ACT 2002
Méthodes numériques en actuariat

Partie IV
Algèbre linéaire

UNIVERSITÉ LAVAL

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

ACT 2002
Méthodes numériques en actuariat

Partie IV
Algèbre linéaire

Vincent Goulet
Professeur titulaire | École d'actuariat | Université Laval

Notes de cours | Exercices — édition 2013

Code source
Le code source LaTeX de ce document est disponible à l'adresse `https://svn.fsg.ulaval.ca/svn-pub/vgoulet/documents/methodes_numeriques/` ou en communiquant directement avec l'auteur.

Couverture
Le reptile en couverture est un caméléon tapis (*Furcifer lateralis*) originaire de Madagascar. Adulte, sa taille atteint les 25 cm, queue comprise.

Crédit photo : Michabln Schwarz ; `http://fc-foto.de/2077174`

Introduction

L'algèbre linéaire a le chic de surgir là où on ne l'attend pas nécessairement. On croit qu'en étudiant l'actuariat les notions de vecteurs et de matrices nous demeurerons étrangères. Et pourtant.

Les matrices et leur algèbre permettent de représenter, de traiter et de résoudre efficacement de grands systèmes d'équations linéaires ou d'équations différentielles. La notion d'erreur quadratique moyenne s'apparente à la projection d'un vecteur dans un espace vectoriel. Les notions d'indépendance stochastique et d'orthogonalité de vecteurs sont liées. On décrit le comportement d'une chaîne de Markov à l'aide d'une matrice de transition. Une classe de lois de probabilités requiert de calculer l'exponentielle d'une matrice. Ce ne sont là que quelques exemples où l'algèbre linéaire joue un rôle en théorie des probabilités, en inférence statistique, en finance ou en théorie du risque.

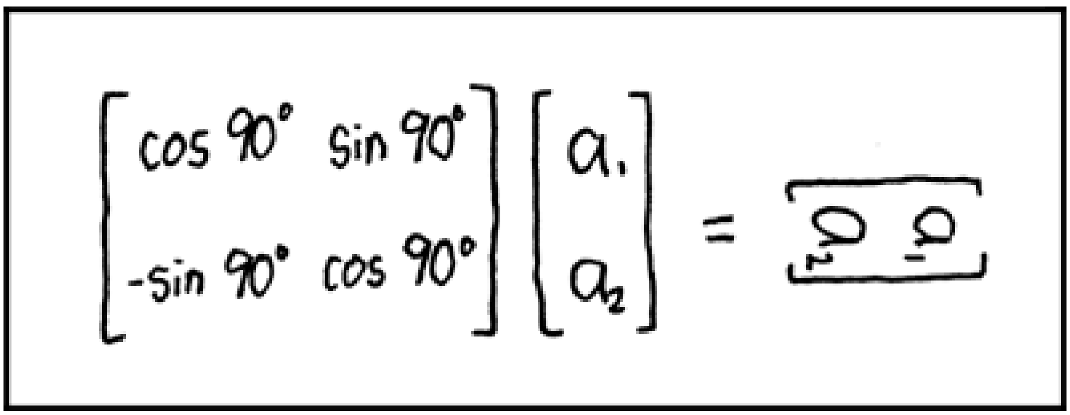
Le chapitre 13 revient sur les principales notions d'algèbre linéaire normalement étudiées au collège et qu'il est important de maîtriser dans ses études de premier cycle universitaire. Nous nous concentrons sur l'établissement de liens entre des éléments qui peuvent au premier chef sembler disparates. Le chapitre 14 construit sur le précédent pour introduire les concepts de valeurs propres, de vecteurs propres et de diagonalisation d'une matrice. Ceux-ci jouent un rôle, entre autres, en finance mathématique. Pour terminer sur des considérations numériques ayant jusque là traversé le cours, le chapitre 15 expose et compare très succinctement différentes stratégies utilisées pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide d'un ordinateur.

Cette dernière partie du cours diffère passablement de celles qui l'ont précédée, autant dans sa nature que dans le format des activités d'apprentissage. La matière y est beaucoup plus mathématique et abstraite, il y a de nombreux exercices et les considérations informatiques sont réduites au minimum. Les chapitres 13 et 14 ne comportent que de courtes sections faisant la démonstration de fonctions R dédiées à l'algèbre linéaire.

Comme toujours, chaque chapitre comporte des exercices, avec les réponses en fin de chapitre et les solutions complètes en annexe. Un symbole de lecture vidéo dans la marge, tel que ci-contre, indique qu'une capsule vidéo sur le sujet identifié par la marque de soulignement est disponible dans le site du cours.

Je tiens à souligner la précieuse collaboration de MM. Mathieu Boudreault, Sébastien Auclair et Louis-Philippe Pouliot lors de la rédaction des exercices et des solutions. Je remercie également Mmes Marie-Pier Laliberté et Véronique Tardif pour l'infographie des pages couvertures.

Table des matières



Tiré de XKCD.com

13 Révision d'algrèbre linéaire

Objectifs du chapitre

- Utiliser les principaux opérateurs de l'arithmétique matricielle, dont la somme, le produit, la transposée et la trace.
- Exprimer un système d'équations linéaires sous forme matricielle et le résoudre par élimination gaussienne ainsi que par produit de matrices élémentaires.
- Vérifier si des éléments d'un espace vectoriel sont linéairement indépendants.
- Définir les propriétés de l'inverse d'une matrice.
- Définir les propriétés du déterminant d'une matrice.
- Calculer l'inverse d'une matrice à partir de matrices élémentaires ainsi que par la méthode de la matrice adjointe.
- Déterminer le rang d'une matrice.
- Établir les liens entre les concepts ci-dessus.

Ce chapitre vise à réviser les éléments fondamentaux d'algèbre linéaire normalement étudiés au collège : matrice, déterminant, inverse, vecteur, espace vectoriel et relations avec les systèmes d'équations linéaires. Nous tâchons d'insister sur l'établissement de liens entre les différentes notions passées en revue. À ce titre, le théorème 13.13 en fin de chapitre est particulièrement important puisqu'il unifie un grand nombre de résultats.

Le texte ne prétend à aucune exhaustivité ; le lecteur devrait donc consulter, au besoin, l'un des nombreux livres d'introduction à l'algèbre linéaire disponibles en librairie ou à la bibliothèque. Les éditions successives de Anton (2000) ont longtemps servi pour les examens professionnels d'actuariat et constituent toujours des références de choix.

Le langage R contient à peu près tous les outils nécessaires pour la manipulation et le traitement des vecteurs et matrices. La plupart des fonctions pertinentes ont déjà été introduites dans le chapitre 3 de la partie I, mais nous offrons néanmoins une nouvelle présentation dans le code informatique de la section 14.5.

13.1 Matrices

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres. Les matrices seront généralement représentées par des lettres majuscules et leurs éléments par des minuscules. Ainsi,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

est une matrice $m \times n$ composée des éléments a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. De manière plus compacte, on écrira parfois

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

ou simplement

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]$$

lorsque les dimensions de la matrices sont claires par le contexte.

13.1.1 Matrice carrée

Lorsqu'une matrice compte autant de lignes que de colonnes ($m = n$), la matrice est dite *carrée*. Dans un tel cas, les éléments a_{ii}, $i = 1, \dots, n$ forment la *diagonale* de la matrice.

13.1.2 Matrice symétrique

Si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j, alors la matrice carrée $\mathbf{A}$ est *symétrique*. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

constitue une matrice symétrique.

13.1.3 Matrices triangulaires et diagonales

Une matrice carrée dont tous les éléments sous la diagonale sont nuls est une matrice *triangulaire supérieure*. À l'inverse, une matrice carrée dont tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls est une matrice *triangulaire inférieure*. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure, alors que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

est triangulaire inférieure.

Une matrice à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure ne comporte que des zéros à l'extérieur de la diagonale et est appelée une matrice *diagonale*, comme par exemple

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13.1.4 Matrice identité et matrice zéro

La matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 est appelée la *matrice identité*. Celle-ci joue un rôle spécial important en algèbre matricielle. Elle est généralement notée **I** :

$$\mathbf{I}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalement, la matrice constituée entièrement de 0 est appelée *matrice zéro* ou *matrice nulle*. Elle est généralement notée **0** :

$$\mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice nulle est tout-à-fait différente du scalaire 0.

13.1.5 Vecteur ligne et vecteur colonne

Les matrices ne comptant qu'une seule ligne ou une seule colonne portent un nom spécial. Une matrice $1 \times n$ est appelée *vecteur ligne* et une matrice $m \times 1$ est appelée *vecteur colonne* ou parfois simplement *vecteur*. Ces deux types de matrices sont généralement notées par des lettres minuscules et leurs éléments sont numérotés par un seul indice :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

13.2 Arithmétique matricielle

Cette section récapitule l'essentiel des règles d'arithmétique matricielle. On gardera à l'esprit que ces règles sont parfois fort différentes de celles de l'arithmétique des nombres, notamment au chapitre du produit matriciel.

13.2.1 Égalité, somme et différence

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ deux matrices de mêmes dimensions et c, une constante (scalaire). Alors,

1. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si, et seulement si, $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et tout j ;
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$;
3. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]$;
4. $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$.

13.2.2 Produit

Le produit entre deux matrices, **AB**, est défini seulement si le nombre de colonnes de la matrice **A** est égal au nombre de lignes de la matrice **B**. Le résultat du produit est une matrice dont l'élément en position (i, j) correspond au produit scalaire entre la ligne i de la matrice **A** et la colonne j de la matrice **B**. Autrement dit, soit $\mathbf{A}_{m\times p}$ et $\mathbf{B}_{p\times n}$ deux matrices. Alors le produit **AB** est défini et

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right]_{m\times n}.$$

Exemple 13.1. Soit les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice **A** compte trois colonnes, soit autant que le nombre de lignes de la matrice **B**. Le produit **AB** est donc défini. Le résultat sera une matrice **C** de deux lignes et quatre colonnes. On a

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) \\ &= 12, \\ c_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= (1 \cdot 1) + (2 \cdot -1) + (4 \cdot 7) \\ &= 27, \end{aligned}$$

etc. Le résultat final est

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}.$$

On remarquera que le produit **BA** n'est pas défini, ce qui illustre que le produit matriciel n'est pas commutatif. □

Théorème 13.1 (Propriétés de l'arithmétique matricielle)**.** *Soit* **A**, **B** *et* **C** *des matrices de dimensions telles que les opérations ci-dessous sont définies, et soit a et b, des constantes.*

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ *(commutativité de l'addition)*
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ *(associativité de l'addition)*
3. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ *en général*
4. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ *(associativité de la multiplication)*
5. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ *(distributivité par la gauche)*
6. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$ *(distributivité par la droite)*
7. $\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{AB} - \mathbf{AC}$
8. $(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} - \mathbf{CA}$

9. $a(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = a\mathbf{B}+a\mathbf{C}$

10. $a(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = a\mathbf{B}-a\mathbf{C}$

11. $(a+b)\mathbf{C} = a\mathbf{C}+b\mathbf{C}$

12. $(a-b)\mathbf{C} = a\mathbf{C}-b\mathbf{C}$

13. $a(b\mathbf{C}) = (ab)\mathbf{C}$

14. $a(\mathbf{BC}) = (a\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{B}(a\mathbf{C})$

Exemple 13.2. Soit $a = 5$, $b = 2$ et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il est laissé en exercice de vérifier les propriétés du théorème 13.1. On remarquera que $\mathbf{AB}$ est défini, mais pas $\mathbf{BA}$, ce qui vérifie la propriété 3, mais empêche de faire les opérations des propriétés 6 et 8. On remarquera de plus que $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$. □

13.2.3 Rôles la matrice identité et de la matrice zéro

La matrice identité joue, en arithmétique matricielle, le rôle du nombre 1 en arithmétique usuelle. Ainsi,

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}.$$

De même, la matrice zéro joue un rôle similaire à celui du 0 en arithmétique.

Théorème 13.2 (Propriétés de la matrice zéro)**.** *En supposant que les matrices sont de dimensions appropriées pour que les opérations soient définies, les propriétés ci-dessous sont valides en arithmétique matricielle.*

1. $\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$

2. $\mathbf{A}-\mathbf{A} = \mathbf{0}$

3. $\mathbf{0}-\mathbf{A} = -\mathbf{A}$

4. $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$ *et* $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$

L'exemple suivant illustre toutefois les limites aux similitudes entre les deux systèmes arithmétiques.

