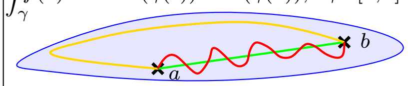
Dérivable ssi $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe.

Quelconques : $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$

Continues : $\mathcal{C}^0(D,\mathbb{C})$

- Intégration sur un contour : $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$
- Intégrales des monones sur le cercle unité : $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \mathrm{i}\,\tau, & n=-1, \\ 0, & n\neq -1. \end{cases}$
- Indépendance de la paramétrisation : $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ et $\beta : [c,d]\to\mathbb{C}$ représentent la même courbe (lisse), càd il existe $h : [c,d] \hookrightarrow [a,b]$ (bijective et lisse) telle que $\gamma(h(t)) = \beta(t)$, alors $\int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = \int_c^d f(\beta(s))\,\beta'(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$
- Avec $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ une courbe lisse par morceaux : $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$
- Estimation-ML : $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z|.$
En particulier si $|f(z)| < M$ sur γ : $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le M \cdot \text{longueur}(\gamma).$
- Résultats divers :
  - $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$
  - $\text{longueur}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$
- Indépendance du chemin d'intégration. f continue sur D et possède une primitive sur D (càd $F'(z) = f(z), \forall z\in D$) : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \forall\gamma : [a,b]\to D$



Surjections $\mathcal{S}(D,E)$

Injections $\mathcal{I}(D,\mathbb{C})$

Bijections $\mathcal{B}(D,E)$

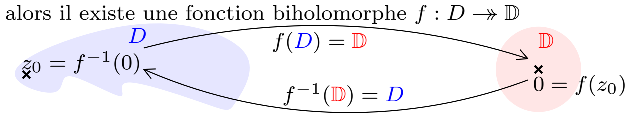
Biholomorphes ssi réciproque holomorphe.

Topologie dans le plan (complexe)

- $z\in D$ est *intérieur* ssi $\exists r>0 : B_r(z)\subseteq D$.
- z est un *point frontière* de D ssi tout disque autour de z contient un point en D et un point hors D. On note ∂D l'ensemble des points frontière de D.
- D est *ouvert* ssi tout $z\in D$ est *interérieur*.
- D est *fermé* ssi il contient toute sa *frontière*.
- L'*adhérence* (fermeture) de D est $\widehat{D} = D\cup\partial D$, $\widehat{D}$ est aussi le plus petit fermé qui contient D.
- L'*intérieur* de D, noté $\mathring{D}$, est l'ensemble des points intérieur de D.
- Deux ensembles $X, Y\subset\mathbb{C}$ sont *séparés* s'il existe deux ouverts disjoints $U, V\in\mathbb{C}$ tels que $X\subset Y$ et $Y\subset V$.
- Un ensemble $W\in\mathbb{C}$ est *connexe* s'il est impossible de trouver deux ensembles séparés non-vides dont l'union est égale à W.
- Un ouvert $G\subset\mathbb{C}$ est *connexe* si et seulement si tout couple de points dans G peuvent être joints par une succession de segments.
- $A\subset\mathbb{C}$ est *borné* s'il existe $R>0$ tel que $A\subset B_R(0)$.

Théorème de l'application conforme

Si $D\subset\mathbb{C}$ est non-vide, ouvert, simplement connexe et $D\neq\mathbb{C}$, alors il existe une fonction biholomorphe $f : D \twoheadrightarrow \mathbb{D}$



Méromorphes : $\mathcal{M}(D,\mathbb{C})$

Dérivable $\forall z\in D$, sauf en des points isolés, donc il y en a au plus un infini dénombrable.

Holomorphes : $\mathcal{H}(D,\mathbb{C})$

- Dérivable partout sur D.
- Condition suffisante (et nécessaire) de dérivabilité (et donc d'holomorphité) de $f = u + \mathrm{i}\,v$:
  - $u(x,y)$ et $v(x,y)$ ont des dérivées partielles continues, et
  - elles satisfont les équations de Cauchy–Riemann :
$$\partial_x u = \partial_y v,$$
$$\partial_y u = -\partial_x v.$$
- Holomorphe $\Leftrightarrow$ infiniment dérivable.
- Holomorphe $\Leftrightarrow$ analytique, donc développable en *série de Taylor*.
- Avec $\overline{\partial} f = 0$: $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\,\partial_y)$, et
$$f'(z) = \partial_x f = -\mathrm{i}\,\partial_y f = \partial_{\mathrm{i}\,y} f.$$
- $f = u + \mathrm{i}\,v$ holomorphe, alors u, v harmoniques :
$$\triangle u = 0, \quad \triangle v = 0,$$
et harmoniques conjuguées :
$$\partial_x u\,\partial_x v + \partial_y u\,\partial_y v = 0.$$

