Matrices aléatoires et zéros de polynômes: Notes de cours

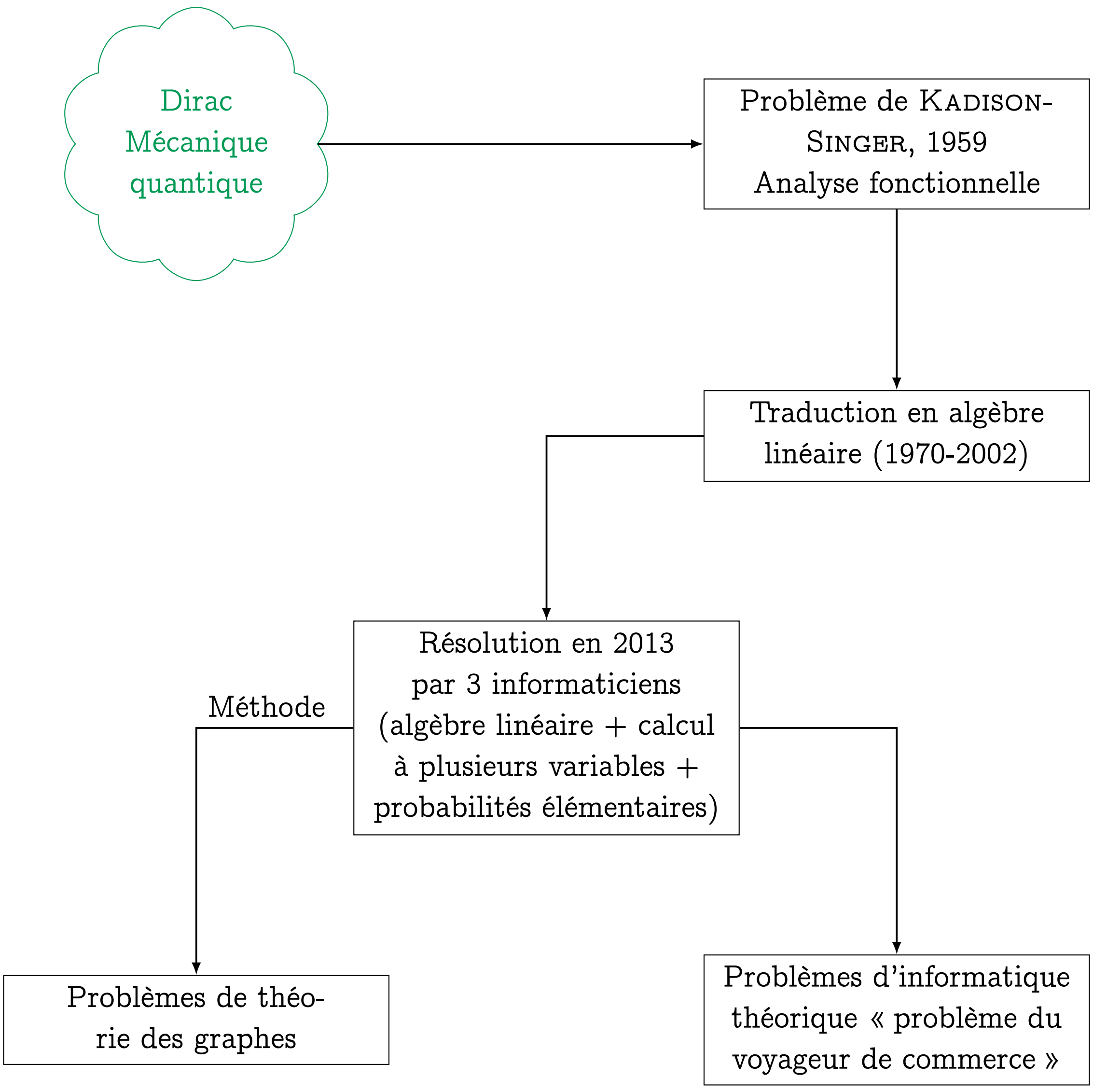
Enseignant: Prof. Alain Valette
Scribe: Laurent Hayez

Année 2018-2019, semestre de printemps
Dernière modification: 21 mars 2019

Table des matières

Chapitre 0

Résumé



Chapitre 1

De la mécanique quantique à l'analyse fonctionnelle

1.1 Mécanique quantique

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984) physicien anglais d'origine valaisanne, a écrit en 1930 les « Principles of quantum mechanics » (plusieurs fois ré-édités).

