

Matrices aléatoires et zéros de polynômes: Notes de cours

Enseignant: Prof. Alain VALETTE
Scribe: Laurent HAYEZ

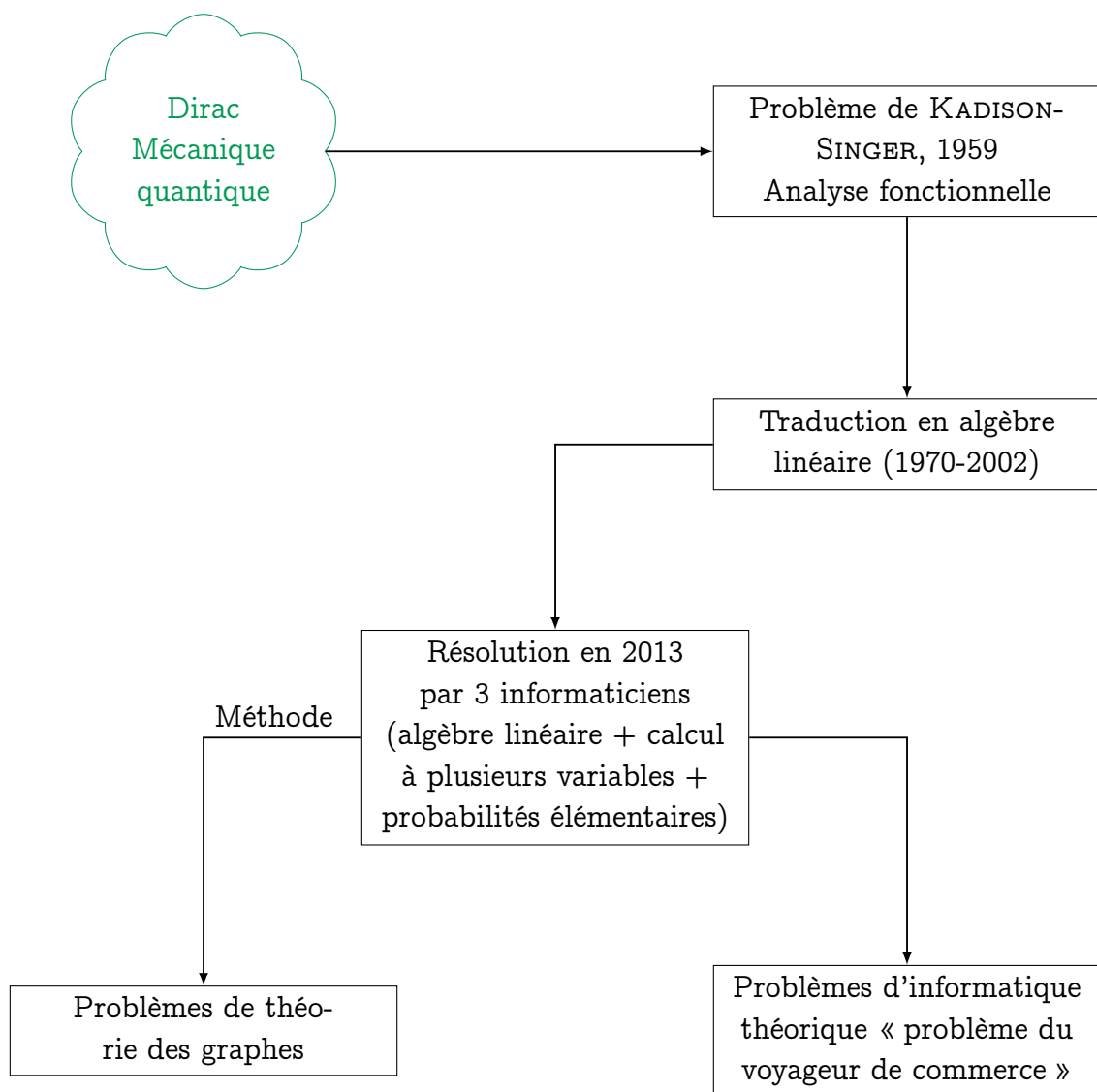
Année 2018-2019, semestre de printemps
Dernière modification: 28 mars 2019

Table des matières

0	Résumé	3
1	De la mécanique quantique à l'analyse fonctionnelle	4
1.1	Mécanique quantique	4
1.2	C^* -algèbres	5
2	De l'analyse fonctionnelle à l'algèbre linéaire	12
2.1	Conjecture de pavage	12
2.2	Conjecture de <small>WEAVER</small> (2004)	15
2.3	Matrices aléatoires	16
3	Preuves des théorèmes 1 et 2	21
3.1	Polynômes réels stables	21
3.2	Polynômes caractéristiques mixtes	24

Chapitre 0

Résumé



Chapitre 1

De la mécanique quantique à l'analyse fonctionnelle

1.1 Mécanique quantique

Paul Adrien Maurice DIRAC (1902 - 1984) physicien anglais d'origine valaisanne, a écrit en 1930 les « Principles of quantum mechanics » (plusieurs fois ré-édités).

Principes :

- Les états d'un système physique sont représentés par les vecteurs-unités d'un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Exemples 1.1. — Une particule libre à une dimension : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
— Une particule libre à deux dimensions : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$.



- Les grandeurs physiques (« observables ») sont des opérateurs auto-adjoints ($T = T^*$) sur \mathcal{H} .

