Matrices aléatoires et zéros de polynômes: Notes de cours

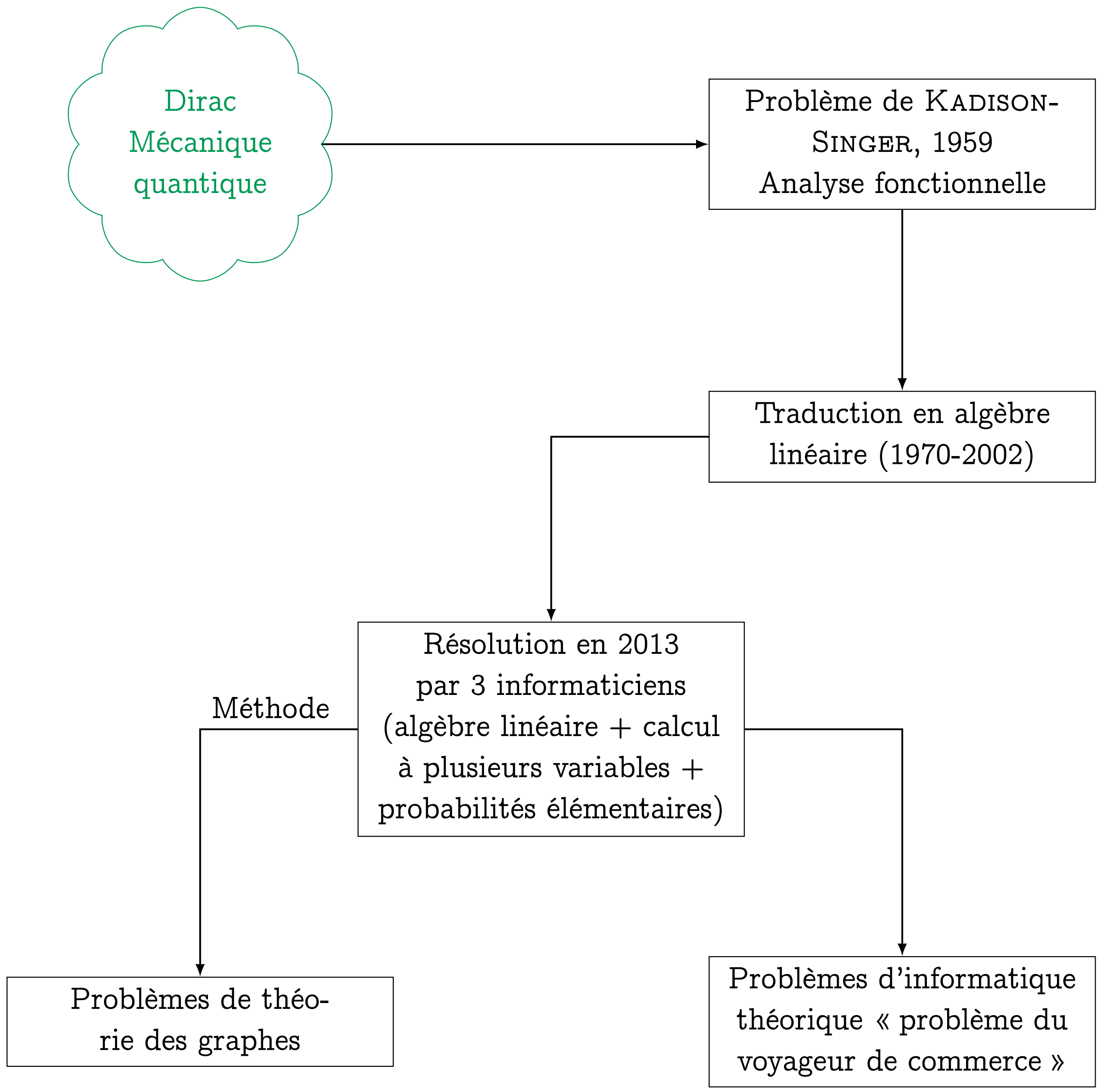
Enseignant: Prof. Alain Valette
Scribe: Laurent Hayez

Année 2018-2019, semestre de printemps
Dernière modification: 2 mai 2019

Table des matières

Chapitre 0

Résumé



Chapitre 1

De la mécanique quantique à l'analyse fonctionnelle

1.1 Mécanique quantique

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984) physicien anglais d'origine valaisanne, a écrit en 1930 les « Principles of quantum mechanics » (plusieurs fois ré-édités).

Principes :

- Les états d'un système physique sont représentés par les vecteurs-unités d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

> **Exemples 1.1.** — Une particule libre à une dimension : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
> — Une particule libre à deux dimensions : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$.
>
> ★

- Les grandeurs physiques (« observables ») sont des opérateurs auto-adjoints ($T = T^*$) sur $\mathcal{H}$.

> **Exemples 1.2.** — Sur $L^2(\mathbb{R})$, l'**opérateur de position** P est la multiplication par x sur $L^2(\mathbb{R})$.
> — L'**opérateur de moment** (ou impulsion) $Q = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$.
>
> ★

- Ce qu'on peut observer (en laboratoire) est la **probabilité** que la valeur d'une observable sur un état donné, soit comprise entre deux valeurs a et b.

> **Exemples 1.3.** — Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi\| = 1$, c'est-à-dire
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$
>
> La probabilité que la position d'une particule dans l'état ψ, soit entre

a et b est

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx.$$

En effet, le fait que $\|\psi\| = 1$ nous dit que ψ est une densité de probabilité.

★

Ces trois principes sont parfois appelés les « axiomes de la mécanique quantique ».

Dans le chapitre 18 de son livre, « Probability amplitudes », Dirac donne une recette pour obtenir ces probabilités.

Définition 1.4. Deux observables S et T sont dit **compatibles** si $ST = TS$.

Exemples 1.5.

1. Les observables P et Q précédemment définis ne sont pas compatibles. En effet,

$$PQ - QP = \frac{-1}{i} \mathrm{Id},$$

qui est la **relation d'indétermination de Heisenberg**.

2. Pour une particule libre à deux dimensions, posons P_x l'opérateur de multiplication par la première variable x sur $L^2(\mathbb{R})$ $(P_x f(x, y) = x f(x, y))$ et P_y l'opérateur de multiplication par la deuxième variable y. Ces deux opérateurs sont compatibles,

$$P_x P_y = P_y P_x.$$

★

La recette de Dirac est la suivante :

1. considérer un ensemble maximal d'observables deux à deux compatibles,
2. spécifier les probabilités associées sur les observables dans un état quantique donné,
3. étendre ces probabilités à toutes les observables, même non compatibles.

1.2 C^*-algèbres

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés (donc continus) de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$, avec la norme opérateur

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.$$

L'espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une **algèbre de Banach**

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \|T\|.$$

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est défini par

$$\langle T\xi\,,\,\eta\rangle = \langle \xi\,,\,T^*\eta\rangle \quad \forall \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.6.
- Une **sous-algèbre** est un sous espace vectoriel qui est stable pour la multiplication.
- Une **$*$-sous-algèbre** A a la propriété $T \in A \Rightarrow T^* \in A$ et est fermée pour la norme opérateur.

Définition 1.7. Une **C^*-algèbre** est une $*$-sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Exemples 1.8.
1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathbb{C}\mathbb{1} = \{\lambda\mathbb{1},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\{0\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts.
2. Soit X un espace topologique compact, et $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in X} |f(x)|$$

et de l'involution

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

On prend sur X une mesure de probabilité μ telle que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide de X. *L'exemple a garder en tête est* $[0,1]$ *avec la mesure de Lebesgue.* Ainsi $\mathcal{H} = L^2(X,\mu)$ est un espace de Hilbert. Si on multiplie une fonction de L^2 par une fonction continue, elle reste dans L^2, ainsi

$$\pi\colon C(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ f \mapsto \text{multiplication par } f \text{ sur } \mathcal{H}.$$

Exercice 1.1. Avec $\|\pi(f)\| = \|f\|_\infty$, $C(X)$ est une C^*-algèbre. ♠

★

Théorème 1.9 (Gelfand, 1940). *Soit A une C^*-algèbre commutative à unité $(1 \in A)$. Il existe un espace compact X, unique à homéomorphisme près, tel que $A \simeq C(X)$.*

Définition 1.10. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est **positif** $(T \geqslant 0)$ si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\langle T\xi\,,\,\xi\rangle \geqslant 0$,
2. il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $T = S^*S$,
3. $T = T^*$ et $\mathrm{Sp}(T) \subset [0, +\infty[$ (Rappel : le spectre de T $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible$\}$, $\mathrm{Sp}(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}(T) \subseteq B(0, \|T\|)$).

Définition 1.11. Si A est une C^*-algèbre à unité, un **état** sur A est une forme linéaire $\varphi : A \to \mathbb{C}$ telle que

1. $\varphi(1) = 1$,
2. $\varphi(T^*T) \geqslant 0$ pour tout $T \in A$.

On note $S(A)$ l'ensemble des états sur A.