Principes :

- Les états d'un système physique sont représentés par les vecteurs-unités d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

> **Exemples 1.1.** — Une particule libre à une dimension : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
> — Une particule libre à deux dimensions : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$.
>
> ★

- Les grandeurs physiques (« observables ») sont des opérateurs auto-adjoints ($T = T^*$) sur $\mathcal{H}$.

> **Exemples 1.2.** — Sur $L^2(\mathbb{R})$, l'**opérateur de position** P est la multiplication par x sur $L^2(\mathbb{R})$.
> — L'**opérateur de moment** (ou impulsion) $Q = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$.
>
> ★

- Ce qu'on peut observer (en laboratoire) est la **probabilité** que la valeur d'une observable sur un état donné, soit comprise entre deux valeurs a et b.

> **Exemples 1.3.** — Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi\| = 1$, c'est-à-dire
> $$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$
> La probabilité que la position d'une particule dans l'état ψ, soit entre

a et b est
$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx.$$
En effet, le fait que $\|\psi\| = 1$ nous dit que ψ est une densité de probabilité.

★

Ces trois principes sont parfois appelés les « axiomes de la mécanique quantique ».

Dans le chapitre 18 de son livre, « Probability amplitudes », Dirac donne une recette pour obtenir ces probabilités.

Définition 1.4. Deux observables S et T sont dit **compatibles** si $ST = TS$.

Exemples 1.5.

1. Les observables P et Q précédemment définis ne sont pas compatibles. En effet,
$$PQ - QP = \frac{-1}{i} \mathrm{Id},$$
qui est la **relation d'indétermination de Heisenberg**.
2. Pour une particule libre à deux dimensions, posons P_x l'opérateur de multiplication par la première variable x sur $L^2(\mathbb{R})$ ($P_x f(x, y) = x f(x, y)$) et P_y l'opérateur de multiplication par la deuxième variable y. Ces deux opérateurs sont compatibles,
$$P_x P_y = P_y P_x.$$

★

La recette de Dirac est la suivante :

1. considérer un ensemble maximal d'observables deux à deux compatibles,
2. spécifier les probabilités associées sur les observables dans un état quantique donné,
3. étendre ces probabilités à toutes les observables, même non compatibles.

1.2 C^*-algèbres

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés (donc continus) de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$, avec la norme opérateur
$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.$$
L'espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une **algèbre de Banach**
$$\|ST\| \leqslant \|S\| \|T\|.$$

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est défini par

$$\langle T\xi \,,\, \eta\rangle = \langle \xi \,,\, T^*\eta\rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.6.
- Une **sous-algèbre** est un sous espace vectoriel qui est stable pour la multiplication.
- Une **$*$-sous-algèbre** A a la propriété $T \in A \Rightarrow T^* \in A$ et est fermée pour la norme opérateur.