Exemples 1.2. — Sur $L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur de position P est la multiplication par x sur $L^2(\mathbb{R})$.
— L'opérateur de moment (ou impulsion) $Q = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$.



- Ce qu'on peut observer (en laboratoire) est la probabilité que la valeur d'une observable sur un état donné, soit comprise entre deux valeurs a et b .

Exemples 1.3. — Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi\| = 1$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

La probabilité que la position d'une particule dans l'état ψ , soit entre

a et b est

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx.$$

En effet, le fait que $\|\psi\| = 1$ nous dit que ψ est une densité de probabilité.



Ces trois principes sont parfois appelés les « axiomes de la mécanique quantique ».

Dans le chapitre 18 de son livre, « Probability amplitudes », Dirac donne une recette pour obtenir ces probabilités.

Définition 1.4. Deux observables S et T sont dit **compatibles** si $ST = TS$.

Exemples 1.5. 1. Les observables P et Q précédemment définis ne sont pas compatibles. En effet,

$$PQ - QP = \frac{-1}{i} \text{Id},$$

qui est la **relation d'indétermination de Heisenberg**.

2. Pour une particule libre à deux dimensions, posons P_x l'opérateur de multiplication par la première variable x sur $L^2(\mathbb{R})$ ($P_x f(x, y) = xf(x, y)$) et P_y l'opérateur de multiplication par la deuxième variable y . Ces deux opérateurs sont compatibles,

$$P_x P_y = P_y P_x.$$



La recette de Dirac est la suivante :

1. considérer un ensemble maximal d'observables deux à deux compatibles,
2. spécifier les probabilités associées sur les observables dans un état quantique donné,
3. étendre ces probabilités à toutes les observables, même non compatibles.

1.2 C^* -algèbres

Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés (donc continus) de \mathcal{H} vers \mathcal{H} , avec la norme opérateur

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

L'espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une **algèbre de Banach**

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est défini par

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

- Définition 1.6.**
- Une sous-algèbre est un sous espace vectoriel qui est stable pour la multiplication.
 - Une $*$ -sous-algèbre A a la propriété $T \in A \Rightarrow T^* \in A$ et est fermée pour la norme opérateur.

Définition 1.7. Une C^* -algèbre est une $*$ -sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- Exemples 1.8.**
1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathbb{C}1 = \{\lambda 1, \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\{0\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts.
 2. Soit X un espace topologique compact, et $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans \mathbb{C} muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in X} |f(x)|$$

et de l'involution

$$f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

On prend sur X une mesure de probabilité μ telle que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide de X . *L'exemple à garder en tête est $[0, 1]$ avec la mesure de Lebesgue.* Ainsi $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert. Si on multiplie une fonction de L^2 par une fonction continue, elle reste dans L^2 , ainsi

$$\pi: C(X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), f \mapsto \text{multiplication par } f \text{ sur } \mathcal{H}.$$

Exercice 1.1. Avec $\|\pi(f)\| = \|f\|_{\infty}$, $C(X)$ est une C^* -algèbre. ♠



Théorème 1.9 (GELFAND, 1940). Soit A une C^* -algèbre commutative à unité ($1 \in A$). Il existe un espace compact X , unique à homéomorphisme près, tel que $A \simeq C(X)$.

Définition 1.10. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est **positif** ($T \geq 0$) si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

1. pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$,
2. il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $T = S^*S$,
3. $T = T^*$ et $\text{Sp}(T) \subset [0, +\infty[$ (Rappel : le spectre de T $\text{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \mathbb{1} \text{ n'est pas inversible}\}$, $\text{Sp}(T)$ est un compact non vide de \mathbb{C} et $\text{Sp}(T) \subseteq B(0, \|T\|)$).

Définition 1.11. Si A est une C^* -algèbre à unité, un état sur A est une forme linéaire $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

1. $\varphi(1) = 1$,
2. $\varphi(T^*T) \geq 0$ pour tout $T \in A$.

On note $S(A)$ l'ensemble des états sur A .

Exemple 1.12. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\| = 1$, alors pour $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\varphi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$$

est un état vectoriel et

$$\varphi(1) = \|\xi\|^2 = 1, \quad \varphi(T^*T) = \langle T^*T\xi, \xi \rangle = \langle T\xi, T\xi \rangle = \|T\xi\|^2 \geq 0$$

et ainsi $S(A) \neq \emptyset$. ★

Proposition 1.13. $S(A)$ est une partie convexe de la boule-unité du dual A^* (ici A^* est l'ensemble des formes linéaires continues sur A).

Preuve. 1. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A)$, soit $t \in [0, 1]$. On doit montrer que

$$t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 \in S(A).$$

On a

$$(t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(1) = 1, \quad (t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2)(T^*T) \geq 0.$$

2. Si $\varphi \in S(A)$, on doit montrer que $\|\varphi\| \leq 1$, c'est-à-dire

$$|\varphi(t)| \leq 1 \text{ si } \|T\| \leq 1.$$

Si $\|T\| \leq 1$, alors $\mathbb{1} - T^*T \geq 0$ car

$$\langle (\mathbb{1} - T^*T)\xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 - \|T\xi\|^2 \geq 0$$

puisque $\|T\| \leq 1$. On peut encore écrire

$$\mathbb{1} - T^*T = S^*S$$

pour $S \in A$. Ainsi

$$1 - \varphi(T^*T) = \varphi(\mathbb{1} - T^*T) = \varphi(S^*S) \geq 0 \implies \varphi(T^*T) \leq 1.$$