Exemple 13.3. Soit les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$$

d'où $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. De même, on vérifie que $\mathbf{AD} = \mathbf{0}$ même si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$. □

13.2.4 Trace

La *trace* d'une matrice carrée $\mathbf{A}_{n\times n}$, notée $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, est égale à la somme des éléments de la diagonale :

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

13.2.5 Transposée

La *transposée* d'une matrice $\mathbf{A}$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de $\mathbf{A}$. Elle est généralement notée $\mathbf{A}^T$ ou $\mathbf{A}'$:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \Rightarrow \mathbf{A}^T = [a_{ji}].$$

Théorème 13.3 (Propriétés de la transposée)**.** *Soit* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *des matrices de dimensions telles que les opérations ci-dessous sont définies, et soit* k *une constante.*

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
5. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{AA}^T$ *sont symétriques.*

Démonstration. On ne démontre que les propriétés 4 et 5. En premier lieu, soit $\mathbf{A}_{m\times p}$ et $\mathbf{B}_{p\times m}$ des matrices, $\mathbf{C} = (\mathbf{AB})^T$ et $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T_{m\times p}\mathbf{A}^T_{p\times m}$. L'élément c_{ij} de la matrice $\mathbf{C}$ est égal à l'élément en position (j, i) du produit $\mathbf{AB}$, d'où

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki}.$$

De plus, puisque $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ et $\mathbf{B}^T = [b_{ji}]$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_{jk},$$

d'où $c_{ij} = d_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, m$ et, donc, $\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

D'autre part, par la propriété 4,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^T \\
&= \mathbf{A}^T\mathbf{A},
\end{aligned}
$$

d'où $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est une matrice symétrique. On procède de même pour le second résultat de la propriété 5. □

13.3 Lien avec les systèmes d'équations linéaires

L'application de loin la plus fréquente des matrices est la représentation et la résolution de systèmes d'équations linéaires. Soit le système à trois équations et trois inconnues

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3.
\end{aligned}
$$

On peut représenter ce système sous la forme d'une équation matricielle avec

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},
$$

soit

$$
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},
$$

avec les définitions évidentes pour $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$.

Tout système d'équations linéaires comporte ou bien une seule solution, ou bien aucune solution, ou bien une infinité de solutions. La figure 13.1 illustre ces trois possibilités pour un système à deux équations et deux inconnues, de même que pour un système à trois équations et trois inconnues.

Remarque. Un système avec plus d'inconnues qu'il n'y a d'équations ($m < n$) ne peut avoir qu'aucune ou une infinité de solutions. (Il est, par exemple, impossible d'avoir un seul point commun entre deux plans.)

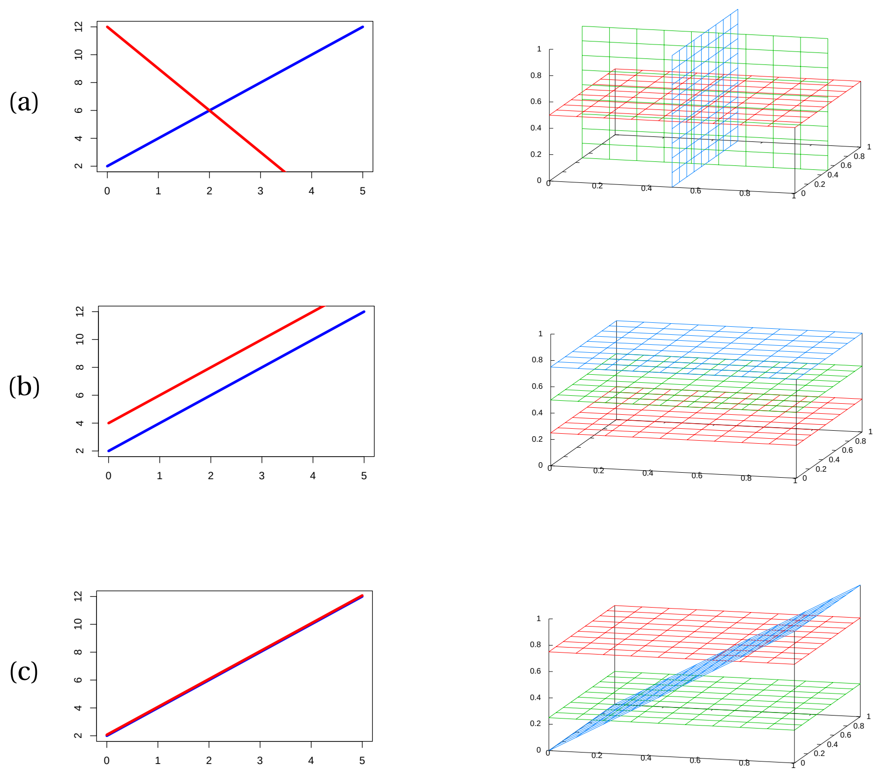


FIG. 13.1: Solutions possibles de systèmes d'équations linéaires à deux et trois variables : (a) une seule solution ;(b) aucune solution ; (c) infinité de solutions.

13.3.1 Résolution d'un système d'équations linéaires

De manière plus compacte et appropriée pour l'élimination gaussienne (voir plus bas), le système d'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ peut aussi être représenté sous forme d'une *matrice augmentée*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on remplace généralement le système donné par un autre système équivalent, mais plus simple à résoudre. Ce nouveau système est obtenu par diverses opérations :

1. multiplication d'une équation par une constante ;
2. échange de deux équations ;
3. addition d'un multiple d'une équation à une autre.

Puisque les lignes d'une matrice augmentée correspondent aux équations d'un système d'équations, les opérations ci-dessus se traduisent naturellement en opérations sur les lignes de la matrice augmentée :

1. multiplication d'une ligne par une constante ;
2. échange de deux lignes ;
3. addition d'un multiple d'une ligne à une autre.

Ces opérations sont appelées *opérations élémentaires sur les lignes.*

Exemple 13.4. Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9\\ 2x+4y-3z &= 1\\ 3x+6y-5z &= 0. \end{aligned}$$

La procédure de résolution classique du système d'équations se trouve dans la colonne de gauche, alors que la procédure utilisant la matrice augmentée se trouve dans la colonne de droite.

Système d'équations original :

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9\\ 2x+4y-3z &= 1\\ 3x+6y-5z &= 0. \end{aligned}$$

Matrice augmentée originale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Additionner -2 fois la première équation à la seconde et -3 fois la première à la troisième :

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9\\ 2y-7z &= -17\\ 3y-11z &= -27. \end{aligned}$$

Additionner -2 fois la première ligne à la seconde et -3 fois la première à la troisième :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Additionner $-\frac{3}{2}$ fois la seconde équation à la troisième :

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9\\ 2y-7z &= -17\\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Additionner $-\frac{3}{2}$ fois la seconde ligne à la troisième :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9\\ 0 & 2 & -7 & -17\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

À cette étape on peut déjà résoudre facilement le système d'équations par substitution successive : la troisième équation nous donne $z = 3$, la seconde $2y - 7(3) = -17 \Rightarrow y = 2$ et la première, $x + 2 + 2(3) = 9 \Rightarrow x = 1$.

On peut aussi continuer les opérations élémentaires jusqu'à obtenir un système trivial.

Additionner -14 fois la troisième équation à la seconde et 4 fois la troisième à la première :

$$\begin{aligned} x+y &= 3\\ 2y &= 4\\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Additionner -14 fois la troisième ligne à la seconde et 4 fois la troisième à la première :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Additionner $-\frac{1}{2}$ fois la seconde équation à la première :

$$\begin{aligned} x &= 1\\ 2y &= 4\\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Additionner $-\frac{1}{2}$ fois la seconde ligne à la première :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

On obtient la même réponse que ci-dessus avec ce dernier système d'équations. □

13.3.2 Élimination gaussienne

La procédure suivie pour résoudre le système d'équations de l'exemple 13.4 s'apparente à l'*élimination gaussienne*. Plus précisément, l'élimination gaussienne consiste à appliquer des opérations élémentaires à la matrice augmentée correspondant à un système d'équations linéaires jusqu'à ce que la partie gauche de celle-ci se trouve sous forme *échelonnée*, c'est-à-dire :

1. si une ligne n'est pas constituée uniquement de zéros, alors le premier élément non nul de cette ligne est un 1 ;

2. les lignes composées uniquement de zéros sont groupées au bas de la matrice ;
3. pour toutes les lignes adjacentes non composées uniquement de zéros, le premier 1 suivant des zéros apparaît plus à droite dans la ligne du dessous.

Exemple 13.5. Les matrices suivantes sont échelonnées (le symbole $*$ représente un nombre quelconque) :

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Si on ajoute l'exigence que le premier 1 suivant des zéros d'une colonne ne soit lui-même suivi que de zéros, alors la matrice est résultante est sous forme *échelonnée réduite*. La procédure de résolution du système d'équations linéaires est alors appelée *élimination de Gauss–Jordan*.

Exemple 13.6. Les matrices suivantes sont sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Exemple 13.7. La matrice échelonnée réduite d'un système d'équations linéaires est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le système d'équations compte plus d'inconnues que d'équations. On sait donc qu'il aura une infinité de solutions. Le système correspondant à la matrice échelonnée réduite est

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 3x_4. \end{aligned}$$

Afin d'exprimer l'ensemble de solutions, on a recours à une (ou plusieurs, le cas échéant) *variable libre* égale à une valeur quelconque. Ici, on choisira tout naturellement de poser $x_4 = t$. Ainsi, on a la solution générale

$$x_1 = -1 - 4t, \qquad x_2 = 6 - 2t, \qquad x_3 = 2 - 3t, \qquad x_4 = t.$$

□

L'élimination gaussienne et l'élimination de Gauss–Jordan se prêtent bien à la mise en oeuvre informatique de méthodes de résolution de grands systèmes d'équations linéaires. Un algorithme efficace prendra toutefois soin de minimiser les erreurs d'arrondi ainsi que le nombre d'opérations. Nous étudierons au chapitre 15 la méthode la plus souvent retenue pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

13.3.3 Matrices élémentaires

Les opérations élémentaires réalisées sur une matrice peuvent être représentées comme un produit entre une *matrice élémentaire* et la matrice (dans cet ordre). Une matrice élémentaire $n \times n$ est le résultat d'une — et une seule — opération sur les lignes de la matrice identité $\mathbf{I}_n$.

Par exemple, soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour intervertir les deux lignes de $\mathbf{A}$, on peut faire le produit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pour additionner à la première ligne 2 fois la seconde, on peut faire le produit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Les matrices les plus à gauche dans les produits ci-dessus sont des matrices élémentaires.

Les matrices élémentaires sont généralement notées $\mathbf{E}$. Leur principale propriété est formalisée dans le théorème suivant.

Théorème 13.4. *Soit* $\mathbf{E}$ *une matrice obtenue en faisant une opération sur les lignes de la matrice identité. Alors* $\mathbf{EA}$ *est la matrice obtenue en faisant la même opération sur la matrice* $\mathbf{A}$.

Exemple 13.8. On exprime la solution de l'exemple 13.4 à l'aide de matrices élémentaires. À chaque opération sur les lignes de la matrice augmentée correspond une matrice élémentaire.

1. Additionner -2 fois la première ligne à la seconde :

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Additionner -3 fois la première ligne à la troisième :

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Additionner $-\frac{3}{2}$ fois la seconde ligne à la troisième :

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est laissé en exercice de vérifier que

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

□

Les matrices élémentaires seront utiles lorsque nous étudierons la décomposition *LU*.

13.3.4 Systèmes d'équations homogènes

Un système d'équations linéaires est dit *homogène* lorsque $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Tout système d'équations homogène compte au moins une solution, la *solution triviale* $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Par conséquent, de tels systèmes peuvent n'admettre que la solution triviale ou une infinité de solutions.

Théorème 13.5. *Tout système d'équations homogène composé de plus d'inconnues que d'équations* $(m < n)$ *a une infinité de solutions.*

13.4 Lien avec les espaces vectoriels

L'algèbre vectorielle sera peu étudiée dans ce cours, mais il est néanmoins utile de mentionner brièvement la relation entre les matrices et les espaces vectoriels.

De manière très générale, un *espace vectoriel* est un ensemble d'objets pour lequel sont définis un opérateur d'addition et un opérateur de produit par un scalaire, tous deux satisfaisant un certain nombre de conditions.

Définition 13.1 (Espace vectoriel)**.** Soit V un ensemble non vide d'objets. Si les axiomes ci-dessous sont satisfaits pour tous objets $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ de V et tous scalaires k et l, alors V est un espace vectoriel.

1. Si $\mathbf{u} \in V$ et $\mathbf{v} \in V$, alors $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Il existe un objet $\mathbf{0} \in V$ tel que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ pour tout $\mathbf{u} \in V$.
5. Pour tout $\mathbf{u} \in V$, il existe un objet $-\mathbf{u}$ tel que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. Si k est un scalaire et $\mathbf{u} \in V$, alors $k\mathbf{u} \in V$.
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Définition 13.2 (Produit scalaire)**.** Soit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ des éléments d'un espace vectoriel V et k, un scalaire. Un produit scalaire dans V est une fonction $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ associant un nombre réel aux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de V et respectant les axiomes suivants :

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (symétrie)
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (distributivité)
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ et $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si, et seulement si, $\mathbf{v} = 0$.

