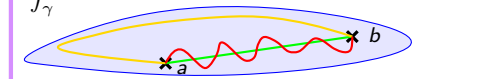


Quelconques : $\mathcal{F}(D, \mathbb{C})$

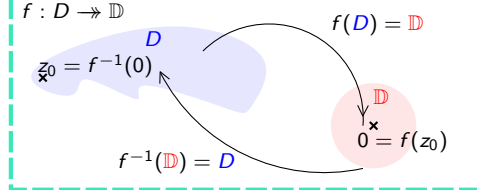
Continues : $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{C})$

- Intégration sur un contour :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$
- Intégrales des monômes sur le cercle unité :
$$\int_{\mathbb{U}} z^n dz = \begin{cases} i\tau, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$
- Indépendance de la paramétrisation : $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ représentent la même courbe (lisse), càd il existe $h : [c, d] \hookrightarrow [a, b]$ (bijective et lisse) telle que $\gamma(h(t)) = \beta(t)$, alors
$$\int_{\beta} f(z) dz = \int_c^d f(\beta(s)) \beta'(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$$
- Avec $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ une courbe lisse par morceaux :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$
- Estimation-ML :
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|,$$
en particulier si $|f(z)| < M$ sur γ :
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \text{longueur}(\gamma).$$
- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$
- $\text{longueur}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$
- Indépendance du chemin d'intégration. f continue sur D et possède une primitive sur D (càd $F'(z) = f(z), \forall z \in D$) :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \forall \gamma : [a, b] \rightarrow D$$


Injections $\mathcal{I}(D, \mathbb{C})$

Surjections $\mathcal{S}(D, E)$

Bijections $\mathcal{B}(D, E)$

Théorème de l'application conforme
Si $D \subset \mathbb{C}$ est non-vide, ouvert, simplement connexe et $D \neq \mathbb{C}$, alors il existe une fonction biholomorphe $f : D \rightarrow \mathbb{D}$ 

Biholomorphes
 f biholomorphe ssi f^{-1} holomorphe

Rotation-homothéties
 $z \mapsto az$

Rotations
 $z \mapsto e^{i\theta} z$

Homothéties
 $z \mapsto \rho z, \rho \geq 0$

Translations
 $z \mapsto z + a$

Inversion
 $z \mapsto z^{-1}$

Méromorphes : $\mathcal{M}(D, \mathbb{C})$
Dérivable $\forall z \in D$, sauf en des *points isolés*, donc il y en a au plus un infini dénombrable.

- algébriquement, $\mathcal{M}(D, \mathbb{C})$ avec D connexe est le *corps des fractions* de l'*anneau intègre* $\mathcal{H}(D, \mathbb{C})$ (càd sans diviseurs de zéro: $a \cdot b = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$).
- toute fonction méromorphe f peut s'écrire $f(z) = g(z)/h(z)$ (avec $h \neq 0$), chaque pôle de f doit coïncider avec un zéro de h .

Holomorphes : $\mathcal{H}(D, \mathbb{C})$

- Dérivable partout sur D .
- Condition suffisante (et nécessaire) de dérivabilité (et donc d'holomorphité) de $f = u + iv$:
 - $u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont des dérivées partielles continues, et
 - elles satisfont les équations de Cauchy-Riemann :
$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_y u &= -\partial_x v. \end{aligned}$$
- Holomorphe \Leftrightarrow infiniment dérivable.
- Holomorphe \Leftrightarrow analytique, donc développable en *série de Taylor*.
- Avec $\bar{\partial} f = 0 : \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, et
$$f'(z) = \partial_x f = -i\partial_y f = \partial_{\bar{y}} f.$$
- $f = u + iv$ holomorphe, alors u, v harmoniques :
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \Delta v &= 0, \end{aligned}$$
et harmoniques conjuguées :
$$\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v = 0.$$

Entières
Holomorphes sur tout $\mathbb{C} : \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

Transformations conformes
 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ trans. conf. ssi $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$

- Préserve localement les angles.
- Si f est anti-holomorphe, alors f conserve les angles mais inverse leur orientation.