Définition 1.7. Une **C^*-algèbre** est une $*$-sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Exemples 1.8.
1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathbb{C}\mathbb{1} = \{\lambda\mathbb{1},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\{0\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts.
2. Soit X un espace topologique compact, et $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|$$

et de l'involution

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

On prend sur X une mesure de probabilité μ telle que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide de X. *L'exemple a garder en tête est* $[0, 1]$ *avec la mesure de Lebesgue.* Ainsi $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert. Si on multiplie une fonction de L^2 par une fonction continue, elle reste dans L^2, ainsi

$$\pi\colon C(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ f \mapsto \text{multiplication par } f \text{ sur } \mathcal{H}.$$

Exercice 1.1. Avec $\|\pi(f)\| = \|f\|_\infty$, $C(X)$ est une C^*-algèbre. ♠

★

Théorème 1.9 (Gelfand, 1940). *Soit A une C^*-algèbre commutative à unité $(1 \in A)$. Il existe un espace compact X, unique à homéomorphisme près, tel que $A \simeq C(X)$.*

Définition 1.10. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est **positif** ($T \geqslant 0$) si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\langle T\xi, \xi \rangle \geqslant 0$,
2. il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $T = S^*S$,
3. $T = T^*$ et $\mathrm{Sp}(T) \subset [0, +\infty[$ (Rappel : le spectre de T $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible$\}$, $\mathrm{Sp}(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}(T) \subseteq B(0, \|T\|)$).

Définition 1.11. Si A est une C^*-algèbre à unité, un **état** sur A est une forme linéaire $\varphi : A \to \mathbb{C}$ telle que

1. $\varphi(1) = 1$,
2. $\varphi(T^*T) \geqslant 0$ pour tout $T \in A$.

On note $S(A)$ l'ensemble des états sur A.

Exemple 1.12. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\| = 1$, alors pour $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\varphi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$$

est un **état vectoriel** et

$$\varphi(1) = \|\xi\|^2 = 1, \ \ \varphi(T^*T) = \langle T^*T\xi, \xi \rangle = \langle T\xi, T\xi \rangle = \|T\xi\|^2 \geqslant 0$$

et ainsi $S(A) \neq \emptyset$. ★

Proposition 1.13. $S(A)$ *est une partie convexe de la boule-unité du dual* A^* *(ici* A^* *est l'ensemble des formes linéaires continues sur* A*).*

Preuve.

1. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A)$, soit $t \in [0, 1]$. On doit montrer que

$$t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 \in S(A).$$

On a

$$(t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(\mathbb{1}) = 1, \quad (t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(T^*T) \geqslant 0.$$

2. Si $\varphi \in S(A)$, on doit montrer que $\|\varphi\| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$|\varphi(t)| \leqslant 1 \text{ si } \|T\| \leqslant 1.$$

Si $\|T\| \leqslant 1$, alors $\mathbb{1} - T^*T \geqslant 0$ car

$$\langle (\mathbb{1} - T^*T)\xi\,,\,\xi\rangle = \|\xi\|^2 - \|T\xi\|^2 \geqslant 0$$

puisque $\|T\| \leqslant 1$. On peut encore écrire

$$\mathbb{1} - T^*T = S^*S$$

pour $S \in A$. Ainsi

$$1 - \varphi(T^*T) = \varphi(\mathbb{1} - T^*T) = \varphi(S^*S) \geqslant 0 \implies \varphi(T^*T) \leqslant 1.$$

L'application $A \times A \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \varphi(y^*x)$ vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\varphi(y^*x)|^2 \leqslant \varphi(y^*y)\varphi(x^*x)\,\forall x, y \in A.$$

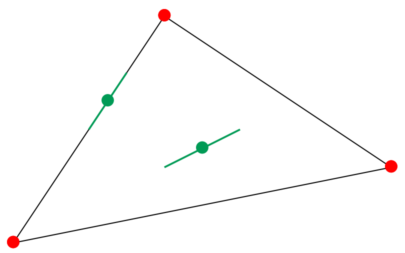
Pour $x = T$, $y = \mathbb{1}$,

$$|\varphi(T)|^2 \leqslant \varphi(\mathbb{1})\varphi(T^*T) \leqslant 1.$$

□

Remarque 1.14. Comme $1 = \varphi(\mathbb{1}) \leqslant \|\varphi\|$, on a que $S(A)$ est contenu dans la sphère unité de A^*. ♣

Définition 1.15. Soit K un convexe dans un espace vectoriel réel ou complexe. Un point K est **extrême** dans K si x n'est pas intérieur à un segment contenu dans K, c'est-à-dire si $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in K$, alors $x = x_1 = x_2$.



