Séance 4.1 - Diversification

Cas d’un portefeuille à 2 actifs

Diversification

Frontière Efficiente

PHIT

Qu’est ce que la **diversification** ?

Cas d'un portefeuille à 2 actifs

Rappels des formules

- Deux actifs risqués A et B sont dans le portefeuille, de poids w_A et $w_B = 1 - w_A$

$$\mathbb{E}(r_p) = w_A \mathbb{E}(r_A) + w_B \mathbb{E}(r_B)$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B}$$

PHIT

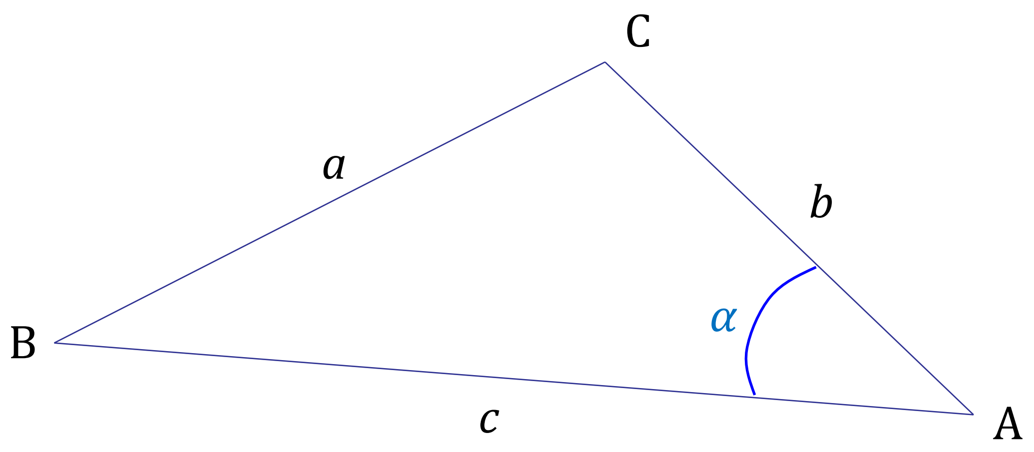
Cas d'un portefeuille à 2 actifs

Théorème de Pythagore / Al Kashi

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - \alpha)}$$

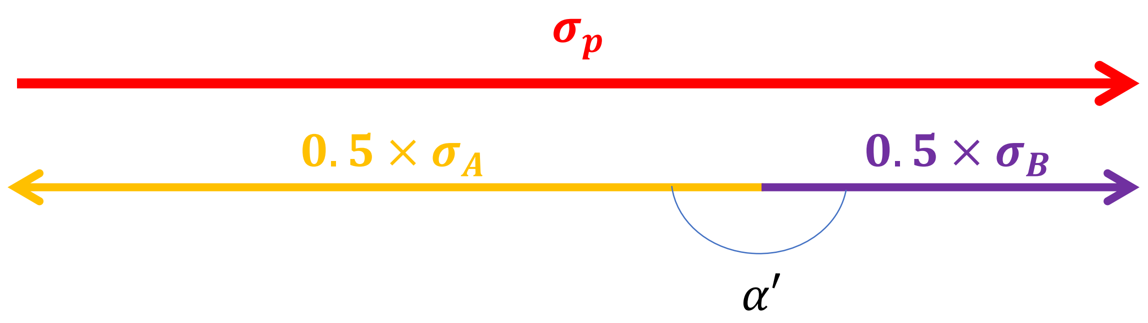
$$\text{car } \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$



Cas d'un portefeuille à 2 actifs

$$\boldsymbol{\rho_{A,B} = 100\%}$$

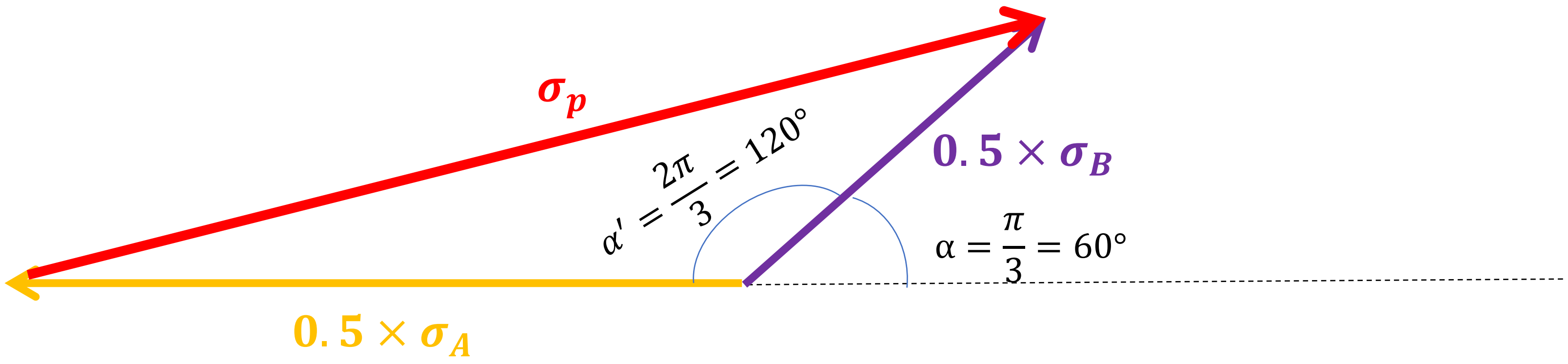
- $\sigma_A = 40\%, \sigma_B = 30\%$
- $w_A = w_B = 50\%$
- $c = 0.5 \times 40\% = 20\%, \quad b = 15\%$
- $\alpha = \cos^{-1}(\rho_{A,B}) = \cos^{-1}(1) = 0 \rightarrow \alpha' = \pi$
- $\sigma_p^2 = 0.2^2 + 0.15^2 + 2 \times 0.2 \times 0.15 \times 100\%$
- $\sigma_p = 35\%$