Définition 13.3 (Norme)**.** La norme (longueur) d'un vecteur $\mathbf{u}$, notée $\|\mathbf{u}\|$, est la racine carrée du produit scalaire du vecteur avec lui-même :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

Définition 13.4 (Espace pré-hilbertien)**.** Un espace pré-hilbertien (*inner product space*) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Définition 13.5 (Orthogonalité)**.** Deux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace pré-hilbertien sont orthogonaux si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Exemple 13.9. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un espace pré-hilbertien pour lequel l'addition et le produit par un scalaire sont respectivement définis par

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_i + v_i]$$

et

$$k\mathbf{v} = [kv_i],$$

où $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ sont deux vecteurs et k est une constante. De plus, le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est défini ainsi :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Par conséquent, la norme d'un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ est la racine carrée de la somme des composantes au carré ou, si l'on préfère :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2.$$

□

Exemple 13.10. L'ensemble des variables aléatoires de second moment fini forme un espace pré-hilbertien communément noté $\mathscr{L}^2$. En effet, la somme $X + Y$ de deux variables aléatoires de second moment fini ainsi que kX sont des variables aléatoires de second moment fini. De plus, le produit scalaire est défini ainsi dans cet espace :

$$\langle X, Y \rangle = E[XY].$$

La notion d'orthogonalité est donc liée à celle d'indépendance stochastique dans cet espace. □

On peut voir la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

comme la réunion dans un même objet des coordonnées (dans un espace à n dimensions) de m vecteurs $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$. Les règles de l'arithmétique matricielle nous fournissent donc une arithmétique pour les espaces vectoriels.

La principale notion d'algèbre vectorielle qui nous sera utile ici est celle d'indépendance linéaire.

Soit $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un ensemble de vecteurs non nuls. Si la seule solution de l'équation vectorielle

$$k_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

est la solution triviale $k_1 = 0, \dots, k_n = 0$, alors V est un ensemble *linéairement indépendant*. S'il existe une autre solution que la solution triviale à l'équation, alors V est un ensemble *linéairement dépendant*.

Lorsque $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, on dit que V forme une *base* pour l'espace vectoriel.

Exemple 13.11. Soit $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1)$ et $\mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$. Ces trois vecteurs sont linéairement dépendants puisque $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Ils ne peuvent donc pas servir de base pour $\mathbb{R}^4$. □

Exemple 13.12. Les vecteurs $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sont linéairement indépendants puisque

$$\begin{aligned} k_1 \mathbf{i} + k_2 \mathbf{j} + k_3 \mathbf{k} &= (k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) \\ &= (k_1, k_2, k_3) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

seulement si $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Ces vecteurs forment une base pour l'espace $\mathbb{R}^3$. □

Pour établir le lien entre l'indépendance linéaire et les matrices, supposons un ensemble de trois vecteurs $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, où $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, v_{2i}, v_{3i})$. Les vecteurs sont linéairement indépendants si

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

soit

$$k_1(v_{11}, v_{21}, v_{31}) + k_2(v_{12}, v_{22}, v_{32}) + k_3(v_{13}, v_{23}, v_{33}) = (0,0,0)$$

ou

$$(k_1 v_{11} + k_2 v_{12} + k_3 v_{13}, k_1 v_{21} + k_2 v_{22} + k_3 v_{23}, k_1 v_{31} + k_2 v_{32} + k_3 v_{33}) = (0,0,0)$$

ou encore, exprimé sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant si la seule solution de l'équation homogène $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, où les colonnes de $\mathbf{A}$ sont formées des coordonnées des vecteurs, est la solution triviale.

13.5 Inverse d'une matrice

En arithmétique usuelle, l'inverse d'un nombre x est le nombre y tel que $xy = 1$. Par habitude, nous écrivons simplement $y = 1/x$ ou $y = x^{-1}$. L'inverse d'une matrice est définie de manière similaire, sauf que l'opérateur de division n'existe pas en arithmétique matricielle. On prendra donc garde de ne *jamais* écrire une telle abomination :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}.$$

Si l'on veut isoler la matrice $\mathbf{A}$ dans l'équation $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, on ne peut que multiplier de part et d'autre par la matrice inverse de $\mathbf{B}$.

Définition 13.6 (Inverse d'une matrice)**.** Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée. S'il existe une matrice $\mathbf{B}$ tel que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

alors $\mathbf{A}$ est inversible, $\mathbf{B}$ est la matrice inverse — ou simplement inverse — de $\mathbf{A}$ et cette dernière est notée $\mathbf{A}^{-1}$. S'il n'existe pas de matrice $\mathbf{B}$ satisfaisant l'égalité ci-dessus, alors $\mathbf{A}$ est dite singulière ou non-inversible.

Exemple 13.13. Soit l'équation $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$. Pour isoler $\mathbf{A}$, il faut multiplier de part et d'autre de l'égalité par $\mathbf{B}^{-1}$. Attention, cependant : le produit matriciel n'étant pas commutatif, le produit doit se faire par la droite :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{CB}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1}) = \mathbf{CB}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{CB}^{-1}.$$

Pour isoler $\mathbf{B}$, on devra multiplier de part et d'autre de l'égalité par $\mathbf{A}^{-1}$, mais cette fois par la gauche :

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}.$$

□

Théorème 13.6. *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *des matrices inversibles de mêmes dimensions. Alors on a les résultats suivants.*

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

2. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$

Démonstration. Pour le premier résultat, on doit vérifier que $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{I}$. Or,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1} &= (\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} \\
&= \mathbf{AIA}^{-1} \\
&= \mathbf{AA}^{-1} \\
&= \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Pour le second résultat, il faut démontrer que $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}$. Or, par le résultat 4 du théorème 13.3 (page 9),

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AA}^{-1})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

et

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I},$$

puisque la matrice identité est symétrique. □

On a également le résultat suivant, utile lorsque l'on travaille avec les matrices élémentaires.

Théorème 13.7. *Toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est aussi une matrice élémentaire.*

13.5.1 Calcul de l'inverse

La manière la plus usuelle de calculer l'inverse d'une matrice repose sur l'utilisation du déterminant, qui sera présenté à la section 13.6. D'ici là, on peut également calculer l'inverse d'une matrice par une méthode similaire à l'élimination de Gauss–Jordan.

On peut en effet démontrer (et ce fait sera confirmé dans le théorème 13.13) que si la matrice $\mathbf{A}$ est inversible, alors on peut trouver des matrices élémentaires $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ tel que

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{I},$$

ce qui signifie que l'on peut obtenir l'inverse de $\mathbf{A}$ en appliquant aux lignes de la matrice identité les opérations élémentaires nécessaires pour convertir $\mathbf{A}$ en la matrice identité.

Exemple 13.14. Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

L'idée pour calculer l'inverse de cette matrice consiste à convertir $\mathbf{A}$ en la matrice identité par une suite d'opérations élémentaires et à appliquer simultanément ces opérations à la matrice identité. Pour ce faire, on joint côte à côte les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{I}$ dans une nouvelle matrice

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Suite aux opérations élémentaires, on obtiendra

$$[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}].$$

La procédure est la suivante :

1. Additionner -2 fois la première ligne à la seconde et -1 fois à la troisième :

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Additionner 2 fois la seconde ligne à la troisième, puis multiplier celle-ci par -1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

3. Additionner 3 fois la troisième ligne à la seconde et -3 fois à la première :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

4. Additionner -2 fois la seconde ligne à la première :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Par conséquent,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Exemple 13.15. Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il est laissé en exercice de vérifier que la procédure d'élimination pour les deuxième et troisième lignes donne

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Comme on obtient une ligne complète de zéros du côté gauche, la matrice est singulière. □

13.5.2 Résolution de systèmes d'équations par l'inverse

Outre l'élimination gaussienne et l'élimination de Gauss–Jordan, les systèmes d'équations linéaires de la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ peuvent être résolus avec l'inverse de $\mathbf{A}$, lorsqu'elle existe.

Théorème 13.8. *Si la matrice* $\mathbf{A}$ *est inversible, alors le système d'équations linéaires* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *a une solution unique et celle-ci est donnée par*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Ce résultat ne peut évidemment être utilisé que lorsque le système d'équations compte autant d'inconnues que d'équations, c'est-à-dire lorsque la matrice $\mathbf{A}$ est carrée. Dans le cas contraire, il faut utiliser les méthodes d'élimination pour trouver la solution du système d'équations.

13.6 Déterminant

La fonction déterminant, notée $\det(\cdot)$, associe un nombre réel à une matrice carrée $\mathbf{A}$.

Il y a différentes façons de présenter le déterminant, nous ne retiendrons que celle basée sur les cofacteurs. Pour ce faire, on définit tout d'abord le déterminant d'une matrice 2×2, ainsi que son inverse. La justification de ce second résultat viendra plus loin.

Théorème 13.9. *Soit* $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. *Alors*

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ une matrice carrée. Le *mineur de l'élément* a_{ij}, noté M_{ij}, est le déterminant de la sous-matrice résultante après avoir éliminé la ligne i et la colonne j de la matrice $\mathbf{A}$. De plus, le *cofacteur de l'élément* a_{ij} est $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Exemple 13.16. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Une fois la première ligne et la première colonne éliminées de la matrice **A**, on a

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16,$$

d'où $C_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} = 16$. De même, après avoir éliminé la troisième ligne et la deuxième colonne, on obtient

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

et $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$. □

Le déterminant d'une matrice **A** est le produit scalaire entre les éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque de la matrice et les cofacteurs de cette ligne ou colonne.

Théorème 13.10. *Soit* **A** *une matrice carrée* $n \times n$. *Alors, pour tout* $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}. \end{aligned}$$

Exemple 13.17. On calcule le déterminant de la matrice de l'exemple 13.16. En faisant le calcul à partir de la première ligne, on a

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(16) - 10 - 4(3) \\ &= 26. \end{aligned}$$

On obtient la même réponse avec un développement selon la deuxième colonne :

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -10 + 5(28) - 4(26) \\ &= 26.\end{aligned}$$

□

13.6.1 Propriétés du déterminant

Du théorème 13.10, il est clair que si une matrice contient une ligne ou une colonne complète de zéros, alors son déterminant est nul.

De plus, si $\mathbf{A}$ est une matrice triangulaire (ou diagonale), alors son déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale :

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Le théorème suivant énonce quelques autres propriétés de la fonction déterminant.

Théorème 13.11. *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice* $n \times n$ *inversible.*

1. $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
2. $\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A})$
3. $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$ *en général.*
4. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
5. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$

13.6.2 Calcul de l'inverse avec la matrice adjointe

La manière de loin la plus usuelle de calculer l'inverse d'une matrice — à la main du moins — est intimement liée aux notions de cofacteur et de déterminant.

Avant toute chose, on définit $[C_{ij}]_{n\times n}$, la *matrice des cofacteurs* de la matrice $\mathbf{A}$. La transposée de cette matrice des cofacteurs est appelée la *matrice adjointe* de $\mathbf{A}$ et est notée $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$.

Exemple 13.18. Il est laissé en exercice de vérifier que la matrice adjointe de la matrice de l'exemple 13.16 est

$$\begin{bmatrix} 16 & -24 & 26 \\ -10 & 28 & -26 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}.$$

□

Théorème 13.12. *Si* **A** *est une matrice inversible, alors*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}).$$

13.7 Rang

Le *rang* d'une matrice $\mathbf{A}_{m\times n}$ correspond au nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes dans cette matrice. Évidemment,

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n).$$

Lorsqu'il y a égalité, on dit de la matrice qu'elle est de rang complet.

13.8 Unification des résultats

Le théorème suivant unifie un grand nombre de résultats et de concepts présentés dans les sections précédentes. En ce sens, il fait le sommaire des plus importants résultats à connaître en algèbre linéaire.

Théorème 13.13. *Soit* **A** *une matrice* $n \times n$*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. **A** *est inversible.*
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
3. $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$
4. *La seule solution de* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *est la solution triviale.*
5. *Le système d'équations* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *a une solution pour tout vecteur* **b** *et celle-ci est unique.*
6. **A** *peut être exprimée comme un produit de matrices élémentaires.*
7. *Les vecteurs lignes de* **A** *sont linéairement indépendants.*
8. *Les vecteurs colonnes de* **A** *sont linéairement indépendants.*
9. *Les vecteurs lignes de* **A** *forment une base de* $\mathbb{R}^n$*.*
10. *Les vecteurs colonnes de* **A** *forment une base de* $\mathbb{R}^n$*.*

▶| Le code informatique de la section 14.5 passe en revue les fonctions d'algèbre linéaire offertes dans R.

