Exercices
de
méthodes numériques

Avec solutions

Exercices
de
méthodes numériques

Avec solutions

Vincent Goulet

École d'actuariat, Université Laval

Historique de publication

Janvier 2008 : Première édition

Code source
Le code source LaTeX de ce document est disponible à l'adresse

http://vgoulet.act.ulaval.ca/methodes_numeriques/

ou en communiquant directement avec l'auteur.

ISBN 978-2-9809136-8-6
Dépôt légal – Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2008
Dépôt légal – Bibliothèque et Archives Canada, 2008

Introduction

Ce document est une collection des exercices distribués par l'auteur dans ses cours de Méthodes numériques en actuariat entre 2005 et 2007, cours donnés à l'École d'actuariat de l'Université Laval. Certains exercices sont le fruit de l'imagination de l'auteur, alors que plusieurs autres sont des adaptations d'exercices tirés des ouvrages cités dans la bibliographie.

C'est d'ailleurs afin de ne pas usurper de droits d'auteur que ce document est publié selon les termes du contrat Paternité-Partage des conditions initiales 2.5 Canada de Creative Commons. Il s'agit donc d'un document «libre» que quiconque peut réutiliser et modifier à sa guise, à condition que le nouveau document soit publié avec le même contrat.

Le cours de Méthodes numériques est séparé en quatre parties plus ou moins étanches les unes aux autres :

I. Introduction à la programmation en S ;

II. Simulation stochastique ;

III. Analyse numérique ;

IV. Algèbre linéaire.

Tant la théorie que les exercices de la première partie se trouvent dans Goulet (2007). Ce document contient donc les exercices relatifs aux parties II–IV. Nous invitons le lecteur à consulter, entre autres, Ripley (1987), Gentle (1998), Burden et Faires (1988) et Anton (2000) pour d'excellents exposés sur les sujets pré-cités.

Les réponses des exercices se trouvent à la fin de chacun des chapitres et les solutions complètes en annexe du document.

Nous remercions d'avance les lecteurs qui voudront bien nous faire part de toute erreur ou omission dans les exercices ou leurs solutions.

Enfin, nous tenons à remercier MM. Mathieu Boudreault, Sébastien Auclair et Louis-Philippe Pouliot pour leur précieuse collaboration lors de la rédaction des exercices et des solutions.

Vincent Goulet <vincent.goulet@act.ulaval.ca>
Québec, décembre 2007

Table des matières

Deuxième partie

Simulation stochastique

2 Génération de nombres aléatoires

L'exercice 2.3 requiert d'installer le package R `rgl`, disponible sur CRAN[1]. Pour un utilisateur ayant les privilèges d'administrateur, entrer simplement à la ligne de commande

```
> install.packages("rgl")
```

Pour utiliser les fonctions du package, il faut ensuite charger le package en mémoire avec

```
> library(rgl)
```

Un utilisateur sans droit d'écriture dans le dossier `C:\Program Files` (sous Windows) devra installer le package dans le dossier de son choix et spécifier celui-ci avec l'argument `lib` de la fonction `install.packages`. Il faudra également utiliser l'argument `lib.loc` de la fonction `library` lors du chargement du package. Par exemple :

```
> install.packages("rgl", lib = "R:/R/library")
> library(rgl, lib.loc = "R:/R/library")
```

2.1 Calculer cinq nombres pseudo-aléatoires avec chacun des générateurs congruentiels ci-dessous. Dans tous les cas, $m = 64$. Choisir l'amorce.

a) $a = 29$, $c = 17$

b) $a = 9$, $c = 1$

c) $a = 13$, $c = 0$

d) $a = 11$, $c = 0$

2.2 a) Écrire une fonction en S faisant la mise en oeuvre du générateur congruentiel multiplicatif avec $m = 2^{13} - 1$ et $a = 17$. Générer 500 nombres pseudo-aléatoire, puis faire un graphique des paires (x_i, x_{i+1}). Sur combien de lignes les points sont-ils alignés ?

b) Répéter la partie a) avec $a = 85$.

