Matrices aléatoires et zéros de polynômes: Notes de cours

Enseignant: Prof. Alain Valette
Scribe: Laurent Hayez

Année 2018-2019, semestre de printemps
Dernière modification: 21 février 2019

Table des matières

Chapitre 0

Résumé

Insérer schema

Chapitre 1

De la mécanique quantique à l'analyse fonctionnelle

1.1 Mécanique quantique

Paul Adrien Maurice DIRAC (1902 - 1984) physicien anglais d'origine valaisanne, a écrit en 1930 les « Principles of quantum mechanics » (plusieurs fois ré-édités).

Principes :

- Les états d'un système physique sont représentés par les vecteurs-unités d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

  > **Exemples 1.1.** — Une particule libre à une dimension : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
  > — Une particule libre à deux dimensions : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$.
  >
  > ★

- Les grandeurs physiques (« observables ») sont des opérateurs auto-adjoints ($T = T^*$) sur $\mathcal{H}$.

  > **Exemples 1.2.** — Sur $L^2(\mathbb{R})$, l'**opérateur de position** P est la multiplication par x sur $L^2(\mathbb{R})$.
  > — L'**opérateur de moment** (ou impulsion) $Q = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$.
  >
  > ★

- Ce qu'on peut observer (en laboratoire) est la **probabilité** que la valeur d'une observable sur un état donné, soit comprise entre deux valeurs a et b.

  > **Exemples 1.3.** — Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi\| = 1$, c'est-à-dire
  > $$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$
  > La probabilité que la position d'une particule dans l'état ψ, soit entre

a et b est
$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx.$$
En effet, le fait que $\|\psi\| = 1$ nous dit que ψ est une densité de probabilité.

★

Ces trois principes sont parfois appelés les « axiomes de la mécanique quantique ».

Dans le chapitre 18 de son livre, « Probability amplitudes », Dirac donne une recette pour obtenir ces probabilités.

Définition 1.4. Deux observables S et T sont dit **compatibles** si $ST = TS$.

Exemples 1.5.

1. Les observables P et Q précédemment définis ne sont pas compatibles. En effet,
$$PQ - QP = \frac{-1}{i} \mathrm{Id},$$
qui est la **relation d'indétermination de Heisenberg**.
2. Pour une particule libre à deux dimensions, posons P_x l'opérateur de multiplication par la première variable x sur $L^2(\mathbb{R})$ ($P_x f(x,y) = x f(x,y)$) et P_y l'opérateur de multiplication par la deuxième variable y. Ces deux opérateurs sont compatibles,
$$P_x P_y = P_y P_x.$$

★

La recette de Dirac est la suivante :

1. considérer un ensemble maximal d'observables deux à deux compatibles,
2. spécifier les probabilités associées sur les observables dans un état quantique donné,
3. étendre ces probabilités à toutes les observables, même non compatibles.

1.2 C^*-algèbres

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés (donc continus) de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$, avec la norme opérateur
$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.$$
L'espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une **algèbre de Banach**
$$\|ST\| \leqslant \|S\| \|T\|.$$

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est défini par

$$\langle T\xi\,,\,\eta\rangle = \langle \xi\,,\,T^*\eta\rangle \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.6.
- Une **sous-algèbre** est un sous espace vectoriel qui est stable pour la multiplication.
- Une **$*$-sous-algèbre** A a la propriété $T \in A \Rightarrow T^* \in A$ et est fermée pour la norme opérateur.

Définition 1.7. Une **C^*-algèbre** est une $*$-sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Exemples 1.8.
1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathbb{C}\mathbb{1} = \{\lambda\mathbb{1},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\{0\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts.
2. Soit X un espace topologique compact, et $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|$$

et de l'involution

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

On prend sur X une mesure de probabilité μ telle que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide de X. *L'exemple a garder en tête est* $[0,1]$ *avec la mesure de Lebesgue.* Ainsi $\mathcal{H} = L^2(X,\mu)$ est un espace de Hilbert. Si on multiplie une fonction de L^2 par une fonction continue, elle reste dans L^2, ainsi

$$\pi\colon C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \ f \longmapsto \text{multiplication par } f \text{ sur } \mathcal{H}.$$

