il n'y a pas moyen de trouver la valeur de la constante  $\alpha$ . Tout ce qu'il y a moyen de trouver avec l'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière est l'existence d'une constante telle que cette formule soit vraie.

Afin de fixer la constante  $\alpha$ , il faut faire intervenir un principe physique supplémentaire, le **principe de correspondance**

#### Loi numéro 5.

*Lorsque la vitesse d'une particule est faible, les équations doivent être en première approximation les mêmes que celles de la mécanique classique.*

Que signifie *en première approximation*? Tu sais qu'une fonction  $x \mapsto f(x)$  peut être approximée (pour des petits  $x$ ) par la formule

$$f(x) \simeq f(0) + xf'(0).$$

Nous voudrions donc que  $Ft/m$  soit en première approximation égal à  $v$ . Nous devons étudier la fonction

$$f(v) = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Voir ce que vaut cette fonction en première approximation lorsque  $v$  est petit est un exercice de dérivation. En utilisant la règle de dérivation des fractions, on trouve que

$$f'(v) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\alpha v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

et donc que  $f'(0) = \alpha$ . Bien entendu,  $f(0) = 0$ . En première approximation, nous trouvons donc

$$f(v) \simeq \alpha v \tag{12.41}$$

qui doit être égal à la quantité non relativiste  $v$ . Nous en déduisons qu'il faut fixer  $\alpha = 1$ , et on tombe sur la formule relativiste proposée plus haut

$$\frac{Ft}{m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

---

<sup>12</sup>Mais il n'existe pas de démonstrations simples à ma connaissance.

L'utilisation cruciale du principe de correspondance a une répercussion énorme sur notre vision de la physique. En effet, la relativité d'Einstein ne parvient pas à *remplacer* la mécanique de Newton. On a besoin d'invoquer la mécanique de Newton pour fixer la théorie. On peut écrire l'axiome suivant :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \text{Einstein} = \text{Newton}. \quad (12.42)$$

Cela n'est pas une propriété de la théorie d'Einstein, mais un de ses axiomes !

La relativité ne fait donc pas table rase des principes physiques de la mécanique newtonienne : elle les complète et les contient.

# Chapitre 13

## Exercices pré requis université

### 13.0.1 Corrigez vous vous-même

Si vous faites des exercices supplémentaires et que vous voulez des corrections, n'oubliez pas que vous avez un ordinateur à disposition. De nos jours, les ordinateurs sont capables de calculer à peu près tout ce qui se trouve dans ces notes. Le logiciel que je vous propose est **Sage**. Pour l'utiliser, il n'est même pas nécessaire de l'installer sur votre ordinateur : il tourne en ligne, directement dans votre navigateur.

- a. Aller sur <http://www.sagenb.org>
- b. Créer un compte
- c. Créer des feuilles de calcul et amusez-vous!!

Il y a beaucoup de **documentation** sur le **site officiel**<sup>1</sup>.

Si vous comptez utiliser régulièrement ce logiciel, je vous recommande *chaudement* de **l'installer** sur votre ordinateur<sup>2</sup>. Ce logiciel étant distribué sous licence GPL, vous ne devez ni payer ni vous procurer de codes.

Afin de vous éviter de trop longues recherches sur internet, j'indiquerai, dans certains exercices, comment il faut faire pour le résoudre avec Sage. Voir les exercices [84](#), [87](#).

### 13.0.2 Les exercices

Ce chapitre contient une série d'exercices du type de ce qui est plus ou moins censé être connu à l'entrée de l'université dans diverses sections scientifiques. Ils font l'objet des premières séances d'exercices.

---

<sup>1</sup><http://www.sagemath.org>

<sup>2</sup>Le paquet `sagemath.deb` fourni par Ubuntu est très bogué, ne l'utilisez pas.

**Exercice 71.**

Déterminer l'ensemble des  $x$  qui satisfont

- a.  $|x| \leq 2$
- b.  $\left|5 - \frac{1}{x}\right| < 1$
- c.  $\frac{1}{|x+2|} > \frac{1}{|x-1|}$
- d.
- e.  $|x^2 - 2| \leq 1$
- f.
- g.  $|3 - 2x| < 1$ .
- h.

**Correction de l'exercice 71**

Une technique de base dans ces exercices est de savoir que

$$|\text{truc}| < \text{machin} \quad (13.1)$$

implique la double inégalité

$$-\text{machin} < \text{truc} < \text{machin}, \quad (13.2)$$

lorsque  $\text{machin} > 0$ .

- a.  $x \in [-2, 2]$ .
- b. Ici, nous appliquons la règle (13.2) :

$$-1 < 5 - \frac{1}{x} < 1, \quad (13.3)$$

et nous résolvons les deux inégalités séparément. Les solutions du problème seront l'*intersection* des solutions.

La première donne  $-5 < -1/x$ , et donc  $6 > 1/x$ . Cette inégalité est certainement vraie pour les  $x$  négatifs. Pour les  $x > 0$ , elle est vraie quand  $x > 1/6$ . Les solutions de cette première inégalité sont donc  $] -\infty, 0[ \cup ] \frac{1}{6}, \infty[$ .

La seconde inégalité donne  $\frac{1}{x} > 4$ . Cette inégalité n'est valable pour aucun négatif. Pour les positifs, les solutions sont  $x \in ]0, \frac{1}{4}[$ .

La solution de l'exercice est donc donnée par

$$\left( ] -\infty, 0[ \cup ] \frac{1}{6}, \infty[ \right) \cap ]0, \frac{1}{4}[. \quad (13.4)$$

C'est à dire  $x \in ] \frac{1}{6}, \frac{1}{4}[$ .

- c. Étant donné que les valeurs absolues sont positives, nous pouvons inverser les fractions (en changeant le sens de l'inégalité) et nous avons

$$|x + 2| < |x - 1|. \quad (13.5)$$

Nous décomposons cette inégalité en quatre possibilités selon que  $x + 2$  et  $x - 1$  soient positifs ou négatifs :

- (a)  $x + 2 \geq 0$  et  $x - 1 \geq 0$ , conditions remplies lorsque  $x \geq 1$
- (b)  $x + 2 \geq 0$  et  $x - 1 \leq 0$ , conditions remplies lorsque  $x \in [-2, 1]$
- (c)  $x + 2 \leq 0$  et  $x - 1 \geq 0$ , conditions jamais remplies.
- (d)  $x + 2 \leq 0$  et  $x - 1 \leq 0$ , conditions remplies lorsque  $x \leq -2$

Résolvons l'inéquation dans les quatre cas. Le premier cas donne  $|x + 2| = x + 2$  et  $|x - 1| = x - 1$ , et donc

$$x + 2 < x - 1 \quad (13.6)$$

Cette inéquation n'est jamais satisfaite et ne fournit donc aucune solutions. Le second cas donne  $|x + 2| = x + 2$  et  $|x - 1| = -x + 1$ , et donc

$$x + 2 < -x + 1, \quad (13.7)$$

ce qui donne  $x < -1/2$ . Ces solutions ne sont des vraies solutions de l'exercice que lorsque  $x \in [-2, 1]$ . Ce second cas fournit donc les solutions  $x \in [-2, -\frac{1}{2}[$ . Le troisième cas n'est pas à traiter.