13.9 Code informatique

```
###
### MATRICES ET VECTEURS
###

## La fonction 'diag' a plusieurs usages. Un premier consiste
## à extraire la diagonale d'une matrice carrée.
(a <- matrix(1:9, nrow = 3))
diag(a)

## Si la matrice passée en argument est rectangulaire 'm x n',
## 'diag' retourne la liste des éléments a[i, i], i = 1, ...,
## min(m, n).
(a <- matrix(1:12, nrow = 4))
diag(a)

## Lorsque l'on passe un vecteur à la fonction 'diag', le
## résultat est une matrice diagonale formée du vecteur.
diag(1:3)

## Enfin, lorsque l'argument de 'diag' est un scalaire 'n', le
## résultat est la matrice identité 'n x n'.
diag(3)

## La fonction 'lower.tri' (respectivement 'upper.tri')
## retourne une matrice de la même dimension que celle passée
## en argument avec des valeurs TRUE (FALSE) aux positions des
## éléments sous la diagonale et FALSE (TRUE) aux positions
## au-dessus de la diagonale. La diagonale sera dans le
## premier ou dans le second groupe selon que l'argument
## 'diag' est TRUE ou FALSE.
(a <- matrix(1:9, nrow = 3))
lower.tri(a)
upper.tri(a, diag = TRUE)

## On utilise les fonctions 'lower.tri' et 'upper.tri'
## principalement pour extraire les éléments au-dessus ou
## au-dessous de la diagonale d'une matrice carrée.
a[lower.tri(a)]
a[upper.tri(a)]

## Bien que rarement nécessaires en R, on peut créer des
## vecteurs ligne ou colonne avec les fonctions 'rbind' et
```

```
## 'cbind', dans l'ordre.
rbind(1:3)
dim(rbind(1:3))
cbind(1:3)

###
### ARITHMÉTIQUE MATRICIELLE
###

## Le produit matriciel s'effectue en R avec l'opérateur
## '%*%', et non avec '*', qui fait le produit élément par
## élément (une opération qui n'est pas définie en
## arithmétique matricielle usuelle, mais qui l'est dans R).
(a1 <- matrix(c(1, 2, 2, 6, 4, 0), nrow = 2))
(a2 <- matrix(c(4, 0, 2, 1, -1, 7, 4, 3, 5, 3, 1, 2), nrow = 3))
a1 %*% a2

## Il n'y a pas d'opérateur pour calculer la trace d'une
## matrice carrée. Il suffit de sommer les éléments de la
## diagonale.
a
sum(diag(a))

## La transposée est obtenue avec la fonction 't'.
t(a)

###
### DÉTERMINANT ET INVERSE
###

## Le déterminant d'une matrice est obtenu avec la fonction
## 'det'.
A <- matrix(c(1, 2, 1, 2, 5, 0, 3, 3, 8), nrow = 3)
det(A)

## Avec pour seul argument une matrice carrée, la fonction
## 'solve' calcule l'inverse de cette matrice.
solve(A)

## Avec deux arguments, une matrice 'A' et un vecteur 'b',
## 'solve' calcule la solution du système d'équations 'Ax =
## b', c'est-à-dire 'A^{-1} b'.
b <- 1:3
solve(A, b)
```

```
## À noter qu'il est *beaucoup* plus rapide de calculer
## directement la solution du système d'équations avec
## 'solve(A, b)' que d'inverser la matrice et calculer la
## solution par la suite avec 'solve(A) %*% b'. Pour en faire
## la démonstration, on doit utiliser de grands objets.
A <- matrix(rnorm(500^2), nrow = 500)
b <- rnorm(500)
system.time(solve(A) %*% b)
system.time(solve(A, b))
```

13.10 Exercices

13.1 Pour chaque cas ci-dessous, supposer que la matrice donnée est une matrice augmentée d'un système d'équations linéaires exprimée sous forme échelonnée. Résoudre le système d'équations.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13.2 Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants par l'élimination gaussienne et l'élimination de Gauss–Jordan.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

13.3 Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants par l'élimination gaussienne et l'élimination de Gauss–Jordan.

a) $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$

c)
$$\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{aligned}$$

13.4 Résoudre les systèmes d'équations homogènes suivants.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

13.5 Pour quelle valeur de a le système d'équations

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

n'aura-t-il aucune solution ? Une seule solution ? Une infinité de solutions ?

13.6 Soit les matrices $\mathbf{A}_{4\times5}$, $\mathbf{B}_{4\times5}$, $\mathbf{C}_{5\times2}$, $\mathbf{D}_{4\times2}$ et $\mathbf{E}_{5\times4}$. Lesquelles des expressions matricielles suivantes sont définies ? Pour les expressions définies, donner les dimensions de la matrice résultante.

a) $\mathbf{BA}$ b) $\mathbf{AC} + \mathbf{D}$ c) $\mathbf{AE} + \mathbf{B}$ d) $\mathbf{AB} + \mathbf{B}$
e) $\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ f) $\mathbf{E}(\mathbf{AC})$ g) $\mathbf{E}^T\mathbf{A}$ h) $(\mathbf{A}^T + \mathbf{E})\mathbf{D}$

13.7 Soit les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer les expressions suivantes (lorsque possible).

a) $\mathbf{D}+\mathbf{E}$
b) $\mathbf{AB}$
c) $(2\mathbf{D}^T-\mathbf{E})\mathbf{A}$
d) $(4\mathbf{B})\mathbf{C}+2\mathbf{B}$
e) $(-\mathbf{AC})^T+5\mathbf{D}^T$
f) $(\mathbf{BA}^T-2\mathbf{C})^T$
g) $\mathbf{B}^T(\mathbf{CC}^T-\mathbf{A}^T\mathbf{A})$
h) $\mathbf{D}^T\mathbf{E}^T-(\mathbf{ED})^T$
i) $\mathrm{tr}(\mathbf{DD}^T)$
j) $\mathrm{tr}(4\mathbf{E}^T-\mathbf{D})$

13.8 Démontrer que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices $n\times n$, alors $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathrm{tr}(\mathbf{A})+\mathrm{tr}(\mathbf{B})$, où $\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

13.9 Une matrice $\mathbf{A}$ est dite *symétrique* si $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ et *antisymétrique* si $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$. Démontrer les énoncés suivants, étant donné une matrice carrée $\mathbf{A}$.

a) $\mathbf{AA}^T$ et $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sont symétriques.

b) $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$ est antisymétrique.

13.10 Démontrer que si $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{A}$, alors $\mathbf{A}$ est symétrique et $\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$. Une matrice qui satisfait cette dernière égalité est dite *idempotente*.

13.11 Lesquels des ensembles de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivants sont linéairement dépendants ?

a) $(4,-1,2)$, $(-4,10,2)$

b) $(-3,0,4)$, $(5,-1,2)$, $(1,1,3)$

c) $(8,-1,3)$, $(4,0,1)$

d) $(-2,0,1)$, $(3,2,5)$, $(6,-1,1)$, $(7,0,-2)$

13.12 Soit $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in\mathbb{R}^3$. Déterminer si les trois vecteurs se trouvent dans un plan.

a) $\mathbf{v}_1=(2,-2,0)$, $\mathbf{v}_2=(6,1,4)$, $\mathbf{v}_3=(2,0,-4)$

b) $\mathbf{v}_1=(-6,7,2)$, $\mathbf{v}_2=(3,2,4)$, $\mathbf{v}_3=(4,-1,2)$

13.13 Soit la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

où $\prod_{i=1}^n a_{ii}\neq 0$. Démontrer que $\mathbf{A}$ est inversible et trouver son inverse.

13.14 Soit les matrices

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trouver les matrices élémentaires $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ satisfaisant les équations suivantes.

a) $\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{B}$ b) $\mathbf{E}_2\mathbf{B} = \mathbf{A}$ c) $\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \mathbf{C}$ d) $\mathbf{E}_4\mathbf{C} = \mathbf{A}$

13.15 Utiliser la méthode des opérations élémentaires sur les lignes pour trouver l'inverse des matrices suivantes, si elle existe. Le cas échéant, vérifier votre réponse par multiplication de la matrice et de son inverse.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

13.16 Trouver l'inverse des matrices suivantes, où $k, k_1, \ldots k_4$ sont des constantes non nulles.

a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

13.17 Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Trouver des matrices élémentaires $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ tel que $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

b) Écrire $\mathbf{A}^{-1}$ comme le produit de deux matrices élémentaires.

c) Écrire $\mathbf{A}$ comme le produit de deux matrices élémentaires.

13.18 Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de la matrice inverse :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4. \end{aligned}$$

13.19 Soit la matrice et le vecteur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

a) Vérifier que l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ peut s'écrire sous la forme $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et utiliser cette formule pour résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ pour $\mathbf{x}$.

b) Résoudre $\mathbf{A}\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

13.20 Sans faire aucun calcul, déterminer si les systèmes d'équations homogènes ci-dessous admettent une solution autre que la solution triviale, puis déterminer si la matrice des coefficients est inversible.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

13.21 Par simple inspection visuelle de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

expliquer pourquoi $\det(\mathbf{A}) = 0$.

13.22 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

13.23 Soit $\mathbf{A}$ une matrice 3×3 dont $\det(\mathbf{A}) = -7$. Trouver les déterminants suivants.

a) $\det(3\mathbf{A})$ b) $\det(\mathbf{A}^{-1})$ c) $\det(2\mathbf{A}^{-1})$ d) $\det((2\mathbf{A})^{-1})$

13.24 Pour quelle(s) valeur(s) de k les matrices ci-dessous ne sont pas inversibles ?

a) $\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

13.25 Soit
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&-1&1&6\\0&0&-3&3\\4&1&0&14\\4&1&3&2\end{bmatrix}.$$

Trouver les valeurs suivantes.

a) M_{13} et C_{13}

b) M_{23} et C_{23}

c) M_{22} et C_{22}

d) M_{21} et C_{21}

e) $\det(\mathbf{A})$

Réponses

13.1 a) $x_1=-37$, $x_2=-8$, $x_3=5$

b) $x_1=-10+13t$, $x_2=-5+13t$, $x_3=2-t$, $x_4=t$

c) $x_1=-11-7s+2t$, $x_2=s$, $x_3=-4-3t$, $x_4=9-3t$, $x_5=t$

d) pas de solution

13.2 a) $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2$

b) $x_1=-\frac{1}{7}-\frac{3}{7}t$, $x_2=\frac{1}{7}-\frac{4}{7}t$, $x_3=t$

c) $x_1=t-1$, $x_2=2s$, $x_3=s$, $x_4=t$

d) pas de solution

13.3 a) $x_1=2-12t$, $x_2=5-27t$, $x_3=t$

b) pas de solution

c) $u=-2s-3t-6$, $v=s$, $w=-t-2$, $x=t+3$, $y=t$

13.4 a) solution triviale

b) $x_1=-s$, $x_2=-t-s$, $x_3=4s$, $x_4=t$

c) $w=t$, $x=-t$, $y=t$, $z=0$

13.5 Aucune solution : $a=-4$. Une seule solution : $a\neq\pm4$. Infinité de solutions : $a=4$.

13.6 a) non défini b) 4×2 c) non défini d) non défini e) 5×5 f) 5×2 g) non défini h) 5×2

13.7 a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ d) non défini e) $\begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i) 61 j) 35

13.11 d) seulement

13.12 a) non b) oui

13.14 a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13.15 a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ b) n'existe pas c) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

13.16 a) $\begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1^{-1} \\ 0 & 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & k_3^{-1} & 0 & 0 \\ k_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{bmatrix}$

13.17 a) $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13.18 $x_1 = \frac{16}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$, $x_3 = -\frac{11}{3}$

13.20 a) solution triviale seulement, matrice inversible b) infinité de solutions, matrice singulière

13.22 a) oui b) non c) non d) non

13.23 a) -189 b) $-\frac{1}{7}$ c) $-\frac{8}{7}$ d) $-\frac{1}{56}$

13.24 a) $(5 \pm \sqrt{17})/2$ b) -1

13.25 a) $M_{13} = 0$, $C_{13} = 0$

b) $M_{23} = -96$, $C_{23} = 96$

c) $M_{22} = -48$, $C_{22} = -48$

d) $M_{21} = 72$, $C_{21} = -72$

e) -216

14 Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

Objectifs du chapitre

- Énoncer les définitions de valeur et vecteur propre d'une matrice.
- Calculer les valeurs propres d'une matrice et les vecteurs propres correspondants.
- Déterminer si une matrice est diagonalisable ou non.
- Diagonaliser une matrice carrée.

Les valeurs et vecteurs propres sont des caractéristiques liées à une matrice carrée. Ces notions admettent une grande variété d'interprétations physiques différentes, chacune ancrée dans son domaine d'application : géométrie, résolution d'équations différentielles, mécanique quantique, finance, moteurs de recherche, etc.

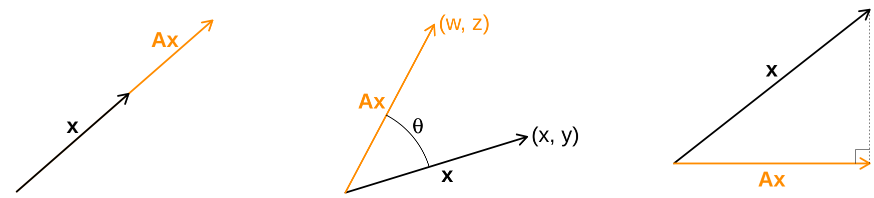
Dans le cadre de ce cours, l'étude des valeurs et vecteurs propres demeurera plutôt collée aux définitions de base. Nous ne verrons qu'une seule application, celle que vous êtes la plus susceptible de rencontre dans vos études en actuariat, soit la diagonalisation d'une matrice.

14.1 Définitions

En algèbre vectorielle, le produit par une matrice $\mathbf{A}$ peut être vu comme un opérateur permettant d'appliquer une transformation à un vecteur $\mathbf{x}$. Par exemple :

- La multiplication par un scalaire :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



(a) produit par un scalaire (b) rotation (c) projection

FIG. 14.1: Illustrations de trois transformations d'un vecteur $\mathbf{x}$ que l'on peut représenter par un produit matriciel $\mathbf{Ax}$.

- La rotation d'un angle θ :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}.$$

- La projection sur un autre vecteur :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Voir la figure 14.1 pour des illustrations des transformations ci-dessus.

Les définitions de valeur propre et de vecteur propre procèdent de cette interprétation du produit matriciel.