Exercice 1.1. Avec $\|\pi(f)\| = \|f\|_\infty$, $C(X)$ est une C^*-algèbre. ♠

★

Théorème 1.9 (Gelfand, 1940). *Soit A une C^*-algèbre commutative à unité $(1 \in A)$. Il existe un espace compact X, unique à homéomorphisme près, tel que $A \simeq C(X)$.*

Définition 1.10. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est **positif** ($T \geqslant 0$) si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\langle T\xi\,,\,\xi\rangle \geqslant 0$,
2. il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $T = S^*S$,
3. $T = T^*$ et $\mathrm{Sp}(T) \subset [0, +\infty[$ (Rappel : le spectre de T $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible$\}$, $\mathrm{Sp}(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}(T) \subseteq B(0, \|T\|)$).

Définition 1.11. Si A est une C^*-algèbre à unité, un **état** sur A est une forme linéaire $\varphi : A \to \mathbb{C}$ telle que

1. $\varphi(1) = 1$,
2. $\varphi(T^*T) \geqslant 0$ pour tout $T \in A$.

On note $S(A)$ l'ensemble des états sur A.

Exemple 1.12. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\| = 1$, alors pour $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\varphi(T) = \langle T\xi\,,\,\xi\rangle$$

est un **état vectoriel** et

$$\varphi(1) = \|\xi\|^2 = 1,\ \ \varphi(T^*T) = \langle T^*T\xi\,,\,\xi\rangle = \langle T\xi\,,\,T\xi\rangle = \|T\xi\|^2 \geqslant 0$$

et ainsi $S(A) \neq \emptyset$. ★

Proposition 1.13. *$S(A)$ est une partie convexe de la boule-unité du dual A^* (ici A^* est l'ensemble des formes linéaires continues sur A).*

Preuve.

1. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A)$, soit $t \in [0, 1]$. On doit montrer que

$$t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 \in S(A).$$

   On a

$$(t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(\mathbb{1}) = 1, \quad (t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(T^*T) \geqslant 0.$$

2. Si $\varphi \in S(A)$, on doit montrer que $\|\varphi\| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$|\varphi(t)| \leqslant 1 \text{ si } \|T\| \leqslant 1.$$

Si $\|T\| \leqslant 1$, alors $\mathbb{1} - T^*T \geqslant 0$ car

$$\langle (\mathbb{1} - T^*T)\xi\,,\,\xi\rangle = \|\xi\|^2 - \|T\xi\|^2 \geqslant 0$$

puisque $\|T\| \leqslant 1$. On peut encore écrire

$$\mathbb{1} - T^*T = S^*S$$

pour $S \in A$. Ainsi

$$1 - \varphi(T^*T) = \varphi(\mathbb{1} - T^*T) = \varphi(S^*S) \geqslant 0 \implies \varphi(T^*T) \leqslant 1.$$

L'application $A \times A \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \varphi(y^*x)$ vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\varphi(y^*x)|^2 \leqslant \varphi(y^*y)\varphi(x^*x)\,\forall x, y \in A.$$

Pour $x = T$, $y = \mathbb{1}$,

$$|\varphi(T)|^2 \leqslant \varphi(\mathbb{1})\varphi(T^*T) \leqslant 1.$$

□

Remarque 1.14. Comme $1 = \varphi(\mathbb{1}) \leqslant \|\varphi\|$, on a que $S(A)$ est contenu dans la sphère unité de A^*. ♣

Définition 1.15. Soit K un convexe dans un espace vectoriel réel ou complexe. Un point K est **extrême** dans K si x n'est pas intérieur à un segment contenu dans K, c'est-à-dire si $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in K$, alors $x = x_1 = x_2$.
insérer fig1.
Un point extrême de $S(A)$ est appelé un **état pur**.

Exemples 1.16.
1. On montre que tout état vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est pur. On verra qu'il y a des états purs non vectoriels.
2. Soit $A = C(X)$, alors $S(A)$ s'identifie avec $\mathrm{Prob}(X)$ l'espace des mesures de probabilités sur X (un des théorèmes de représentation de Riesz).

★

Les états purs s'identifient aux points extrêmes de $\mathrm{Prob}(X)$, c'est-à-dire aux mesures de Dirac δ_x, définie par (pour $A \subset X$)

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chapitre 2

Index