Entière holomorphes sur tout $\mathbb{C}$: $\mathcal{H}(\mathbb{C},\mathbb{C})$

Transformations conformes, ssi $f'(z)\neq 0, \quad \forall z\in D$

- Préserve localement les angles.
- Si f est anti-holomorphe, alors f conserve les angles mais inverse leur orientation.

Transformations de Möbius $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$

$$f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}, \quad a\,d - b\,c \neq 0$$

- $f : \widehat{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ (surjective) ssi $f\in\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.
- f transforme les droites et cercles en droites ou cercles.
- $a, b, c\in\widehat{\mathbb{C}}$ distincts, $\exists! f\in\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ telle que $f(a) = 0, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = \infty$, donnée par $f(z) = \dfrac{z-a}{z-c}\,\dfrac{b-c}{b-a}$.
- La réciproque f^{-1} est :
$$f^{-1}(w) = \frac{b - d\,w}{c\,w - a}.$$
- f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$ et f^{-1} est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{a/c\}$, donc f et f^{-1} sont biholomorphes sur $\mathbb{C}\setminus\{-d/c, a/c\}$.
- L'ensemble de toutes les TdM forme le *groupe de Möbius* $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.
- Toute TdM peut se décomposer selon ces trois transformations élémentaires :
  — rotation-homothétie : $z\mapsto a\,z$,
  — translation : $z\mapsto z+b$,
  — inversion : $z\mapsto z^{-1}$.
- $z_1, z_2, z_3\in\widehat{\mathbb{C}}$ distincts et $w_1, w_2, w_3\in\widehat{\mathbb{C}}$ distincts, $\exists! f\in\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ telle que $f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3$, donnée par $f = h^{-1}\circ g$ avec
$g(z_1) = 0 = h(w_1)$,
$g(z_2) = 1 = h(w_2)$,
$g(z_3) = \infty = h(w_3)$.

Rotation-homothétie $z\mapsto a\,z$

Translations $z\mapsto z+a$

Inversion $z\mapsto z^{-1}$

Formulaire

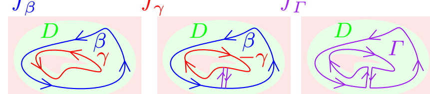
- Forme cartésienne : $z = x + \mathrm{i}\,y = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$
- Forme polaire : $z = \rho e^{\mathrm{i}\,\theta}$
- La *conjugaison* : $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y = \rho e^{-\mathrm{i}\,\theta}$ est un automorphisme involutif de corps, donc : $\overline{a\,b+c} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{c}$, et aussi :
$$z\,\overline{z} = |z|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
- Module : $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$, et :
  - $|z\,w| = |z|\,|w|$,
  - $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.
- Argument : $\arg z = \{\mathrm{Arg}\,(z) + k\,\tau, k\in\mathbb{Z}\}$, avec Arg l'*argument principal* :
$$\mathrm{Arg}\,(z) = 2\arctan\frac{\Im(z)}{|z| + \Re(z)}.$$
  - $\arg z\,w = \arg z + \arg w$,
  - $\arg z^k = k\arg z, \ \forall k\in\mathbb{Z}$.
- Polaire vers cartésien : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$
- Cartésien vers polaire : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2\arctan\dfrac{y}{\rho + x} \end{cases}$

Théorème intégral de Cauchy

D simplement connexe, $f : D\to\mathbb{C}$ holomorphe et $\gamma : [a,b]\to D$ un lacet LPM :
$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

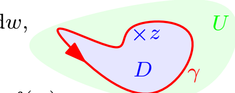
Corollaire

Soient β et γ deux lacets simples (ne s'intersectant pas) trigo-orientés, γ à l'intérieur de β.
Si f est holomorphe sur D et que D contient γ, β et la région entre les deux, alors
$$\int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z, \text{car} \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