Exemple 1.12. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\| = 1$, alors pour $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\varphi(T) = \langle T\xi\,,\,\xi\rangle$$

est un **état vectoriel** et

$$\varphi(1) = \|\xi\|^2 = 1,\ \ \varphi(T^*T) = \langle T^*T\xi\,,\,\xi\rangle = \langle T\xi\,,\,T\xi\rangle = \|T\xi\|^2 \geqslant 0$$

et ainsi $S(A) \neq \emptyset$. ★

Proposition 1.13. $S(A)$ *est une partie convexe de la boule-unité du dual* A^* *(ici* A^* *est l'ensemble des formes linéaires continues sur* A*).*

Preuve. 1. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A)$, soit $t \in [0, 1]$. On doit montrer que

$$t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 \in S(A).$$

On a

$$(t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(\mathbb{1}) = 1, \quad (t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(T^*T) \geqslant 0.$$

2. Si $\varphi \in S(A)$, on doit montrer que $\|\varphi\| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$|\varphi(t)| \leqslant 1 \text{ si } \|T\| \leqslant 1.$$

Si $\|T\| \leqslant 1$, alors $\mathbb{1} - T^*T \geqslant 0$ car

$$\langle (\mathbb{1} - T^*T)\xi\,,\, \xi\rangle = \|\xi\|^2 - \|T\xi\|^2 \geqslant 0$$

puisque $\|T\| \leqslant 1$. On peut encore écrire

$$\mathbb{1} - T^*T = S^*S$$

pour $S \in A$. Ainsi

$$1 - \varphi(T^*T) = \varphi(\mathbb{1} - T^*T) = \varphi(S^*S) \geqslant 0 \implies \varphi(T^*T) \leqslant 1.$$

L'application $A \times A \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \varphi(y^*x)$ vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\varphi(y^*x)|^2 \leqslant \varphi(y^*y)\varphi(x^*x)\,\forall x, y \in A.$$

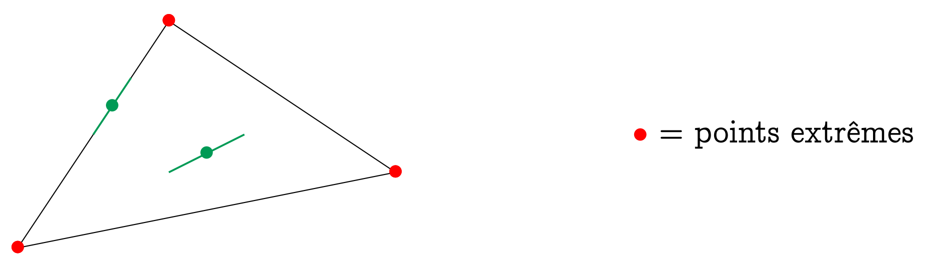
Pour $x = T$, $y = \mathbb{1}$,

$$|\varphi(T)|^2 \leqslant \varphi(\mathbb{1})\varphi(T^*T) \leqslant 1.$$

□

Remarque 1.14. Comme $1 = \varphi(\mathbb{1}) \leqslant \|\varphi\|$, on a que $S(A)$ est contenu dans la sphère unité de A^*. ♣

Définition 1.15. Soit K un convexe dans un espace vectoriel réel ou complexe. Un point K est **extrême** dans K si x n'est pas intérieur à un segment contenu dans K, c'est-à-dire si $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in K$, alors $x = x_1 = x_2$.



Un point extrême de $S(A)$ est appelé un **état pur**.

Exemples 1.16.
1. On montre que tout état vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est pur. On verra qu'il y a des états purs non vectoriels.
2. Soit $A = C(X)$, alors $S(A)$ s'identifie avec $\mathrm{Prob}(X)$ l'espace des mesures de probabilités sur X (un des théorèmes de représentation de Riesz). ★

Les états purs s'identifient aux points extrêmes de $\mathrm{Prob}(X)$, c'est-à-dire aux mesures de Dirac δ_x, définie par (pour $A \subset X$)

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 1.17 (Krein-Milman). *Soit K un convexe compact non vide dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrêmes*

$$K = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))}, \quad \mathrm{ext}K = \{\textit{points extrêmes de } K\}.$$

Sur A^*, on a la topologie faible $*$: $\varphi_i \xrightarrow{i\to\infty} \varphi$ si pour tout $x \in A$, $\varphi_i(x) = \varphi(x)$.

Théorème 1.18 (Banach-Alaoglu). *La boule unité de A^* est compacte pour la topologie faible $*$.*

On a vu que $S(A)$ est contenu dans la boule unité de A^*,

$$S(A) = \{\varphi \in A^* \text{ tq } \varphi(\mathbb{1}) = 1,\ \varphi(T^*T) \geqslant 0\ \forall T \in A\},$$

donc $S(A)$ est fermé pour la topologie faible $*$, ainsi $S(A)$ est convexe et compact. Par Krein-Milman, $S(A) = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(S(A)))}$.

Si $\varphi \in S(A)$, une version du théorème de Hahn-Banach dit que φ s'étend en au moins un état sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \supset A$.

Soit $K_\varphi = \{\psi \in S(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \colon \psi\big|_A = \varphi\}$ l'ensemble des états de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui étendent φ. Alors K_φ est convexe et faible $*$-fermé.

cf. pages d'Alain pour la suite du cours du 28 février

Problème : un état pur sur une MASA a-t-il une extension unique à $\mathcal{B}(\mathcal{H})$?

Le résultat principal de Kadison & Singer (1959) est le théorème suivant, qu'on admet.

Théorème 1.19. *Pour la MASA diffuse $L^\infty[0,1]$, la réponse est non.*

L'article laisse ouvert le cas de la MASA discrète $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Problème de Kadison&Singer : la MASA $\ell^\infty(\mathbb{N})$ a-t-elle l'extension unique des états purs ?

Kadison & Singer inclinent à penser que la réponse doit être non (en fait c'est oui).

Proposition 1.20. *Pour* $k \in \mathbb{N}$*, notons* φ_k *l'état pur de* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *donné par* $\varphi_k(\underbrace{(a_n)_{n>0}}_{\in \ell^\infty(\mathbb{N})}) = a_k$*. Alors l'extension unique de* φ_k *à* $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *est*

$$T \mapsto \langle Te_k\,,\, e_k\rangle = T_{kk}.$$

Preuve.

1. Si ψ est un état pur non vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors ψ est nul sur l'espace des opérateurs compacts (en particulier sur l'espace des opérateurs de rang fini). Ici,

$$p_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{k-ème}}, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$$

et ainsi on a $\varphi_k(p_k) = 1$. Donc une extension de φ_k à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ est un état vectoriel, disons

$$T \mapsto \langle T\xi\,,\, \xi\rangle\,,\ \ \|\xi\| = 1.$$

2. À voir : $\xi = \lambda e_k$ avec $|\lambda| = 1$ (où e_k est p_k mais vu dans $\ell^2(\mathbb{N})$ (on le voit une fois comme matrice diagonale, et une fois comme suite)). Si $T = (a_n)_{n>0}$,

$$\langle T\xi\,,\, \xi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\xi_n|^2.$$

Mais $T\xi = \varphi_k(T) = a_k$. Ainsi,

$$\sum_{n \neq k} a_n |\xi_n|^2 + a_k(|\xi_k|^2 - 1) = 0 \ \forall (a_n)_{n>0} \in \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

Donc $\xi_n = 0$ si $n \neq k$; $|\xi_k| = 1$ et donc $\xi = \lambda e_k$, $|\lambda| = 1$.

□

Définition 1.21. L'application diagonale

$$\mathrm{diag}\colon \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \to \ell^\infty(\mathbb{N}),\ \ T \mapsto (T_{nn})_{n>0}$$

Intuition : on a un tableau carré, et on garde seulement la diagonale.

Exemples 1.22.

- $\mathrm{diag}(\mathbb{1}) = (1, 1, \dots)$
- Si $T \geqslant 0$, $\mathrm{diag}(T) = \left(\underbrace{\langle Te_n\,,\, e_n\rangle}_{\geqslant 0}\right)_{n>0}$.

Si φ est un état sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, alors $\varphi \circ \mathrm{diag}$ est un état sur $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ. Ceci veut dire que pour étendre φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, on n'a pas besoin du théorème de Hahn-Banach. Grâce à cette observation, le problème de Kadison-Singer se reformule de la façon suivante.

Problème de KS : Si φ est un état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, alors $\varphi \circ \mathrm{diag}$ est l'unique extension de φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Chapitre 2

De l'analyse fonctionnelle à l'algèbre linéaire

2.1 Conjecture de pavage

En 1979, le mathématicien américain Joel ANDERSON propose la **conjecture de pavage**

Conjecture 2.1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathrm{N}))$ *(ou* $M_m(\mathbb{C})$*) avec* $\mathrm{diag}(T) = 0$*, il existe* $Q_1, \ldots, Q_r$ *des projecteurs diagonaux avec*

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \mathbb{1}$$

et

$$\|Q_i T Q_i\| \leqslant \varepsilon \|T\|, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Pour rappel, un projecteur P est tel que

$$P = P^2 = P^*.$$

C'est donc une projection orthogonale sur un certain sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Un projecteur diagonal a pour coefficients $a_{ii} \in 0, 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Il y a une bijection entre les projecteurs diagonaux et les parties de $\mathbb{N}$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \mathbb{1}$$

signifie qu'on partitionne $\mathbb{N}$ en r parties. Les $Q_1, \ldots, Q_r$ donnent une décomposition de $\ell^2(\mathbb{N})$ en r blocs

$$\begin{array}{c} Q_1 \\ \\ Q_2 \\ \\ \\ \\ Q_r \end{array} \quad \begin{bmatrix} Q_1TQ_1 & * & & \\ * & Q_2TQ_2 & & \\ & & & \\ & & & Q_rTQ_r \end{bmatrix}$$

La conjecture dit que la condition $\operatorname{diag}T = 0$ implique que les blocs sont de norme petite.