Le quatrième cas donne

$$-x - 2 < -x + 1, \quad (13.8)$$

qui est toujours satisfaite. Les solutions fournies par ce cas sont donc  $x \in ]-\infty, -2]$ .

Au final, les solutions de l'exercice sont

$$x \in ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \setminus \{-2\}. \quad (13.9)$$

Pourquoi retirer  $-2$  ? Parce qu'il est dans les conditions d'existence de l'énoncé de départ.

d.

- e. Nous traduisons le problème en

$$-1 \leq x^2 - 2 \leq 1. \quad (13.10)$$

La première inégalité est  $x^2 - 1 \geq 0$ . (un petit tableau de signe pour ce binôme ?). Les solutions sont  $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ .

Les solutions de la seconde sont  $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ .

L'intersection des solutions des deux inégalités est

$$x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]. \quad (13.11)$$

f.

g. Ici encore, on coupe en deux inégalités

$$-1 < 3 - 2x < 1. \quad (13.12)$$

Les solutions sont respectivement  $2 > x$  et  $x > 1$  et donc  $x \in ]1, 2[$ .

### Exercice 72.

Trouver les supremum, infimum, maximum et minimum, si ils existent dans chacun des ensembles suivants.

- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .
- $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .
- 
- 
- $\{x \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ .
- $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
- 
- 
- 

### Correction de l'exercice 72

- $\sup E = 1$  et  $1 \in E$ , donc  $\max E = 1$ . Par contre,  $\inf E = 0$  et  $0 \notin E$ , donc il n'y a pas de minimum.
- Ici,  $0$  est dans l'ensemble, donc la différence avec le précédent est que  $\min E = 0$ .
- 
- 
- Pour rappel,  $0 \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Il n'y a donc pas de minimum (parce que  $0$  n'est pas dans l'ensemble), mais  $\inf E = 0$  et  $\max E = \sup E = \sqrt{2}$ .
- Dans la suite des  $\frac{1}{n} + (-1)^n$ , un terme sur deux s'approche de  $1$  et l'autre terme sur deux s'approche de  $-1$  (dessiner sur un graphe les cinq ou six premiers termes pour s'en persuader). Nous avons donc  $\inf E = -1$  et  $\max E = \sup E = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ . Il n'y a pas de minimum.



**Exercice 73.**

Montrer que si  $a$  et  $b$  sont des nombres réels, alors

$$\sup\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad (13.13a)$$

$$\inf\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|). \quad (13.13b)$$

**Correction de l'exercice 73**

Prouvons l'égalité (13.13b). Il n'y a que deux possibilités. Soit  $a > b$ , soit  $a < b$ . Si  $a > b$ , alors  $|a - b| > 0$  et nous pouvons supprimer les valeurs absolues. Ce que nous avons est alors

$$\frac{1}{2}(a + b + a - b) = a, \quad (13.14)$$

et effectivement, quand  $a > b$ , nous avons  $\sup\{a, b\} = a$ . Par contre, si nous supposons que  $a < b$ , nous savons que  $|a - b| = -(a - b)$  et donc

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b. \quad (13.15)$$

**Exercice 74.**

Soit  $A$ , un ensemble non vide tel que  $\sup A = \inf A$ . Que pouvez-vous dire de  $A$ ?

**Correction de l'exercice 74**

L'ensemble  $A$  est alors un singleton. En effet, si  $A$  possédait deux éléments différents  $x$  et  $y$ , il y aurait forcément un des deux qui est plus grand que l'autre. Supposons que  $x > y$ . Dans ce cas,

$$\inf A \leq y < x \leq \sup A, \quad (13.16)$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse.

**Exercice 75.**

Soit  $A$ , un ensemble non vide minoré avec  $\inf A > 0$ . Montrer que

$$\sup\left\{\frac{1}{x} \mid x \in A\right\} = \frac{1}{\inf A}. \quad (13.17)$$

**Correction de l'exercice 75**

Nommons  $B = \{\frac{1}{x} \mid x \in A\}$ . Nous allons procéder en plusieurs étapes. D'abord, nous montrons que  $1/\inf A$  est un majorant de  $B$ , et ensuite, nous montrerons que  $1/\inf A$  est plus petit que tous les majorants.

Pour tout  $x$  dans  $a$ , nous avons  $\inf A \leq x$ , et donc

$$\frac{1}{\inf A} \geq \frac{1}{x}. \quad (13.18)$$

Étant donné que  $\inf A > 0$ , nous pouvons inverser les deux membres en retournant le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{\inf A} \geq y \quad (13.19)$$

pour tout  $y \in B$ , ce qui signifie que  $1/\inf A$  est un majorant de  $B$ .

Soit maintenant  $m$ , un majorant de  $B$ . Nous voulons prouver que  $m \geq 1/\inf A$ , ou encore que  $1/m \leq \inf A$ . Étant donné que  $m$  est un majorant de  $B$ , nous avons que pour tout  $x \in A$ ,

$$\begin{aligned} m &\geq \frac{1}{x} \\ \frac{1}{m} &\leq x \\ \frac{1}{m} &\leq \inf A. \end{aligned} \quad (13.20)$$

### Exercice 76.

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des ensembles bornés tels que  $A \subseteq B$ , alors

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B. \quad (13.21)$$

### Correction de l'exercice 76

Remarquons pour commencer que  $\inf$  et  $\sup B$  existent parce que  $A$  et  $B$  sont bornés. Prouvons que  $\inf B \leq \inf A$ . Par définition,  $\inf B \leq x$  pour tout  $x \in B$ . Étant donné que  $A \subseteq B$ , nous avons en particulier que  $\inf B \leq x$  pour tout  $x \in A$ . Cela prouve que  $\inf B$  est un minorant de  $A$ , et donc que  $\inf B \leq \inf A$ .