L'application $A \times A \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \varphi(y^*x)$ vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\varphi(y^*x)|^2 \leq \varphi(y^*y)\varphi(x^*x) \quad \forall x, y \in A.$$

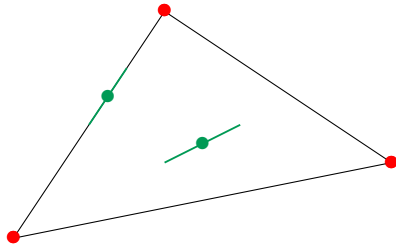
Pour $x = T$, $y = \mathbb{1}$,

$$|\varphi(T)|^2 \leq \varphi(\mathbb{1})\varphi(T^*T) \leq 1.$$

□

Remarque 1.14. Comme $1 = \varphi(\mathbb{1}) \leq \|\varphi\|$, on a que $S(A)$ est contenu dans la sphère unité de A^* . ♣

Définition 1.15. Soit K un convexe dans un espace vectoriel réel ou complexe. Un point x est **extrême** dans K si x n'est pas intérieur à un segment contenu dans K , c'est-à-dire si $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $0 < t < 1$, $x_1, x_2 \in K$, alors $x = x_1 = x_2$.



• = points extrêmes

Un point extrême de $S(A)$ est appelé un **état pur**.

Exemples 1.16. 1. On montre que tout état vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est pur. On verra qu'il y a des états purs non vectoriels.

2. Soit $A = C(X)$, alors $S(A)$ s'identifie avec $\text{Prob}(X)$ l'espace des mesures de probabilités sur X (un des théorèmes de représentation de RIÉSZ). ★

Les états purs s'identifient aux points extrêmes de $\text{Prob}(X)$, c'est-à-dire aux mesures de Dirac δ_x , définie par (pour $A \subset X$)

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 1.17 (KREIN-MILMAN). *Soit K un convexe compact non vide dans un espace vectoriel topologique sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrêmes*

$$K = \overline{\text{conv}(\text{ext}(K))}, \quad \text{ext}K = \{\text{points extrêmes de } K\}.$$

Sur A^* , on a la topologie faible $*$: $\varphi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \varphi$ si pour tout $x \in A$, $\varphi_i(x) = \varphi(x)$.

Théorème 1.18 (BANACH-ALAOGLU). *La boule unité de A^* est compacte pour la topologie faible $*$.*

On a vu que $S(A)$ est contenu dans la boule unité de A^* ,

$$S(A) = \{\varphi \in A^* \text{ tq } \varphi(\mathbb{1}) = 1, \varphi(T^*T) \geq 0 \forall T \in A\},$$

donc $S(A)$ est fermé pour la topologie faible $*$, ainsi $S(A)$ est convexe et compact. Par Krein-Milman, $S(A) = \overline{\text{conv}(\text{ext}(S(A)))}$.

Si $\varphi \in S(A)$, une version du théorème de Hahn-Banach dit que φ s'étend en au moins un état sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \supset A$.

Soit $K_\varphi = \{\psi \in S(\mathcal{B}(\mathcal{H})) : \psi|_A = \varphi\}$ l'ensemble des états de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui étendent φ . Alors K_φ est convexe et faible $*$ -fermé.

cf. pages d'Alain pour la suite du cours du 28 février

Problème : un état pur sur une MASA a-t-il une extension unique à $\mathcal{B}(\mathcal{H})$?

Le résultat principal de Kadison & Singer (1959) est le théorème suivant, qu'on admet.

Théorème 1.19. *Pour la MASA diffuse $L^\infty[0, 1]$, la réponse est non.*

L'article laisse ouvert le cas de la MASA discrète $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Problème de Kadison&Singer : la MASA $\ell^\infty(\mathbb{N})$ a-t-elle l'extension unique des états purs ?

Kadison & Singer inclinent à penser que la réponse doit être non (en fait c'est oui).

Proposition 1.20. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons φ_k l'état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ donné par $\varphi_k(\underbrace{(a_n)_{n>0}}_{\in \ell^\infty(\mathbb{N})}) = a_k$. Alors l'extension unique de φ_k à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ est

$$T \mapsto \langle T e_k, e_k \rangle = T_{kk}.$$

Preuve. 1. Si ψ est un état pur non vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors ψ est nul sur l'espace des opérateurs compacts (en particulier sur l'espace des opérateurs de rang fini). Ici,

$$p_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-ème}}, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$$

et ainsi on a $\varphi_k(p_k) = 1$. Donc une extension de φ_k à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ est un état vectoriel, disons

$$T \mapsto \langle T \xi, \xi \rangle, \quad \|\xi\| = 1.$$

2. À voir : $\xi = \lambda e_k$ avec $|\lambda| = 1$ (où e_k est p_k mais vu dans $\ell^2(\mathbb{N})$ (on le voit une fois comme matrice diagonale, et une fois comme suite)). Si $T = (a_n)_{n>0}$,

$$\langle T \xi, \xi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\xi_n|^2.$$

Mais $T \xi = \varphi_k(T) = a_k$. Ainsi,

$$\sum_{n \neq k} a_n |\xi_n|^2 + a_k (|\xi_k|^2 - 1) = 0 \quad \forall (a_n)_{n>0} \in \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

Donc $\xi_n = 0$ si $n \neq k$; $|\xi_k| = 1$ et donc $\xi = \lambda e_k$, $|\lambda| = 1$. □

Définition 1.21. L'application diagonale

$$\text{diag}: \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad T \mapsto (T_{nn})_{n>0}$$

Intuition : on a un tableau carré, et on garde seulement la diagonale.