Exemple 2.2. Soit $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur de décalage unilatéral (« unilateral shift ») défini par $Se_n = e_{n+1}$ ou $S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend la partition de $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N}+1)$. Soit Q_1 la projection sur $\ell^2(2\mathbb{N})$ et Q_2 la projection sur $\ell^2(2\mathbb{N}+1)$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 = Q_1 S q_1 & * \\ * & 0 = Q_2 S Q_2 \end{pmatrix}$$

L'opérateur S vérifie la conjecture de pavage (« tiling conjecture ») avec $\varepsilon = 0$ et $r = 2$. ★

Proposition 2.3. *Si la conjecture de pavage est vraie, alors $\ell^\infty(\mathbb{N})$ a l'extension unique des états purs.*

Preuve. Soit φ un état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, ψ une extension de φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. On veut montrer que

$$\psi = \varphi \circ \mathrm{diag}.$$

C'est-à-dire, pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$,

$$\psi(T) = \varphi(\mathrm{diag}(T)).$$

En remplaçant T par $T - \mathrm{diag}(T)$, on obtient un opérateur de diagonale nulle. On doit donc montrer que si $\mathrm{diag} T = 0$, alors $\psi(T) = 0$, qui est ce qu'on va démontrer.

On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\psi(T)| \leqslant \varepsilon \|T\|$. Par la conjecture de pavage, on trouve $r \in \mathbb{N}$ et des projecteurs diagonaux $Q_1, \dots, Q_r$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} Q_i = \mathbb{1}$$

et

$$\|Q_i T Q_i\| < \varepsilon \|T\|.$$

On utilise à présent le fait que φ est un état pur : φ est multiplicatif sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire que $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$ si $S, T \in \ell^\infty(\mathbb{N})$). La raison est que $\ell^\infty(\mathbb{N}) = C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X car ℓ^∞ est une C^*-algèbre commutative à unité (c'est le théorème de Gelfand). Les états purs de $C(X$ sont les évaluations aux points, elles sont multiplicatives (ici $X = B\mathbb{N}$ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, c'est la plus grosse compactification de $\mathbb{N}$). Alors

$$\varphi(Q_i) = \varphi(Q_i^2) = \varphi(Q_i)^2 \implies \varphi(Q_i) \in \{0, 1\}.$$

De plus,

$$1 = \varphi(\mathbb{1}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(Q_i).$$

Puisque $\varphi(Q_i) \in \{0, 1\}$ et qu'on écrit 1 comme somme d'éléments de $\{0, 1\}$, il existe un unique indice i_0 avec $\varphi(Q_{i_0}) = 1$ et $\varphi(Q_i) = 0$ si $i \neq i_0$.

Alors

$$\psi(T) = \psi\left(\left(\sum_{i=1}^{r} Q_i\right) T \left(\sum_{j=1}^{r} Q_j\right)\right) = \sum_{i,j=1}^{r} \psi(Q_i T Q_j).$$

Si on sait que dans ces r^2 termes, le seul terme non nul est $\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})$, alors

$$|\psi(T)| = |\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})| \leqslant \|Q_{i_0} T Q_{i_0}\| \leqslant \varepsilon \|T\|$$

comme on voulait, où la dernière inégalité suit de la conjecture de pavage, et la première du fait que ψ est un état pur, donc de norme 1 (note : à vérifier).

Par Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}|\psi(Q_iTQ_j)| &= |\psi\left((T^*Q_i)^*Q_j\right) \\ &\leqslant \psi\left((T^*Q_i)^*(T^*Q_i)\right)^{1/2} \underbrace{\psi(\underbrace{Q_j^*Q_j}_{=Q_j})}_{\varphi(Q_j)}{}^{1/2} \\ &= 0 \text{ si } j \neq i_0.\end{aligned}$$

De même,

$$|\psi(Q_iTQ_j)| = 0$$

si $i \neq i_0$ par un argument similaire. Le seul terme non nul restant est donc $\psi(Q_{i_0}TQ_{i_0})$, comme on le souhaitait. □

2.2 Conjecture de Weaver (2004)

(Approche de Terry Tao, 2013)

Conjecture 2.4 (conjecture de Weaver). *On fixe des entiers* $d, m, r \geqslant 2$ *et une constante* $c > 0$. *Soient* $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$, $A_i \geqslant 0$, $\operatorname{rang}(A_i) = 1$ *avec* $\|A_i\| \leqslant C$ *pour tout* $i = 1, \dots d$ *et*

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = \mathbb{1}_m.$$

Alors il existe une partition $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ *de* $\{1, \dots, d\}$ *telle que*

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leqslant \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C} \right)^2$$

pour $j = 1, \dots, r$.

Pour cette conjecture, il faut penser à d et m grands, et puisque les matrices sont de rang 1 et qu'on veut avoir leur somme égale à $\mathbb{1}$, on a besoin d'au moins m telle matrices, i.e., $d \geqslant m$. De plus il faut penser à r petit (cas extrême, $r = 2$).

Si $A \geqslant 0$ et $\operatorname{rang}(A) = 1$ alors A est un multiple positif d'un projecteur orthogonal de rang 1. C'est-à-dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^m$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $\lambda > 0$ tel que

$$A(v) = \lambda \langle v\,,\ \xi\rangle\, \xi.$$

Si les A_i ont des images 2 à 2 orthogonales (sans supposer que leur somme vaut $\mathbb{1}$

comme dans la conjecture), alors la somme se décompose par blocs,

$$\sum A_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\| \sum A_i \right\| = \max \|A_i\| \leqslant C.$$

Ainsi, ce que veut dire la conjecture, c'est que ces matrices sont *presque* orthogonales. En d'autres termes, on peut partitionner l'ensemble des indices de façon à ce que pour chaque classe de la partition, les A_i soient d'images *quasiment* orthogonales.

Proposition 2.5. *La conjecture de* Weaver *implique la conjecture de pavage.*

Manque le cours du 14 mars

2.3 Matrices aléatoires

Référence classique : M.L. Mehta, Random matrices, Academic Press 1991.

Définition 2.6. Une **matrice aléatoire** est un tableau carré

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

où les X_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs complexes.

Le polynôme caractéristique

$$p_X(z) := \det(z\mathbb{1}_n - X)$$

est un polynôme aléatoire et les valeurs propres sont des variables aléatoires au sens ordinaire.

Typiquement, la théorie s'intéresse au comportement des valeurs propres pour $n \to \infty$.

Exemple 2.7. Un modèle très simple : on choisit au hasard un nombre dans $\{1, \ldots, n\}$ (avec probabilité $1/n$), si le résultat est i, on choisit le projecteur sur le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. ★

Historique : Eugene WIGNER (1902 - 1995), physicien hongrois naturalisé américain, prix Nobel en physique en 1963 pour ses travaux sur théoriques sur la structure des noyaux atomiques. À la fin des années 1940, il propose l'hypothèse : pour modéliser un gros noyau d'uranium (par exemple U^{239}) au niveau quantique, il faut s'intéresser au spectre d'une grosse matrice aléatoire X, auto-adjointe (i.e. $\overline{X_{ij}} = X_{ji}$) où les X_{ij} sont des variables gaussiennes iid.

Théorèmes de MSS : voir photocopie.

Si A est une matrice, on définit l'espérance de A par

$$\mathbb{E}[A] = \sum_i p_i X_i$$

où les X_i sont les valeurs possibles de A. Pour une loi continue, on aurait $(X, \mathcal{B}, \mu) \xrightarrow{A} M_m(\mathbb{C})$, on a

$$\mathbb{E}[A] = \int_X A(\omega) d\mu(\omega) \in M_m(\mathbb{C}).$$

Preuve (PREUVE FAUSSE DU THÉORÈME 1, MAIS INSPIRANTE)**.** On a

$$(\mathbb{E}[p_A])(z) = \mathbb{E}(\det(z\mathbb{1}_m - A)) = \det(z\mathbb{1}_m - \mathbb{E}[A]) = \det((z-1)\mathbb{1}_m) = (z-1)^m.$$

□

On a $\|A\|$ est la plus grande valeur propre de A (car $A \geqslant 0$) est aussi la plus grande racine de p_A. Le théorème 2 se reformule de la façon suivante.

Théorème 2.8. *Pour au moins une réalisation des A_i, la plus grande racine de p_A est inférieure à la plus grande racine de $\mathbb{E}[p_A]$.*

C'est une version non linéaire d'un principe de probabilité : si X est une variable aléatoire à valeurs réelles, alors pour au moins une réalisation, $X \leqslant \mathbb{E}[X]$.

Proposition 2.9. *Les théorèmes 1 et 2 de MSS impliquent la conjecture de* WEAVER *2.4.*

Preuve. Soient $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ telles que

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = \mathbb{1}_m,$$

et $A_i \geqslant 0$ de rang 1, avec $\|A_i\| \leqslant C$.

Pour $i = 1, \dots, d$, on définit une variable aléatoire $\tilde{A_i}$ à valeurs dans $M_{mr}(\mathbb{C})$, on

écrit
$$\mathbb{C}^{mr} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^m.$$
On choisit $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ avec probabilité $\frac{1}{r}$ et on place rA_i dans le j-ème facteur, i.e. le bloc jj de la matrice $\tilde{A_i}$ vaut rA_i, et les autres blocs valent 0. $\tilde{A_i}$ est une variable aléatoire à valeurs dans les opérateurs positifs de rang 1 dans $M_{mr}(\mathbb{C})$. On pose
$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{A_i}.$$
On veut appliquer les théorèmes 1 et 2 de MSS à $\tilde{A}$. Vérifions l'hypothèse du théo-

rème 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{A}] &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}[\tilde{A_i}] \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & rA_i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & A_i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \mathbb{1}_m & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbb{1}_m & & & & \\ & & & \mathbb{1}_m & & & \\ & & & & \mathbb{1}_m & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbb{1}_m \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1}_{mr}.
\end{aligned}$$

De plus, $\|\tilde{A_i}\| = r\|A_i\| \leqslant rC$. Par les théorèmes 1 et 2, pour au moins une réalisation des $\tilde{A_i}$, on a

$$\|\tilde{A}\| \leqslant \text{plus grande racine de } \mathbb{E}[p_{\tilde{A}}] \leqslant (1+\sqrt{rC})^2.$$

La partition $\{S_1, \dots, S_r\}$ de $\{1, 2, \dots, d\}$ est associée à cette réalisation,

$$S_j = \{i \in \{1, 2, \dots, d\} \cdot j \text{ a été choisi au } i\text{-ème essai}\}.$$

Alors

$$r \left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| = \left\| \sum_{i \in S_j} \tilde{A_j} \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{d} \tilde{A_i} \right\| = \|\tilde{A}\| \leqslant (1 + \sqrt{rc})^2.$$

On divise par r, et on obtient

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leqslant \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C} \right)^2.$$

$\square$

Chapitre 3

Preuves des théorèmes 1 et 2

3.1 Polynômes réels stables

Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$.