● = points extrêmes

Un point extrême de $S(A)$ est appelé un **état pur**.

Exemples 1.16.

1. On montre que tout état vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est pur. On verra qu'il y a des états purs non vectoriels.
2. Soit $A = C(X)$, alors $S(A)$ s'identifie avec Prob(X) l'espace des mesures de probabilités sur X (un des théorèmes de représentation de Riesz). ★

Les états purs s'identifient aux points extrêmes de $\mathrm{Prob}(X)$, c'est-à-dire aux mesures de Dirac δ_x, définie par (pour $A \subset X$)

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 1.17 (Krein-Milman). *Soit K un convexe compact non vide dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrêmes*

$$K = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))}, \quad \mathrm{ext}K = \{\textit{points extrêmes de } K\}.$$

Sur A^*, on a la topologie faible $*$: $\varphi_i \xrightarrow{i \to \infty} \varphi$ si pour tout $x \in A$, $\varphi_i(x) = \varphi(x)$.

Théorème 1.18 (Banach-Alaoglu). *La boule unité de A^* est compacte pour la topologie faible $*$.*

On a vu que $S(A)$ est contenu dans la boule unité de A^*,

$$S(A) = \{\varphi \in A^* \text{ tq } \varphi(\mathbb{1}) = 1,\ \varphi(T^*T) \geqslant 0\ \forall T \in A\},$$

donc $S(A)$ est fermé pour la topologie faible $*$, ainsi $S(A)$ est convexe et compact. Par Krein-Milman, $S(A) = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S(A)))}$.

Si $\varphi \in S(A)$, une version du théorème de Hahn-Banach dit que φ s'étend en au moins un état sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \supset A$.

Soit $K_\varphi = \{\psi \in S(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \colon \psi\big|_A = \varphi\}$ l'ensemble des états de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui étendent φ. Alors K_φ est convexe et faible $*$-fermé.

cf. pages d'Alain pour la suite du cours du 28 février

Problème : un état pur sur une MASA a-t-il une extension unique à $\mathcal{B}(\mathcal{H})$?

Le résultat principal de Kadison & Singer (1959) est le théorème suivant, qu'on admet.

Théorème 1.19. *Pour la MASA diffuse $L^\infty[0,1]$, la réponse est non.*

L'article laisse ouvert le cas de la MASA discrète $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Problème de Kadison&Singer : la MASA $\ell^\infty(\mathbb{N})$ a-t-elle l'extension unique des états purs ?

Kadison & Singer inclinent à penser que la réponse doit être non (en fait c'est oui).

Proposition 1.20. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *notons* φ_k *l'état pur de* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *donné par* $\varphi_k(\underbrace{(a_n)_{n>0}}_{\in \ell^\infty(\mathbb{N})}) = a_k$. *Alors l'extension unique de* φ_k *à* $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *est*

$$T \mapsto \langle Te_k\,,\,e_k\rangle = T_{kk}.$$

Preuve.

1. Si ψ est un état pur non vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors ψ est nul sur l'espace des opérateurs compacts (en particulier sur l'espace des opérateurs de rang fini). Ici,

$$p_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{k-ème}}, 0, 0, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$$

et ainsi on a $\varphi_k(p_k) = 1$. Donc une extension de φ_k à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ est un état vectoriel, disons

$$T \mapsto \langle T\xi\,,\,\xi\rangle\,,\ \ \|\xi\| = 1.$$

2. À voir : $\xi = \lambda e_k$ avec $|\lambda| = 1$ (où e_k est p_k mais vu dans $\ell^2(\mathbb{N})$ (on le voit une fois comme matrice diagonale, et une fois comme suite)). Si $T = (a_n)_{n>0}$,

$$\langle T\xi\,,\,\xi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\xi_n|^2.$$

Mais $T\xi = \varphi_k(T) = a_k$. Ainsi,

$$\sum_{n\neq k} a_n|\xi_n|^2 + a_k(|\xi_k|^2 - 1) = 0 \ \forall (a_n)_{n>0} \in \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

Donc $\xi_n = 0$ si $n \neq k$; $|\xi_k| = 1$ et donc $\xi = \lambda e_k$, $|\lambda| = 1$.