Cas d'un portefeuille à 2 actifs

$\boldsymbol{\rho_{A,B} = 50\%}$

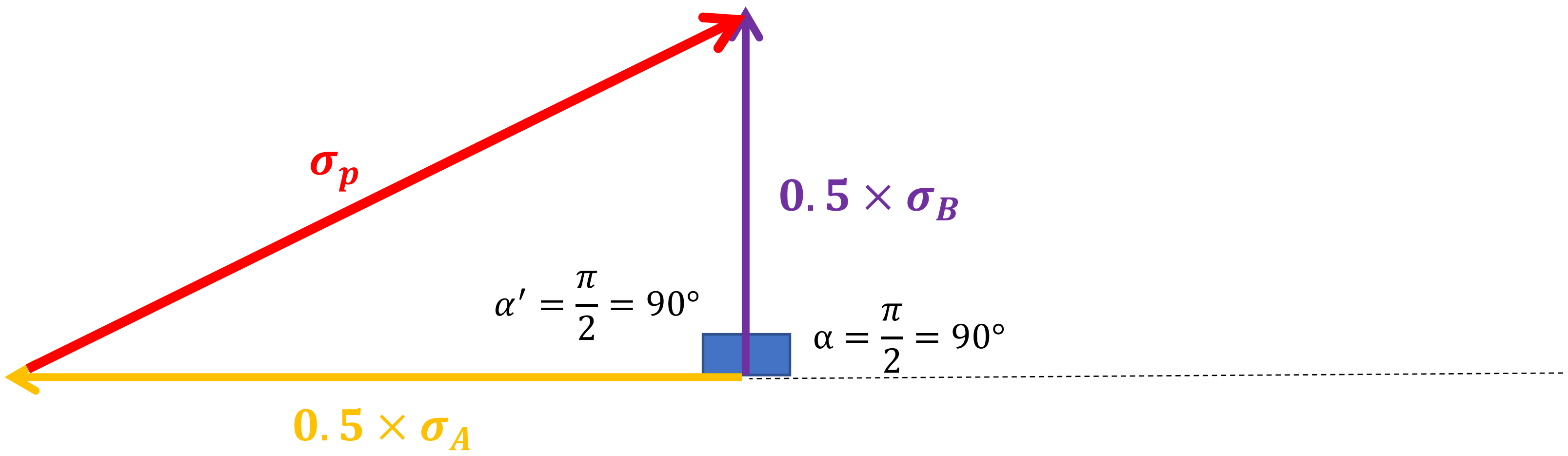
- $\sigma_A = 40\%, \sigma_B = 30\%$
- $w_A = w_B = 50\%$
- $c = 0.5 \times 40\% = 20\%, \quad b = 15\%$
- $\alpha = \cos^{-1}(\rho_{A,B}) = \cos^{-1}(0.5) = \frac{\pi}{3} \to \alpha' = \frac{2\pi}{3}$
- $\sigma_p^2 = 0.2^2 + 0.15^2 + 2 \times 0.2 \times 0.15 \times 50\%$
- $\sigma_p = 30.41\%$



Cas d'un portefeuille à 2 actifs

$\boldsymbol{\rho_{A,B} = 0\%}$

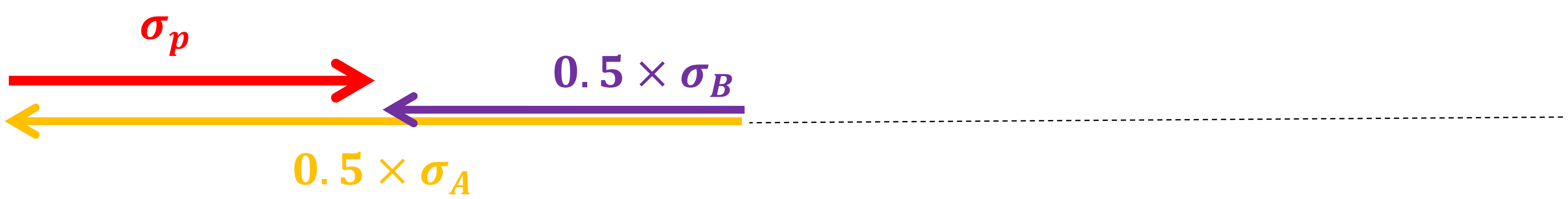
- $\sigma_A = 40\%, \sigma_B = 30\%$
- $w_A = w_B = 50\%$
- $c = 0.5 \times 40\% = 20\%, \quad b = 15\%$
- $\alpha = \cos^{-1}(\rho_{A,B}) = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{2}$
- $\sigma_p^2 = 0.2^2 + 0.15^2 + 2 \times 0.2 \times 0.15 \times 0\%$
- $\sigma_p = 25\%$



Cas d'un portefeuille à 2 actifs

$\boldsymbol{\rho_{A,B} = -100\%}$

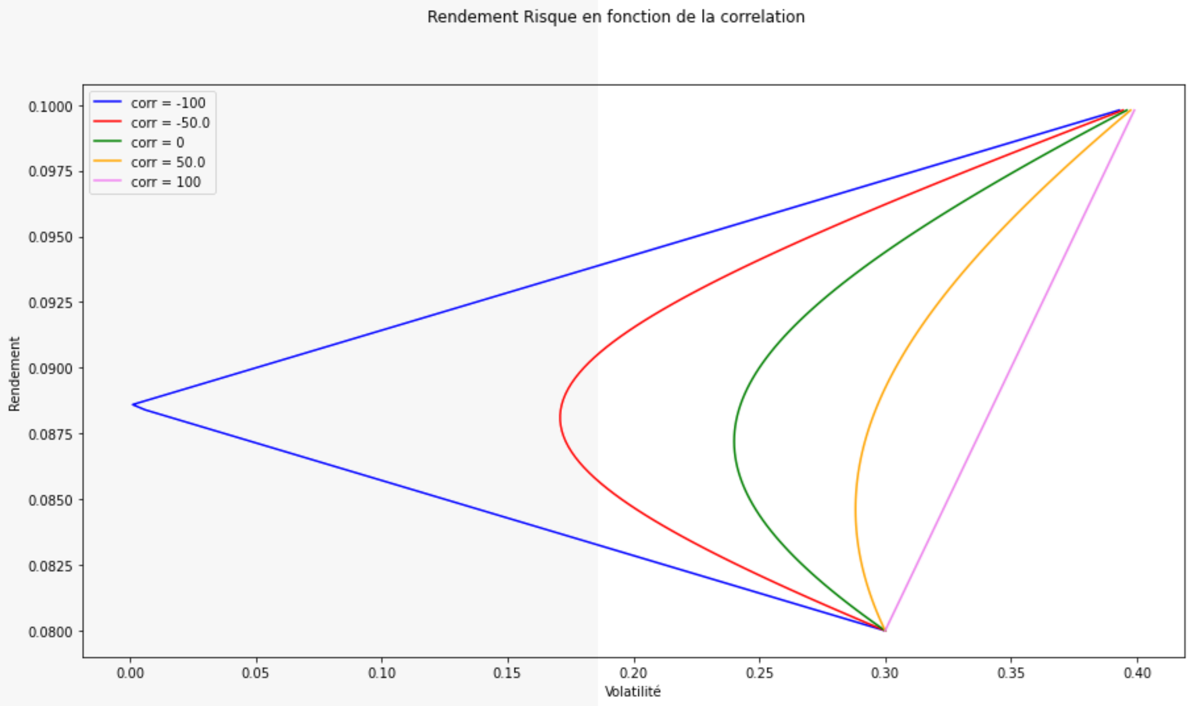
- $\sigma_A = 40\%, \sigma_B = 30\%$
- $w_A = w_B = 50\%$
- $c = 0.5 \times 40\% = 20\%, \quad b = 15\%$
- $\alpha = \cos^{-1}(\rho_{A,B}) = \cos^{-1}(-1) = \pi \rightarrow \alpha' = 0$
- $\sigma_p^2 = 0.2^2 + 0.15^2 + 2 \times 0.2 \times 0.15 \times -100\%$
- $\sigma_p = 5\%$