Définition 3.1. Un polynômes en d variables $p(z_1, \dots, z_d)$ est **réel stable** si

- ses coefficients sont réels ;
- p n'admet aucun zéro dans $\mathbb{H}^d$.

Exemple 3.2. Pour $d = 1$, $p(z)$ est réel stables si et seulement si ses coefficients sont réels et tous les zéros de p sont réels. ★

Proposition 3.3. *Soient $A_1, \dots, A_d \geqslant 0$ dans $M_m(\mathbb{C})$. Alors*

$$q(z, z_1, \dots, z_d) := \det\left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right)$$

est réel stable.

Preuve. On a

$$q(\overline{z}, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_d}) = \overline{q(z, z_1, \dots, z_d)}$$

car $A_i = A_i^*$ (i.e. les matrices sont auto-adjointes), donc les coefficients de q sont réels.

Si $q(z, z_1, \dots, z_d) = 0$, alors $\det\left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right) = 0$. Ainsi la matrice $z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i$ n'est pas inversible, et donc le noyau n'est pas vide, i.e. il existe $v \in \mathbb{C}^m$ non nul avec $zv + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i v = 0$. On fait le produit scalaire avec v,

$$z \underbrace{\|v\|^2}_{>0} + \sum_{i=1}^{d} z_i \underbrace{\langle A_i v\,,\, v\rangle}_{\geqslant 0} = 0$$

Donc on ne peut pas avoir $\mathrm{Im} z > 0$ et $\mathrm{Im} z_i > 0$ pour tout i, donc q ne s'annule pas dans $\mathbb{H}^{d+1}$. □

Une **spécialisation de** p est un polynôme en d variables obtenu en donnant une valeur fixe à une des variables.

Attention : si $p(z_1, z_2) = z_1(z_2 - 1)$, alors $p(z, 1) \equiv 0$.

Proposition 3.4. *Si $p(z_1, \dots, z_d)$ est réel stable, en spécialisant z_d en une valeur réelle t, on obtient un polynôme réel stable, ou le polynôme 0.*

Preuve. Soit $q(z_1, \dots, z_{d-1}) := p(z_1, \dots, z_{d-1}, t)$. Les coefficients de q sont réels. On écrit

$$q(z_1, \dots, z_{d-1}) = \lim_{n \to \infty} p(z_1, \dots, z_{d-1}, t + i/n)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{d-1}$. Le théorème de HURWITZ de l'analyse complexe s'applique. En effet, $p(z_1, \dots, z_{d-1}, t + i/n)$ est sans zéro dans $\mathbb{H}^{d-1}$. Donc la limite est sans zéro dans $\mathbb{H}^{d-1}$ ou identiquement nul. □

On note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ la dérivée partielle par rapport à z_i.

Proposition 3.5. *Si $p(z_1, \dots, z_d)$ est réel stable, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$(1 + t\partial_d)p = p + t\frac{\partial p}{\partial z_d}$$

est réel stable.

Preuve. Si $t = 0$, c'est bon. Supposons $t \neq 0$. On va procéder par l'absurde.

$$((1 + t\partial_d)p)\,(z_1, \dots, z_d) = 0 \text{ et } (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{H}^d.$$

Soit

$$q(z) := p(z_1, \dots, z_{d-1}, z).$$

Alors q n'a pas de zéro dans $\mathbb{H}$ (sinon p ne serait pas réel stable). En particulier,

$$q(z_d) \neq 0.$$

Si $n = \deg q$, alors

$$q(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \omega_i) \qquad (*)$$

où les ω_i sont les zéros complexes de q. Par ce qui précède, $\mathrm{Im}\,\omega_i < 0$ pour tout i.

Alors,

$$0 = ((1 + t\partial_d)p)(z_1, \ldots, z_d) = (q + tq')(z_d) = q(z_d)\left(1 + t\frac{q'(z_d)}{q(z_d)}\right)$$

où le terme $\frac{q'(z_d)}{q(z_d)}$ est la dérivée logarithmique de q en z_d. Ainsi on obtient

$$0 = 1 + t\frac{q'(z_d)}{q(z_d)}.$$

On prend à présent la dérivée logarithmique de $(*)$. Alors

$$\frac{q'(z_d)}{q(z_d)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - \omega_i}.$$

On déduit de ceci que (en évaluant en z_d)

$$0 = 1 + t\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_d - \omega_i} = 1 + t\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z_d} - \overline{\omega_i}}{|z_d - \omega_i|^2}.$$

On prend à présent les parties imaginaires :

$$0 = t\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Im}(\omega_i) - \mathrm{Im}(z_d)}{|z_d - \omega_i|^2}$$

et $\mathrm{Im}(\omega_i) < 0$ et $\mathrm{Im}(z_d) > 0$, qui est une contradiction car $t \neq 0$ par hypothèse et la somme est strictement négative (donc non nulle). □

Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, l'**orthant** $\{y \geqslant x\}$ est par définition

$$\{y \geqslant d\} := \left\{(y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d \colon y_i \geqslant x_i \ \forall i = 1, \ldots, d\right\}$$

(on y pensera comme le quart de plan (en deux dimensions) où les coordonnées de y sont toutes plus grandes que celles de x, ou comme le huitième de plan en trois dimensions).

Pour une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\Phi_f^j = \frac{\partial_j f}{f}$ la dérivée logarithmique de f par rapport à la j-ème variable.

Lemme 3.6 (Lemme 3.7 des notes). *Soit $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $p(z_1, \ldots, z_d)$ réel stable, sans zéro dans l'orthant $\{y \geqslant x\}$. Supposons qu'il existe $j \in \{1, \ldots, d\}$ tel qu'il existe $\delta > 0$ (penser à δ grand) avec $\Phi_p^j(x_1, \ldots, x_d) \leqslant 1 - \frac{1}{\delta}$. Alors $(1 - \partial_j)p$ n'a pas de zéro dans l'orthant $\{y \geqslant x + \delta e_j\}$, et de plus, pour tout $i = 1, \ldots, d$,*

$$\Phi_{(1-\partial_j)p}^i(x + \delta e_j) \leqslant \Phi_p^i(x). \tag{3.1}$$

Proposition 3.7. *Soit* $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$*,* $p(z_1, \dots, z_d)$ *un polynôme réel stable sans zéro dans l'orthant* $\{y \geqslant x\}$*. S'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\Phi_p^j(x_1, \dots x_d) \leqslant 1 - \frac{1}{\delta} \ \forall j = 1, \dots, d,$$

alors le polynôme

$$\prod_{i=1}^{d} (1 - \partial_i) p$$

est sans zéro dans $\{y \geqslant x + D\}$ *où* $D = (\delta, \delta, \dots, \delta)$*.*

Preuve. Pour $1 \leqslant k \leqslant d$, soit $x^{(k)} = (x_1 + \delta, x_2 + \delta, \dots, x_k + \delta, x_{k+1}, \dots, x_d)$ et

$$q_k = \prod_{i=1}^{k} (1 - \partial_i)\, p$$

qui est réel stable par la Proposition 3.5. Par récurrence à partir du Lemme 3.6, q_k n'a pas de zéro dans l'orthant $\{y \geqslant x^{(k)}\}$ et

$$\Phi_{q_k}^j (x^{(k)}) \leqslant 1 - \frac{1}{\delta}$$

pour $j = 1, \dots, d$. Pour $k = d$, on obtient la proposition. □

3.2 Polynômes caractéristiques mixtes

Rappel : pour $A \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique est

$$p_A(z) = \det(z\mathbb{1}_m - A).$$

Définition 3.8. Pour $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$, le **polynôme caractéristique mixte** est

$$\mu[A_1, \dots, A_d](z) = \left(\prod_{j=1}^{d} (1 - \partial_j) \det \left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i \right) \right) \Bigg|_{z_1 = z_2 = \dots = z_d = 0} .$$

Remarque 3.9. Si $A_1, \dots, A_d \geqslant 0$, par les Propositions 3.3, 3.4 et 3.5, $\mu[A_1, \dots, A_d]$ est réel stable. ♣

Proposition 3.10. *Si* $\operatorname{rang}(A_i) = 1$ *pour* $i = 1, \dots, d$ *avec* $A = \sum_{i=1}^{f} A_i$, *alors*

$$p_A(z) = \mu[A_1, \dots, A_d](z).$$

Preuve. La preuve se fait en deux pas.

1. Pour tout $B \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme $(z_1, \dots, z_d) \mapsto \det\left(B + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right)$ est affine-multilinéaire, c'est-à-dire un exposant $\geqslant 2$ n'apparaît dans aucun terme. Ainsi chaque terme est de la forme

   $$C z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \cdots z_d^{\varepsilon_d}$$

   avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Ou encore, en chaque variable, on a un polynôme de degré $\leqslant 1$.