Exemples 1.22. • $\text{diag}(\mathbb{1}) = (1, 1, \dots)$

• Si $T \geq 0$, $\text{diag}(T) = \left(\underbrace{\langle T e_n, e_n \rangle}_{\geq 0} \right)_{n>0}$.



Si φ est un état sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, alors $\varphi \circ \text{diag}$ est un état sur $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ . Ceci veut dire que pour étendre φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, on n'a pas besoin du théorème de Hahn-Banach. Grâce à cette observation, le problème de Kadison-Singer se reformule de la façon suivante.

Problème de KS : Si φ est un état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, alors $\varphi \circ \text{diag}$ est l'unique extension de φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Chapitre 2

De l'analyse fonctionnelle à l'algèbre linéaire

2.1 Conjecture de pavage

En 1979, le mathématicien américain Joel ANDERSON propose la conjecture de pavage

Conjecture 2.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ (ou $M_m(\mathbb{C})$) avec $\text{diag}(T) = 0$, il existe Q_1, \dots, Q_r des projecteurs diagonaux avec*

$$\sum_{i=1}^r Q_i = \mathbb{I}$$

et

$$\|Q_i T Q_i\| \leq \varepsilon \|T\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Pour rappel, un projecteur P est tel que

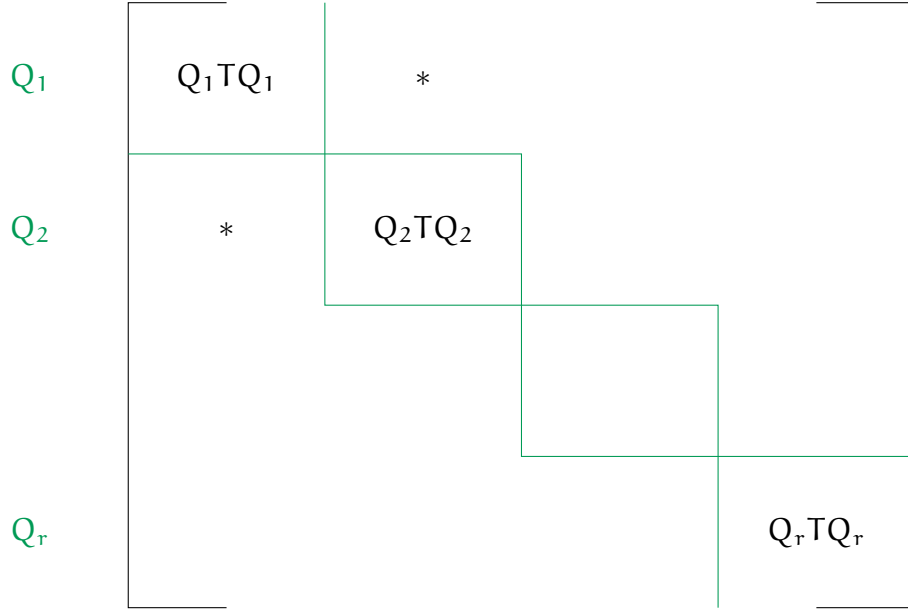
$$P = P^2 = P^*.$$

C'est donc une projection orthogonale sur un certain sous-espace fermé de \mathcal{H} . Un projecteur diagonal a pour coefficients $a_{ii} \in [0, 1]$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Il y a une bijection entre les projecteurs diagonaux et les parties de \mathbb{N} . Ainsi

$$\sum_{i=1}^r Q_i = \mathbb{I}$$

signifie qu'on partitionne \mathbb{N} en r parties. Les Q_1, \dots, Q_r donnent une décomposition de $\ell^2(\mathbb{N})$ en r blocs



La conjecture dit que la condition $\text{diag} T = 0$ implique que les blocs sont de norme petite.

Exemple 2.2. Soit $S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur de décalage unilatéral (« unilateral shift ») défini par $Se_n = e_{n+1}$ ou $S(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend la partition de $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} + 1)$. Soit Q_1 la projection sur $\ell^2(2\mathbb{N})$ et Q_2 la projection sur $\ell^2(2\mathbb{N} + 1)$. Alors

$$S = \begin{pmatrix} 0 = Q_1 S Q_1 & * \\ * & 0 = Q_2 S Q_2 \end{pmatrix}$$

L'opérateur S vérifie la conjecture de pavage (« tiling conjecture ») avec $\varepsilon = 0$ et $r = 2$. ★

Proposition 2.3. Si la conjecture de pavage est vraie, alors $\ell^\infty(\mathbb{N})$ a l'extension unique des états purs.

Preuve. Soit φ un état pur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, ψ une extension de φ à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. On veut montrer que

$$\psi = \varphi \circ \text{diag}.$$

C'est-à-dire, pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$,

$$\psi(T) = \varphi(\text{diag}(T)).$$

En remplaçant T par $T - \text{diag}(T)$, on obtient un opérateur de diagonale nulle. On doit donc montrer que si $\text{diag} T = 0$, alors $\psi(T) = 0$, qui est ce qu'on va démontrer.