### Exercice 77.

Montrer que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2. \quad (13.22)$$

### Correction de l'exercice 77

Vérifions avec  $n = 2$  :

$$1 + 3 = 4 = 2^2, \quad (13.23)$$

c'est bon.

Supposons maintenant avoir prouvé la thèse pour un certain  $n$ . Nous allons montrer qu'alors la thèse est encore vraie pour  $n + 1$ . En écrivant la formule pour

$n + 1$ , nous avons

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{= n^2 \text{ par hyp. de récurrence}} + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = (n + 1)^2, \quad (13.24)$$

ce qu'il fallait.

### Exercice 78.

Montrer que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}. \quad (13.25)$$

### Correction de l'exercice 78

Supposons avoir réussi pour  $n$ , et regardons ce que devient la formule proposée avec  $n + 1$  :

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)}}_{= n/(n + 1) \text{ par hyp. de récurrence}} + \frac{1}{(n + 1)(n + 2)}. \quad (13.26)$$

En mettant au même dénominateur, nous trouvons

$$\frac{n(n + 2) + 1}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{n + 1}{n + 2}, \quad (13.27)$$

comme il le fallait.

### Exercice 79.

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $x \geq 0$ , on a  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

### Correction de l'exercice 79

Pour  $n = 1$ , on a  $1 + x \geq 1 + n$ , ce qui est manifestement vrai. Pour  $n + 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + x(n + 1), \end{aligned} \quad (13.28)$$

ce qui est bien la thèse avec  $n + 1$ .

### Exercice 80.

Trouver les réels  $x$  qui satisfont l'équation

$$e^{2x} - 2e^{-2x} = 1. \quad (13.29)$$

**Correction de l'exercice 80**

Étant donné que l'inconnue  $x$  apparaît seulement dans la combinaison  $e^{2x}$ , il est naturel de poser  $y = e^{2x}$ . Nous avons alors  $e^{-2x} = \frac{1}{y}$  et l'équation à résoudre devient

$$y - \frac{2}{y} - 1 = 0 \quad (13.30)$$

où nous savons que  $y \neq 0$  parce qu'une exponentielle ne s'annule jamais. En multipliant par  $y$ , nous trouvons une équation du second degré  $y^2 - y - 2 = 0$ , dont les solutions sont

$$y = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad (13.31)$$

c'est à dire  $y = 2$  ou  $y = -1$ . La seconde possibilité doit être rejetée parce qu'elle ne correspond à aucune solution en  $x$  :  $e^{2x} = -1$  est impossible. La seconde solution,  $y = 2$ , donne

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 2 \\ 2x &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned} \quad (13.32)$$

La solution de l'exercice est donc  $x = \ln(2)/2$ . Cette solution peut aussi être exprimée sous la forme  $\ln(\sqrt{2})$ .

**Remarque 101.**

Une erreur classique est de prendre le logarithme des deux membres de l'équation et d'écrire

$$\ln(e^{2x}) - 2\ln(e^{-2x}) = \ln(1). \quad (13.33)$$

La fonction logarithme n'est pas une fonction linéaire. Il n'est donc pas vrai que  $\ln(a + 2b) = \ln(a) + 2\ln(b)$ .

Parmi les variantes de cette erreur, notons l'oubli de prendre le logarithme du second membre : laisser le 1 inchangé est une circonstance aggravante. Si on prend le logarithme du membre de gauche, il faut aussi prendre celui du membre de droite. Il est également faux de croire que  $\ln(1) = 1$  ou que  $\ln(1) = e$ . Que vaut le logarithme de 1 ?

**Exercice 81.**

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a.  $2^x = 8$
- b.  $2^{x-1} - 2^{x-3} = 2^{3-x} - 2^{1-x}$
- c.  $e^x + 5e^{-x} = 6$
- d.  $2^x > 4^{x+1}$

- e.  $\left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{8}{27} = 0$
- f.  $2\log_2(x) + \log_x(2) = 3$
- g.  $\log_4(1-x) < 0$
- h.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-9}$ .

### Correction de l'exercice 81

- a.  $x = 3$ .
- b. On peut poser  $y = 2^{x-1}$  et alors  $2^{x-3} = y/4$ ,  $2^{3-x} = 4/y$  et  $2^{1-x} = 1/y$ . Ainsi, on a l'équation suivante pour  $y$  :

$$y - \frac{y}{4} = \frac{4}{y} - \frac{1}{y}. \quad (13.34)$$

Étant donné que  $y = 0$  n'est pas possible, on peut multiplier tout par  $y$  et obtenir une équation du second degré en  $y$  :

$$\frac{3y^2}{4} - 3 = 0, \quad (13.35)$$

ou encore  $y^2 - 4 = 0$ , ce qui donne les solutions  $y = 2$  et  $y = -2$ . La solution  $y = 2$  donne  $2^{x-1} = 2$ , et donc  $x = 2$ . La solution  $y = -2$  donne  $2^{x-1} = -2$  qui est impossible. La solution de l'exercice est donc  $x = 2$ .

Noter qu'on peut également poser  $y = 2^x$  ou bien  $y = 2^{x-3}$ . Ces substitutions mènent à des calculs un peu différents, mais c'est tout aussi bien.

- c. En posant  $y = e^x$ , nous tombons sur l'équation

$$y^2 - 6y + 5 = 0, \quad (13.36)$$

dont les solutions sont  $y = 1$  et  $y = 5$ . Les solutions en  $x$  sont donc  $x = \ln(1) = 0$  et  $x = \ln(5)$ .

- d.
- e.
- f. Le problème de cet exercice est le logarithme en base  $x$ . Notez déjà les conditions d'existence :  $x$  ne peut pas être négatif, ni nul, ni égal à un. Ensuite, nous utilisons la formule de changement de base des logarithmes pour transformer  $\log_x$  en  $\log_2$  :

$$\log_x(2) = \frac{\log_2(2)}{\log_2(x)}. \quad (13.37)$$

La fraction se simplifie du fait que  $\log_2(2) = 1$ . L'équation que nous devons regarder devient donc :

$$2\log_2(x) + \frac{1}{\log_2(x)} = 3. \quad (13.38)$$

La bonne idée est de poser  $y = \log_2(x)$  et de trouver l'équation

$$2y^2 - 3y + 1 = 0, \quad (13.39)$$

dont les solutions sont  $y = 1$  et  $y = 1/2$ . La solution  $\log_2(x) = 1$  donne  $x = 2$  et la solution  $\log_2(x) = \frac{1}{2}$  donne  $x = \sqrt{2}$ .