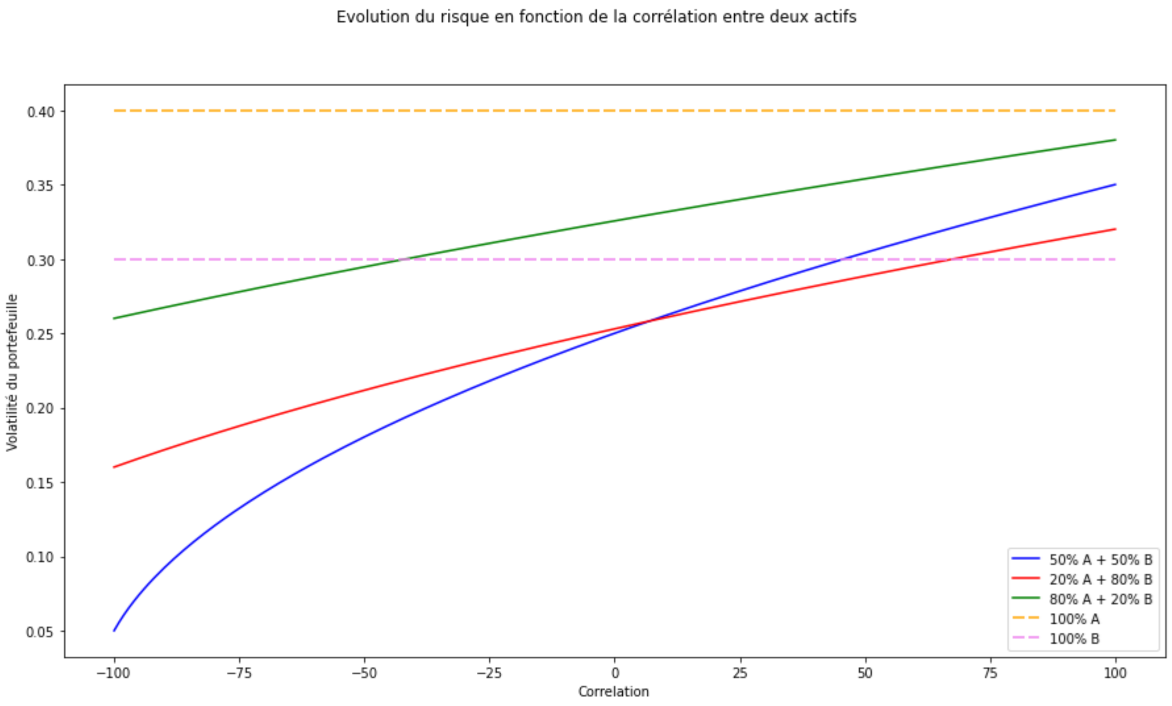


Cas d'un portefeuille à 2 actifs

Synthèse

- Pour diminuer le risque, il est préférable de chercher l'anti-corrélation.





Diversification

Définition

- La non corrélation totale des titres permets de diminuer le risque.
- « On ne met pas tous les œufs dans le même panier ».

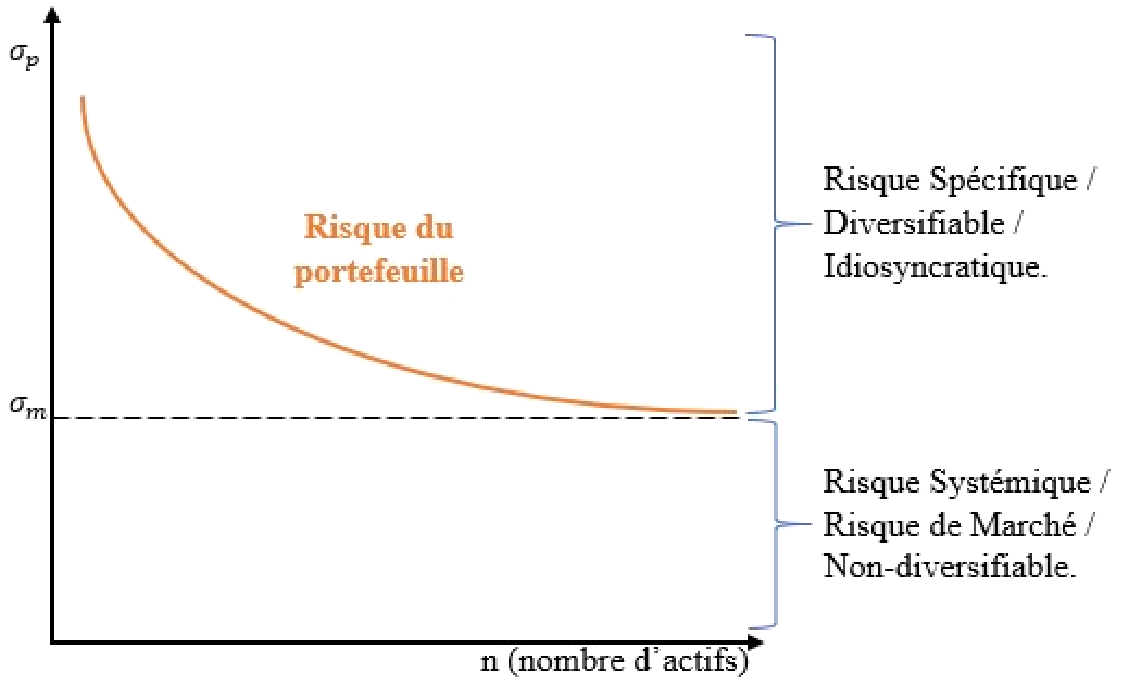
Quantification

- Volatilité sans diversification $=W^T \cdot \text{"diag"}(\Omega)$
- Gain de la diversification = σ_p- Volatilité sans diversification

Diversification

Efficacité

- Cela permet d'éliminer le risque spécifique
- Efficacité accrue quand N est petit.



Frontière efficiente

Synthèse

- Rendement espéré du portefeuille : $r_p = W_p^T \cdot \mathbb{E}R$
- Volatilité = $\sigma_p = \sqrt{W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p}$
- Contrainte sur les poids du portefeuille : $W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$

Définition du problème

- $\min_w W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p$

sct. $W_p^T \cdot \mathbb{E}R = r_{\text{target}},$

$W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$

Frontière efficiente

Formulation par le rendement espéré

- $\max_{w} W_p^T \cdot \mathbb{E}R$

$\text{sct. } W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p = \sigma^2_{\text{target}},$