On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\psi(T)| \leq \varepsilon \|T\|$. Par la conjecture de pavage, on trouve $r \in \mathbb{N}$ et des projecteurs diagonaux Q_1, \dots, Q_r tels que

$$\sum_{i=1}^r Q_i = \mathbb{1}$$

et

$$\|Q_i T Q_i\| < \varepsilon \|T\|.$$

On utilise à présent le fait que φ est un état pur : φ est multiplicatif sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire que $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$ si $S, T \in \ell^\infty(\mathbb{N})$). La raison est que $\ell^\infty(\mathbb{N}) = C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X car ℓ^∞ est une C^* -algèbre commutative à unité (c'est le théorème de GELFAND). Les états purs de $C(X)$ sont les évaluations aux points, elles sont multiplicatives (ici $X = \mathbb{BN}$ est le compactifié de STONE-ČECH de \mathbb{N} , c'est la plus grosse compactification de \mathbb{N}). Alors

$$\varphi(Q_i) = \varphi(Q_i^2) = \varphi(Q_i)^2 \implies \varphi(Q_i) \in \{0, 1\}.$$

De plus,

$$1 = \varphi(\mathbb{1}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^r Q_i\right) = \sum_{i=1}^r \varphi(Q_i).$$

Puisque $\varphi(Q_i) \in \{0, 1\}$ et qu'on écrit 1 comme somme d'éléments de $\{0, 1\}$, il existe un unique indice i_0 avec $\varphi(Q_{i_0}) = 1$ et $\varphi(Q_i) = 0$ si $i \neq i_0$.

Alors

$$\psi(T) = \psi\left(\left(\sum_{i=1}^r Q_i\right) T \left(\sum_{j=1}^r Q_j\right)\right) = \sum_{i,j=1}^r \psi(Q_i T Q_j).$$

Si on sait que dans ces r^2 termes, le seul terme non nul est $\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})$, alors

$$|\psi(T)| = |\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})| \leq \|Q_{i_0} T Q_{i_0}\| \leq \varepsilon \|T\|$$

comme on voulait, où la dernière inégalité suit de la conjecture de pavage, et la première du fait que ψ est un état pur, donc de norme 1 (note : à vérifier).

Par Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
|\psi(Q_i T Q_j)| &= |\psi((T^* Q_i)^* Q_j)| \\
&\leq \psi((T^* Q_i)^* (T^* Q_i))^{1/2} \underbrace{\psi(Q_j^* Q_j)}_{=Q_j}^{1/2} \\
&\quad \underbrace{\quad}_{\varphi(Q_j)} \\
&= 0 \text{ si } j \neq i_0.
\end{aligned}$$

De même,

$$|\psi(Q_i T Q_j)| = 0$$

si $i \neq i_0$ par un argument similaire. Le seul terme non nul restant est donc $\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})$, comme on le souhaitait. \square

2.2 Conjecture de Weaver (2004)

(Approche de Terry TAO, 2013)

Conjecture 2.4 (CONJECTURE DE WEAVER). *On fixe des entiers $d, m, r \geq 2$ et une constante $c > 0$. Soient $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$, $A_i \geq 0$, $\text{rang}(A_i) = 1$ avec $\|A_i\| \leq C$ pour tout $i = 1, \dots, d$ et*

$$\sum_{i=1}^d A_i = \mathbb{1}_m.$$

Alors il existe une partition $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ de $\{1, \dots, d\}$ telle que

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leq \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C} \right)^2$$

pour $j = 1, \dots, r$.

Pour cette conjecture, il faut penser à d et m grands, et puisque les matrices sont de rang 1 et qu'on veut avoir leur somme égale à $\mathbb{1}$, on a besoin d'au moins m telle matrices, i.e., $d \geq m$. De plus il faut penser à r petit (cas extrême, $r = 2$).

Si $A \geq 0$ et $\text{rang}(A) = 1$ alors A est un multiple positif d'un projecteur orthogonal de rang 1. C'est-à-dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^m$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $\lambda > 0$ tel que

$$A(v) = \lambda \langle v, \xi \rangle \xi.$$

Si les A_i ont des images 2 à 2 orthogonales (sans supposer que leur somme vaut $\mathbb{1}$

comme dans la conjecture), alors la somme se décompose par blocs,

$$\sum A_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \sum A_i \right\| = \max \|A_i\| \leq C.$$

Ainsi, ce que veut dire la conjecture, c'est que ces matrices sont *presque* orthogonales. En d'autres termes, on peut partitionner l'ensemble des indices de façon à ce que pour chaque classe de la partition, les A_i soient d'images *quasiment* orthogonales.

Proposition 2.5. *La conjecture de WEAVER implique la conjecture de pavage.*

Manque le cours du 14 mars

2.3 Matrices aléatoires

Référence classique : M.L. MEHTA, Random matrices, Academic Press 1991.

Définition 2.6. Une matrice aléatoire est un tableau carré

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

où les X_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs complexes.

Le polynôme caractéristique

$$p_X(z) := \det(z\mathbb{1}_n - X)$$

est un polynôme aléatoire et les valeurs propres sont des variables aléatoires au sens ordinaire.

Typiquement, la théorie s'intéresse au comportement des valeurs propres pour $n \rightarrow \infty$.