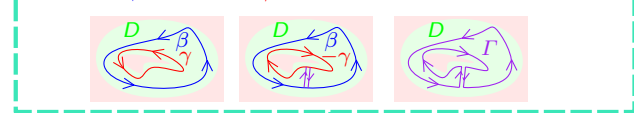
Transformations de Möbius $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

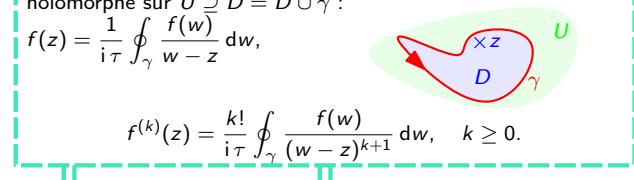
- $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ (surjective) ssi $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.
- f transforme les droites et cercles en droites ou cercles.
- $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts, $\exists ! f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ telle que $f(a) = 0, f(b) = 1, f(c) = \infty$, donnée par
$$f(z) = \frac{z - a}{z - c} \frac{b - c}{b - a}.$$
- La réciproque f^{-1} est :
$$f^{-1}(w) = \frac{b - dw}{cw - a}.$$
- f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ et f^{-1} est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, donc f et f^{-1} sont biholomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{-d/c, a/c\}$.
- L'ensemble de toutes les TdM forme le *groupe de Möbius* $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.
- Toute TdM peut se décomposer selon ces trois transformations élémentaires :
 - rotation-homothétie : $z \mapsto az,$
 - translation : $z \mapsto z + b,$
 - inversion : $z \mapsto z^{-1}.$
- $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts et $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts, $\exists ! f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ telle que $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2, f(z_3) = w_3$, donnée par $f = h^{-1} \circ g$ avec
$$\begin{aligned} g(z_1) &= 0 = h(w_1), \\ g(z_2) &= 1 = h(w_2), \\ g(z_3) &= \infty = h(w_3). \end{aligned}$$

Théorème des résidus
Soient $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe (D simplement connexe) sauf en les *singularités isolées* z_1, \dots, z_n , et γ une courbe simple fermée (orientée trigonométriquement) dans D ; alors
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = i\tau \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

- Soit $f : A_{0,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec une *singularité isolée* en z_0 , alors elle possède une série de Laurent, et son résidu en z_0 est $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$ (le coefficient du terme $1/(z - z_0)$). Si on intègre f sur un contour $\gamma \in A_{0,R}(z_0)$:
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = i\tau a_{-1}.$$
- Calcul d'un résidu à un pôle simple (càd $a_{-1} \neq 0$ et $a_k = 0$ pour $k < -1$) :
$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$
- Calcul d'un résidu à un pôle simple d'ordre n (càd $a_{-n} \neq 0$ et $a_{-k} = 0$ pour $k < -n$) :
$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)).$$
- Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec g et h holomorphes au voisinage de z_0 , et h possède un pôle simple en z_0 , alors $\text{Res}(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$.

Théorème intégral de Cauchy
 D simplement connexe, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un lacet LPM :
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Corollaire (intégral de Cauchy)
Soient β et γ deux lacets simples (ne s'intersectant pas) trigo-orientés, γ à l'intérieur de β . Si f est holomorphe sur D et que D contient γ, β et la région entre les deux, alors
$$\int_{\beta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz, \text{ car } \int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$


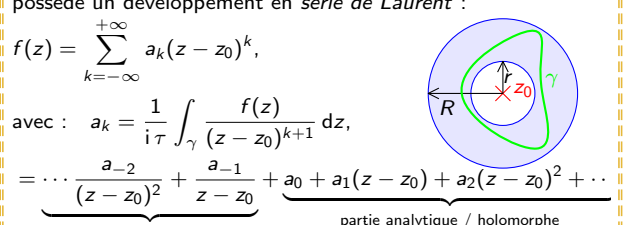
Formule intégrale de Cauchy
Soient D simplement connexe entouré par γ LPM et f holomorphe sur $U \supset \hat{D} = D \cup \gamma$:
$$f(z) = \frac{1}{i\tau} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$


Théorème de l'estimation de Cauchy
Soient f holomorphe sur un ouvert contenant $\widehat{B_r(z_0)}$, et une constante m telle que $|f(z)| \leq m$ pour tout $z \in \partial B_r(z_0)$, alors :
$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k! m}{r^k}.$$

Théorème Liouville
Si f est entière et bornée ($\exists m : |f(z)| \leq m$), alors f est constante.
Soit $f = u + iv$ entière avec $u(z) \leq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors (en considérant $g(z) = \exp(f(z))$ qui est entière aussi) f est constante.

Théorème du principe du maximum
Soient f holomorphe sur D et $z_0 \in D$ tel que $f(z) \leq f(z_0)$ pour tout $z \in D$, alors f est constante sur D .
Soient $D \subset \mathbb{C}$ borné, et f continue sur \hat{D} et holomorphe sur D , alors $|f|$ atteint son maximum sur ∂D .