$W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$

Formulation par l′aversion au risque

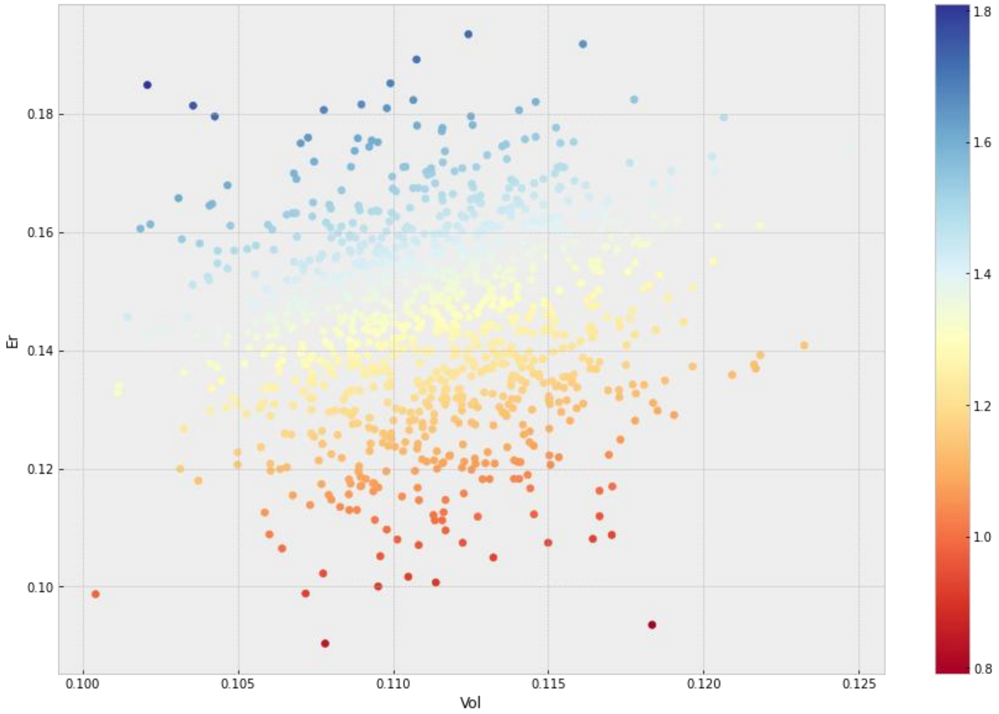
- $\max_{w} W_p^T \cdot \mathbb{E}R - \lambda \times W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p$

$sct. W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$

Frontière efficiente

Limites

- Pas assez de diversification quand le nombre d'actif est élevé

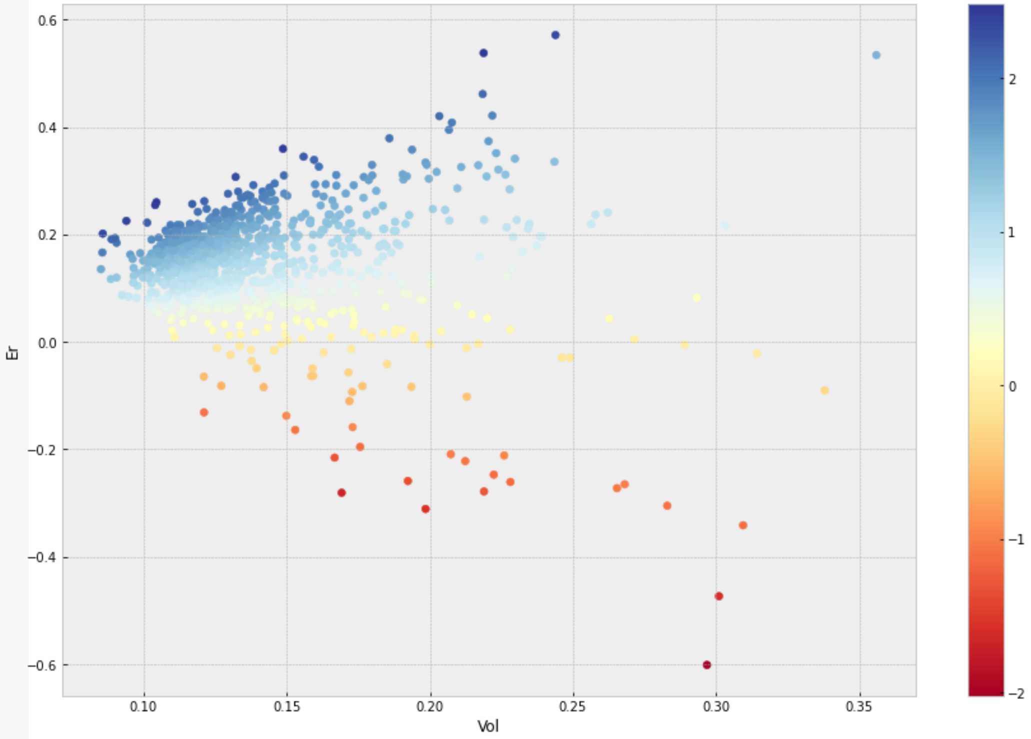


	max	min	mean	std
classical	0.032537	3.476404e-07	0.013158	0.007612

Frontière efficiente

Utilisation d'une transformation sur les nombres simulés

- Améliore la présence des cas extrêmes



	max	min	mean	std
classical	0.032537	3.476404e-07	0.013158	0.007612
exp	0.022841	7.119294e-03	0.013158	0.003750
log	0.167666	1.806279e-07	0.013158	0.013034
inv	0.995511	1.326805e-05	0.013158	0.044688

PHIT

Solver

Définition

- Un solveur est un programme qui permet de fournir un résultat à partir d’un problème mathématique interprétable par un ordinateur. Le terme solveur provient de l’anglais « to solve » qui signifie « résoudre ».
- Concrètement un solveur permet de résoudre de manière optimale (ou non) des systèmes d’équations et d’inéquations qu’on lui soumet.
  - Une fonction objectif à maximiser ou à minimiser
  - Une ou des variables qui peuvent varier.
  - Des contraintes (équations ou inéquations) sur ces variables.