Exemple 2.7. Un modèle très simple : on choisit au hasard un nombre dans $\{1, \dots, n\}$ (avec probabilité $1/n$), si le résultat est i , on choisit le projecteur sur le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n . ★

Historique : Eugene WIGNER (1902 - 1995), physicien hongrois naturalisé américain, prix Nobel en physique en 1963 pour ses travaux sur théoriques sur la structure des noyaux atomiques. À la fin des années 1940, il propose l'hypothèse : pour modéliser un gros noyau d'uranium (par exemple U^{239}) au niveau quantique, il faut s'intéresser au spectre d'une grosse matrice aléatoire X , auto-adjointe (i.e. $\overline{X_{ij}} = X_{ji}$) où les X_{ij} sont des variables gaussiennes iid.

Théorèmes de MSS : voir photocopie.

Si A est une matrice, on définit l'espérance de A par

$$\mathbb{E}[A] = \sum_i p_i X_i$$

où les X_i sont les valeurs possibles de A . Pour une loi continue, on aurait $(X, \mathcal{B}, \mu) \xrightarrow{A} M_m(\mathbb{C})$, on a

$$\mathbb{E}[A] = \int_X A(\omega) d\mu(\omega) \in M_m(\mathbb{C}).$$

Preuve (PREUVE FAUSSE DU THÉORÈME 1, MAIS INSPIRANTE). On a

$$(\mathbb{E}[p_A])(z) = \mathbb{E}(\det(z\mathbb{1}_m - A)) = \det(z\mathbb{1}_m - \mathbb{E}[A]) = \det((z-1)\mathbb{1}_m) = (z-1)^m.$$

□

On a $\|A\|$ est la plus grande valeur propre de A (car $A \geq 0$) est aussi la plus grande racine de p_A . Le théorème 2 se reformule de la façon suivante.

Théorème 2.8. *Pour au moins une réalisation des A_i , la plus grande racine de p_A est inférieure à la plus grande racine de $\mathbb{E}[p_A]$.*

C'est une version non linéaire d'un principe de probabilité : si X est une variable aléatoire à valeurs réelles, alors pour au moins une réalisation, $X \leq \mathbb{E}[X]$.

Proposition 2.9. *Les théorèmes 1 et 2 de MSS impliquent la conjecture de WEAVER 2.4.*

Preuve. Soient $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ telles que

$$\sum_{i=1}^d A_i = \mathbb{1}_m,$$

et $A_i \geq 0$ de rang 1, avec $\|A_i\| \leq C$.

Pour $i = 1, \dots, d$, on définit une variable aléatoire \tilde{A}_i à valeurs dans $M_{mr}(\mathbb{C})$, on

écrit

$$\mathbb{C}^{mr} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^m \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^m.$$

On choisit $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ avec probabilité $\frac{1}{r}$ et on place rA_i dans le j -ème facteur, i.e. le bloc jj de la matrice \tilde{A}_i vaut rA_i , et les autres blocs valent 0. \tilde{A}_i est une variable aléatoire à valeurs dans les opérateurs positifs de rang 1 dans $M_{mr}(\mathbb{C})$. On pose

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^d \tilde{A}_i.$$

On veut appliquer les théorèmes 1 et 2 de MSS à \tilde{A} . Vérifions l'hypothèse du théo-

rème 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{A}] &= \sum_{i=1}^d \mathbb{E}[\tilde{A}_i] \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & rA_i & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & A_i & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^r \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \mathbb{1}_m & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbb{1}_m & & \\ & & & \mathbb{1}_m & \\ & & & & \mathbb{1}_m & \ddots & \\ & & & & & & \mathbb{1}_m \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1}_{mr}.
\end{aligned}$$

De plus, $\|\tilde{A}_i\| = r\|A_i\| \leq rC$. Par les théorèmes 1 et 2, pour au moins une réalisation des \tilde{A}_i , on a

$$\|\tilde{A}\| \leq \text{plus grande racine de } \mathbb{E}[\mathbf{p}_{\tilde{A}}] \leq (1 + \sqrt{rC})^2.$$

La partition $\{S_1, \dots, S_r\}$ de $\{1, 2, \dots, d\}$ est associée à cette réalisation,

$$S_j = \{i \in \{1, 2, \dots, d\} \cdot j \text{ a été choisi au } i\text{-ème essai}\}.$$

Alors

$$r \left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| = \left\| \sum_{i \in S_j} \tilde{A}_j \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^d \tilde{A}_i \right\| = \|\tilde{A}\| \leq (1 + \sqrt{rc})^2.$$

On divise par r , et on obtient

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leq \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C} \right)^2.$$

□

Chapitre 3

Preuves des théorèmes 1 et 2

3.1 Polynômes réels stables

Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ le demi-plan supérieur de \mathbb{C} .

Définition 3.1. Un polynôme en d variables $p(z_1, \dots, z_d)$ est réel stable si

- ses coefficients sont réels ;
- p n'admet aucun zéro dans \mathbb{H}^d .

Exemple 3.2. Pour $d = 1$, $p(z)$ est réel stable si et seulement si ses coefficients sont réels et tous les zéros de p sont réels. ★

Proposition 3.3. Soient $A_1, \dots, A_d \geq 0$ dans $M_m(\mathbb{C})$. Alors

$$q(z, z_1, \dots, z_d) := \det \left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i \right)$$

est réel stable.