□

Définition 1.21. L'application diagonale

$$\mathrm{diag}\colon \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \to \ell^\infty(\mathbb{N}),\ \ T \mapsto (T_{nn})_{n>0}$$

Intuition : on a un tableau carré, et on garde seulement la diagonale.

Exemples 1.22.

- $\mathrm{diag}(\mathbb{1}) = (1, 1, \ldots)$
- Si $T \geqslant 0$, $\mathrm{diag}(T) = \left(\underbrace{\langle Te_n\,,\,e_n\rangle}_{\geqslant 0}\right)_{n>0}$.

Si φ est un état sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, alors $\varphi \circ \text{diag}$ est un état sur $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ. Ceci veut dire que pour étendre φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, on n'a pas besoin du théorème de Hahn-Banach. Grâce à cette observation, le problème de Kadison-Singer se reformule de la façon suivante.

Problème de KS : Si φ est un état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, alors $\varphi\circ$diag est l'unique extension de φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Chapitre 2

De l'analyse fonctionnelle à l'algèbre linéaire

2.1 Conjecture de pavage

En 1979, le mathématicien américain Joel ANDERSON propose la **conjecture de pavage**

Conjecture 2.1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathrm{N}))$ *(ou* $M_m(\mathbb{C})$*) avec* $\mathrm{diag}(T) = 0$*, il existe* $Q_1, \ldots, Q_r$ *des projecteurs diagonaux avec*

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \mathbb{1}$$

et

$$\|Q_i T Q_i\| \leqslant \varepsilon \|T\|, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Pour rappel, un projecteur P est tel que

$$P = P^2 = P^*.$$

C'est donc une projection orthogonale sur un certain sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Un projecteur diagonal a pour coefficients $a_{ii} \in 0, 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Il y a une bijection entre les projecteurs diagonaux et les parties de $\mathbb{N}$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \mathbb{1}$$

signifie qu'on partitionne $\mathbb{N}$ en r parties. Les $Q_1, \ldots, Q_r$ donnent une décomposition de $\ell^2(\mathbb{N})$ en r blocs

$$\begin{array}{c} Q_1 \\ \\ Q_2 \\ \\ \\ \\ Q_r \end{array} \begin{bmatrix} Q_1TQ_1 & * & & \\ * & Q_2TQ_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_rTQ_r \end{bmatrix}$$

La conjecture dit que la condition $\operatorname{diag} T = 0$ implique que les blocs sont de norme petite.

Exemple 2.2. Soit $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur de décalage unilatéral (« unilateral shift ») défini par $Se_n = e_{n+1}$ ou $S(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend la partition de $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N}+1)$. Soit Q_1 la projection sur $\ell^2(2\mathbb{N})$ et Q_2 la projection sur $\ell^2(2\mathbb{N}+1)$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 = Q_1Sq_1 & * \\ * & 0 = Q_2SQ_2 \end{pmatrix}$$

L'opérateur S vérifie la conjecture de pavage (« tiling conjecture ») avec $\varepsilon = 0$ et $r = 2$. ★

Proposition 2.3. *Si la conjecture de pavage est vraie, alors $\ell^\infty(\mathbb{N})$ a l'extension unique des états purs.*

Preuve. Soit φ un état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, ψ une extension de φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. On veut montrer que

$$\psi = \varphi \circ \mathrm{diag}.$$

C'est-à-dire, pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$,

$$\psi(T) = \varphi(\mathrm{diag}(T)).$$

En remplaçant T par $T - \mathrm{diag}(T)$, on obtient un opérateur de diagonale nulle. On doit donc montrer que si $\mathrm{diag}T = 0$, alors $\psi(T) = 0$, qui est ce qu'on va démontrer.