   Voyons-le pour $d = 1$ (puis récurrence facile). Le fait que $\operatorname{rang}(A_1) = 1$ implique que $\dim \operatorname{Im} A_1 = 1$. On prend une base de $\mathbb{C}^m$ dont le premier vecteur est dans $\operatorname{Im} A_1$. Dans cette base,

   $$A_1 = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   En développant $\det(B + z_1 + A_1)$ par rapport à la première ligne, on obtient un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 en z_1 (en effet, B n'introduit que des coefficients constants dans la matrice, les z_i étant seulement dans la première ligne, on a la conclusion).

2. Formule de Taylor à d variables. Un polynôme affine-multilinéaire est égal à son développement de Taylor d'ordre $(1, 1, \dots, 1)$. On a

   $$\det\left(B + \sum_{i=1}^{d} t_i A_i\right) = \left(\prod_{i=1}^{d} (1 + t_i \partial_i) \det\left(B + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right)\right)\Bigg|_{z_1 = \cdots = z_d = 0}$$

   pour tout $t_1, \dots t_d \in \mathbb{R}$. On fait $t_1 = \cdots = t_d = -1$, $B = z\mathbb{1}_m$ de sorte que

   $$\det\left(z\mathbb{1}_m - \sum_{i=1}^{d} A_i\right) = p_A(z) = \mu[A_1, \dots, A_d](z).$$

□

Exemple 3.11. Soit $p(z_1, z_2) = a_{00} + a_{10} z_1 + a_{01} z_2 + a_{11} z_1 z_2$. Alors

$$((1 + t_1 \partial_1) p)(z_1, z_2) = p(z_1, z_2) + t_1 (a_{10} + a_{11} z_2),$$

$$((1+t_2\partial_2)(1+t_1\partial_1)p)(z_1,z_2) = p(z_1,z_2)+t_1(a_{10}+a_{11}z_2)+t_2(a_{01}+a_{11}z_1)+t_2t_1a_{11}.$$

En posant $z_1 = z_2 = 0$, alors on obtient donc dans le développement de Taylor

$$a_{00} + a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{11}z_1z_2.$$

★

3.3 Preuve du théorème 2 de MSS

Lemme 3.12. *Soient $A_1, \ldots, A_d$ des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans les matrices de rang 1 de $M_n(\mathbb{C})$. Soit $A = \sum_{i=1}^d A_i$. Alors*

$$\mathbb{E}[p_A](z) = \mu[\mathbb{E}[A_1], \mathbb{E}[A_2], \ldots, E[A_d]](z).$$

Le rôle de l'indépendance est que si X, Y sont des variables aléatoires ordinaires, indépendantes, alors

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y],$$

et plus généralement, si $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables aléatoires usuelles indépendantes, alors

$$\mathbb{E}[X_1^{\varepsilon_1}X_2^{\varepsilon_2}\cdots X_k^{\varepsilon_k}] = \mathbb{E}[X_1]^{\varepsilon_1}\cdots\mathbb{E}[X_k]^{\varepsilon_k} \ (\varepsilon_i \in \{0,1\}).$$

Plus généralement, si $p(z_1, \ldots, z_k)$ est un polynôme affine multilinéaire (donc tous les exposants sont 0 ou 1), alors

$$\mathbb{E}[p](X_1, \ldots, X_k) = p(\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_k]).$$

Preuve (DU LEMME 3.12). Par la Proposition 3.10, on sait que

$$p_A(z) = \mu[A_1, \ldots, A_d](z).$$

Ainsi $\mu[A_1, \ldots, A_d](z)$ est un polynôme affine multilinéaire en les coefficients de $A_1, \ldots, A_d$ (par la preuve de la Proposition 3.10). Par indépendance et le raisonnement ci-dessus,

$$\mathbb{E}[p_A](z) = \mathbb{E}[\mu[A_1, \ldots, A_d](z)] = \mu[\mathbb{E}[A_1], \ldots \mathbb{E}[A_d]](z).$$

□

Si $p(z)$ est un polynôme réel stable, on note $ZM(p)$ [1] le plus grand zéro réel de p.

1. La notation ZM est pour « zéro maximal ».

Lemme 3.13. *Soient* $A_1, \dots, A_d$ *des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans les matrices de rang* 1 *de* $M_n(\mathbb{C})$*. Soit* $A = \sum_{i=1}^{d} A_i$*. Supposons encore que les* A_i *sont positives et prennent un nombre fini de valeurs. Alors pour tout* $j \in \{1, \dots, d\}$*, pour tout réalisation de* $A_1, \dots, A_{j-1}$ *on a pour au moins une réalisation de* A_j

$$\begin{aligned} &\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right) \\ &\quad \leqslant \mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \dots A_{j-1}, \mathbb{E}[A_j], \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right). \end{aligned}$$

Preuve. L'espérance $\mathbb{E}[A_j]$ est une moyenne pondérée des valeurs de A_j, donc

$$\mu\left[A_1, \dots, A_{j-1}, \mathbb{E}[A_j], \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]$$

est une moyenne pondérée des polynômes

$$\mu\left[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right],$$

qui sont réels stables. Par la série 5,

$$\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \dots A_{j-1}, \mathbb{E}[A_j], \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right)$$

est dans l'enveloppe convexe (i.e. le plus petit intervalle contenant les ZM de $\mu\left[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]$ prises sur les réalisations de A_j). Pour au moins une réalisation de A_j, on aura

$$\begin{aligned} &\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right) \\ &\quad \leqslant \mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \dots A_{j-1}, \mathbb{E}[A_j], \mathbb{E}[A_{j+1}], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right). \end{aligned}$$

□

Preuve (du Théorème 2). Par le Lemme 3.12,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_A] &= \mu\left[\mathbb{E}[A_1], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right] \\ \Longrightarrow\ \mathsf{ZM}(\mathbb{E}[p_A]) &= \mathsf{ZM}\left(\mu\left[\mathbb{E}[A_1], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right). \end{aligned}$$

On utilise les d inégalités du Lemme 3.13. Pour une réalisation de A_1, on aura

$$\begin{aligned} &\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \mathbb{E}[A_2], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right) \\ &\quad \leqslant \mathsf{ZM}\left(\mu\left[\mathbb{E}[A_1], \dots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right). \end{aligned}$$

Pour au moins une réalisation de A_1 et A_2, on aura

$$\begin{aligned} &\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, A_2, \mathbb{E}[A_3], \ldots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right) \\ &\qquad \leqslant \mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, \mathbb{E}[A_2], \ldots, \mathbb{E}[A_d]\right]\right). \end{aligned}$$

En continuant ainsi, pour au moins une réalisation de $A_1, \ldots, A_d$, on aura

$$\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, A_2, \ldots, A_d\right]\right) \leqslant \mathsf{ZM}\left(\mu\left[p_A\right]\right).$$

Mais par la Proposition 3.10,

$$\mathsf{ZM}\left(\mu\left[A_1, A_2, \ldots, A_d\right]\right) = \mathsf{ZM}(p_A),$$

qui est la plus grande valeur propre de $A = \|A\|$ (car $A \geqslant 0$). Pour cette réalisation,

$$\|A\| \leqslant \mathsf{ZM}(\mathbb{E}[p_A])$$

□

3.4 Preuve du Théorème 1 de MSS

Proposition 3.14. *Si* $A_1, \ldots, A_d \geqslant 0$ *dans* $M_n(\mathbb{C})$ *sont telles que*

$$\sum_{i=1}^{d} A_i = \mathbb{1}_m$$

et $\mathrm{Tr}(A_i) \leqslant \varepsilon$ *pour* $i = 1, \ldots, d$. *Soit*

$$p(z_1, \ldots, z_d) := \det\left(\sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right).$$

Alors

$$\prod_{i=1}^{d}(1 - \partial_i)p$$

n'a pas de zéro dans l'orthant $\{y \geqslant E\}$ *où* $E = (1 + \sqrt{\varepsilon})^2(1, 1, \ldots, 1)$.

Preuve. On va utiliser la Proposition 3.7 avec $x = (\varepsilon + \sqrt{\varepsilon})(1, 1, \ldots, 1)$ et $\delta = 1 + \sqrt{\varepsilon}$. Soit $t := \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$, alors $t + \delta = (1 + \sqrt{\varepsilon})^2$. On doit vérifier plusieurs conditions pour utiliser la proposition :

1. p est réel stable, sans zéro dans $\{y \geqslant x\}$, pour $x = t(1, 1, \ldots, 1)$,
2. $\Phi_p^j(x) \leqslant 1 - \frac{1}{\delta}$.

Vérifions ces deux conditions.

1. On a que

$$\det\left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^{d} z_i A_i\right)$$

est réel stable par la Proposition 3.3, et p est une spécialisation en $z = 0$. Ainsi p est réel stable par la Proposition 3.4. Si $y \geqslant x$, alors

$$\sum_{i=1}^{d} y_i A_i \geqslant \sum_{i=1}^{d} tA_i = t\mathbb{1}_m$$

(puisque $y_i \geqslant t$ pour tout i). Ainsi

$$\sum_{i=1}^{d} y_i A_i$$

est inversible et

$$\det\left(\sum_{i=1}^{d} y_i A_i\right) \neq 0,$$

i.e. $p(y_1, \ldots, y_d) \neq 0$ (ce qui signifie que p n'a pas de zéro dans l'orthant considéré).