Preuve. On a

$$q(\bar{z}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_d) = \overline{q(z, z_1, \dots, z_d)}$$

car $A_i = A_i^*$ (i.e. les matrices sont auto-adjointes), donc les coefficients de q sont réels.

Si $q(z, z_1, \dots, z_d) = 0$, alors $\det \left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i \right) = 0$. Ainsi la matrice $z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i$ n'est pas inversible, et donc le noyau n'est pas vide, i.e. il existe $v \in \mathbb{C}^m$ non nul avec $zv + \sum_{i=1}^d z_i A_i v = 0$. On fait le produit scalaire avec v ,

$$z \underbrace{\|v\|^2}_{>0} + \sum_{i=1}^d z_i \underbrace{\langle A_i v, v \rangle}_{\geq 0} = 0$$

Donc on ne peut pas avoir $\text{Im}z > 0$ et $\text{Im}z_i > 0$ pour tout i , donc q ne s'annule pas dans \mathbb{H}^{d+1} . \square

Une spécialisation de p est un polynôme en d variables obtenu en donnant une valeur fixe à une des variables.

Attention : si $p(z_1, z_2) = z_1(z_2 - 1)$, alors $p(z, 1) \equiv 0$.

Proposition 3.4. *Si $p(z_1, \dots, z_d)$ est réel stable, en spécialisant z_d en une valeur réelle t , on obtient un polynôme réel stable, ou le polynôme 0.*

Preuve. Soit $q(z_1, \dots, z_{d-1}) := p(z_1, \dots, z_{d-1}, t)$. Les coefficients de q sont réels. On écrit

$$q(z_1, \dots, z_{d-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(z_1, \dots, z_{d-1}, t + i/n)$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{C}^{d-1} . Le théorème de HURWITZ de l'analyse complexe s'applique. En effet, $p(z_1, \dots, z_{d-1}, t + i/n)$ est sans zéro dans \mathbb{H}^{d-1} . Donc la limite est sans zéro dans \mathbb{H}^{d-1} ou identiquement nul. \square

On note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ la dérivée partielle par rapport à z_i .

Proposition 3.5. *Si $p(z_1, \dots, z_d)$ est réel stable, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$(1 + t\partial_d)p = p + t\frac{\partial p}{\partial z_d}$$

est réel stable.

Preuve. Si $t = 0$, c'est bon. Supposons $t \neq 0$. On va procéder par l'absurde.

$$((1 + t\partial_d)p)(z_1, \dots, z_d) = 0 \text{ et } (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{H}^d.$$

Soit

$$q(z) := p(z_1, \dots, z_{d-1}, z).$$

Alors q n'a pas de zéro dans \mathbb{H} (sinon p ne serait pas réel stable). En particulier,

$$q(z_d) \neq 0.$$

Si $n = \deg q$, alors

$$q(z) = \prod_{i=1}^n (z - \omega_i) \tag{*}$$

où les ω_i sont les zéros complexes de q . Par ce qui précède, $\text{Im}\omega_i < 0$ pour tout i .

Alors,

$$0 = ((1 + t\partial_d)p)(z_1, \dots, z_d) = (q + tq')(z_d) = q(z_d) \left(1 + t \frac{q'(z_d)}{q(z_d)} \right)$$

où le terme $\frac{q'(z_d)}{q(z_d)}$ est la dérivée logarithmique de q en z_d . Ainsi on obtient

$$0 = 1 + t \frac{q'(z_d)}{q(z_d)}.$$

On prend à présent la dérivée logarithmique de $(*)$. Alors

$$\frac{q'(z_d)}{q(z_d)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_d - \omega_i}.$$

On déduit de ceci que (en évaluant en z_d)

$$0 = 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_d - \omega_i} = 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z_d} - \overline{\omega_i}}{|z_d - \omega_i|^2}.$$

On prend à présent les parties imaginaires :

$$0 = t \sum_{i=1}^n \frac{\text{Im}(\omega_i) - \text{Im}(z_d)}{|z_d - \omega_i|^2}$$

et $\text{Im}(\omega_i) < 0$ et $\text{Im}(z_d) > 0$, qui est une contradiction car $t \neq 0$ par hypothèse et la somme est strictement négative (donc non nulle). \square

Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, l'orthant $\{y \geq x\}$ est par définition

$$\{y \geq d\} := \{(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : y_i \geq x_i \ \forall i = 1, \dots, d\}$$

(on y pensera comme le quart de plan (en deux dimensions) où les coordonnées de y sont toutes plus grandes que celles de x , ou comme le huitième de plan en trois dimensions).

Pour une fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 , on note $\Phi_f^j = \frac{\partial_j f}{f}$ la dérivée logarithmique de f par rapport à la j -ème variable.

Lemme 3.6 (LEMME 3.7 DES NOTES). *Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $p(z_1, \dots, z_d)$ réel stable, sans zéro dans l'orthant $\{y \geq x\}$. Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel qu'il existe $\delta > 0$ (penser à δ grand) avec $\Phi_p^j(x_1, \dots, x_d) \leq 1 - \frac{1}{\delta}$. Alors $(1 - \partial_j)p$ n'a pas de zéro dans l'orthant $\{y \geq x + \delta e_j\}$, et de plus, pour tout $i = 1, \dots, d$,*

$$\Phi_{(1-\partial_j)p}^i(x + \delta e_j) \leq \Phi_p^i(x). \quad (3.1)$$

Proposition 3.7. Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $p(z_1, \dots, z_d)$ un polynôme réel stable sans zéro dans l'orthant $\{y \geq x\}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\Phi_p^j(x_1, \dots, x_d) \leq 1 - \frac{1}{\delta} \quad \forall j = 1, \dots, d,$$

alors le polynôme

$$\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i) p$$

est sans zéro dans $\{y \geq x + D\}$ où $D = (\delta, \delta, \dots, \delta)$.