Définition 14.1. Soit $\mathbf{A}$ une matrice $n \times n$. Alors le vecteur non nul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est un *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ si

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

pour une valeur de λ appelée *valeur propre* de $\mathbf{A}$. On dit que $\mathbf{x}$ est le vecteur propre *correspondant* à λ.

Ainsi, par définition, lorsqu'un vecteur propre $\mathbf{x}$ est multiplié par la matrice $\mathbf{A}$, il est transformé en un multiple de lui-même ; voir la figure 14.2.

Exemple 14.1. Le vecteur $\mathbf{x} = (1, 2)$ est un vecteur propre de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondant à la valeur propre $\lambda = 3$ car $\mathbf{Ax} = 3\mathbf{x}$. En effet,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

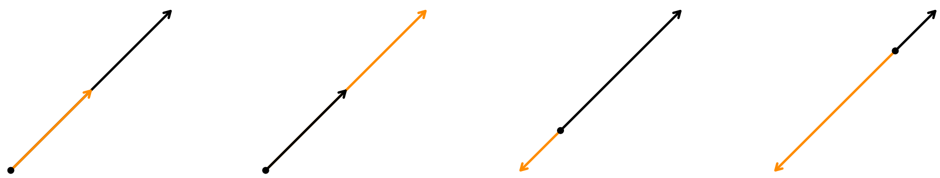


FIG. 14.2: Un vecteur propre $\mathbf{x}$ d'une matrice $\mathbf{A}$ (en noir) est transformé en un multiple λ de lui-même lorsque multiplié par $\mathbf{A}$ (en orange).

□

Remarque. Le qualificatif «propre» doit être pris dans le sens de «qui caractérise». En anglais, les termes les plus souvent utilisés pour «valeur propre» et «vecteur propre» sont *eigenvalue* et *eigenvector*, dans l'ordre. Ils sont formés à partir du préfixe allemand *eigen* plutôt qu'à partir de son équivalent anglais *own*, probablement pour des raisons générales de viabilité phonétique.

14.2 Calcul des valeurs propres

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$, on doit résoudre

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ou, de manière équivalente,

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Par conséquent, λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il existe une solution autre que la solution triviale à ce système d'équations homogène.

Or, par le théorème 13.13, il existe une solution de $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ autre que la solution triviale si, et seulement si, $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Par conséquent :

- les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les solutions de

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0;$$

- cette équation est l'*équation caractéristique* de $\mathbf{A}$;
- $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ est le *polynôme caractéristique* (de degré n) de $\mathbf{A}$.

Exemple 14.2. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de **A** est

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda-8 \end{vmatrix} \\
&= \lambda[\lambda(\lambda-8)+17]-4 \\
&= \lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les solutions de

$$\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4=0.$$

Or,

$$\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1),$$

d'où les valeurs propres sont

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 4 \\
\lambda_2 &= 2+\sqrt{3} \\
\lambda_3 &= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 14.3. Soit la matrice triangulaire

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33}),
\end{aligned}$$

d'où $\lambda_1=a_{11}$, $\lambda_2=a_{22}$ et $\lambda_3=a_{33}$. □

Le résultat de l'exemple précédent justifie un théorème.

Théorème 14.1. *Si $\mathbf{A}_{n\times n}$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) ou diagonale, alors ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale.*

De ce théorème, on peut établir les faits suivants pour une matrice triangulaire :

1. la trace est égale à la somme des valeurs propres ;
2. le déterminant est égal au produit des valeurs propres.

Le théorème suivant confirme que ces résultats tiennent pour toute matrice carrée.

Théorème 14.2. *Soit* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *une matrice dont les valeurs propres sont* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *(égalités et valeurs complexes comprises). Alors*

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \det(\mathbf{A}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.\end{aligned}$$

Démonstration. On peut démontrer que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ est toujours de la forme

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n \\ &= (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}c_1 &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n \\ c_n &= (-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n.\end{aligned}$$

(Pensez au cas $n = 2$, soit un polynôme de second degré ; vous savez que le coefficient du terme de degré un est la somme des racines et que le terme constant est le produit des racines.) Il faut maintenant établir que $c_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$ et que $c_n = \det(\mathbf{A})$ pour compléter la démonstration. Or, d'une part, on vérifie facilement que le coefficient de λ^{n-1} dans le polynôme caractéristique provient du produit

$$(\lambda - a_{11})\cdots(\lambda - a_{nn}) = \lambda^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots$$

dans le calcul du déterminant de $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ &= c_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\end{aligned}$$

D'autre part, en posant $\lambda = 0$ dans le polynôme caractéristique, on obtient

$$\begin{aligned}\det(-\mathbf{A}) &= (-1)^n \det(\mathbf{A}) \\ &= c_n \\ &= (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n,\end{aligned}$$

d'où

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

□

Du théorème précédent, il découle que si une valeur propre d'une matrice est nulle, alors son déterminant est nul et la matrice est singulière. Cette observation nous permet d'ajouter un énoncé au théorème 13.13.

Théorème 14.3. *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice* $n \times n$*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. $\mathbf{A}$ *est inversible.*
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
3. $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$
4. *La seule solution de* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *est la solution triviale.*
5. *Le système d'équations* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *a une solution pour tout vecteur* $\mathbf{b}$ *et celle-ci est unique.*
6. $\mathbf{A}$ *peut être exprimée comme un produit de matrices élémentaires.*
7. *Les vecteurs lignes de* $\mathbf{A}$ *sont linéairement indépendants.*
8. *Les vecteurs colonnes de* $\mathbf{A}$ *sont linéairement indépendants.*
9. *Les vecteurs lignes de* $\mathbf{A}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^n$*.*
10. *Les vecteurs colonnes de* $\mathbf{A}$ *forment une base de* $\mathbb{R}^n$*.*
11. $\lambda = 0$ *n'est pas une valeur propre de* $\mathbf{A}$.

Un dernier résultat : on observe que si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant, alors

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{Ax}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x},$$

d'où λ^2 est une valeur propre de $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant.

Théorème 14.4. *Si* λ *est une valeur propre de la matrice* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{x}$ *est un vecteur propre correspondant, alors*

- *λ^k est une valeur propre de $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$;*
- *$\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

Remarque. On sait que pour une fonction $y = f(x)$ quelconque, $y = f(x-c)$ correspond à une translation de la fonction de c unités vers la gauche. Par analogie, l'équation caractéristique $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ fournit cette interprétation de la valeur propre : c'est le nombre de fois qu'il faut «déplacer» la matrice $\mathbf{A}$ de $\mathbf{I}$ jusqu'à ce qu'elle devienne singulière.

14.3 Calcul des vecteurs propres

Les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ correspondant à la valeur propre λ sont les vecteurs non nuls satisfaisant

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ou, de manière équivalente,

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Or, puisque $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$:

- le rang de $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ est inférieur à n ;
- il existe une solution $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ autre que la solution triviale ;
- le système d'équations homogène comporte une infinité de solutions.

Par conséquent, pour chaque valeur propre λ, on doit trouver une base de $\mathbb{R}^k$, où

$$k = n - \operatorname{rang}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}).$$

Exemple 14.4. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'équation caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0,$$

d'où les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

1. Cas $\lambda_1 = 1$. On doit trouver $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tel que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent :

- la solution du système d'équations est $x_1 = -2x_3$, $x_2 = x_3$ et x_3 est une variable libre ;
- $(-2s, s, s)$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$;
- en fait, tout vecteur de la forme $(-2, 1, 1)$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$.

Ainsi, $(-2, 1, 1)$ est une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$.

2. Cas $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. On a

$$(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent :

- la solution est $x_1 = -x_3$, x_2 et x_3 sont des variables libres ;
- $(s, t, -s)$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 2$;
- on a
$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $(1,0,-1)$ et $(0,1,0)$ forment une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$.

□

Remarque. Le nombre de vecteurs propres dans la base est *au plus* la multiplicité de λ. Par conséquent, si toutes les valeurs propres sont différentes, alors on a n vecteurs propres différents.

14.4 Diagonalisation

La diagonalisation d'une matrice est la principale application des valeurs et vecteurs propres qu'un étudiant en actuariat est susceptible de rencontrer dans ses études. Elle joue un rôle dans la résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaires, ainsi que dans le calcul de l'exponentielle d'une matrice, tel qu'expliqué dans l'exemple suivant.

Exemple 14.5. L'exponentielle d'un nombre réel x est définie comme

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Par analogie, on définit l'exponentielle d'une matrice $\mathbf{A}$ ainsi :

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= I + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ par convention.

L'évaluation numérique de l'exponentielle d'une matrice de manière efficace, fiable et précise est chose difficile. Dans un article célèbre, Moler et Van Loan (1978) passent en revue pas moins de 19 manières différentes de le faire, pour conclure… qu'aucune méthode n'est uniformément meilleure que les autres !

Cela dit, le calcul de l'exponentielle de **A** est simple si la matriceest diagonale. Supposons, sans perte de généralité, que **A** est une matrice 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & 0 \\ 0 & a_2^n \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} a_1^3 & 0 \\ 0 & a_2^3 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} a_1^n + \dots & 0 \\ 0 & 1 + a_1 + \frac{a_2^2}{2!} + \frac{a_2^3}{3!} a_2^n + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonale se résume donc à prendre l'exponentielle des éléments de la diagonale.

Poussons l'idée une étape plus loin. Supposons que **B** est une matrice que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P},$$

où **A** est diagonale. Puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P}, \\ \mathbf{B}^3 &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P}) \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{P} \\ &\vdots \\ \mathbf{B}^n &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P^{-1}A}^n\mathbf{P}}{n!} \\ &= \mathbf{P^{-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right) \mathbf{P} \\ &= \mathbf{P^{-1}} e^{\mathbf{A}} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Si l'on peut écrire une matrice $\mathbf{B}$ sous la forme $\mathbf{B} = \mathbf{P^{-1}AP}$, alors le calcul de son exponentielle sera simple. □

Définition 14.2. Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ tel que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$$

est une matrice diagonale.

Nous établirons qu'une matrice est diagonalisable si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

Exemple 14.6. À l'exemple 14.4, on a obtenu que les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ces vecteurs propres sont linéairement indépendants. Vérification rapide :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

□

Supposons qu'une matrice $\mathbf{A}_{3\times 3}$ possède trois vecteurs propres linéairement indépendants $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_3$ et soit la matrice $\mathbf{P}$ formée de ces trois vecteurs dans les colonnes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{p}_1\, \mathbf{p}_2\, \mathbf{p}_3] \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbf{AP} = [\mathbf{Ap}_1\,\mathbf{Ap}_2\,\mathbf{Ap}_3]$$

et, par définition du vecteur propre,

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= [\lambda_1\mathbf{p}_1\,\lambda_2\mathbf{p}_2\,\lambda_3\mathbf{p}_3] \\ &= [\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} \\ &= \mathbf{PD},\end{aligned}$$

où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale. Or, puisque les colonnes de $\mathbf{P}$ sont linéairement indépendantes, $\mathbf{P}^{-1}$ existe et, par conséquent,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

d'où $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

On pourrait faire le cheminement inverse, ce qui justifie le théorème suivant.

Théorème 14.5. *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice* $n \times n$*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. $\mathbf{A}$ *est diagonalisable.*
2. $\mathbf{A}$ *possède* n *vecteurs propres linéairement indépendants.*

De plus, si $\mathbf{P}$ *est la matrice qui diagonalise* $\mathbf{A}$*, alors*

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

La remarque qui suit l'exemple 14.4 établissait que si toutes les valeurs propres sont différentes (multiplicité 1), alors on a un total de n vecteurs propres.

Or, on peut démontrer que si les valeurs propres sont distinctes, alors les vecteurs propres sont linéairement indépendants.

Théorème 14.6. *Si la matrice* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *possède* n *valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.*

Remarque. La contraposée du théorème précédent indique que si une matrice n'est pas diagonalisable, alors ses valeurs propres ne sont pas distinctes. En revanche, la matrice peut être diagonalisable même si ses valeurs propres ne sont pas distinctes.

Exemple 14.7. Les valeurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

de l'exemple 14.4 sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Néanmoins, les trois vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Exemple 14.8. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de **A** est

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

d'où les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Il est laissé en exercice de vérifier que

- le vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$ est $\mathbf{p}_1 = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, 1)$;
- le vecteur propre correspondant à $\lambda = 2$ est $\mathbf{p}_2 = (0, 0, 1)$.

Puisque l'on a seulement deux vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice **A** n'est pas diagonalisable. □

Exemple 14.9. Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

On a :

- la matrice **A** est triangulaire ;
- ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_4 = 5$ et $\lambda_4 = -2$;
- les valeurs propres sont distinctes ;
- la matrice est diagonalisable.

□

On calcule les valeurs et vecteurs propres dans R avec la fonction `eigen`. Voir le code informatique de la section 14.5 pour les détails.