Formule intégrale de Cauchy

Soient D simplement connexe contouré par γ LPM et f holomorphe sur $U\supseteq\widehat{D} = D\cup\gamma$:
$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}\,\tau}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w,$$



$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{\mathrm{i}\,\tau}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w, \quad k\geq 0.$$

Théorème de l'estimation de Cauchy

Soient f holomorphe sur un ouvert contenant $\widehat{B_r(z_0)}$, et une constante m telle que $|f(z)|\le m$ pour tout $z\in\partial B_r(z_0)$, alors :
$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| \le \frac{k!\,m}{r^k}.$$

Théorème Liouville

Si f est entière et bornée ($\exists m : |f(z)|\le m$), alors f est constante.

Soit $f = u + \mathrm{i}\,v$ entière avec $u(z)\le 0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, alors (en considérant $g(z) = \exp(f(z))$ qui est entière aussi) f est constante.

Théorème du principe du maximum

Soient f holomorphe sur D et $z_0\in D$ tel que $f(z)\le f(z_0)$ pour tout $z\in D$, alors f est constante sur D.

Soient $D\subset\mathbb{C}$ borné, et f continue sur $\widehat{D}$ et holomorphe sur D, alors $|f|$ atteint son maximum sur ∂D.

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynome $p(z) = a_0 + a_1\,z + \cdots + a_n\,z^n$ (avec $a_0, \ldots, a_n\in\mathbb{C}$, $n\geq 1$ et $a_n\neq 0$) possède un zéro sur $\mathbb{C}$, càd $\exists w : p(w) = 0$.

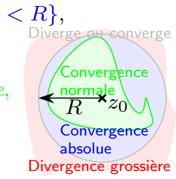
Séries $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} w_k = w_0 + w_1 + \cdots + w_k + \cdots, \quad w_k\in\mathbb{C}$

- converge vers S ssi la suite de ses sommes partielles $\{S_n\}_n$ converge vers S :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 + w_1 + \cdots + w_n.$$
- $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ converge ssi $|z| < 1$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$
- $\sum_{k=0}^\infty w_k$ *converge absolument* ssi $\sum_{k=0}^\infty |w_k|$ converge.
- Si $\sum_{k=0}^\infty w_k$ converge absolument, alors elle converge et $\left|\sum_{k=0}^\infty w_k\right| \le \sum_{k=0}^\infty |w_k|$.
- *Série de Taylor* centrée en z_0 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.

Rayon de convergence

Il existe $0\le R\le\infty$ tel que $\sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k$ *converge absolument* dans $B_R(z_0) = \{|z-z_0| < R\}$, *diverge grossièrement* dans $\{|z-z_0| > R\}$, *diverge* ou *converge* sur $\{|z-z_0| = R\}$.

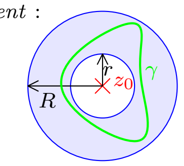
- La convergence est *normale*, donc *uniforme*, dans tout compact inclus dans $B_R(z_0)$.



- Formules donnant R si la limite existe, ∞ est une limite valable :
$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}.$$
Cauchy–Hadamard : $\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \le \limsup\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$
- $f : D\to\mathbb{C}$ holomorphe possède une série de Taylor telle que :
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \forall z\in B_r(z_0)\subseteq D,$$
dont le rayon de convergence est $R\geq r$.
- Si f et g holomorphes sur $B_r(z_0)$, et si $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ pour tout $k\geq 0$, alors $f(z) = g(z)$ partout sur $B_r(z_0)$.

Séries de Laurent

$f : D\to\mathbb{C}$ holomorphe avec $A_{r,R}(z_0) = \{r < |z-z_0| < R\}$ possède un développement en *série de Laurent* :
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k,$$
avec : $\displaystyle a_k = \frac{1}{\mathrm{i}\,\tau}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z,$



$$= \underbrace{\cdots\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{partie principale}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots}_{\text{partie analytique / holomorphe}}$$

et avec $\gamma\in A_{r,R}(z_0)$, converge partout dans $A_{r,R}(z_0)$, et converge absolument et uniformément sur chaque sous-couronne $A_{s,S}(z_0)$ avec $r < s < S < R$.