2. On utilise la formule de Jacobi. Si $A\colon \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{C})$, $t \mapsto A(t)$ est de classe C^1, alors la dérivée logarithmique de $\det(A(t))$ est donnée par

$$\frac{\det(A(t))'}{\det(A(t))} = \mathrm{Tr}(A(t)^{-1}A'(t)).$$

Moralement, la dérivée logarithmique du déterminant est la trace de la dérivée logarithmique.

Prenons

$$A(x_1, \ldots, x_d) := \sum_{i=1}^{d} x_i A_i.$$

Alors par Jacobi, on a

$$\Phi_p^j(x_1, \ldots, x_d) = \mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{d} x_i A_i\right)^{-1} A_j\right).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\Phi_p^j(t,\dots,t) &= \mathrm{Tr}\left(\left(t\sum_{i=1}^d A_i\right)^{-1} A_j\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left((t\mathbb{1}_m)^{-1}A_j\right)\\ &= \frac{\mathrm{Tr}(A_j)}{t}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{t}.\end{aligned}$$

En exercice, on montre que

$$\frac{\varepsilon}{t}+\frac{1}{\delta}=1 \implies \Phi_p^j(t,\dots,t)\leqslant 1-\frac{1}{\delta}.$$

La Proposition 3.14 résulte alors de la Proposition 3.7.

□

Preuve (du Théorème 1). Par le Lemme 3.12,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[p_A](z) &= \mu\left[\mathbb{E}[A_1],\dots,\mathbb{E}[A_d]\right](z)\\ &= \left(\prod_{i=1}^d (1-\partial_i)\det\left(z\mathbb{1}_m+\sum_{i=1}^d z_i\mathbb{E}[A_i]\right)\right)\Bigg|_{z_1=\dots=z_d=0} && \mathbb{1}_m=\mathbb{E}[A]=\sum_{i=1}^d \mathbb{E}[A_i]\\ &= \left(\prod_{i=1}^d (1-\partial_i)\det\left(\sum_{i=1}^d (z+z_i)\mathbb{E}[A_i]\right)\right)\Bigg|_{z_1=\dots=z_d=0} && t_i := z+z_i\\ &= \left(\prod_{i=1}^d (1-\partial_i)\det\left(\sum_{i=1}^d t_i\mathbb{E}[A_i]\right)\right)\Bigg|_{t_1=\dots=t_d=z}.\end{aligned}$$

Puisqu'on veut utiliser la Proposition 3.14, on doit encore vérifier la condition sur les traces. Mais

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{E}[A_i]) = \mathbb{E}[\mathrm{Tr}(A_i)] = \mathbb{E}[\|A_i\|] \leqslant \varepsilon$$

(où la dernière égalité vient du fait $A_i \geqslant 0$ de rang 1, et donc on peut trouver une base où A_i est diagonale avec valeur propre λ de multiplicité 1 et des 0 ailleurs, et l'inégalité est une hypothèse). Par la Proposition 3.14, le polynôme

$$\prod_{i=1}^d (1-\partial_i)\det\left(\sum_{i=1}^d t_i\mathbb{E}[A_i]\right)$$

n'a pas de zéro dans l'orthant $\{y \geqslant E\}$ où $E=(1+\sqrt{\varepsilon})^2(1,1,\dots,1)$. Donc

$$ZM(\mathbb{E}[p_A]) \leqslant (1+\sqrt{\varepsilon})^2.$$

Chapitre 4

Graphes de Ramanujan

4.1 Théorie algébrique des graphes

Un **graphe** fini est une paire $X = (V, E)$ composé d'un ensemble V de sommets (« vertices » en anglais) et $E \subset V \times V$ d'arêtes (« edges » en anglais). On supposera dans le cours qu'on a au plus une arête entre deux sommets (i.e. on n'a pas de multigraphe), qu'on n'a pas de boucle, et on considère que les arêtes ne sont pas orientés (i.e. si $e = (v, w) \in E$, $e' = (w, v) \in E$).

On dit qu'un graphe est **connexe** s'il existe un chemin entre toute paire de sommet de V.

On met la relation d'adjacence $x \sim y \iff \{x, y\} \in E$, et la **matrice d'adjacence** A est indexée par les paires de sommets

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{si } x \not\sim y \end{cases}$$

L'application linéaire correspondante $A \colon \mathbb{C}V \to \mathbb{C}V$ (où $\mathbb{C}V$ est l'ensemble des fonctions $f \colon V \to \mathbb{C}$), qui à $f \in \mathbb{C}V$ associe

$$(Af)(x) = \sum_{y \,:\, y \sim x} f(y).$$

Puisque $A = A^\top$, on sait par l'algèbre linéaire que le spectre de A $\sigma(A)$ (l'ensemble des valeurs propres) est réel et A est diagonalisable.

On dit que X est **d-régulier** si tout sommet a d voisins.

On dit que X est **biparti** ou **bicolorable** si et seulement si $V = V_1 \sqcup V_2$ tq

$$x \sim y \implies \begin{cases} x \in V_1 \text{ et } y \in V_2 \\ \text{ou} \\ x \in V_2 \text{ et } y \in V_1. \end{cases}$$

Proposition 4.1. *Soit X un graphe d-régulier, connexe fini. Alors*

1. *si λ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant d$;*
2. *d est valeur propre de multiplicité 1 ;*
3. *$-d$ est valeur propre de A ssi X est biparti (ou bicolorable), et dans ce cas $\sigma(A)$ est symétrique par rapport à 0 ($\lambda \in \sigma(A) \implies -\lambda \in \sigma(A)$).*

Preuve. 1. Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et soit f la fonction propre associée à λ. Soit $x_0 \in V$ tel que $|f(x_0)| \geqslant |f(x)|$ pour tout $x \in V$. On a

$$|\lambda||f(x_0)| = |\lambda f(x_0)| = |Af(x_0)| = \left|\sum_{y \sim x_0} f(y)\right| \leqslant \underbrace{\sum_{y \sim x_0} |f(y)|}_{d \text{ termes}} \leqslant d|f(x_0)|,$$

et donc (puisque f est une fonction propre non nulle)

$$|\lambda| \leqslant d.$$

2. Soit $f \equiv 1$ sur V, alors $Af = df$ et

$$Af(x) = \sum_{y \sim x} f(y) = d.$$

Soit à présent f la fonction propre associée à d. On veut montrer qu'alors f est constante. On peut supposer f à valeurs réelles (car on peut séparer parties réelles et imaginaires). Soit $x_0 \in V$ un sommet qui réalise

$$|f(x_0)| \geqslant |f(x)| \ \forall x \in V.$$

Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(x_0) > 0$. On a

$$df(x_0) = Af(x_0) = \sum_{y \sim x_0} f(y).$$

Ainsi

$$f(x_0) = \frac{1}{d} \sum_{y \sim x_0} f(y),$$

i.e. on peut voir $f(x_0)$ comme la moyenne de f sur les d voisins. Mais puisque $f(x_0)$ est un maximum, on a que $f(y) = f(x_0)$ pour tout $y \sim x_0$. En continuant ainsi, par connexité, f est constante. On voit encore que d est de multiplicité 1 car l'espace propre associé est de dimension 1.

3. Soit X biparti. Alors on prend

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V_1, \\ -1 & \text{si } x \in V_2. \end{cases}$$

Soit $x \in V_1$ pour le moment, alors

$$(Af)(x) \sum_{y \sim x} f(y) = -d = -df(x).$$

Symétriquement, on a la même chose si $x \in V_2$. Ainsi on conclut que

$$Af = -df.$$

La réciproque ($-d$ valeur propre implique X est biparti) est un exercice.
Soit encore X biparti et soit $\lambda \in \sigma(\lambda)$, soit g une fonction propre associée à λ ($Ag = \lambda g$) et considérons

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in V_1, \\ -g(x) & \text{si } x \in V_2. \end{cases}$$

Vérifions que $Af = -\lambda f$. Soit $x \in V_1$. Alors

$$(Af)(x) = \sum_{y \sim x} f(\underbrace{y}_{\in V_2}) = -\sum_{y \sim x} g(y) = -(Ag)(x) = -\lambda g(x) = -\lambda f(x).$$

Si $x \in V_2$, on a la même conclusion. Ainsi on a bien

$$Af = -\lambda f.$$

□

Soit X un graphe fini connexe d-régulier à n sommets. On range les valeurs propres de A par ordre décroissant, en tenant compte des multiplicités. On note la plus grande valeur propre $\mu_0 = d$ et on a (puisque d est de multiplicité 1)

$$\mu_0 = d > \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1} (\geqslant -d).$$

Le **trou spectral** du graphe est

$$d - \mu_1.$$

Définition 4.2. Un graphe d-régulier connexe fini est **de Ramanujan** si

$$\mu_1 \leqslant 2\sqrt{d-1}.$$

MAUVAISE DÉFINITION ! LA BONNE DÉFINITION EST LA DÉFINITION 4.4.

Exemples 4.3. 1. Pour $d = 2$: les graphes 2-réguliers connexes finis sont les cycles. L'inégalité $\mu_1 \leqslant 2$ est triviale.

2. Le graphe complet K_n sur n sommets (i.e. tout sommet est relié avec tout autre) est $(n-1)$-régulier. Soit J_n la matrice $n \times n$ remplie de 1. Ainsi

$$A = J_n - \mathbb{1}_n,$$

on a de plus

$$J_n = nJ_n \implies \left(\frac{J_n}{n}\right)^2 = \frac{J_n}{n}.$$

Ainsi la matrice $\frac{J_n}{n}$ est une matrice de projection, donc $\sigma\left(\frac{J_n}{n}\right) = \{0, 1\}$. Ainsi $\sigma(J_n) = \{0, n\}$. Ainsi on en déduit que

$$\sigma(A) = \{-1, n-1\}$$

et $-1 = \mu_1$.