- g. Avant de commencer, notez les conditions d'existence  $1 - x > 0$  qui demande  $x < 1$ . Nous savons que  $\log_4(A) < 0$  lorsque  $A < 1$ . Cela est valable pour toute expression  $A$ , tant que la base du logarithme est plus grande que 1. Donc les solutions de l'équation sont données par  $x > 0$ . En tenant compte des conditions d'existence

$$x \in ]0, 1[. \quad (13.40)$$

- h. La fonction

$$x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad (13.41)$$

étant décroissante, l'équation est vraie quand

$$3x > 2x - 9, \quad (13.42)$$

c'est à dire pour  $x > -9$ .

### Exercice 82.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- a.  $\cos(x) = 1$
- b.  $2 \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$
- c.  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- d.  $\sin(x) = -\cos(x)$
- e.  $-3 \cos^2(3x) + \frac{5}{2} \cos(3x) - 1 = 0$
- f.  $\tan(2x) = 3 \tan(x)$
- g.  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) > \sin(x)$
- h.  $\sin(2x) = 0$
- i.  $\cos(40x) = 4$
- j.  $\sin(x) = \cos(x)$

- k.  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \frac{1}{2}$
- l.  $|\cos(2x)| < \frac{1}{2}$
- m.  $\arcsin(x) = -\frac{\pi}{4}$

### Correction de l'exercice 82

- a. Dans le cercle trigonométrique, nous avons  $\cos(x) = 1$  lorsque  $x = 0$ . Les solutions sont donc

$$x \in \{\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots\} = \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (13.43)$$

- b.
- c.
- d.
- e. Comme à chaque fois que l'inconnue se trouve dans une fonction spéciale (cosinus, logarithme, exponentielle), un petit changement de variable est tout indiqué. Dans ce cas ci nous posons  $y = \cos(3x)$ , et nous trouvons l'équation

$$-y^2 + \frac{5}{2}y - 1 = 0, \quad (13.44)$$

dont les solutions sont  $y = 2$  et  $y = 1/2$ .

La solution  $y = 2$  correspond à  $\cos(3x) = 2$ , qui n'a aucune solution. La solution  $y = 1/2$  par contre correspond à  $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ . Cela donne les solutions suivantes pour  $x$  :

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (13.45a)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad (13.45b)$$

- f.
- g.
- h. Nous savons que  $\sin(2x) = 0$  lorsque  $2x = k\pi$ , c'est à dire

$$x = \frac{k\pi}{2}. \quad (13.46)$$

Ici, comme partout nous sous-entendons  $k \in \mathbb{Z}$ .

- i. La fonction cosinus ne passe *jamais* par la valeur 4.

- j. Sur le cercle trigonométrique, nous avons  $\sin(x) = \cos(x)$  lorsque  $x = \frac{\pi}{4}$ , mais aussi lorsque  $x = \frac{5\pi}{4}$ . Les solutions sont donc

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. \quad (13.47)$$

- k. La somme  $\cos^2(x) + \sin^2(x)$  fait toujours 1, il n'y a donc pas de solutions.
- l. Nous savons que  $\cos(y) = \frac{1}{2}$  lorsque  $y = \pi/3$  et  $-\pi/3$ . Pour toutes les valeurs intermédiaires,  $\cos(y) < \frac{1}{2}$ . Étant donné que nous regardons la valeur absolue, les valeurs de  $y$  entre  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$  sont également à prendre. Au final,

$$\begin{aligned} 2x &\in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[ + 2k\pi \cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[ + 2k\pi \\ &= \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[ + k\pi. \end{aligned} \quad (13.48)$$

- m. Prenons le sinus des deux membres de  $\arcsin(x) = -\frac{\pi}{4}$ . Le premier membre devient  $x$ , tandis que le second membre devient  $\sin(-\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ . La solution est donc

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (13.49)$$

### Exercice 83.

Construire les fonctions inverses des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

- a.  $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$
- b.  $g(x) = \frac{3x-1}{x+4}$ .

### Correction de l'exercice 83

Pour rappel, l'inverse de la fonction  $f$  est donnée par

$$f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}. \quad (13.50)$$

Cela est une fonction pour les valeurs de  $y$  où l'ensemble se réduit à un singleton.

- a. L'équation à résoudre est

$$\sqrt[5]{x+1} = y. \quad (13.51)$$

Donc nous avons  $f^{-1}(y) = y^5 - 1$ . Notez que cette fonction est définie partout, mais la fonction de départ  $f$  ne prend que des valeurs positives. Par conséquent, la fonction  $f^{-1}$  ne doit être vue que entre 0 et  $\infty$ .



- b. Cette fonction a une asymptote verticale en  $x = -4$  et prend toutes les valeurs réelles sauf 3. Son inverse va donc *a priori* être définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . Résolvons l'équation qui donne  $g^{-1}(y)$  :

$$y = \frac{3x - 1}{x + 4} \quad (13.52)$$

par rapport à  $x$ . La réponse est que

$$g^{-1}(y) = \frac{1 + 4y}{3 - y}. \quad (13.53)$$

Notez la condition d'existence  $y \neq 3$ . La fonction de départ ne prenant jamais la valeur 3, cette condition d'existence n'en est pas vraiment une parce que  $f^{-1}$  n'était déjà définie que sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

## 13.1 Limites et continuité

### Exercice 84.

Calculer les limites suivantes ou prouver leur non-existence.

a.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x) \cos(x)}{x} \quad (13.54)$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)} \quad (13.55)$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) \frac{x^2 + 2x + 3}{x}. \quad (13.56)$$

Comment résoudre cet exercice avec Sage ? Les lignes de code à rentrer pour résoudre la première limite sont dans l'ordre

a. `var('x')`

b. `f(x)=sin(x)*cos(x)/x`

c. `limit(f(x),x=oo)`

La ligne [a](#) déclare que la lettre `x` désignera une variable. La ligne [b](#) définit la fonction  $f$ . Notez que la multiplication est notée par la petite étoile `*`. Pour la ligne [c](#), notez que l'infini est écrit par deux petits « o ».

La fonction  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  s'encode avec `f(x)=x**2+2*x+3`. Le symbole pour faire l'exposant est la double étoile `**`.

**Correction de l'exercice 84**

- a. Cette fonction est une très bonne candidate à l'utilisation de l'étau. En effet, nous avons une fonction trigonométrique ( $\sin(x) \cos(x)$ ) multipliée par une fonction qu'on connaît bien ( $1/x$ ). Pour tout  $x > 0$ , nous avons les inégalités

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x) \cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (13.57)$$

Les deux fonctions  $\pm \frac{1}{x}$  tendent vers zéro lorsque  $x$  va vers l'infini ; par conséquent la fonction au milieu tend vers zéro. Note que l'on a utilisé le fait que  $-1 \leq \sin(x) \cos(x) \leq 1$ .