Solver

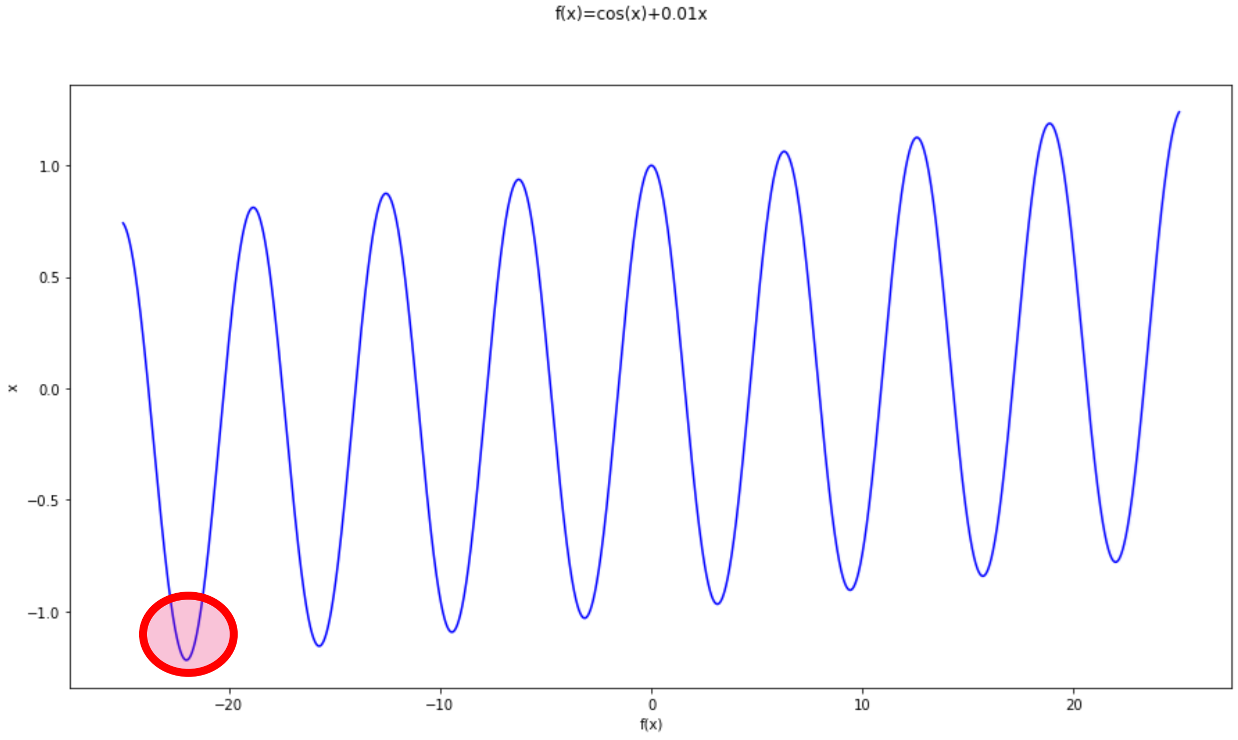
Limites

- Il y a une véritable course sur le marché des optimiseurs. Les versions gratuites reposent sur la méthode GRG (Generalized Reduced Gradient) qui consiste à partir d'un état initial des variables, à les faire bouger, vérifier que les contraintes sont respectées, et voir si il y a une augmentation ou une baisse du résultat de la fonction « objectif ».

Solver

Exemple

$$f(x) = \cos(x) + 0.01x,\ \text{sc. } x \in [-25; 25]$$



Solver

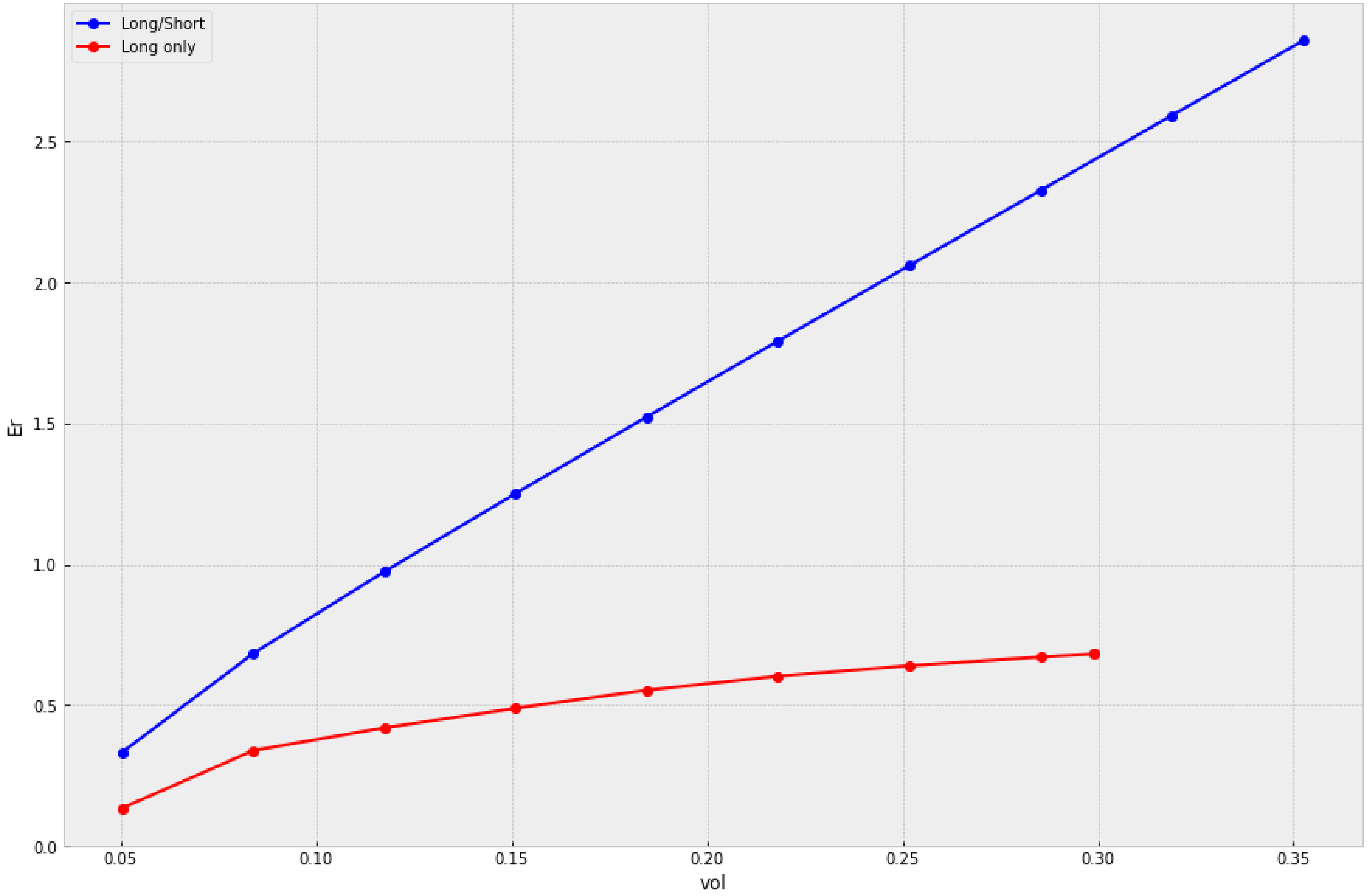
```
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

def fonction_objectif(x):
return np.cos(x)+0.01*x

csts=({'type' : 'ineq', 'fun':lambda x: 25.0-np.abs(x)}) #x>abs(25.0)

x0=(0.0)
opt_res=opt.minimize(fonction_objectif, x0, method="SLSQP", constraints=csts, tol=1e-10)
```

```
fun: -1.031465926952577
jac: array([0.])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 20
nit: 6
njev: 6
status: 0
success: True
x: array([-3.15159283])
```

```
[0.] [0.] [1.49011612e-08] [-0.00999999]
[-0.00999999] [-0.00999998] [-0.10999908]
[-0.10999908] [-0.10999906] [-3.10443361]
[-3.10443361] [-3.1044336] [-5.04846654]
[-3.2988369] [-3.15165166] [-3.15165166]
[-3.15165164] [-3.15159283] [-3.15159283]
[-3.15159282]
```