★

D'où sort $2\sqrt{d-1}$?

- Un graphe connexe X sans cycle est un **arbre**. Soit T_d l'arbre d-régulier (donc T_d est infini). Par exemple, T_{2d} est le graphe de Cayley de $\mathbb{F}_d$. De plus, T_d est le revêtement universel de tout graphe d-régulier connexe.

  Si A est la matrice d'adjacence de T_d, on peut voir A comme un opérateur borné sur $\ell^2(T_d)$ et $A = A^*$, et

$$\sigma(A) = \left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right].$$

  Ce résultat est dû à Harry Kesten, 1959 (une partie de sa thèse).

- Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de graphes d-réguliers, connexes, finis, $|V_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. L'inégalité d'Alon-Boppana ($\sim$ 1984) dit

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_1(X_n) \geqslant 2\sqrt{d-1}.$$

On peut interpréter ceci en disant que les graphes de Ramanujan sont les graphes « qui ont le plus grand trou spectral possible » asymptotiquement.

Cela pose le problème de l'existence de familles infinies de graphes de Ramanujan d-réguliers pour $d > 2$. En 1986, A. Lubotzky, R. Phillips et P. Sarnak (équipe américaine) (indépendamment G. Margulis pour l'équipe de Russie) ont construit des familles infinies de graphes de Ramanujan d-réguliers, pour d de la forme $p^k + 1$, p premier et $k \geqslant 1$. Pour ce faire, ils ont utilisé la conjecture de Ramanujan (1916) en théorie des nombres qui avait été démontrée en 1974 par Pierre Deligne (médaille Fields en 1978, comme Margulis).

Question : Pour quelles valeurs de d existe-t-il des familles infinies de graphes de Ramanujan d-réguliers ?

Bonne définition d'un graphe de Ramanujan :

Définition 4.4. Un graphe fini, connexe et d-régulier est **de Ramanujan** si pour toute valeur propre μ de A , on a $|\mu| = d$ ou

$$|\mu| \leqslant 2\sqrt{d-1}.$$

Interprétation : on a toujours la valeur propre $\mu = d$, $\mu = -d$ est là ssi X est bicolorable et les autres valeurs propre dans le cas Ramanujan sont dans l'intervalle $\left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$.

Pour revenir à la question posée précédemment, LPS ont montré que pour $d = 1+p^k$ (p premier), il y a des constructions *explicites* de familles infinies de graphes de Ramanujan d-réguliers, à la fois bicolorables et non bicolorables.

Théorème 4.5 (MSS, 2013). *Pour tout $d \geqslant 3$, il existe des familles infinies, non explicites, de graphes de Ramanujan d-réguliers bicolorables.*

Problème ouvert : Même chose en remplaçant bicolorable par non bicolorable.

Les technique de MSS leur permettent de contrôler « le haut du spectre » de A. L'hypothèse que X est biparti leur permet de contrôler également le « bas du spectre », puisque dans ce cas, le spectre est symétrique.

4.2 2-relèvements (« 2-lifts »)

Définition 4.6. Soit $X = (V, E)$ un graphe fini. Un **signage** de X est une fonction

$$s\colon V \times V \to \{-1, 0, 1\}$$

qui est symétrique (i.e. $s(x, y) = s(y, x)$) et telle que

$$s(x, y) \neq 0 \iff x \sim y.$$

Remarque 4.7. On peut aussi y penser comme une fonction $E \to \{\pm 1\}$. ♣

Si s est un signage de X, la **matrice d'adjacence signée**

$$(A^{(s)})_{xy} = s(x, y) \quad (x, y \in V).$$

Ainsi en mettant le signage constante ($s(x,y)=1$ si $x\sim y$), c'est la matrice d'adjacence usuelle.

Si $|V|=n$ et s est un signage de X, le **2-relèvement** de X associé à s est un graphe $\tilde{X}^{(s)}$ à $2n$ sommets, avec $\tilde{V}=V_1\sqcup V_2$, où V_1 et V_2 sont des copies de V.

- Si $xy\in E$ et $s(x,y)=1$, soient $x_1\in V_1$, $x_2,\in V_2$ les sommets correspondants à $x\in V$, et $y_1\in V_1$, $y_2\in V_2$ les sommets correspondants à $y\in V$. Alors on relie x_1 à y_1 dans V_1 et x_2 à y_2 dans V_2.
- Si $xy\in E$ et $s(x,y)=-1$, soient $x_1\in V_1$, $x_2,\in V_2$ les sommets correspondants à $x\in V$, et $y_1\in V_1$, $y_2\in V_2$ les sommets correspondants à $y\in V$. Alors on relie x_1 à y_2 dans $V_1\times V_2$ et x_2 à y_1 dans $V_2\times V_1$.

Exemples 4.8.
1. Si $s(x,y)=1$ si $x\sim y$, alors $\tilde{X}^{(s)}$ est formé de deux copies de X (non connexe).
2. Si $X=C_n$, $s(x,y)=1$ pour chaque arête sauf 1, le graphe est connexe : $\tilde{X}^{(s)}\simeq C_{2n}$ (faire le dessin pour se convaincre).

★

Exercice 4.1.
1. Si X est d-régulier, alors $\tilde{X}^{(s)}$ aussi.
2. Si X est biparti, alors $\tilde{X}^{(s)}$ aussi.

♠

Lemme 4.9 (Y. Bilu, N. Linial, 2006). *Soit $\tilde{A}^{(s)}$ la matrice d'adjacence de $\tilde{X}^{(s)}$ (de taille $2n\times 2n$). Alors*

$$\sigma(\tilde{A}^{s})=\sigma(A)\cup\sigma(A^{(s)}).$$

Preuve. Décomposons $\tilde{A}^{(s)}$ selon la 1ère et la 2ème copie de V

$$\tilde{A}^{(s)}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix}$$

où $(A_1)_{xy}=1$ ssi $x\sim y$ et $s(x,y)=1$ et $(A_2)_{xy}=1$ ssi $x\sim y$ et $s(x,y)=-1$.

Alors $A=A_1+A_2$, et $A^{(s)}=A_1-A_2$. Si v est un vecteur propre de A, de valeur propre μ, $Av=\mu v$, alors

$$\tilde{A}^{(s)}\begin{pmatrix}v\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1v+A_2v\\ A_2v+A_1v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Av\\ Av\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}v\\ v\end{pmatrix}$$

et donc $\sigma(A)\subset\sigma(\tilde{A}^{(s)})$.

Si u est un vecteur propre de $A^{(s)}$, de valeur propre λ, $A^{(s)}\lambda = u\lambda$. Alors

$$\tilde{A}^{(s)} \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 u - A_2 u \\ A_2 u - A_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(s)} u \\ -A^{(s)} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ -\lambda u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}.$$

et donc $\sigma(A^{(s)}) \subset \sigma(\tilde{A}^{(s)})$. Mais puisque $\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}$. Mais en comptant les multiplicités, les $\binom{v}{v}$ engendrent un sous-espace de dimension n, les $\binom{u}{-u}$ aussi (qui est orthogonal au précédent), donc on a trouvé une base de vecteurs propres de $\tilde{A}^{(s)}$, et il n'y a pas d'autre valeur propre. □

Conséquence : Si X est d-régulier, alors $\sigma(A^{(s)}) \subset [-d, d]$.

Observation : Si X est d-régulier Ramanujan, et s est un signage tel que $\sigma(A^{(s)}) \subset \left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$, alors $\tilde{X}^{(s)}$ est Ramanujan. En effet, $\tilde{X}^{(s)}$ est connexe car la multiplicité de la valeur propre d vaut 1 et les valeurs propres venant de $A^{(s)}$ sont toutes dans $\left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$, donc (par le Lemme), $\tilde{X}^{(s)}$ est Ramanujan.

Conjecture 4.10 (DE BILU-LINIAL, 2006). *Si X est d-régulier, alors il existe un signage s de X avec*

$$\sigma(A^{(s)}) \subset \left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right].$$

Théorème 4.11 (MSS). *La conjecture de Bilu-Linial est vraie pour un graphe d-régulier biparti.*

Remarque 4.12. La conjecture est toujours ouverte pour le cas non biparti. ♣

Conséquence 4.13. *Il existe des familles infinies de graphes de Ramanujan d-réguliers bipartis.*

L'observation et le Théorème 4.11 montrent que, si X est d-régulier, bicolorable et Ramanujan, alors X possède un signage s tel que $\tilde{X}^{(s)}$ est d-régulier, biparti et Ramanujan. On peut itérer. On démarre avec le graphe biparti complet $K_{d,d}$.

4.3 Preuve du Théorème 4.11

.

Soit X d-régulier, biparti, à n sommets et m arêtes. Soit s un signage de X, et $e = \{u, v\} \in E$, on définit une matrice positive de rang 1 : $A_e^{(s)} \geqslant 0$. Si $s(u, v) = 1$,

$$(A_e^{(s)})_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in \{u, v\}, \\ 0 & \text{si } x \text{ ou } y \notin \{u, v\}. \end{cases}$$

Si $f \colon V \to \mathbb{C}$,

$$A_e^{(s)}(f) = \langle f\, ,\, \delta_u + \delta_v \rangle\, (\delta_u + \delta_v).$$

Si $s(u, v) = -1$, alors

$$(A_e^{(s)})_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = u \text{ ou } x = y = v, \\ -1 & \text{si } (x = u \text{ et } y = v) \text{ ou } (x = v \text{ et } y = u), \\ 0 & \text{si } x \notin \{u, v\} \text{ ou } y \notin \{u, v\}. \end{cases}$$

On a

$$A_e^{(s)}(f) = \langle f\, ,\, \delta_u - \delta_v \rangle\, (\delta_u - \delta_v).$$

Alors

$$\sum_{e \in E} A_e^{(s)} = A^{(s)} + d\mathbb{1}_n.$$

Il y a 2^m signages. On munit l'ensemble des 2^m signages de la proba uniforme (chacun de proba $\frac{1}{2^m}$). Pour $e \in E$ fixé, on voit $s \mapsto A_e^{(s)}$ comme une variable aléatoire à valeurs dans les matrices $\geqslant 0$ de rang 1. Les variables $(A_e^{(s)})_{e \in E}$ sont indépendantes.