- z_0 est une *singularité isolée* de f si f est holomorphe sur un disque pointé $A_{0,r}(z_0) = \{0 < |z-z_0| < r\}$ centré en z_0.
- Si f possède une *singularité isolée* en z_0, alors elle y possède une *série de Laurent*.
- Une *singularité isolée* est :
  - *effaçable* (*apparente*) ssi $a_k = 0$ pour tout $k < 0$ (càd la série de Laurent ne possède pas de partie principale).
  - un *pôle* ss'il existe $n > 0$ tel que $a_{-n}\neq 0$ et $a_k = 0$ pour tout $k < -n$ (càd la partie principale est finie).
  - *essentielle* ssi $a_k\neq 0$ pour une infinité de $k < 0$ (càd la partie principale est infinie).
- (Théorème de Riemann) z_0 une *singularité isolée* de f est *effaçable* ssi f est bornée au voisinage de z_0.
- z_0 une *singularité isolée* de f est un *pôle* (si et ?) seulement si $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$.
- Si f possède un pôle en z_0, alors $1/f(z)$ possède une singularité apparente en z_0 ; et vice-versa.
- (Théorème de Casorati–Weierstraß) Si f possède une *singularité essentielle* en Z, alors $\forall W\in\mathbb{C}$ il existe une suite $\{z_k\}_k$ avec $z_k\to Z$ telle que $f(z_k)\to W$ quand $z_k\to Z$.
- (Théorème de Picard) Si f possède une *singularité essentielle* en Z, alors pour tout $W\in\mathbb{C}$ avec au plus une exception, il existe une suite $\{z_k\}_k$ avec $z_k\to Z$ telle que $f(z_k) = W$.

Nomenclature

$\tau = 2\,\pi$: Rapport de la circonférence du cercle à son rayon
$D, E\subseteq\mathbb{C}$: Un ouvert du plan complexe
$z, w\in D, \mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}}$: Variables complexes
$a, b, c, d, z_0, w_0\in D$: Constantes complexes
$x, y\in\mathbb{R}$: Parties réelle et imaginaire : $z = x + \mathrm{i}\,y$
$f, g, h\in\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$: Fonctions complexes d'une variable complexe
$u, v\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: Parties réelle et imaginaire : $f = u + \mathrm{i}\,v$
$\mathbb{U} = \{|z| = 1\}$: Nombres complexes unitaires (cercle unité)
$\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$: Disque ouvert unité
$B_R(z_0) = \{|z-z_0| < R\}$: Disque (boule) ouvert de rayon R centré en z_0
$A_{r,R}(z_0) = \{r < |z-z_0| < R\}$: Couronne centrée en z_0 de rayons $r < R$
$I\subseteq\mathbb{R}$: Un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$
$\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$: Une courbe (ouverte, càd $\gamma(a)\neq\gamma(b)$) ou un lacet (càd $\gamma(a) = \gamma(b)$) rectifiable (càd de longueur finie)
$k\in\mathbb{Z}$: Variable entière (indice de sommes)
$n\in\mathbb{N}$: Constante entière positive
LPM : Lisse Par Morceaux
∂D : Frontière de D
$\mathring{D}$: Intérieur de D : l'ensemble des *points intérieur* de D
$\widehat{D} = D\cup\partial D$: Adhérence (cloture) de D

Théorème des résidus

Soit $f : A_{0,R}(z_0)$ holomorphe avec une *singularité isolée* en z_0, alors elle possède une série de Laurent, et si on l'intègre sur un contour $\gamma\in A_{0,R}(z_0)$:
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\int_\gamma (z-z_0)^k\,\mathrm{d}z$$
$$= a_{-1}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$$
$$= \mathrm{i}\,\tau\,a_{-1}$$

Remarque Soit $f : D\to\mathbb{C}$ holomorphe, alors $f(z)$ est entièrement déterminée par

- la valeur de toutes ses dérivées en $z_0\in D$ via sa *série de Taylor* (car f est analytique sur D) dans le disque $B_r(z_0)\subseteq D$:
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad\text{avec :}\quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$
- ses valeurs sur un lacet autour de $z_0\in D$ via la *formule intégrale de Cauchy* :
$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}\,\tau}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

https://github.com/LaurentValade/taxonomie-analyse-complexe