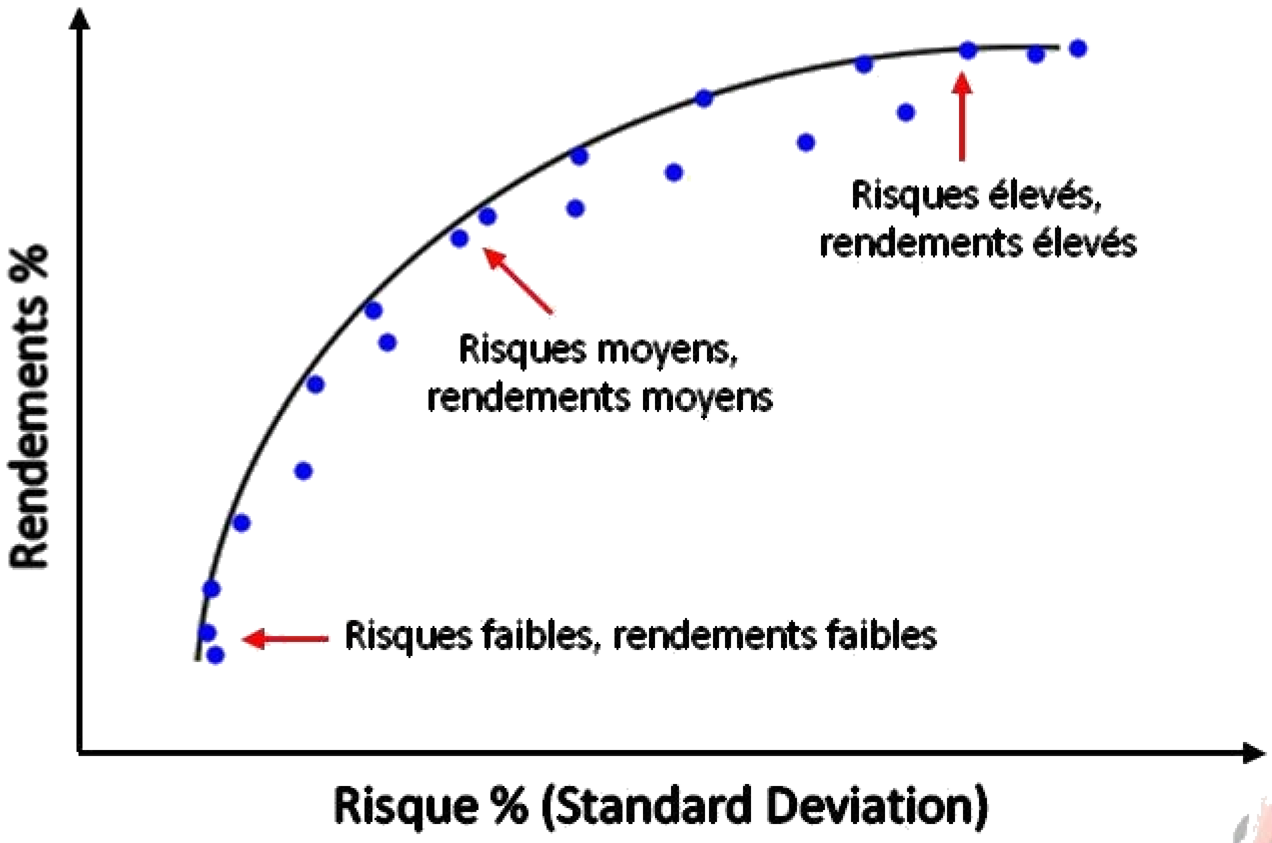
Frontière Efficiente

Résultats



Frontière Efficiente

Résultats



Quelques portefeuilles types

Portefeuille par capitalisation de marché

- Poids d'un actifs i : $w_i = \frac{C_i \times F_i}{\sum_j C_j \times F_j}$, où C_i est la capitalisation boursière de l'actif i et F_i est le taux de flottant.
- *Exemple EDF :*

Actions

	Vote	Nombre	Flottant		Autocontrôle		Flottant Total
Action A	1	3 238 676 748	550 209 120	*17.0%*	1 174 554	*0.0%*	17.0%

Actionnaires — Electricité de France (FR0010242511)

Nom	Actions	%
Government of France	2 593 960 583	80,1%
Electricité de France SA Employees Stock Ownership Plan	38 075 245	1,18%
Thornburg Investment Management, Inc.	12 633 764	0,39%
BlackRock Fund Advisors	7 660 540	0,24%
Kopernik Global Investors LLC	7 511 875	0,23%
Norges Bank Investment Management	7 266 353	0,22%
T. Rowe Price International Ltd.	5 761 046	0,18%
BlackRock Advisors (UK) Ltd.	5 000 165	0,15%
Dimensional Fund Advisors LP	3 977 975	0,12%
The Vanguard Group, Inc.	3 748 109	0,12%

Quelques portefeuilles types

Portefeuille à poids équipondéré

- Poids d'un actifs i :

$$w_i = \frac{1}{N}$$

où N est le nombre d'actif présent dans le portefeuille

Quelques portefeuilles types

Portefeuille à variance minimale

- Poids d'un actifs i est défini tel que

$$\min_{w} W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p \text{ sct. } W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$$

Quelques portefeuilles types

Portefeuille à diversification maximale

- Poids d'un actifs i est défini tel que

$$\max_{w} \frac{W_p^T \cdot \mathrm{diag}(\Omega)}{W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p} \text{ sct. } W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$$

Quelques portefeuilles types

Portefeuille à corrélation minimale

- Poids d'un actifs i est défini tel que

$$\min_{w} W_p^T \cdot C \cdot W_p \text{ sct. } W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%,$$

où C est la matrice de corrélation

Quelques portefeuilles types

Portefeuille Risk Parity

- Poids d'un actifs i est défini tel que

$$\min_{w} \frac{1}{2} \times W_p^T \cdot \Omega \cdot W_p - \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{N} \ln(w_i)$$

$$\text{sct. } W_p^T \cdot \vec{1} = 100\%$$

Exercice 11 : Frontière Efficiente

- **A partir des actions <u>françaises</u>, et à l'aide d'un solveur (scipy ou Google OR), construirez les portefeuilles suivants :**
  - Portefeuille à volatilité minimale : $\min_{w} W^T.\Omega.W \text{ , } sct \sum w_i = 1, \forall i, w_i \geq 0$
  - Portefeuille à volatilité maximale
  - Portefeuille de la frontière efficiente (10 portefeuilles entre les différents seuils de 1. et 2.) : $\min_{w} W^T.\Omega.W \text{ , } sct \sum w_i = 1, \mathbb{E}(r_p) = \bar{r}\ \forall i, w_i \geq 0$
  - Portefeuille de Maximum Diversification : $\max_{w} \frac{W_p^T.diag(\Omega)}{W_p^T.\Omega.W_p}, sct \sum w_i = 1, \forall i, w_i \geq 0$

Séance 4.2 - VaR – Value at Risk

Définition

Méthodes de calculs

CVaR – Conditional Value at Risk

PHIT

Qu’est-ce que la **Value-at-Risk** ?