- b. La fonction est tracée sur la figure 13.1. Nous commençons par faire les

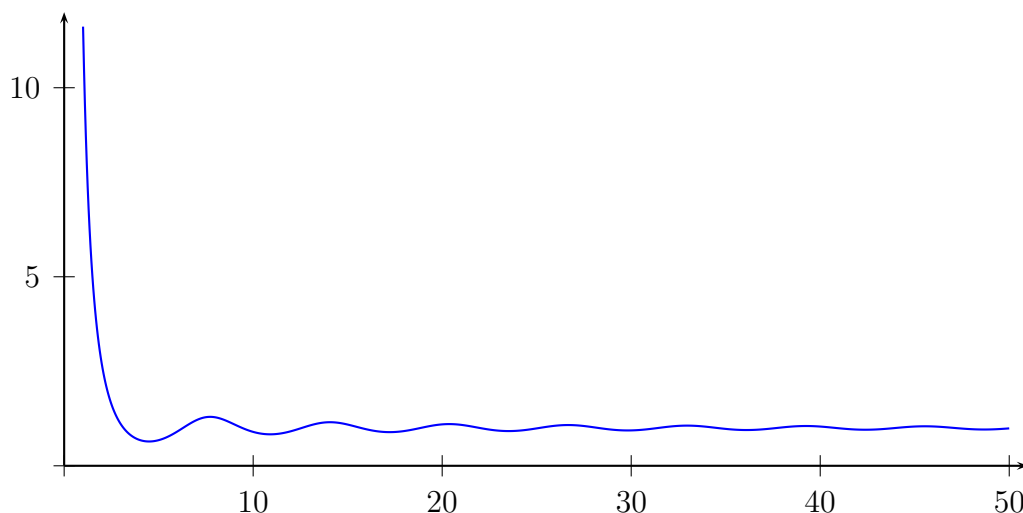


FIG. 13.1 – Tracé de la fonction pour l'exercice 84b.

manipulations suivantes :

$$\frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)} = \frac{x \left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\sin(x)}{x}}{1 - \frac{\sin(x)}{x}}. \quad (13.58)$$

En utilisant la règle de l'étau, nous savons que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ . Par conséquent nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)} = 1. \quad (13.59)$$

Remarque que, à côté de fonctions qui tendent vers l'infini, le sinus peut être considéré comme une constante.

**Exercice 85.**

Une fonction périodique admet-elle une limite lorsque  $x$  tend vers l'infini ?

**Correction de l'exercice 85**

Non, sauf si elle est constante.

**Exercice 86.**

Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calcul.

a.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ .

**Correction de l'exercice 86**

- a. Ici, il faut multiplier et diviser par la binôme conjugué et d'appliquer le produit remarquable pour faire disparaître les racines du numérateur.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}. \end{aligned} \tag{13.60}$$

À partir de cette dernière expression, il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \tag{13.61}$$

- b. Ici, l'astuce est de multiplier et diviser par le binôme conjugué de ce qui se trouve au numérateur :

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}. \tag{13.62}$$

L'avantage de cette façon de faire est qu'on peut maintenant utiliser le produit remarquable  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  au numérateur pour faire disparaître la racine. Après simplifications, nous nous retrouvons avec

$$\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}, \tag{13.63}$$

dont la limite pour  $x \rightarrow 0$  est  $\frac{1}{4}$ .

**Exercice 87.**

Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calcul.

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+2}.$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}.$

Pour effectuer cet exercice avec Sage, il faut taper les lignes suivantes :

(a) `var('x,a,b')`

(b) `f(x)=sin(a*x)/sin(b*x)`

(c) `limit(f(x),x=0)`

Noter qu'il faut déclarer les variables  $x$ ,  $a$  et  $b$ .

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$

e.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-2}$

Les lignes pour résoudre par Sage sont :

(a) `f(x)=(sqrt(x**2+1))/(x-2)`

(b) `limit(f(x),x=oo)`

(c) `limit(f(x),x=-oo)`

Noter la commande pour la racine carré : `sqrt`. Étant donné que cette fonction diverge en  $x = 2$ , si tu veux la tracer, il faut procéder en deux fois :

(a) `plot(f,(-100,1.9))`

(b) `plot(f,(2.1,100))`

La première ligne trace de  $-100$  à  $1.9$  et la seconde de  $2.1$  à  $100$ . Ces graphiques vous permettent déjà de voir les limites. Attention : ils ne sont pas des *preuves* ! Mais ils sont de sérieux indices qui peuvent vous inspirer dans vos calculs.

f.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}.$

g.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^2}{h}.$

**Correction de l'exercice 87**

- a. Cet exercice, comme beaucoup qui contiennent un cosinus ou un sinus en facteur, se traite avec la règle de l'étau. En effet, étant donné que  $\sin(\frac{1}{x})$  est coincé entre  $-1$  et  $1$ , nous avons toujours les inéquations

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x. \quad (13.64)$$

Or, nous savons que  $-x$  et  $x$  tendent tous les deux vers zéro lorsque  $x$  tend vers zéro. Nous concluons que ce qui se trouve au milieu tend également vers zéro lorsque  $x \rightarrow 0$ .

- b. Ce genre d'exercices avec un  $x$  dans l'exposant d'une fraction doit faire penser à la limite qui définit le nombre  $e$ . Commençons par inverser la fraction en mettant un signe dans l'exposant, et séparons en deux facteurs :

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+2} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x-2} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-2} \quad (13.65)$$

Le second facteur tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers l'infini. Pour le second,

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1}. \quad (13.66)$$

La limite du tout fait donc  $e^{-1}$ .

- c. La subtilité dans cet exercice est de faire apparaître la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$  que l'on connaît. Pour ce faire, on commence par multiplier et diviser par  $x$  :

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{x \sin(\alpha x)}{x \sin(\beta x)} \quad (13.67)$$

À ce niveau, nous avons les combinaisons  $\sin(\alpha x)/x$  et  $x/\sin(\beta x)$  qui apparaissent. Ce n'est pas encore tout à fait ce que l'on veut. Nous multiplions et divisons par  $\alpha\beta$  pour mettre tout comme il faut :

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{x \alpha \beta \sin(\alpha x)}{x \alpha \beta \sin(\beta x)} \quad (13.68)$$

La limite de cette expression se décompose en trois morceaux. D'abord la constante  $\alpha/\beta$ , et ensuite les deux limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \rightarrow 1 \quad (13.69a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \rightarrow 1. \quad (13.69b)$$

La réponse est donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (13.70)$$

- d. Pour cet exercice et les autres avec les exponentielles, allez voir le très complet [recueil d'exercices](http://student.ulb.ac.be/lclaessee/CdII1.pdf) de première année en physique et math de l'ULB<sup>3</sup> dans la section « calcul de limites ».