Théorème fondamental de l'algèbre
Tout polynôme $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ (avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \geq 1$ et $a_n \neq 0$) possède un zéro sur \mathbb{C} , càd $\exists w : p(w) = 0$.

Séries de Laurent et singularités
 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec $A_{r,R}(z_0) = \{r < |z - z_0| < R\}$ possède un développement en *série de Laurent* :
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$
avec : $a_k = \frac{1}{i\tau} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$ 
$$= \underbrace{\dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0}}_{\text{partie principale}} + \underbrace{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots}_{\text{partie analytique / holomorphe}}$$
et avec $\gamma \in A_{r,R}(z_0)$, converge partout dans $A_{r,R}(z_0)$, et converge absolument et uniformément sur chaque sous-couronne $A_{s,S}(z_0)$ avec $r < s < S < R$.

- z_0 est une *singularité isolée* de f si f est holomorphe sur un disque pointé $A_{0,r}(z_0) = \{0 < |z - z_0| < r\}$ centré en z_0 .
- Si f possède une *singularité isolée* en z_0 , alors elle y possède une *série de Laurent*.
- Une *singularité isolée* est :
 - effaçable (apparente)* ssi $a_k = 0$ pour tout $k < 0$ (càd la série de Laurent ne possède pas de partie principale).
 - un *pôle* ss'il existe $n > 0$ tel que $a_{-n} \neq 0$ et $a_k = 0$ pour tout $k < -n$ (càd la partie principale est finie).
 - essentielle* ssi $a_k \neq 0$ pour une infinité de $k < 0$ (càd la partie principale est infinie).
- Théorème de Riemann** z_0 une *singularité isolée* de f est *effaçable* ssi f est bornée au voisinage de z_0 .
- z_0 une *singularité isolée* de f est un *pôle* (si et ?) seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.
- Si f possède un pôle en z_0 , alors $1/f(z)$ possède une singularité apparente en z_0 ; et vice-versa.
- Théorème de Casorati-Weierstraß** Si f possède une *singularité essentielle* en z_0 , alors $\forall W \in \mathbb{C}$ il existe une suite $\{z_k\}_k$ avec $z_k \rightarrow z_0$ telle que $f(z_k) \rightarrow W$ quand $z_k \rightarrow z_0$.
- Théorème de Picard** Si f possède une *singularité essentielle* en z_0 , alors pour tout $W \in \mathbb{C}$ avec au plus une exception, il existe une suite $\{z_k\}_k$ avec $z_k \rightarrow z_0$ telle que $f(z_k) = W$.

Dérivabilité
 f dérivable en z_0 ssi $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, i.e.:

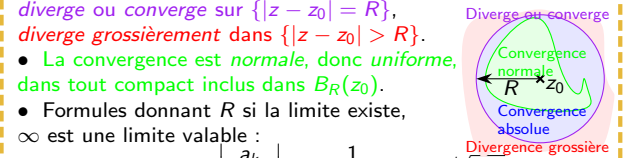
- la limite est finie;
- la limite est la même quelque soit le chemin emprunté par z pour tendre vers z_0 , pex si z suit les axes réels / imaginaire, alors :
$$\partial_x f = \partial_{\bar{y}} f = -i \partial_y f = f'(z),$$
d'où les équations de Cauchy-Riemann.

Déterminations locales et globales
Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, alors $f(z)$ est entièrement déterminée par

- la valeur de toutes ses dérivées en $z_0 \in D$ via sa *série de Taylor* (car f est analytique sur D) dans le disque $B_r(z_0) \subseteq D$:
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{avec} : \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$
- ses valeurs sur un lacet autour de $z_0 \in D$ via la *formule intégrale de Cauchy* :
$$f(z) = \frac{1}{i\tau} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Rayon de convergence
Il existe $0 \leq R \leq \infty$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *converge absolument* dans $B_R(z_0) = \{|z - z_0| < R\}$, *diverge* ou *converge* sur $\{|z - z_0| = R\}$, *diverge grossièrement* dans $\{|z - z_0| > R\}$.

- La convergence est *normale*, donc *uniforme*, dans tout compact inclus dans $B_R(z_0)$.
- Formules donnant R si la limite existe, ∞ est une limite valable :
$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$
- Cauchy-Hadamard : $\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$
- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe possède une série de Taylor telle que :
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \forall z \in B_r(z_0) \subseteq D,$$
dont le rayon de convergence est $R \geq r$.
- Si f et g holomorphes sur $B_r(z_0)$, et si $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ pour tout $k \geq 0$, alors $f(z) = g(z)$ partout sur $B_r(z_0)$.