Value at Risk

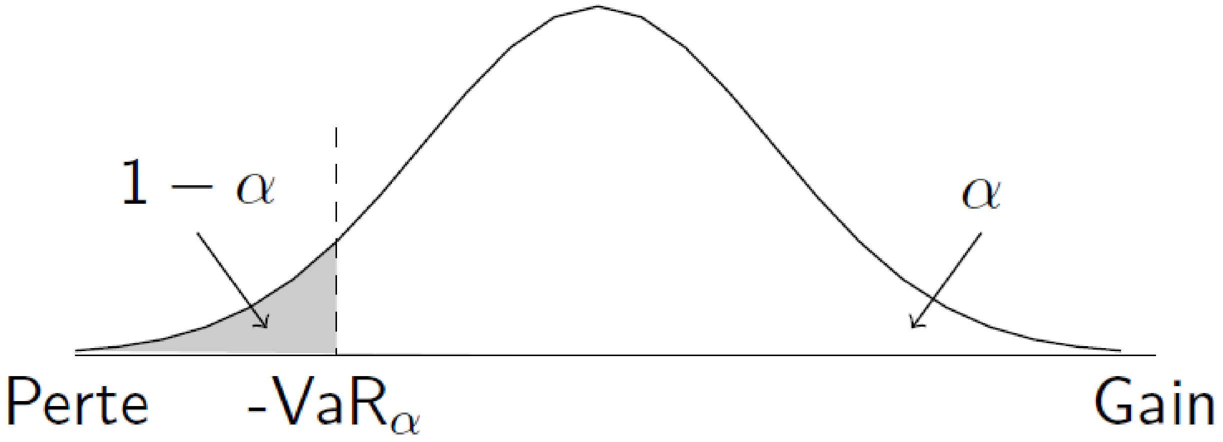
Définition

- **Perte potentielle maximale** d'un portefeuille
- Pour un **horizon de temps** donné
- Pour un **niveau de confiance** donné

Value at Risk

Mathématiquement

- $\text{VaR}(\alpha)|\,\alpha = \mathbb{P}(\text{VaR} < r_{i,t})$



Méthodes de calculs

Méthode historique

- Se base sur les prix passés
- Algorithme :
  - Prendre le quantile des rendements associés.
- Inconvénients :
  - Utilisation de cycle historique

Méthodes de calculs

Méthode paramétrique

- Distribution des rendements (par exemple **Normale ou Student**) et utilisation d'une formule fermée (fonction cumulative inverse)
- Inconvénients :
    - Calibration des paramètres et leurs incertitudes
    - Risque de modèle

Méthodes de calculs

Méthode semi-paramétrique

- Simulation **Monte Carlo** des prix des actifs, y compris sur des produits dérivés.
- Algorithme :
  - Simulation de n série de prix puis récupération du quantile.
- Inconvénients :
  - Modèle de diffusion & Calibration (Risque de modèle)
  - Couteux en CPU.

Méthodes de calculs

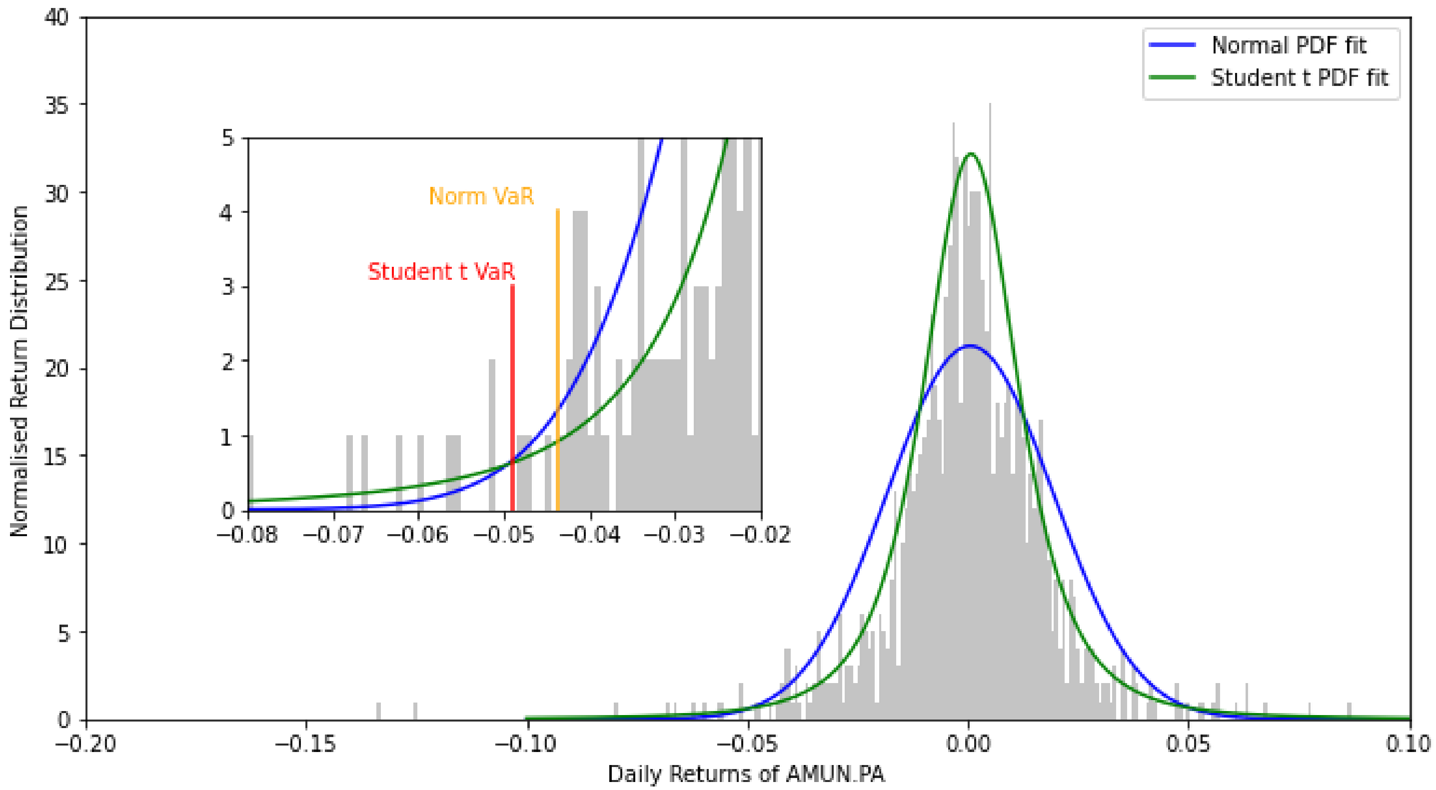
Méthode paramétrique

- **Loi Normale**
  - $\text{VaR}(\alpha) = (\mu - \Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma) \times \text{valeur du portefeuille}$
  - Où $\Phi^{-1}(.)$ est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale.
  - En cas de non drift : $\text{VaR}(\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma \times \text{valeur du portefeuille}$

- **Loi Student**
  - Prise en compte de la leptokurticité de la distribution des rendements.
  - $\text{VaR Student}(\alpha, \upsilon) = \sqrt{\upsilon^{-1}(\upsilon - 2)}\, t_{\upsilon}^{-1}(1 - \alpha)\sigma - \mu$
  - Où υ est le degré de liberté et t_{υ}^{-1} est la fonction inverse de répartition de la t distribution.

Méthodes de calculs

Méthode paramétrique



Méthodes de calculs

Méthode paramétrique

- **Cornish Fisher**
  - Prise en compte du skewness S et du kurtosis K.
  - $Z_\alpha^{CF} \approx \phi^{-1}(\alpha) + \frac{S\left(\phi^{-1}(\alpha)^2 - 1\right)}{6} + \frac{\left(\phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\phi^{-1}(\alpha)\right)K}{24} - \frac{\left(2\phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\phi^{-1}(\alpha)\right)S^2}{36}$
  - $\mathrm{VaR}(\alpha) = -Z_\alpha^{CF} \times \sigma \times$ valeur du portefeuille

Value at Risk

Backtest de la VaR

- Calcul de la VaR en date t.
- Comparaison de la perte observée en $t + 1$ avec la VaR estimée en t.
- Calcul de la fréquence empirique : % de fois où il y a un breach
- Test statistique sur la fréquence empirique par rapport au niveau de confiance (binomiale)

Value at Risk

Limites

- Bien comprendre les avantages et les inconvénients de chaque méthode
- Souvent la VaR **sous-estime** les risques extrêmes (problème de leptokurticité)
- Ne prend pas en compte le **risque de liquidité** (possibilité de déboucler une position dans les temps pour un volume donné).
- La VaR nous dit notre perte maximale pour un niveau de confiance donné, mais **ne nous dit pas la perte dans les cas extrême**.