14.5 Code informatique

```
###
### VALEURS ET VECTEURS PROPRES
###

## On va illustrer le calcul des valeurs et vecteurs propres
## dans R avec la matrice de l'exemple 14.4.
(A <- matrix(c(0, 1, 1, 0, 2, 0, -2, 1, 3), nrow = 3))

## La fonction 'eigen' calcule les valeurs propres et vecteurs
## propres d'une matrice.
(e <- eigen(A))

## Les vecteurs propres sont normalisés de sorte que leur
## norme (longueur) soit toujours égale à 1. Pour vérifier les
## résultats calculés algébriquement, comparer simplement les
## valeurs relatives des coordonnées des vecteurs.
e$values[c(1, 2)]          # deux premières valeurs propres...
e$vectors[, c(1, 2)]       # ... et vecteurs correspondants
e$vectors[, 2]             # équivalent à (1, 0, -1)
e$vectors[, 2] * sqrt(2)   # avec norme de 2 plutôt que 1

e$values[3]                # troisième valeur propre
e$vectors[, 3]             # vecteur équivalent à (-2, 1, 1)
e$vectors[, 3] * sqrt(6)   # avec norme de 6 plutôt que 1
```

14.6 Exercices

14.1 Trouver l'équation caractéristique, les valeurs propres et les bases de vecteurs propres des matrices suivantes. Vérifier les réponses obtenues à l'aide de la fonction `eigen` de R.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14.2 Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$, alors λ^k est une valeur propre de $\mathbf{A}^k$.

14.3 Trouver les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}^{25}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

14.4 Soit

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n.$$

Démontrer par induction les identités suivantes.

a) $c_1 = -\sum_{i=1}^n x_i$

b) $c_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i$

14.5 Démontrer que l'équation caractéristique d'une matrice $\mathbf{A}_{2\times 2}$ est

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0.$$

14.6 Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice inversible $\mathbf{A}$ et que $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant, alors λ^{-1} est une valeur propre de $\mathbf{A}^{-1}$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant.

14.7 Trouver les valeurs propres et les bases de vecteurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$, où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

14.8 Démontrer que tout vecteur est un vecteur propre de la matrice identité correspondant à la valeur propre $\lambda = 1$.

14.9 Pour chacune des matrices **A** ci-dessous :

i) trouver les valeurs propres de la matrice ;

ii) trouver le rang de la matrice $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ pour chaque valeur propre λ ;

iii) déterminer si la matrice est diagonalisable ;

iv) si la matrice est diagonalisable, trouver la matrice **P** qui diagonalise **A** et $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$;

v) vérifier les réponses en iv) avec la fonction `eigen` de R.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Réponses

14.1 a) $\lambda = 3$ avec base $(\frac{1}{2}, 1)$, $\lambda = -1$ avec base $(0, 1)$

b) $\lambda = 4$ avec base $(\frac{3}{2}, 1)$

c) $\lambda = 1$ avec base $(0, 1, 0)$, $\lambda = 2$ avec base $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$, $\lambda = 3$ avec base $(-1, 1, 1)$

d) $\lambda = -4$ avec base $(-2, \frac{8}{3}, 1)$, $\lambda = 3$ avec base $(5, -2, 1)$

e) $\lambda = 1$ avec base $(0, 0, 0, 1)$ et $(2, 3, 1, 0)$, $\lambda = -2$ avec base $(-1, 0, 1, 0)$, $\lambda = -1$ avec base $(-2, 1, 1, 0)$

14.3 $\lambda = 1$ avec base $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$, $\lambda = -1$ avec base $(2, -1, 1)$

14.7 $\lambda = 1$ avec base $(1, 0, 1)$, $\lambda = \frac{1}{2}$ avec base $(\frac{1}{2}, 1, 0)$, $\lambda = \frac{1}{3}$ avec base $(1, 1, 1)$

14.9 a) pas diagonalisable

b) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) pas diagonalisable

d) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

15 Méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires

Objectifs du chapitre

- Comparer la rapidité des méthodes usuelles de résolutions des systèmes d'équations linéaires.
- Calculer la solution d'un système d'équations linéaires par la décomposition *LU*.

L'utilisation des matrices de loin la plus fréquente en actuariat consiste à résoudre des systèmes d'équations linéaires du type

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Nous avons jusqu'à maintenant étudié diverses façons — toutes équivalentes d'un point de vue mathématique — d'obtenir la solution

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

On peut maintenant se demander laquelle est la plus efficace d'un point de vue informatique, surtout lorsque le système compte un grand nombre d'équations.

15.1 Comparaison du nombre d'opérations

Les principales méthodes de résolution d'un système d'équations linéaires sont :

1. l'élimination gaussienne avec substitution successive ;
2. l'élimination de Gauss–Jordan ;
3. le calcul de $\mathbf{A}^{-1}$, puis de $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Méthode	Nombre d'opérations
Élimination gaussienne	$n^3/3$
Élimination de Gauss–Jordan	$n^3/3$
Transformation de $[\mathbf{A}\vert\mathbf{I}]$ en $[\mathbf{I}\vert\mathbf{A}^{-1}]$	n^3
Calcul de $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	n^3

TAB. 15.1: Nombre approximatif de multiplications et divisions pour résoudre le système d'équations à n équations et n inconnues $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Le calcul de $\mathbf{A}^{-1}$ peut quant à lui s'effectuer par transformation de $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ en $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$, ou par la méthode des cofacteurs.

L'élément décisif dans la comparaison des temps de calcul de ces diverses méthodes de calcul est le nombre d'opérations arithmétiques requis. Le tableau 15.1 présente l'ordre de grandeur (et non le nombre exact) du nombre de multiplications et de divisions nécessaires pour obtenir une réponse avec chacune des méthodes ci-dessus. On se concentre sur les multiplications et divisions, sachant que ces opérations coûtent plus cher en temps de calcul que les additions et les soustractions.

On constate au tableau 15.1 que l'élimination gaussienne avec substitution successive et l'élimination de Gauss–Jordan sont les méthodes les plus rapides, leur avantage augmentant rapidement avec la taille du système d'équations.

15.2 Décomposition LU

Le principal inconvénient des méthodes d'élimination réside dans le fait qu'il faut connaître le vecteur des coefficients $\mathbf{b}$ au moment d'effectuer les calculs. Si l'on souhaite résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pour un nouveau vecteur $\mathbf{b}$, il faut répéter la procédure depuis le début.

Les principales routines de résolution de systèmes d'équations linéaires disponibles dans les divers outils informatiques (R, Maple, Matlab, Mathematica, etc.) reposent donc plutôt sur la technique de la décomposition LU, une variante de l'élimination gaussienne ne nécessitant pas de connaître d'avance le vecteur $\mathbf{b}$.

L'idée est très simple : si la matrice $\mathbf{A}$ peut être factorisée en un produit de matrices $n \times n$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure et $\mathbf{U}$ une matrice triangulaire supérieure, alors on obtient le système d'équations linéaires

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}. \tag{15.1}$$

Or, en posant

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y} \tag{15.2}$$

on peut réécrire (15.1) comme

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}. \tag{15.3}$$

La solution $\mathbf{y}$ de ce dernier système d'équations est simple à obtenir par substitutions successives. De même, une fois $\mathbf{y}$ connu, le vecteur $\mathbf{x}$ est obtenu en résolvant (15.2), toujours par simples substitutions.

Exemple 15.1. Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

On peut démontrer que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

soit $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ avec

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc $\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$. En posant $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, on réécrit le système d'équations sous la forme $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, soit

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Par substitution successive, on trouve

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 2+3y_1 = 5 \\ y_3 &= \frac{3-4y_1+3y_2}{7} = 2. \end{aligned}$$

Pour trouver la solution du système d'équations original, il suffit maintenant de résoudre $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 5-3x_3 = -1 \\ x_1 &= 1-3x_2-x_3 = 2. \end{aligned}$$

□

L'essentiel des calculs dans la décomposition *LU* se trouve dans la factorisation de la matrice **A** en un produit de matrices triangulaires. Pour justifier la technique, supposons que l'on réduit la matrice **A** sous forme échelonnée par une série d'opérations élémentaires sur les lignes. On peut donc trouver des matrices élémentaires $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ tel que

$$\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Par le théorème 13.7, l'inverse d'une matrice élémentaire existe et est également une matrice élémentaire, d'où

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1} \mathbf{U}$$

et donc

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdots \mathbf{E}_k^{-1}.$$

Cette dernière matrice est triangulaire inférieure *à condition de ne pas échanger des lignes* lors de la réduction de **A** vers **U**. Il existe un algorithme simple pour construire la matrice **L** sans devoir effectuer le produit des matrices élémentaires inverses ; consulter Anton (2000, section 9.9).

Le nombre d'opérations de la décomposition *LU* est du même ordre que les méthodes d'élimination. Par contre, on remarquera que la factorisation est tout à fait indépendante du vecteur **b**. Une fois la factorisation connue, on peut donc résoudre plusieurs systèmes d'équations différents utilisant tous la même matrice de coefficients **A** sans devoir répéter une grande partie des calculs.

Remarque. Plusieurs progiciels mathématiques ont recours à LAPACK[1] pour les calculs d'algèbre linéaire numérique. Cette bibliothèque est elle-même basée sur LINPACK, dont les origines remontent aux années 1970. La bibliothèque est écrite en Fortran, un autre très ancien langage de programmation, toujours utilisé pour le calcul scientifique. D'ailleurs, au moins une particularité de ce langage demeure visible en R. En effet, c'est du Fortran que vient cette habitude de remplir les matrices par colonne…

15.3 Exercices

15.1 Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 \phantom{{}- 6x_2} + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

par la décomposition LU sachant que

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15.2 Soit

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Résoudre le système d'équations

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

par la décomposition LU.

1. *Linear Algebra PACKage*; `http://www.netlib.org/lapack`.

Réponses

15.1 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$

15.2 $\mathbf{x} = (2, 1)$

A Solutions des exercices

Chapitre 13

13.1 a) On a une solution unique. Le système d'équations correspondant est

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Par substitution successive, on obtient $x_3 = 5$, $x_2 = 2 - 2(5) = -8$ et $x_1 = 7 + (3)(-8) - 4(5) = -37$.

b) Le système est sous-déterminé : il compte plus d'inconnues que d'équations. Il y a donc une infinité de solutions. Le système d'équations correspondant est

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_3 - 5x_3 &= 6 \\ x_2 + 4x_3 - 9x_4 &= 3 \\ x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

On utilise la variable libre $x_4 = t$. Ainsi, la solution générale du système d'équations est $x_3 = 2 - t$, $x_2 = 3 - 4(2 - t) + 9t = -5 + 13t$ et $x_1 = 6 - 8(2 - t) + 5t = -10 + 13t$.

c) On avait à l'origine un système d'équations à quatre équations et cinq inconnues. La matrice échelonnée contient une ligne complète de zéros, ce qui indique que la quatrième équation était une combinaison linéaire des trois autres. Ne reste donc qu'un système sous-déterminé à trois équations et cinq inconnues :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - 8x_5 &= -3 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 &= 5 \\ x_4 + 3x_5 &= 9. \end{aligned}$$

Ce système a une infinité de solutions et il faudra, pour les exprimer, poser deux variables libres. Les candidates sont les variables correspondant aux colonnes sans un 1 sur la diagonale. On pose donc $x_2 = s$ et $x_5 = t$. On a alors $x_4 = 9-3t$, $x_3 = 5-(9-3t)-6t = -4-3t$ et $x_1 = -3-7s+2(-4-3t)+8t = -11-7s+2t$.

d) La dernière ligne de la matrice échelonnée correspond à l'équation impossible à satisfaire

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1,$$

d'où le système n'a pas de solution.

13.2 a) On donne la solution pour l'élimination gaussienne seulement. La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Les opérations élémentaires à effectuer sur cette matrice pour l'exprimer sous forme échelonnée sont, dans l'ordre :

1. additionner la première ligne à la seconde ;
2. additionner −3 fois la première ligne à la troisième ;
3. additionner −3 fois la première ligne à la troisième ;
4. multiplier la deuxième ligne par −1 ;
5. additionner 10 fois la deuxième ligne à la troisième ;
6. diviser la troisième ligne par −52.

On obtient alors la matrice échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

d'où $x_3 = 2$, $x_2 = -9+5(2) = 1$ et $x_1 = 8-1-2(2) = 3$.

b) On donne la solution pour l'élimination de Gauss–Jordan seulement. La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les opérations élémentaires à effectuer sur cette matrice pour l'exprimer sous forme échelonnée réduite sont les suivantes :

1. multiplier la première ligne par $\frac{1}{2}$;
2. additionner 2 fois la première ligne à la deuxième ;
3. additionner -8 fois la première ligne à la troisième ;
4. additionner la deuxième ligne à la troisième ;
5. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{7}$;
6. additionner -1 fois la deuxième ligne à la première.

On obtient alors la matrice échelonnée réduite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En posant $x_3 = t$, on a la solution générale $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t$ et $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t$.

c) On donne la solution pour l'élimination gaussienne seulement. La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Les opérations élémentaires à effectuer sur cette matrice pour l'exprimer sous forme échelonnée sont, dans l'ordre :

1. additionner -2 fois la première ligne à la seconde ;
2. additionner la première ligne à la troisième ;
3. additionner -3 fois la première ligne à la quatrième ;
4. additionner -1 fois la deuxième ligne à la quatrième ;
5. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{3}$;
6. additionner -1 fois la deuxième ligne à la troisième.