---

<sup>3</sup><http://student.ulb.ac.be/lclaessee/CdII1.pdf>

- e. Pour cet exercice, on peut mettre le plus haut degré de  $x$  en évidence en sortant le  $x^2$  de la racine. Ce dernier sort sous la forme de la valeur absolue :  $\sqrt{x^2} = |x|$ . De plus, lors de la simplification par  $x$ , la valeur absolue se transforme en  $\pm x$  suivant que  $x$  est positif ou négatif. Nous avons

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x - 2} = \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x(1 - \frac{2}{x})} = \frac{\pm\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{1 - \frac{2}{x}}. \quad (13.71)$$

Lorsqu'on fait la limite  $x \rightarrow \pm\infty$ , le dénominateur tend de toutes façons vers un. Le numérateur tend, lui, vers zéro si le signe est positif et vers  $-2$  si le signe est négatif. Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (13.72a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -2 \quad (13.72b)$$

- f. Il s'agit d'utiliser l'astuce du binôme conjugué tant pour le numérateur que pour le dénominateur. Il faut donc multiplier et diviser par  $\sqrt{x+2j}+2$  et par  $\sqrt{x+7}+3$  en même temps. En utilisant les produits remarquables, et en simplifiant par  $(x-2)$ , on trouve

$$\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}, \quad (13.73)$$

dont la limite vaut

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{3}{2}. \quad (13.74)$$

- g. Si on développe le  $(x+h)^3$ , nous trouvons au numérateur

$$x^3 + 3hx^2 + 3xh^2 + h^3 - x^3. \quad (13.75)$$

Les  $x^3$  se simplifient et il ne reste plus que des termes qui contiennent  $h$ . En écrivant la fraction complète, les  $h$  se simplifient avec le dénominateur et nous tombons sur

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2x^2 + x^2 = 3x^2 \quad (13.76)$$

qui ne dépend plus de  $h$ .

### Exercice 88.

Étudier le domaine de définition et la continuité des fonctions définies ci-dessous.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- b.  $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
- c.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
- d.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} \sin(\frac{x}{x+1}) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = -1. \end{cases}$
- e.  $f(x) = (1 + |x|)e^{|x|}$ .
- f.  $f(x) = \ln(1 + |x|)$ .

### Correction de l'exercice 88

Pour la continuité, ces exercices se réduisent à calculer la limite des fonctions en le point à problème, et vérifier si cette limite est égale ou non à la valeur de la fonction en ce point, en vertu du théorème qui lie la limite et la continuité.

- a. Cette fonction est définie partout, et vu que  $\sin(x)/x \rightarrow 1$ , elle est continue partout.
- b. Elle est définie partout, et elle est continue parce que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \quad (13.77)$$

Cette limite a été calculée à l'exercice 87a.

- c. La fonction n'est définie que pour  $x \geq 0$ . De plus, Nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \infty, \quad (13.78)$$

donc cette fonction n'est pas continue en 0.

- d. La fonction est définie sur tout  $\mathbb{R}$ . Il faut maintenant regarder les deux points de discontinuité possibles. Le premier revient à calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} \sin\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad (13.79)$$

qui est un cas du type  $\frac{\sin(A)}{A}$  avec  $A$  qui tend vers zéro. Nous savons que cette limite vaut 1. Nous avons donc que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , mais  $f(0) = 0$ . La fonction n'est donc pas continue en 0.

Pour le second point, nous devons calculer

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x} \sin\left(\frac{x}{x+1}\right). \quad (13.80)$$

Pour cette limite, nous utilisons la règle de l'étau. Le sinus reste borné entre  $-1$  et  $1$ , tandis que le facteur  $\frac{x+1}{x}$  tend vers zéro. Nous avons donc  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$  et donc la fonction est continue en  $-1$ .

- e. Cette fonction est définie et continue sur tout  $\mathbb{R}$  parce qu'elle est une composée de fonctions continues : la valeur absolue et l'exponentielle.
- f. Cette fonction est définie tant que  $1 + |x| > 0$ , ce qui est toujours le cas. Elle est également continue partout.

## 13.2 Suites numériques

### Exercice 89.

Calculer la limite des suites suivantes.

- a.  $s_n = \frac{1}{n}$
- b.  $s_n = \frac{2n-1}{3n+2}$
- c.  $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$

### Correction de l'exercice 89

- a. Cette suite est la suite type qui tend vers zéro. En effet, prenons n'importe quel  $\epsilon > 0$ , et trouvons à partir de quel moment dans la suite,  $s_n < \epsilon$ . Nous cherchons donc les  $n$  pour lesquels  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . Cette inéquation est facile à résoudre : la réponse est

$$n > \frac{1}{\epsilon}. \quad (13.81)$$

Prenons par exemple  $\epsilon = 0.1$ . Effectivement, dès que  $n > 10$ , nous avons  $s_n = \frac{1}{n} < 0.1$ .

- b. Cette suite ressemble à une fonction, donc nous allons appliquer à peu près les mêmes recettes. D'abord nous mettons  $n$  en évidence au numérateur et au dénominateur et nous simplifions :

$$s_n = \frac{2}{3 - \frac{2}{n}} - \frac{1/n}{3 - \frac{2}{n}}. \quad (13.82)$$

À ce moment nous appliquons le théorème qui dit que  $\lim(a_n - b_n) = \lim(a_n) - \lim(b_n)$  (quand les limites existent). Ici,

$$a_n = \frac{2}{3 - \frac{2}{n}} \quad b_n = \frac{1/n}{3 - \frac{2}{n}}. \quad (13.83)$$



En décomposant encore une fois chacun des deux termes en utilisant le théorème qui dit que  $\lim(a_n/b_n) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ , et en utilisant le fait que  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , nous avons que le limite du tout vaut  $\frac{2}{3}$ , comme nous nous y attendions depuis le début.

c. Nous pouvons utiliser la technique de l'étau en écrivant que pour tout  $n$ ,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}. \quad (13.84)$$

Les deux suites extrêmes tendent vers 0, donc celle du milieu tend vers zéro.

### Exercice 90.

Prouver que la suite  $s_n = \frac{2n+7}{3n+2}$  est croissante et bornée, donc qu'elle admet une limite. Calculer cette limite.