On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\psi(T)| \leqslant \varepsilon\|T\|$. Par la conjecture de pavage, on trouve $r \in \mathbb{N}$ et des projecteurs diagonaux $Q_1, \dots, Q_r$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \mathbb{1}$$

et

$$\|Q_i T Q_i\| < \varepsilon\|T\|.$$

On utilise à présent le fait que φ est un état pur : φ est multiplicatif sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire que $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$ si $S, T \in \ell^\infty(\mathbb{N})$). La raison est que $\ell^\infty(\mathbb{N}) = C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X car ℓ^∞ est une C^*-algèbre commutative à unité (c'est le théorème de Gelfand). Les états purs de $C(X$ sont les évaluations aux points, elles sont multiplicatives (ici $X = B\mathbb{N}$ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, c'est la plus grosse compactification de $\mathbb{N}$). Alors

$$\varphi(Q_i) = \varphi(Q_i^2) = \varphi(Q_i)^2 \implies \varphi(Q_i) \in \{0, 1\}.$$

De plus,

$$1 = \varphi(\mathbb{1}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(Q_i).$$

Puisque $\varphi(Q_i) \in \{0, 1\}$ et qu'on écrit 1 comme somme d'éléments de $\{0, 1\}$, il existe un unique indice i_0 avec $\varphi(Q_{i_0}) = 1$ et $\varphi(Q_i) = 0$ si $i \neq i_0$.

Alors

$$\psi(T) = \psi\left(\left(\sum_{i=1}^{r} Q_i\right) T \left(\sum_{j=1}^{r} Q_j\right)\right) = \sum_{i,j=1}^{r} \psi(Q_i T Q_j).$$

Si on sait que dans ces r^2 termes, le seul terme non nul est $\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})$, alors

$$|\psi(T)| = |\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})| \leqslant \|Q_{i_0} T Q_{i_0}\| \leqslant \varepsilon\|T\|$$

comme on voulait, où la dernière inégalité suit de la conjecture de pavage, et la première du fait que ψ est un état pur, donc de norme 1 (note : à vérifier).

Par Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
|\psi(Q_i T Q_j)| &= |\psi\left((T^*Q_i)^* Q_j\right)| \\
&\leqslant \psi\left((T^*Q_i)^*(T^*Q_i)\right)^{1/2} \underbrace{\psi(\underbrace{Q_j^* Q_j}_{=Q_j})}_{\varphi(Q_j)}{}^{1/2} \\
&= 0 \text{ si } j \neq i_0.
\end{aligned}$$

De même,

$$|\psi(Q_i T Q_j)| = 0$$

si $i \neq i_0$ par un argument similaire. Le seul terme non nul restant est donc $\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})$, comme on le souhaitait. □

2.2 Conjecture de Weaver (2004)

(Approche de Terry Tao, 2013)

Conjecture 2.4 (conjecture de Weaver). *On fixe des entiers* $d, m, r \geqslant 2$ *et une constante* $c > 0$. *Soient* $A_1, \ldots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$, $A_i \geqslant 0$, $\operatorname{rang}(A_i) = 1$ *avec* $\|A_i\| \leqslant C$ *pour tout* $i = 1, \ldots d$ *et*

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = \mathbb{1}_m.$$

Alors il existe une partition $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ *de* $\{1, \ldots, d\}$ *telle que*

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leqslant \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C} \right)^2$$

pour $j = 1, \ldots, r$.

Pour cette conjecture, il faut penser à d et m grands, et puisque les matrices sont de rang 1 et qu'on veut avoir leur somme égale à $\mathbb{1}$, on a besoin d'au moins m telle matrices, i.e., $d \geqslant m$. De plus il faut penser à r petit (cas extrême, $r = 2$).