On obtient alors la matrice échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_2 = 2s$ et $x_1 = -1 + 2s - 2s + t = -1 + t$.

d) En échangeant les première et troisième équations, on a la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Après les opérations élémentaires

1. multiplier la première ligne par $\frac{1}{6}$;
2. additionner -3 fois la première ligne à la deuxième ;
3. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{3}$;
4. additionner 2 fois la deuxième ligne à la troisième,

on obtient la matrice échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 5/6 \\ 0 & 1 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La troisième équation étant impossible à satisfaire, le système n'a pas de solution.

13.3 La procédure de réduction des matrices augmentées sous forme échelonnée est similaire à celle utilisée dans les solutions de l'exercice 13.2. On ne donne, ici que les résultats de cette procédure.

a) La matrice échelonnée est

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}$$

et la matrice échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution générale est $x_3 = t$, $x_2 = 5 - 27t$ et $x_1 = 2 - 12t$.

b) La matrice échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 6/5 & 6/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ce système n'a donc pas de solution.

c) La matrice échelonnée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 7/2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution générale est $v = 2$, $y = t$, $x = 3 + t$, $w = -2 - t$ et $u = -6 - 3t - 2s$.

13.4 a) Après quelques opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée correspondant à ce système d'équations, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $x_3 = x_2 = x_1 = 0$, soit la solution triviale.

b) La somme des deux équations donne une nouvelle équation $4x_1 + x_3 = 0$, d'où $x_3 = -4x_1$. De la première équation, on a également $x_2 = -3x_1 - x_3 - x_4 = x_1 - x_4$. En posant $x_1 = -s$ et $x_4 = t$, on a la solution générale $x_3 = 4s$ et $x_2 = -s - t$. Il y a évidemment de multiples autres façons d'exprimer la solution générale en utilisant des variables libres différentes.

c) La matrice échelonnée de ce système d'équations est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc $z = 0$ et, en posant $y = t$, $x = -t$, $w = t$.

13.5 Après des opérations élémentaires sur la matrice augmentée du système d'équations, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{bmatrix}.$$

On constate alors que le système d'équations n'a pas de solution si $a^2 - 16 = 0$ et $a - 4 \neq 0$, donc lorsque $a = -4$. En revanche, si $a^2 - 16 = 0$ et $a - 4 = 0$, soit lorsque $a = 4$, le système a une infinité de solutions. Finalement, si $a^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq 4$, le système a une solution unique.

13.6 La somme (ou la différence) entre deux matrices est définie si les dimensions des matrices sont identiques. Les dimensions du résultat seront les mêmes. Quant au produit, il est défini si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde ; le résultat est une matrice dont le nombre de lignes est égal à celui de la première matrice et le nombre de colonnes à celui de la seconde matrice.

a) Le produit **BA** n'est pas défini.

b) Le résultat de **AC** est une matrice 4×2, donc l'opération **AC** + **D** est définie et le résultat est une matrice 4×2.

c) Le résultat de **AE** est une matrice 4×4, donc l'opération **AE** + **B** n'est pas définie.

d) Le produit **AB** n'est pas défini.

e) La somme **A** + **B** est définie, tout comme le produit **E**(**A** + **B**). Le résultat est une matrice 5×5.

f) Le résultat du produit **AC** est une matrice 4×2, donc **E**(**AC**) est une matrice 5×2.

g) Puisque $\mathbf{E}^T$ est une matrice 4×5, le produit $\mathbf{E}^T\mathbf{A}$ n'est pas défini.

h) Le résultat de $\mathbf{A}^T + \mathbf{E}$ est une matrice 5×4, donc $(\mathbf{A}^T + \mathbf{E})\mathbf{D}$ est une matrice 5×2.

13.7 a) On a

$$\mathbf{D} + \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

b) On a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) On a

$$
\begin{aligned}
(2\mathbf{D}^T - \mathbf{E})\mathbf{A} &= \left(2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

d) On a $(4\mathbf{B})\mathbf{C} + 2\mathbf{B} = 2\mathbf{B}(2\mathbf{C} + \mathbf{I})$. Or la somme entre parenthèses n'est pas définie puisque la matrice $\mathbf{C}$ n'est pas carrée.

e) On a

$$
\begin{aligned}
(-\mathbf{AC})^T + 5\mathbf{D}^T &= \left(-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)^T + 5\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T \\
&= \left(-\begin{bmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}\right)^T + \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -12 & 2 & -5 \\ -6 & -8 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

f) On a

$$\begin{aligned}(\mathbf{BA}^T - 2\mathbf{C})^T &= \left(\begin{bmatrix}4 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\0 & 2 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 8 & 4\\6 & 2 & 10\end{bmatrix}\right)^T\\ &= \left(\begin{bmatrix}12 & -6 & 3\\0 & 4 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 8 & 4\\6 & 2 & 10\end{bmatrix}\right)^T\\ &= \begin{bmatrix}10 & -6\\-14 & 2\\-1 & -8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

g) On a

$$\mathbf{CC}^T = \begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\3 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 1\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & 17\\17 & 35\end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{CC}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}4 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 18\\18 & 30\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40 & 72\\26 & 42\end{bmatrix}$$

h) On a $\mathbf{D}^T\mathbf{E}^T - (\mathbf{ED})^T = (\mathbf{ED})^T - (\mathbf{ED})^T = \mathbf{0}_{3\times 3}$.

i) Pour calculer la trace, il suffit de connaître les éléments de la diagonale. Or l'élément d_{ii} de $\mathbf{DD}^T$ est la somme des carrés des éléments de la ligne i de la matrice $\mathbf{D}$. Par conséquent, $\text{tr}(\mathbf{DD}^T) = (1+25+4)+(1+0+1)+(9+4+16) = 61$.

j) Encore une fois, on se concentre seulement sur les éléments de la diagonale de $4\mathbf{E}^T - \mathbf{D}$. La transposée ne joue donc aucun rôle, ici. Ainsi, $\text{tr}(4\mathbf{E}^T - \mathbf{D}) = (24-1) + (4-0) + (12-4) = 35$.

13.8 Puisque $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, alors

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii}\\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii})\\ &= \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\end{aligned}$$

13.9 a) On a que $(\mathbf{AA}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T$, d'où $\mathbf{AA}^T$ est symétrique. On procède de même pour le second résultat.

b) On a que $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)$, d'où $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$ est antisymétrique.

13.10 Tout d'abord, $\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}$, d'où $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est symétrique. De plus, si $\mathbf{A}$ est symétrique, alors $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$. La matrice $\mathbf{A}$ est donc idempotente.

13.11 a) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement linéairement indépendants à moins que l'un ne soit un multiple de l'autre. Ce n'est pas le cas ici.

b) Trois vecteurs sont linéairement dépendants si l'un est une combinaison linéaire des deux autres. Si c'est le cas, le déterminant de la matrice formée des coordonnées des vecteurs sera nul. Or, ici,

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 39 \neq 0.$$

Les vecteurs sont donc linéairement indépendants.

c) Le second vecteur n'est pas un multiple du premier, donc les vecteurs sont linéairement indépendants.

d) Un ensemble de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement linéairement dépendant.

13.12 Les trois vecteurs se trouvent dans un plan si seulement deux vecteurs sont linéairement indépendants (ceux-ci engendrent un plan dont fait alors partie le troisième).

a) Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

En additionnant la première et la deuxième ligne, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

La troisième ligne n'étant pas un multiple de la deuxième, on constate que la seule solution du système d'équations homogène $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est la solution triviale. Par conséquent, les trois vecteurs sont linéairement indépendants et ne se trouvent pas dans un plan. On pourrait également vérifier que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

b) Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

À la suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il n'y a donc que deux vecteurs linéairement indépendants formant un plan dans cet ensemble.

13.13 On peut interpréter la condition $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ comme le fait que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, ou comme le fait qu'il n'y aucun zéro sur la diagonale et, par conséquent, aucune ligne de zéros dans la matrice. Dans un cas comme dans l'autre, cela signifie que l'inverse existe. En utilisant la technique consistant à transformer la matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ en $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$, on voit immédiatement que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

13.14 Une matrice élémentaire est le résultat d'une opération élémentaire sur la matrice identité.

a) On souhaite inverser les première et troisième ligne de la matrice **A**. Par conséquent,

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Même chose que ci-dessus.

c) La matrice **C** est obtenue à partir de la matrice **A** en additionnant −2 fois la première ligne à la troisième ligne. Par conséquent,

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) De façon similaire, on obtient la matrice **A** en additionnant 2 fois la première ligne de la matrice **C** à la troisième ligne. On a donc

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13.15 Par des opérations élémentaire sur les lignes, on cherche à transformer la matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ en $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$. Ci-dessous, L_i identifie la ligne i d'une matrice, le symbole $\leftarrow$ signifie qu'une ligne est remplacée et le symbole $\leftrightarrow$ que deux lignes sont échangées.

a) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -3L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_2 \leftrightarrow L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -4L_2 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -7 & -4 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_3/10$
$L_1 \leftarrow -3L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right]$$

b) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow -4L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

L'inverse n'existe pas puisque l'on obtient une ligne de zéros du côté gauche de la matrice augmentée.

c) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_3 \leftarrow -L_3/2$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$
$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

d) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow L_1/2$
$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow -3L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow -3L_2 + L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

e) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftarrow L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_3 \leftarrow L_3/2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

13.16 a) Tel que démontré à l'exercice 13.13, l'inverse est
$$\begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix}.$$

b) Pour obtenir l'inverse de cette matrice par la méthode utilisée à l'exercice 13.15, il suffit d'échanger les lignes de bas en haut, puis de diviser celles-ci par k_4, k_3, k_2 et k_1, respectivement. On trouve alors que l'inverse est
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1^{-1} \\ 0 & 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & k_3^{-1} & 0 & 0 \\ k_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) On utilise la méthode de l'exercice 13.15.

Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/k \\ L_2 \leftarrow -L_1+L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2/k \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_2+L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3/k \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_4 \leftarrow -L_3+L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4/k \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{array}\right]$$

13.17 a) Les opérations élémentaires à effectuer pour transformer la matrice **A** en matrice identité sont, dans l'ordre :

1. additionner 5 fois la première ligne à la deuxième ;
2. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{2}$.

Les matrices élémentaires correspondantes sont

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) De la partie a), on a que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Du théorème 6.7 des notes de cours, une matrice élémentaire est inversible et son inverse est aussi une matrice élémentaire. Par conséquent, on peut isoler **A** dans l'équation $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$ pour obtenir $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}$. Or,

$$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

13.18 On a le système d'équations linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Par la même technique que les exercices précédents, on trouve

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 16 \\ -4 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

13.19 a) On a $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{A}x = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On veut par la suite résoudre ce système d'équations homogène, où

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Or, on peut vérifier que le déterminant de cette matrice est non nul, ce qui signifie que le système d'équations n'admet que la solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. On verra au chapitre 14 que cela signifie que 1 n'est pas une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$.

b) On procède comme ci-dessus en résolvant cette fois le système d'équations linéaires homogène $(4\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Or,

$$4\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Après quelques opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le système d'équations a donc une infinité de solutions. En posant $x_3 = t$, on a $x_2 = 0$ et $x_1 = t$. Autrement dit, tout vecteur de la forme

$$\begin{bmatrix} t & 0 & t \end{bmatrix}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{Ax} = 4\mathbf{x}$. Encore une fois, on verra au chapitre 14 que 4 est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ et que $(t, 0, t)$ est un vecteur propre correspondant.

13.20 Tel que vu au théorème 6.13 des notes de cours, les concepts d'inversibilité et de solution d'un système d'équations linéaires homogène sont liés : une matrice carrée $\mathbf{A}$ est inversible si et seulement si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale.

a) Les quatre équations sont linéairement indépendantes, donc la matrice des coefficients est inversible et la seule solution du système est la solution triviale.

b) Puisque que le coefficient de x_2 est 0 dans la seconde équation, les équations sont linéairement dépendantes, d'où la matrice des coefficients est singulière et il existe une infinité de solution pour le système d'équations homogène.

13.21 On voit que la troisième ligne de la matrice est la somme des deux premières. Les lignes n'étant pas linéairement indépendantes, le déterminant est nul.

13.22 a) Les lignes (et les colonnes) sont linéairement indépendantes, donc la matrice est inversible.

b) La troisième colonne est un multiple de la première. Par conséquent, les colonnes ne sont pas linéairement indépendantes et la matrice est singulière.

c) Le déterminant est clairement nul, donc la matrice est singulière.

d) Idem.

13.23 On utilise les propriétés du déterminant énoncées dans le théorème 6.11 des notes de cours.

a) $\det(3\mathbf{A}) = 3^3 \det(\mathbf{A}) = -189$

b) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A}) = -\frac{1}{7}$

c) $\det(2\mathbf{A}^{-1}) = 2^3 / \det(\mathbf{A}) = -\frac{8}{7}$

d) $\det((2\mathbf{A})^{-1}) = 2^{-3} / \det(\mathbf{A}) = -\frac{1}{56}$

13.24 Une matrice n'est pas inversible si son déterminant est nul.

a) Le déterminant de la matrice est $k^2 - 5k + 2$, donc la matrice est singulière lorsque $k = (5 \pm \sqrt{17})/2$.

b) Le déterminant de la matrice est $8k + 8$, donc la matrice est singulière lorsque $k = -1$.