### Correction de l'exercice 90

Afin de prouver la croissance, nous calculons  $s_{n+1} - s_n$ , et nous prouvons que cette différence est toujours positive. En mettant au même dénominateur et en simplifiant, nous trouvons

$$s_{n+1} - s_n = \frac{2(n+1) - 7}{3(n+1) + 2} - \frac{2n - 7}{3n + 2} = \frac{25}{9n^2 + 21n + 1}, \quad (13.85)$$

qui est toujours positif quand  $n$  est positif. Note qu'ici, on ne considère que les  $n > 0$ . Nous travaillons avec des suites, pas avec des fonctions! Nous pouvons prouver que cette suite est majorée de la façon suivante :

$$s_n = \frac{2n - 7}{3n + 2} < \frac{2n}{3n + 2} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}. \quad (13.86)$$

Les inégalités sont vraies parce que on ajoute 7 au numérateur et on enlève 2 au dénominateur. La suite est donc majorée par  $\frac{2}{3}$ .

Maintenant que nous savons que la suite est majorée et croissante, nous savons qu'elle est convergente. Le calcul de la limite se fait de façon usuelle, et le résultat est  $\frac{2}{3}$ .

### Exercice 91.

La suite  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  définie par  $s_1 = 1$  et  $s_n = \sqrt{3s_{n-1}}$  pour tout  $n > 1$  est croissante et bornée. Le prouver. Quelle en est la limite?

### Correction de l'exercice 91

Pour prouver que la suite est croissante, nous calculons  $\frac{s_n}{s_{n-1}}$ , et nous prouvons que cette fraction est plus grande que 1 pour tout  $n$ . Nous avons

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{\sqrt{3s_{n-1}}}{s_{n-1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{s_{n-1}}}. \quad (13.87)$$

Pour que cela soit plus grand que 1, il faut d'abord s'assurer que  $s_{n-1} < 3$ . Cela se fait par récurrence. En effet, si  $s_k < 3$ , alors

$$s_{k+1} = \sqrt{3s_k} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3. \quad (13.88)$$

Nous avons donc bien que tous les éléments de la suite sont plus petits que 3, et donc que la suite est croissante et bornée.

La borne se trouve en utilisant l'astuce suivante. Nous savons que pour tout  $n$ ,

$$s_{n+1} = \sqrt{3s_n}. \quad (13.89)$$

Si nous notons  $l = \lim s_n$ , et si nous prenons la limite des deux côtés de (13.89), nous trouvons

$$l = \sqrt{3l}, \quad (13.90)$$

dont la solution est  $l = 3$ .

### Exercice 92.

Les suites suivantes sont-elles bornées, croissantes, décroissantes, convergentes ? Dans le cas où elles sont convergentes, calculer leur limite.

- a.  $s_n = 2 - \frac{n-1}{10}$
- b.  $s_n = (-1)^n n$
- c.  $s_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ .

### Correction de l'exercice 92

- a. Étant donné que multiplier une suite par un nombre constant ou l'ajouter à un nombre constant ne change par le fait qu'elle soit bornée ou non, la suite  $s_n = 2 - \frac{n-1}{10}$  sera bornée si et seulement si  $\frac{n-1}{10}$  est bornée, ce qui arrivera si et seulement si  $n-1$  est bornée. Or on sait bien que la suite  $n-1$  n'est pas bornée.

Comme la suite n'est pas bornée, elle ne peut pas être convergente. Étudions la (dé)croissance en calculant la différence entre deux termes consécutifs :

$$s_{n+1} - s_n = 2 - \frac{(n+1)-1}{10} - \left(2 - \frac{n-1}{10}\right) = -\frac{1}{10}. \quad (13.91)$$

La différence étant négative, la suite est décroissante.

- b. La convergence de cette suite se règle par l'étau :

$$-\frac{1}{n+1} < \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}. \quad (13.92)$$

La suite proposée converge donc vers zéro.

- c. Cette suite n'est ni croissante ni décroissante (parce qu'elle est positive et négative un élément sur deux). Elle ne converge pas non plus parce qu'elle n'est pas bornée.

**Exercice 93.**

Étudier la convergence des suites suivantes en écrivant une expression formelle pour le terme général.

- a.  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$   
b.  $0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, \dots$

**Correction de l'exercice 93**

- a. Cette suite a pour formule de récurrence  $s_1 = \sqrt{2}$  et  $s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$ . Sa convergence se traite exactement comme ce qui a été fait pour l'exercice 91.  
b. La formule qui donne la suite est  $s_1 = 0.2$  et  $s_{n+1} = s_n + \frac{3}{10^n}$ .



# Chapitre 14

## Correction de certains exercices



# Appendices

## A Foire aux questions

### A.1 Division euclidienne de polynômes

Un élément de réponse à la question

<http://www.enseignons.be/forum/mathematiques-f25/topic15748.html>

Lorsqu'on divise le nombre  $a$  par  $b$ , le but est de trouver un nombre  $x$  tel que  $bx = a$ . Si on veut faire une division entière, on a souvent un reste. Par exemple si on divise 57 par 7, nous obtenons 8 et un reste de 1, parce que

$$57 = 7 \cdot 8 + 1. \quad (\text{A.1})$$

Le but de la manœuvre, quand on divise  $a$  par  $b$ , est d'obtenir  $q$  et  $r$  tels que

$$a = q \cdot b + r \quad (\text{A.2})$$

où  $q$  est le plus grand possible. Le nombre  $r$  est appelé le **reste** de la division  $a/b$ .

Tout cela est bien connu depuis des années, et le moyen pour y arriver est l'**algorithme d'Euclide**, mieux connu sous le nom de « division écrite ».

#### Exercice 94.

Calcule  $44/8$  avec une division écrite, et identifie le reste.

Maintenant, nous allons faire la même chose avec des polynômes. Essayons de diviser  $x^3 + 2x^2 - 1$  par  $x + 7$ . Pour commencer, nous posons la division écrite comme d'habitude :

$$\begin{array}{r} x^3 \quad +2x^2 \quad +0 \quad -1 \quad \big| \quad x+7 \end{array} \quad (\text{A.3})$$

Ce faisant (et tout le long du calcul), fais bien attention à remplacer les termes « manquant » par des zéros. Ici, il n'y avait pas de termes en  $x$ , et nous l'avons remplacé par zéro. L'alignement est très important.