Si $A \geqslant 0$ et $\operatorname{rang}(A) = 1$ alors A est un multiple positif d'un projecteur orthogonal de rang 1. C'est-à-dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^m$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $\lambda > 0$ tel que

$$A(v) = \lambda \langle v\,,\, \xi \rangle\, \xi.$$

Si les A_i ont des images 2 à 2 orthogonales (sans supposer que leur somme vaut $\mathbb{1}$

comme dans la conjecture), alors la somme se décompose par blocs,

$$\sum A_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\| \sum A_i \right\| = \max \|A_i\| \leqslant C.$$

Ainsi, ce que veut dire la conjecture, c'est que ces matrices sont *presque* orthogonales. En d'autres termes, on peut partitionner l'ensemble des indices de façon à ce que pour chaque classe de la partition, les A_i soient d'images *quasiment* orthogonales.

Proposition 2.5. *La conjecture de* WEAVER *implique la conjecture de pavage.*

Manque le cours du 14 mars

2.3 Matrices aléatoires

Référence classique : M.L. MEHTA, Random matrices, Academic Press 1991.

Définition 2.6. Une **matrice aléatoire** est un tableau carré

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

où les X_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs complexes.

Le polynôme caractéristique

$$p_X(z) := \det(z\mathbb{1}_n - X)$$

est un polynôme aléatoire et les valeurs propres sont des variables aléatoires au sens ordinaire.

Typiquement, la théorie s'intéresse au comportement des valeurs propres pour $n \to \infty$.

> **Exemple 2.7.** Un modèle très simple : on choisit au hasard un nombre dans $\{1, \ldots, n\}$ (avec probabilité $1/n$), si le résultat est i, on choisit le projecteur sur le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. ★

Historique : Eugene Wigner (1902 - 1995), physicien hongrois naturalisé américain, prix Nobel en physique en 1963 pour ses travaux sur théoriques sur la structure des noyaux atomiques. À la fin des années 1940, il propose l'hypothèse : pour modéliser un gros noyau d'uranium (par exemple U^{239}) au niveau quantique, il faut s'intéresser au spectre d'une grosse matrice aléatoire X, auto-adjointe (i.e. $\overline{X_{ij}} = X_{ji}$) où les X_{ij} sont des variables gaussiennes iid.

Théorèmes de MSS : voir photocopie.

Si A est une matrice, on définit l'espérance de A par

$$\mathbb{E}[A] = \sum_i p_i X_i$$

où les X_i sont les valeurs possibles de A. Pour une loi continue, on aurait $(X, \mathcal{B}, \mu) \xrightarrow{A} M_m(\mathbb{C})$, on a

$$\mathbb{E}[A] = \int_X A(\omega) d\mu(\omega) \in M_m(\mathbb{C}).$$

Preuve (preuve fausse du théorème 1, mais inspirante). On a

$$(\mathbb{E}[p_A])(z) = \mathbb{E}(\det(z\mathbb{1}_m - A)) = \det(z\mathbb{1}_m - \mathbb{E}[A]) = \det((z-1)\mathbb{1}_m) = (z-1)^m.$$

□

On a $\|A\|$ est la plus grande valeur propre de A (car $A \geqslant 0$) est aussi la plus grande racine de p_A. Le théorème 2 se reformule de la façon suivante.

Théorème 2.8. *Pour au moins une réalisation des A_i, la plus grande racine de p_A est inférieure à la plus grande racine de $\mathbb{E}[p_A]$.*

C'est une version non linéaire d'un principe de probabilité : si X est une variable aléatoire à valeurs réelles, alors pour au moins une réalisation, $X \leqslant \mathbb{E}[X]$.

Proposition 2.9. *Les théorèmes 1 et 2 de MSS impliquent la conjecture de* Weaver *2.4.*

Preuve. Soient $A_1, \ldots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ telles que

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = \mathbb{1}_m,$$

et $A_i \geqslant 0$ de rang 1, avec $\|A_i\| \leqslant C$.