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Une mesure de risque f est cohérente si elle respecte les propriétés suivantes :
  - **Monotone** : $X \gg Y \rightarrow f(X) > f(Y)$: Si un portefeuille XXX a des pertes potentielles supérieures ou égales à celles d'un portefeuille YYY, alors le risque de XXX doit être au moins aussi élevé que celui de YYY.

  => ok

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Une mesure de risque f est cohérente si elle respecte les propriétés suivantes :
  - **Homogène** : $t, X \rightarrow f(tX) = tf(X)$: la taille du portefeuille t va impacter la taille du risque pris. Si on multiplie les positions d'un portefeuille par un facteur t>0, la mesure de risque doit être multipliée par le même facteur.

=> ok

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Une mesure de risque f est cohérente si elle respecte les propriétés suivantes :
  - **Invariance par translation** : $c, X \rightarrow f(c+X) = f(X) - c$: Ajouter une somme fixe c à un portefeuille réduit le risque mesuré de la même quantité c.

=> Ko / Ok : L'ajout de cash décale la valeur totale du portefeuille à terme et aujourd'hui. La distribution des pertes (eu EUR) ne change pas, car elle est entièrement déterminée par les actifs risqués. La VaR se calcule sur cette distribution inchangée. Par contre, en relatif, il y a du sens.

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Une mesure de risque f est cohérente si elle respecte les propriétés suivantes :
  - **Sous-additivité** : $X, Y \rightarrow f(X+Y) \leq f(X) + f(Y)$: La mesure de risque d'un portefeuille global X+Y ne doit pas excéder la somme des mesures de risque de ses composantes X et Y. Cela permet la décentralisation de la gestion du risque.

=> Ko : Voir exemples

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Sous-additivité : Exemple 1
  - Soit deux actifs X et Y qui ont la distribution de perte suivante:

$$\begin{cases} 0, & \text{prob } 99.1\% \\ -10, & \text{prob } 0.9\% \end{cases} \Rightarrow X + Y \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{prob } 98.21\% \\ -10, & \text{prob } 1.78\% \\ -20, & \text{prob } 0.01\% \end{cases}$$

Donc la VaR(99%) de X et Y vaut 0€, la VaR(99%) de X+Y est de -10€, on a donc:

$$VaR(99\%)_X + VaR(99\%)_Y < VaR(99\%)_{X+Y}$$

<u>Non respect de la sous-additivité</u>

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Sous-additivité : Exemple 2

  Soit un portefeuille constitué de n=100 obligations

  La probabilité de défaut sur la prochaine année est identique pour chaque obligation est égal à 2%.

  Le prix actuel de chacune des obligations est de 100€.

  Si l'obligation ne fait pas défaut, l'emprunteur va rembourser 105€ dans 1 an.

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Sous-additivité : Exemple 2

La courbe de gain est définie :

$$P\&L = \begin{cases} 105 - 100 = 5, & \text{si pas défaut} \\ -100, & \text{si défaut} \end{cases}$$

La courbe de perte similaire est

$$\text{Perte} = \begin{cases} -5, & \text{si pas défaut} \\ 100 & \text{si défaut} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(P_i = -5) = 98\%, \mathbb{P}(P_i = 100) = 2\%$$

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Sous-additivité : Exemple 2

  On considère 2 portefeuilles :

  A : Portefeuille concentré sur 1 seule obligation (quantité = 100)

  B: Portefeuille diversifié sur les 100 obligations (quantité=1)

  Quelles est la VaR(95%) pour ces deux portefeuilles ?

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Sous-additivité : Exemple 2

  On considère 2 portefeuilles :

  A : Portefeuille concentré sur 1 seule obligation (quantité = 100)

  B: Portefeuille diversifié sur les 100 obligations (quantité=1)

  Pour le portefeuille A concentré :
  $\mathbb{P}(P_i = -5) = 98\%, \mathbb{P}(P_i = 100) = 2\%$

  Donc VaR(95)=$-5 \times 100 = -500$€

  C'est un gain !

Value at Risk

Mesure de risque « cohérente »

- Sous-additivité : Exemple 2

  On considère 2 portefeuilles :

  A : Portefeuille concentré sur 1 seule obligation (quantité = 100)

  B: Portefeuille diversifié sur les 100 obligations (quantité=1)

  Pour le portefeuille B diversifié :

  L'espérance de P&L est $\mathbb{E}(P\&L\ B_i) = -100 \times 2\% + 5 \times 98\% = 2.9$€. Soit 290€ pour le portefeuille.

  La variance est de : $\mathbb{V}(P\&L\ B_i) = 216.09$, soit 216090 pour le portefeuille

  Approximation de la binomiale par une normale
  $VaR(95\%, \text{perte}, \text{ptf}) = 290 - 1.645 \times \sqrt{216090} = 48.19$€

Expected Shortfall (ES) / Conditional VaR (CVaR)

Définition

- Moyenne des pertes subies lors d'un choc qui n'apparaît que dans les α% pire(s) cas.

- Mathématiquement

$$\mathrm{ES}(\alpha) = \mathrm{CVaR}(\alpha) = \mathbb{E}\left(r_{i,t} \middle| r_{i,t} \leq \mathrm{VaR}(\alpha)\right) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} \mathrm{VaR}(\Theta)\mathrm{d}\Theta$$

Expected Shortfall (ES) / Conditional VaR (CVaR)

Conséquence

- $\text{ES}(\alpha) \leq \text{VaR}(\alpha)$:
  - La perte moyenne au-delà de la VaR est plus petite ou égale à la VaR de même type (confiance, méthode de calcul, horizon).
- Mesure de risque cohérente

Expected Shortfall (ES) / Conditional VaR (CVaR)

Implémentation

- **Méthode Historique ou Méthode par simulation Monte Carlo**
  - Prendre la moyenne des pertes au-delà de la VaR
- **Méthode par approximation d'Euler**
  - Calculer les VaR au-delà du niveau de confiance puis faire une moyenne des différentes VaR
- **Méthode paramétrique (loi Normale)**
  - $\text{CVaR}(\alpha) = \mu - \frac{\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)\times\sigma}{\alpha}$
  - Où $\Phi^{-1}(.)$ est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale et $\phi(.) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est la fonction de densité

Exercice 12 : Value at Risk

- **Pour les portefeuilles en question :**
  - Calculez la VaR et la CVaR 95% et 99% à horizon 1 an pour les méthodes suivantes
    - Paramétrique Normale
    - Historique
    - Cornish Fisher