Maintenant, on regarde terme à terme. Donc, on se demande d'abord combien de fois  $x + 7$  rentre dans  $x^3$ . Le secret est de faire rentrer à chaque fois le terme de plus haut degré sans se soucier des autres termes. Ici, on ne se soucie donc pas du 7, et on essaye de faire rentrer juste le  $x$ . Combien de fois  $x$  rentre dans  $x^3$ ? Réponse :  $x^2$  fois. Nous écrivons donc  $x^2$  comme premier terme du quotient, et on soustrait comme d'habitude dans une division écrite :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +0 & -1 & x+7 \\ -(x^3 & +7x^2) & \vdots & \vdots & x^2 \\ \hline & -5x^2 & +0 & -1 & \end{array} \quad (\text{A.4})$$

Ce que l'on a soustrait est  $x^2(x + 7)$ .

Maintenant, on recommence en partant du résultat de la soustraction. Combien de fois  $x + 7$  rentre dans  $-5x^2$ ? Réponse :  $-5x$  fois. Et nous avançons d'un pas supplémentaire :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +0 & -1 & x+7 \\ -(x^3 & +7x^2) & \vdots & \vdots & x^2-5x \\ \hline & -5x^2 & +0 & -1 & \\ & -(-5x^2 & -35x) & \vdots & \\ & & 35x & -1 & \end{array} \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons encore faire un pas :

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +0 & -1 & x+7 \\ -(x^3 & +7x^2) & \vdots & \vdots & x^2-5x+35 \\ \hline & -5x^2 & +0 & -1 & \\ & -(-5x^2 & -35x) & \vdots & \\ & & 35x & -1 & \\ & & -(35x & +245) & \\ & & & -246 & \end{array} \quad (\text{A.6})$$

Étant donné que ce qu'il reste maintenant est de degré plus petit que  $x + 7$ , nous ne pouvons plus avancer. Nous avons donc

$$x^3 + 2x^2 - 1 = (x^2 - 5x + 35)(x + 7) - 246. \quad (\text{A.7})$$

Le résultat de la division est  $x^2 - 5x + 35$ , et le reste est  $-246$ .

## A.2 À venir...

... une réponse à la question

<http://www.enseignons.be/forum/mathematiques-f25/topic16331.html>



### A.3 Angles dans un parallélogramme

Éléments de réponses à la question <http://www.enseignons.be/forum/post286341.html>.

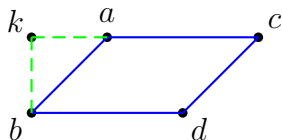


FIG. 1 – Le parallélogramme

Prouvons que les angles opposés dans un parallélogramme sont égaux. Pour cela, regardons le parallélogramme de la figure 1, et regardons les angles  $\widehat{abd}$  et  $\widehat{acd}$ .

Nous prolongeons le côté  $ac$  et traçons depuis  $b$  la perpendiculaire à  $ac$ . En d'autres termes, nous « complétons » le rectangle dont notre parallélogramme est un peu déformé.

D'abord, étant donné que  $bd$  est parallèle à  $ac$ , la droite  $bk$  est perpendiculaire aux deux en même temps. Donc l'angle  $\widehat{dbk}$  est droit et l'angle  $\widehat{abk}$  est le complémentaire de l'angle  $\widehat{abd}$  que nous étudions.

Dans le triangle rectangle  $bka$ , l'angle  $\widehat{bak}$  est donc le même que notre angle  $b$  parce qu'il est complémentaire du complémentaire. Vu maintenant que la droite  $ba$  est parallèle à la droite  $dc$ , l'angle  $\widehat{bak}$  est le même que l'angle  $\widehat{dca}$ .



# Annexe A

## GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

### A Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## B APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## C VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you

may publicly display copies.

## D COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## E MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version :

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

- M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## F COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.



In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

## **G    COLLECTIONS OF DOCUMENTS**

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## **H    AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS**

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## **I    TRANSLATION**

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to

the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## **J    TERMINATION**

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

## **K    FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE**

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/> .

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later

version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

## **L RELICENSING**

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

## **M ADDENDUM : How to use this License for your documents**

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with ... Texts.” line with this :

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

# Index

- Énergie, [180](#)
  - mécanique, [189](#)
- Éther, [235](#)
- Événement, [243](#)
- Accélération
  - instantanée, [168](#)
- Accélération moyenne, [168](#)
- Algorithme d'Euclide, [287](#)
- Application réciproque, [80](#)
- Bornée, [106](#)
- Boule
  - fermée, [105](#)
  - ouverte, [105](#)
- Cône de lumière, [244](#)
- Chute libre, [208](#)
- Compact, [134](#)
- Connexe, [107](#)
- Continue, [111](#)
  - sur espace métrique, [121](#)
- Continuité sur un intervalle, [112](#)
- Dérivée d'une fonction, [143](#)
- Déterminant d'un système d'équation,  
[66](#)
- Discriminant, [83](#)
- Distance, [105](#)
- Domaine de définition, [77](#)
- dynamomètre, [175](#)
- Espace topologique, [107](#)
- Fonction, [73](#)
  - strictement croissante, [78](#)
- Fonction inverse, [80](#)
- gravitation, [222](#)
- Graviton, [223](#)
- Image
  - réelle, [38](#)
  - virtuelle, [38](#)
- Infimum, [103](#)
- Intervalle, [108](#), [243](#)
- Leibnitz, [146](#)
- Ligne d'univers, [237](#)
- Majorant, [101](#)
- Maximum, [102](#)
- Minimum, [103](#)
- Minorant, [103](#)
- Mouvement, [162](#)
- MRU, [168](#)
- Origine
  - d'un système d'axe, [159](#)
- Ouvert, [106](#)
- Parabole, [82](#)
- Poids, [175](#), [209](#)
- Point matériel, [19](#)
- Primitive, [145](#)
- Principe de correspondance, [259](#)
- Prolongation par continuité, [132](#)
- Puissance, [194](#)
- Règle de Leibnitz, [146](#)
- Racine d'un trinôme, [82](#)

Recouvrement, [134](#)  
Repère  
    temporel, [161](#)  
Repère d'inertie, [178](#)  
Repos, [162](#)  
Reste, [287](#)  
  
Supremum, [102](#)  
Système d'axe, [159](#)  
  
Tangente hyperbolique, [249](#)  
Temps, [161](#)  
Théorème  
    accroissement fini, [153](#)  
    de l'énergie cinétique, [189](#)  
Topologie  
    métrique, [106](#)  
Trajectoire, [162](#)  
Travail, [184](#)  
  
Vitesse instantanée, [166](#)  
Vitesse moyenne, [166](#)  
Voisinage, [106](#)