13.25 a) On a

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 14 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

donc $C_{13} = 0$.

b) On a

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 14 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(-12) - 4(-8) + 4(-20) = -96$$

et $C_{23} = (-1)^5(-96) = 96$.

c) On a

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 14 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(-42) - 4(-16) + 4(14) = -48$$

et $C_{22} = (-1)^4(-48) = -48$.

d) On a

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-12) - 3(-20) = 72$$

et $C_{21} = (-1)^3(-72) = -72$.

e) En développant par la deuxième ligne, on a $\det(\mathbf{A}) = -3C_{23} + 3C_{24}$. Or, de ce qui précède, $C_{23} = 96$ et $C_{24} = M_{24} = 24$. Par conséquent, $\det(\mathbf{A}) = -216$.

Chapitre 14

14.1 Dans tous les cas, la matrice mentionnée dans l'énoncé est notée **A**.

a) On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$. D'une part, la forme échelonnée du système d'équations $(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s/2$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est donc $(\frac{1}{2}, 1)$. D'autre part, le système d'équations $(-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 0$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -1$ est donc $(0, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(3, 8, 0, -1), nrow = 2)
> eigen(m)
$values
[1]  3 -1

$vectors
          [,1] [,2]
[1,] 0.4472136    0
[2,] 0.8944272    1
```

On remarque que les vecteurs propres obtenus avec `eigen` sont normalisés de sorte que leur norme soit toujours égale à 1.

b) On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 10)(\lambda + 2) + 36 \\ &= (\lambda - 4)^2. \end{aligned}$$

On a donc une seule valeur propre : $\lambda = 4$. Le système d'équations $(4\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 3s/2$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 4$ est donc $(\frac{3}{2}, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(10, 4, -9, -2), nrow = 2)
> eigen(m)
$values
[1] 4 4

$vectors
           [,1]       [,2]
```

```
[1,] -0.8320503 0.8320503
[2,] -0.5547002 0.5547002
```

c) On a

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 2 & \lambda-1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-3)(\lambda-1)^2+2(\lambda-1)\\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$. En premier lieu, le système d'équations $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

soit $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est donc $(0, 1, 0)$. Deuxièmement, le système d'équations $(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s/2$, $x_2 = s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est donc $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$. Finalement, le système d'équations $(3\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s$, $x_2 = s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est donc $(-1, 1, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(4, -2, -2, 0, 1, 0, 1, 0, 1), nrow = 3)
> eigen(m)
$values
[1] 3 2 1

$vectors
           [,1]       [,2] [,3]
```

```
[1,]  0.5773503 -0.3333333    0
[2,] -0.5773503  0.6666667    1
[3,] -0.5773503  0.6666667    0
```

d) On a

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 8 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-5)(\lambda+1)(\lambda+2)-2(\lambda+1)+48 \\
&= \lambda^3-2\lambda^2-15\lambda+36 \\
&= (\lambda-3)^2(\lambda+4).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -4$. En premier lieu, le système d'équations $(3\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 5s$, $x_2 = -2s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est donc $(5,-2,1)$. Deuxièmement, le système d'équations $(-4\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -2s$, $x_2 = 8s/3$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -4$ est donc $(-2, \frac{8}{3}, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(5, 0, 1, 6, -1, 0, 2, -8, -2), nrow = 3)
> eigen(m)
```

```
$values
[1] -4  3  3

$vectors
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,]  0.5746958 -0.9128709  0.9128709
[2,] -0.7662610  0.3651484 -0.3651484
[3,] -0.2873479 -0.1825742  0.1825742
```

e) On a

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$ et $\lambda_4=-2$. En premier lieu, le système d'équations $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1=2s$, $x_2=3s$, $x_3=s$ et $x_4=t$. Or, $(2s,3s,s,t)=s(2,3,1,0)+t(0,0,0,1)$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda=1$ est donc composée des vecteurs $(2,3,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Deuxièmement, le système d'équations $(-\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1=-2s$, $x_2=s$, $x_3=s$ et $x_4=0$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda=-1$ est donc $(-2,1,1,0)$. Finalement, le système d'équations $(-2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1=-s$, $x_2=0$, $x_3=s$ et $x_4=0$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda=-2$ est donc $(-1,0,1,0)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
+               2, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 1),
+             nrow = 4)
> eigen(m)
$values
[1] -2 -1  1  1

$vectors
              [,1]       [,2] [,3]       [,4]
[1,] -7.071068e-01  0.8164966    0 -0.5345225
[2,]  4.317754e-16 -0.4082483    0 -0.8017837
[3,]  7.071068e-01 -0.4082483    0 -0.2672612
[4,]  0.000000e+00  0.0000000    1  0.0000000
```

14.2 On procède par induction. Premièrement, l'énoncé est clairement vrai pour $k = 1$. On suppose par la suite qu'il est vrai pour $k = n$, soit que si $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, alors $\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$. Ainsi,

$$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^n\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^n\mathbf{x}) = \lambda^n(\mathbf{Ax}) = \lambda^n(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{n+1}\mathbf{x},$$

d'où l'énoncé est vrai pour $k = n+1$. Ceci complète la preuve.

14.3 On va utiliser les résultats de l'exercice 14.2. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1)^2, \end{aligned}$$

d'où les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$. Par conséquent, les valeurs propres de $\mathbf{A}^{25}$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1^{25} = 1$ et $\lambda_3 = (-1)^{25} = -1$. Toujours par le résultat de l'exercice 14.2, les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ correspondant à $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ sont également des vecteurs propres de $\mathbf{A}^{25}$. Or, le système d'équations $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$ et $x_3 = t$. Puisque $(-s-t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$, une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est composée de $(-1, 1, 0)$

et $(-1,0,1)$. D'autre part, le système d'équations $(-\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 2s$, $x_2 = -s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -1$ est donc $(2,-1,1)$.

14.4 On peut démontrer les deux résultats simultanément. Tout d'abord, les résultats sont clairement vrais pour $n = 1$, c'est-à-dire $c_1 = c_n = -x_1$. On suppose ensuite que les résultats sont vrais pour $n = k$, soit

$$\prod_{i=1}^{k}(x-x_i) = x^k + \left(-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)x^{k-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{k} x_i.$$

Si $n = k+1$, on a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1}(x-x_i) &= \left[\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)\right](x-x_{k+1}) \\
&= \left[x^k + \left(-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)x^{k-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{k} x_i\right](x-x_{k+1}) \\
&= x^{k+1} + \left(-\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right)x^k + \cdots + x_{k+1}\prod_{i=1}^{k} x_i \\
&= x^{k+1} + \left(-\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)x^k + \cdots + \prod_{i=1}^{k+1} x_i.
\end{aligned}$$

Les résultats sont donc vrais pour $n = k+1$. Ceci complète la preuve.

14.5 Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
&= \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}),
\end{aligned}$$

d'où l'équation caractéristique est $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$.

14.6 On a $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. En multipliant de part et d'autre (par la gauche) par $\mathbf{A}^{-1}$, on obtient $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, soit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$. Par conséquent, λ^{-1} est une valeur propre de $\mathbf{A}^{-1}$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant.

14.7 On utilise le résultat de l'exercice 14.6 pour éviter de devoir calculer l'inverse de la matrice. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix}\lambda+2 & -2 & -3\\ 2 & \lambda-3 & -2\\ 4 & -2 & \lambda-5\end{vmatrix}\\ &= \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6\\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),\end{aligned}$$

d'où les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Par conséquent, les valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$ sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Toujours par le résultat de l'exercice 14.6, les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ correspondant à $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$ sont également des vecteurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$ correspondant à $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Or, le système d'équations $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s$, $x_2 = 0$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est donc $(1,0,1)$. D'autre part, le système d'équations $(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s/2$, $x_2 = s$ et $x_3 = 0$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ (ou $\lambda = \frac{1}{2}$) est donc $(\frac{1}{2},1,0)$. Finalement, le système d'équations $(3\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s$, $x_2 = s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ (ou $\lambda = \frac{1}{3}$) est donc $(1,1,1)$.

14.8 Le résultat découle simplement du fait que l'équation $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$ est vraie pour tout vecteur $\mathbf{x}$.

14.9 a) Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. On a donc

$$2\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1$. Puisque la matrice $\mathbf{A}$ ne possède qu'un seul vecteur propre, elle n'est pas diagonalisable. Vérification :

```
> m <- matrix(c(2, 1, 0, 2), nrow = 2)
> eigen(m)
$values
[1] 2 2

$vectors
     [,1]          [,2]
[1,]    0  4.440892e-16
[2,]    1 -1.000000e+00
```

b) Le polynôme caractéristique est $(\lambda - 3)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5)$, donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 5$. La forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est composée des vecteurs $(-1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$. D'autre part, la forme échelonnée de la matrice $5\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{rang}(5\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 5$ est $(1, 2, 1)$. Bien que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ ne sont pas toutes distinctes, les vecteurs propres $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalise $\mathbf{A}$ et

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

```
> m <- matrix(c(4, 2, 1, 0, 3, 0, 1, 2, 4), nrow = 3)
> eigen(m)
$values
[1] 5 3 3

$vectors
          [,1] [,2]       [,3]
[1,] 0.4082483    0 -0.7071068
[2,] 0.8164966    1  0.0000000
[3,] 0.4082483    0  0.7071068
```

c) La matrice étant triangulaire, on sait immédiatement que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. La forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est $(1, 0, 0)$. D'autre part, la forme échelonnée de la matrice $2\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{rang}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est $(0, 0, 1)$. Par conséquent, la matrice $\mathbf{A}$ n'a pas trois vecteurs linéairement indépendants, donc elle n'est pas diagonalisable. Vérification :

```
> m <- matrix(c(3, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2), nrow = 3)
> eigen(m)
$values
[1] 3 2 2

$vectors
```

```
     [,1] [,2]          [,3]
[1,]    1    0  0.000000e+00
[2,]    0    0  4.440892e-16
[3,]    0    1 -1.000000e+00
```

d) Le polynôme caractéristique est $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$. Les valeurs propres étant distinctes, la matrice est diagonalisable. Or, la forme échelonnée de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est $(1, 1, 1)$. Deuxièmement, la forme échelonnée de la matrice $2\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{rang}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est $(2, 3, 3)$. Enfin, la forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{rang}(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est $(1, 3, 4)$. Par conséquent,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonalise $\mathbf{A}$ et

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

```
> m <- matrix(c(-1, -3, -3, 4, 4, 1, -2, 0, 3), nrow = 3)
> eigen(m)
```

```
$values
[1] 3 2 1

$vectors
          [,1]      [,2]       [,3]
[1,] 0.1961161 0.4264014 -0.5773503
[2,] 0.5883484 0.6396021 -0.5773503
[3,] 0.7844645 0.6396021 -0.5773503
```

e) La matrice est triangulaire : les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$. La forme échelonnée de la matrice $-2\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(-2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -2$ est composée des vecteurs $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$. D'autre part, la forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{rang}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est composée des vecteurs $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, -1, 0, 1)$. Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ ne sont pas toutes distinctes, mais les vecteurs propres $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, -1, 0, 1)$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalise $\mathbf{A}$ et

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

```
> m <- matrix(c(-2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0,
+               0, 5, 3, 0, 0, -5, 0, 3),
+             nrow = 4)
> eigen(m)
$values
[1]  3  3 -2 -2

$vectors
          [,1]       [,2] [,3] [,4]
[1,] 0.0000000  0.0000000    1    0
[2,] 0.7071068 -0.7071068    0    1
[3,] 0.7071068  0.0000000    0    0
[4,] 0.0000000  0.7071068    0    0
```

Chapitre 15

15.1 La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

est exprimée sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, où

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le système d'équations $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (où $\mathbf{b} = (-3, -22, 3)^T$) peut être exprimé sous la forme $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, soit $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$. On résoud tout d'abord $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ par simple substitution successive. On trouve

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= \frac{-22 - 2y_1}{4} = -5 \\ y_3 &= \frac{3 + 4y_1 + y_2}{2} = -3. \end{aligned}$$

Par la suite, on résoud de même $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} x_3 &= -3 \\ x_2 &= -5 - 2x_3 = 1 \\ x_1 &= -1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{aligned}$$

15.2 On cherche tout d'abord des matrices triangulaires inférieure et supérieure $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$, respectivement, tel que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. On nous donne dans l'énoncé

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 3\mathbf{I} \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre par décomposition LU le système d'équations $\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{b} = (0, 1)$, on pose $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ et résout d'abord $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ par substitution. On a donc le système d'équations

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dont la solution est $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$. Par la suite, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

d'où, finalement, $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$.

Bibliographie

Anton, H. 2000, *Elementary Linear Algebra*, 8e éd., Wiley, ISBN 0-4711705-5-0.

Moler, C. et C. Van Loan. 1978, «Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix», *SIAM Review*, vol. 20, p. 801–836.

Ce document a été produit avec le système de mise en page LaTeX. Le texte principal est en Adobe Utopia 11 points, le code informatique en Bera Mono (un clone de Bitstream Vera) et les titres en Adobe Myriad Pro. Les graphiques ont été réalisés avec R.