Preuve. Pour $1 \leq k \leq d$, soit $x^{(k)} = (x_1 + \delta, x_2 + \delta, \dots, x_k + \delta, x_{k+1}, \dots, x_d)$ et

$$q_k = \prod_{i=1}^k (1 - \partial_i) p$$

qui est réel stable par la Proposition 3.5. Par récurrence à partir du Lemme 3.6, q_k n'a pas de zéro dans l'orthant $\{y \geq x^{(k)}\}$ et

$$\Phi_{q_k}^j(x^{(k)}) \leq 1 - \frac{1}{\delta}$$

pour $j = 1, \dots, d$. Pour $k = d$, on obtient la proposition. □

3.2 Polynômes caractéristiques mixtes

Rappel : pour $A \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique est

$$p_A(z) = \det(z\mathbb{1}_m - A).$$

Définition 3.8. Pour $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique mixte est

$$\mu[A_1, \dots, A_d](z) = \left(\prod_{j=1}^d (1 - \partial_j) \det \left(z\mathbb{1}_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i \right) \right) \Big|_{z_1=z_2=\dots=z_d=0}.$$

Remarque 3.9. Si $A_1, \dots, A_d \geq 0$, par les Propositions 3.3, 3.4 et 3.5, $\mu[A_1, \dots, A_d]$ est réel stable. ♣

Proposition 3.10. Si $\text{rang}(A_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, d$ avec $A = \sum_{i=1}^d A_i$, alors

$$p_A(z) = \mu[A_1, \dots, A_d](z).$$

Preuve. La preuve se fait en deux pas.

1. Pour tout $B \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme $(z_1, \dots, z_d) \mapsto \det\left(B + \sum_{i=1}^d z_i A_i\right)$ est affine-multilinéaire, c'est-à-dire un exposant ≥ 2 n'apparaît dans aucun terme. Ainsi chaque terme est de la forme

$$C z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \dots z_d^{\varepsilon_d}$$

avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Ou encore, en chaque variable, on a un polynôme de degré ≤ 1 .

Voyons-le pour $d = 1$ (puis récurrence facile). Le fait que $\text{rang}(A_1) = 1$ implique que $\dim \text{Im} A_1 = 1$. On prend une base de \mathbb{C}^m dont le premier vecteur est dans $\text{Im} A_1$. Dans cette base,

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En développant $\det(B + z_1 A_1)$ par rapport à la première ligne, on obtient un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 en z_1 (en effet, B n'introduit que des coefficients constants dans la matrice, les z_i étant seulement dans la première ligne, on a la conclusion).

2. Formule de Taylor à d variables. Un polynôme affine-multilinéaire est égal à son développement de Taylor d'ordre $(1, 1, \dots, 1)$. On a

$$\det\left(B + \sum_{i=1}^d t_i A_i\right) = \left(\prod_{i=1}^d (1 + t_i \partial_i) \det\left(B + \sum_{i=1}^d z_i A_i\right)\right) \Big|_{z_1=\dots=z_d=0}$$

pour tout $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$. On fait $t_1 = \dots = t_d = -1$, $B = z \mathbb{1}_m$ de sorte que

$$\det\left(z \mathbb{1}_m - \sum_{i=1}^d A_i\right) = p_A(z) = \mu[A_1, \dots, A_d](z).$$

□

Exemple 3.11. Soit $p(z_1, z_2) = a_{00} + a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{11}z_1z_2$. Alors

$$((1 + t_1 \partial_1)p)(z_1, z_2) = p(z_1, z_2) + t_1(a_{10} + a_{11}z_2),$$

$$((1 + t_2 \partial_2)(1 + t_1 \partial_1)p)(z_1, z_2) = p(z_1, z_2) + t_1(a_{10} + a_{11}z_2) + t_2(a_{01} + a_{11}z_1) + t_2 t_1 a_{11}.$$

En posant $z_1 = z_2 = 0$, alors on obtient donc dans le développement de Taylor

$$a_{00} + a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{11}z_1z_2.$$



Index

- C*-algèbre, 6
- *-sous-algèbre, 6
- état, 7
- état pur, 8
- état vectoriel, 7

- algèbre de Banach, 5
- application diagonale , 10
- axiomes de la mécanique quantique, 5

- conjecture de WEAVER, 15
- conjecture de pavage, 12

- dérivée logarithmique, 23

- espérance, 17
- espace des opérateurs linéaires bornés,
5

- matrice aléatoire, 16

- observables compatibles, 5
- opérateur de décalage unilatéral, 13
- opérateur de moment, 4
- opérateur de position, 4
- opérateur positif, 7
- orthant, 23

- point extrême, 8
- polynôme caractéristique, 16
- polynôme caractéristique mixte, 24
- polynôme réel stable, 21
- Problème de Kadison&Singer, 9, 11
- projecteur, 12
- projecteur diagonal, 12

- relation d'indétermination de Heisenberg,
5

- sous-algèbre, 6
- spécialisation de p , 22