Le théorème 2 de MSS s'applique et dit : pour au moins une réalisation des $A_e^{(s)}$, c'àd pour au moins un signage s

$$\|d\mathbb{1}_n + A^{(s)}\| = ZM(p_{(d\mathbb{1}_n + A^{(s)})}) = ZM(\mathbb{E}p_{(d\mathbb{1}_n + A^{(s)})}).$$

Notons $\mu_{max}^{(s)}$ la plus grande valeur propre de $A^{(s)}$, donc $\|d\mathbb{1}_n + A^{(s)}\| = d + \mu_{max}^{(s)}$. D'autre part

$$\left(\mathbb{E}[p(d\mathbb{1}_n + A^{(s)})]\right)(z) = \frac{1}{2^m} \sum_s p(d\mathbb{1}_n + A^{(s)})(z) = \frac{1}{2^m} \sum_s p_{A^{(s)}}(z - d) = \left(\mathbb{E}[p_{A^{(s)}}]\right)(z - d)$$

Définition 4.14. Un **mariage** « matching » dans un graphe fini est une collection d'arêtes disjointes telle que chaque sommet est relié à un unique autre sommet. (Note : en cours, la définition était un dessin, mais c'est l'idée. Apparemment, selon la suite, on n'a pas besoin de « marier » tous les sommets)

On note p_r le nombre de mariages à r sommets (convention, $p_0 = 1$). Le **polynôme de mariage** de X est

$$\mu_X(z) := \sum_{r \geqslant 0} (-1)^r p_r z^{n-2r}$$

où n est le nombre de sommets. Noter que $r \leqslant \frac{n}{2}$.

Proposition 4.15. *1. (MSS)* $\mathbb{E}[p_{A^{(s)}}] = \mu_X$

2. (Heilmann-Lieb, 1972) Si $|X| \geqslant 3$*, si le degré maximal de* X *est* d*, alors le zéro maximal de* μ_X *est inférieur ou égal à* $2\sqrt{d-1}$*.*

On peut à présent terminer la preuve du Théorème 4.11 : pour un certain signage,

$$\begin{aligned} d + \mu^{(s)}_{max} = ZM(p_{(d\mathbb{1}_n + A^{(s)})}) &\leqslant ZM(\mathbb{E}[p_{(d\mathbb{1}_n + A^{(s)})}]) \\ &= d + ZM(\mathbb{E}[p_{A^{(s)}}]) \\ &= d + ZM(\mu_X) && \text{par la Prop.} \\ &\leqslant d + 2\sqrt{d-1} && \text{par la Prop.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu^{(s)}_{max} \leqslant 2\sqrt{d-1}$ ce qui est la conjecture de Bilu-Linial (pour X biparti).

La proposition redémontre un résultat de Godsil-Gutman de 1980 : μ_X a toutes ses racines réelles. La raison est que, par le Lemme 3.12

$$\mathbb{E}[p_{A^{(s)}}] = \mu[\mathbb{E}[A^{(s)}_{e_1}], \dots, \mathbb{E}[A^{(s)}_{e_m}]]$$

est un polynôme caractéristique mixte (on a numéroté les arêtes de 1 à m). Ce dernier est réel stable, donc toutes ses racines sont réelles.

Preuve (de la Proposition). 1. On a vu que

$$\det(B) := \sum_{\sigma \in Sym(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} B_{i\sigma(i)}.$$

Ainsi,

$$p_{A^{(s)}} = \det(z\mathbb{1}_n - A^{(s)}) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (z\mathbb{1}_n - A^{(s)})_{i\sigma(i)}.$$

Pour $\sigma \in Sym(n)$ fixé,

$$(z\mathbb{1}_n - A^{(s)})_{i\sigma(i)} = \begin{cases} z & \text{si } i = \sigma(i) \\ -s(i, \sigma(i)) & \text{si } i \neq \sigma(i). \end{cases}$$

Si S est l'ensemble des points non fixes de σ, et $|S| = k$, alors

$$\prod_{i=1}^{n} (z\mathbb{1}_n - A^{(s)})_{i\sigma(i)} = z^{n-k} (-1)^k \prod_{i \in S} s(i, \sigma(i)).$$

Notons $\pi := \sigma|_S$. On range les σ par k croissants où k est le nombre de points non fixes. Alors

$$p_{A^{(s)}}(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^{n-k} \sum_{\substack{S\subset\{1,2,\dots,n\}\\ |S|=k}} \sum_{\substack{\pi\in Sym(S)\\ \text{sans point fixe}}} \varepsilon(\pi) \prod_{i\in S} s(i,\pi(i)).$$

Puisque cette expression est si belle, prenons l'espérance !

$$\mathbb{E}[p_{A^{(s)}}](z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^{n-k} \sum_{\substack{S\subset\{1,2,\dots,n\}\\ |S|=k}} \sum_{\substack{\pi\in Sym(S)\\ \text{sans point fixe}}} \varepsilon(\pi) \mathbb{E}\left(\prod_{i\in S} s(i,\pi(i))\right).$$

Pour i,j fixés, la variable aléatoire $s \mapsto s(i,j)$ est d'espérance nulle, i.e. $\mathbb{E}[s(i,j)] = 0$. On a deux cas possible

- si $i \not\sim j$, $s(i,j) = 0$,
- si $i \sim j$, on a une chance sur deux d'avoir $s(i,j) = 1$ et $s(i,j) = -1$.

Les variables aléatoires $(s(i,j))_{i,j\in V}$ sont indépendantes (la valeur sur une arête n'influe pas sur la valeur sur une autre arête). À ce moment là, on a très envie d'utiliser l'indépendance pour permuter l'espérance et le produit. Mais on ne peut pas, sinon on aurait que $p_{A^{(s)}} \equiv 0$... Il faut donc remarquer pourquoi ce n'est pas le cas ! Si π a un cycle de longueur au moins 3, alors

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in S} s(i,\pi(i))\right] = \underbrace{\mathbb{E}[s(i_1,i_2)]}_{=0} \prod \cdots$$

(où le deuxième produit n'est pas spécifié). Ainsi, si on a un cycle de longueur au moins 3, l'espérance est nulle. Il reste donc les produits de transpositions disjointes. Soit π un tel produit. Alors

$$s(i,\pi(i))s(\pi(i),i) = \begin{cases} (\pm 1)^2 = 1 & \text{si } i \sim \pi(i) \\ 0 & \text{si } i \not\sim \pi(i). \end{cases}$$

Dans ce cas là, π réalise un mariage parfait sur les sommets de S ! La seule façon d'avoir

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in S} s(i,\pi(i))\right] \neq 0$$

(même égal à 1 dans ce cas) est que π réalise un **mariage parfait** de S (c'àd un mariage impliquant tous les sommets de S). Ceci ne peut arriver que si $|S| = k \equiv 0 \pmod 2$.

Enfin, si π est un produit de transpositions disjointes de S, $\varepsilon(\pi) = (-1)^{\frac{k}{2}}$ (car la signature vaut -1 à la puissance le nombre de transpositions). Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[p_{A^{(s)}}] &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} z^{n-k}(-1)^{k/2} p_{k/2} \qquad\qquad \frac{k}{2} = r \\
&= \sum_{r=0}^{n/2} z^{n-2r}(-1)^r p_r \\
&= \mu_X(z),
\end{aligned}$$

et on retombe sur le beau polynôme de mariage !

> **Exercice 4.2.** Les zéros de μ_X sont symétriques par rapport à 0. ♠

2. La preuve se fait en deux pas.
   a) Pour tout $u \in V$, on a

$$\mu_X(z) = z\mu_{X\setminus\{u\}}(z) - \sum_{v\sim u} \mu_{X\setminus\{u,v\}}(z) \tag{4.1}$$

(c'est une formule de récurrence, en partant de $\mu_\emptyset = 1$). Dans X, on a deux types de mariages (ceux qui contiennent u, et ceux qui ne contiennent pas u).

- Ceux qui ne comprennent pas u : ils donnent un mariage (avec le même nombre d'arêtes) de $X \setminus \{u\}$. Cela nous donne le terme $z\mu_{X\setminus\{u\}}(z)$.
- Ceux qui passent par u et par un unique voisin v de u. Disons que ce mariage a r arêtes, alors en enlevant uv, il reste un mariage à $r-1$ arêtes de $X \setminus \{u, v\}$.

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_r (-1)^r p_r z^{n-2r} &= \sum_r (-1)^r p_{r,X\setminus\{u\}} z^{n-2r} + \sum_{v\sim u}\sum_{r\geqslant 0} (-1)^r p_{r-1,X\setminus\{u,v\}} z^{n-2r} \\
&= z\mu_{X\setminus\{u\}}(z) - \sum_{v\sim u}\sum_{r\geqslant 0} p_{r-2,X\setminus\{u,v\}} z^{(n-2)-2(r-1)} \\
&= z\mu_{X\setminus\{u\}}(z) - \sum_{v\sim u} \mu_{X\setminus\{u,v\}}(z).
\end{aligned}$$

□

Index