Pour $i = 1, \ldots, d$, on définit une variable aléatoire $\tilde{A_i}$ à valeurs dans $M_{mr}(\mathbb{C})$, on écrit

$$\mathbb{C}^{mr} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^m.$$

On choisit $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ avec probabilité $\frac{1}{r}$ et on place rA_i dans le j-ème facteur, i.e. le bloc jj de la matrice $\tilde{A_i}$ vaut rA_i, et les autres blocs valent 0. $\tilde{A_i}$ est une variable aléatoire à valeurs dans les opérateurs positifs de rang 1 dans $M_{mr}(\mathbb{C})$. On pose

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{A_i}.$$

On veut appliquer les théorèmes 1 et 2 de MSS à $\tilde{A}$. Vérifions l'hypothèse du théorème 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{A}] &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}[\tilde{A_i}] \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & rA_i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & A_i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \mathbb{1}_m & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbb{1}_m & & & & \\ & & & \mathbb{1}_m & & & \\ & & & & \mathbb{1}_m & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbb{1}_m \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1}_{mr}.
\end{aligned}$$

De plus, $\|\tilde{A_i}\| = r\|A_i\| \leqslant rC$. Par les théorèmes 1 et 2, pour au moins une réalisation des $\tilde{A_i}$, on a

$$\|\tilde{A}\| \leqslant \text{plus grande racine de } \mathbb{E}[p_{\tilde{A}}] \leqslant (1+\sqrt{rC})^2.$$

La partition $\{S_1, \ldots, S_r\}$ de $\{1, 2, \ldots, d\}$ est associée à cette réalisation,

$$S_j = \{i \in \{1, 2, \ldots, d\} \cdot j \text{ a été choisi au } i\text{-ème essai}\}.$$

Alors

$$r \left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| = \left\| \sum_{i \in S_j} \tilde{A}_j \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{d} \tilde{A}_i \right\| = \|\tilde{A}\| \leqslant (1 + \sqrt{rc})^2.$$

On divise par r, et on obtient

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leqslant \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C} \right)^2.$$

$\square$

Chapitre 3

Preuves des théorèmes 1 et 2

3.1 Polynômes réels stables

Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$.

Définition 3.1. Un polynômes en d variables $p(z_1, \ldots, z_d)$ est **réel stable** si

- ses coefficients sont réels ;
- p n'admet aucun zéro dans $\mathbb{H}^d$.

Exemple 3.2. Pour $d = 1$, $p(z)$ est réel stables si et seulement si ses coefficients sont réels et tous les zéros de p sont réels. ★

Proposition 3.3. *Soient* $A_1, \ldots, A_d \geqslant 0$ *dans* $M_m(\mathbb{C})$*. Alors*

$$q(z, z_1, \ldots, z_d) := \det\left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right)$$

est réel stable.

Preuve. On a

$$q(\overline{z}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_d}) = \overline{q(z, z_1, \ldots, z_d)}$$

car $A_i = A_i^*$ (i.e. les matrices sont auto-adjointes), donc les coefficients de q sont réels.

Si $q(z, z_1, \ldots, z_d) = 0$, alors $\det\left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right) = 0$. Ainsi la matrice $z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i$ n'est pas inversible, et donc le noyau n'est pas vide, i.e. il existe $v \in \mathbb{C}^m$ non nul avec $zv + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i v = 0$. On fait le produit scalaire avec v,

$$z \underbrace{\|v\|^2}_{>0} + \sum_{i=1}^{d} z_i \underbrace{\langle A_i v\, ,\, v\rangle}_{\geqslant 0} = 0$$

Donc on ne peut pas avoir $\mathrm{Im} z > 0$ et $\mathrm{Im} z_i > 0$ pour tout i, donc q ne s'annule pas dans $\mathbb{H}^{d+1}$. $\square$

Index