Nomenclature

- $\tau = 2\pi$: rapport de la circonférence du cercle à son rayon
- $D, E \subseteq \mathbb{C}$: un ouvert du plan complexe
- $z, w \in D, \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$: variables complexes
- $a, b, c, d, z_0, w_0 \in D$: constantes complexes
- $x, y \in \mathbb{R}$: parties réelle et imaginaire : $z = x + iy$
- $f, g, h \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$: fonctions complexes d'une variable complexe
- $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: parties réelle et imaginaire : $f = u + iv$
- $\mathbb{U} = \{|z| = 1\}$: nombres complexes unitaires (cercle unité)
- $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$: disque ouvert unité
- $B_R(z_0) = \{|z - z_0| < R\}$: disque (boule) ouvert de rayon R centré en z_0
- $A_{r,R}(z_0) = \{r < |z - z_0| < R\}$: couronne centrée en z_0 de rayons $r < R$
- $I \subseteq \mathbb{R}$: un intervalle quelconque de \mathbb{R}
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$: une courbe (ouverte, càd $\gamma(a) \neq \gamma(b)$) ou un lacet (càd $\gamma(a) = \gamma(b)$) rectifiable (càd de longueur finie)
- $k \in \mathbb{Z}$: variable entière (indice de sommes)
- $n \in \mathbb{N}$: constante entière positive
- LPM : lisse par morceaux
- ∂D : frontière de D
- \hat{D} : intérieur de D : l'ensemble des *points intérieur* de D
- $\bar{D} = D \cup \partial D$: adhérence (cloture) de D

Formulaire

- Forme cartésienne : $z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$
- Forme polaire : $z = \rho e^{i\theta}$
- La *conjugaison* : $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$ est un automorphisme involutif de corps, donc : $\overline{a \cdot b + c} = \bar{a} \bar{b} + \bar{c}$, et aussi :
$$z \bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$
- Module: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, |zw| = |z| |w|, \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$
- Argument : $\arg z = \{\text{Arg}(z) + k\tau, k \in \mathbb{Z}\}$, avec Arg l'*argument principal* :
$$\text{Arg}(z) = 2 \arctan \frac{\Im(z)}{|z| + \Re(z)}.$$
 - $\arg zw = \arg z + \arg w,$
 - $\arg z^k = k \arg z, \forall k \in \mathbb{Z}.$
- Polaire vers cartésien :
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$
- Cartésien vers polaire :
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = 2 \arctan \frac{y}{\rho + x} \end{cases}$$

Topologie dans le plan (complexe)

- $z \in D$ est *intérieur* ssi $\exists r > 0 : B_r(z) \subseteq D$.
- z est un *point frontière* de D ssi tout disque autour de z contient un point en D et un point hors D . On note ∂D l'ensemble des points frontière de D .
- D est *ouvert* ssi tout $z \in D$ est *intérieur*.
- D est *fermé* ssi il contient toute sa *frontière*.
- L'*adhérence* (fermeture) de D est $\bar{D} = D \cup \partial D$, \bar{D} est aussi le plus petit fermé qui contient D .
- L'*intérieur* de D , noté \hat{D} , est l'ensemble des points intérieur de D .
- Deux ensembles $X, Y \subset \mathbb{C}$ sont *séparés* s'il existe deux ouverts disjoints $U, V \in \mathbb{C}$ tels que $X \subset U$ et $Y \subset V$.
- Un ensemble $W \in \mathbb{C}$ est *connexe* s'il est impossible de trouver deux ensembles séparés non-vides dont l'union est égale à W .
- Un ouvert $G \subset \mathbb{C}$ est *connexe* si et seulement si tout couple de points dans G peuvent être joints par une succession de segments.
- $A \subset \mathbb{C}$ est *borné* s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_R(0)$.

Séries
$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = w_0 + w_1 + \dots + w_k + \dots, \quad w_k \in \mathbb{C}$$

- converge vers S ssi la suite de ses sommes partielles $\{S_n\}_n$ converge vers S :
$$S_n = \sum_{k=0}^n w_k = w_0 + w_1 + \dots + w_n.$$
- $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ converge ssi $|z| < 1$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$
- $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ converge *absolument* ssi $\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|$ converge.
- Si $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ converge absolument, alors elle converge et $|\sum_{k=0}^{\infty} w_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |w_k|.$
- Série de Taylor* centrée en $z_0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$