[1] `http://cran.r-project.org`

2.3 Le générateur RANDU, qui a longtemps été le plus populaire générateur de nombres pseudo-aléatoires, est défini ainsi :

$$x_i = 65539 x_{i-1} \bmod 2^{31}.$$

Les nombres aléatoires obtenus avec ce générateur présentent une excellente structure aléatoire en une et en deux dimensions. On peut toutefois démontrer mathématiquement qu'en trois dimensions, les triplets (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) se retrouvent sur quinze plans ou moins, rendant ainsi assez prévisible la valeur de x_{i+2} étant donné les deux autres valeurs.

a) Générer une suite $\{x_i\}$ de longueur 20 002 avec le générateur RANDU et poser $u_i = 2^{-31} x_i$. Pour tous les triplets (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}), sélectionner les cas où $0{,}5 \leq u_{i+1} \leq 0{,}51$ et faire un graphique de u_{i+2} en fonction de u_i. Commenter le graphique obtenu.

b) Générer une suite $\{x_i\}$ de longueur 1 002 avec le générateur RANDU. À l'aide de R, placer les triplets (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}) dans un graphique en trois dimensions avec la fonction `rgl.points` du package `rgl`, puis faire pivoter le graphique jusqu'à ce que les quinze plans sur lesquels se trouvent les points soient visibles. (On peut également utiliser la fonction `spin` de S-Plus.)

3 Simulation de variables aléatoires

3.1 La transformation de Box–Muller est populaire pour simuler des nombres normaux à partir de nombres uniformes. Soit $U_1 \sim U(0,1)$ et $U_2 \sim U(0,1)$ deux variables aléatoires indépendantes et

$$\begin{aligned} X_1 &= (-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 &= (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2). \end{aligned}$$

Les questions ci-dessous font appel à des notions de transformation de variables aléatoires étudiées dans le cours ACT-16384.

a) Vérifier de manière heuristique que la transformation ci-dessus est bijective de $\{(u_1, u_2); 0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1\}$ à $\{(x_1, x_2); -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$, c'est-à-dire qu'elle associe à un point (u_1, u_2) un et un seul point (x_1, x_2).

b) Démontrer que la transformation inverse est

$$\begin{aligned} U_1 &= e^{-(X_1^2+X_2^2)/2} \\ U_2 &= \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{X_2}{X_1}. \end{aligned}$$

c) Démontrer que X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes chacune distribuée selon une $N(0,1)$.

d) Vérifier la validité de ces formules à l'aide de Excel, R ou S-Plus. La procédure à suivre en S est expliquée ici.

   i) Simuler deux séries de nombres uniformes sur l'intervalle $(0,1)$ avec la fonction `runif`.

   ii) Transformer les nombres uniformes en nombres normaux sans utiliser de boucles grâce à la fonction `outer` et deux fonctions anonymes.

   iii) Tracer un histogramme des résultats avec

```
> hist(x, prob = TRUE)
```

   pour voir si la distribution des nombres transformés est approximativement normale.

   iv) On peut ajouter une courbe normale théorique au graphique avec

```
> curve(dnorm(x), add = TRUE)
```

pour fins de comparaison.

3.2 La distribution de Laplace, ou double exponentielle, est obtenue comme la différence entre deux distributions exponentielles identiques et indépendantes. Sa fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Proposer une ou plusieurs façons de simuler des nombres issus de cette distribution.

3.3 Faire la mise en oeuvre informatique (dans le langage de votre choix) de l'algorithme de simulation suivant. Il s'agit d'un algorithme pour simuler des observations d'une loi Gamma$(\alpha, 1)$, où $\alpha > 1$.

1. Générer u_1 et u_2 indépendemment d'une loi $U(0, 1)$ et poser

$$v = \frac{(\alpha - \frac{1}{6\alpha})u_1}{(\alpha - 1)u_2}.$$

2. Si

$$\frac{2(u_2 - 1)}{\alpha - 1} + v + \frac{1}{v} \leq 2,$$

alors retourner le nombre $x = (\alpha - 1)v$. Sinon, si

$$\frac{2 \log u_2}{\alpha - 1} - \log v + v \leq 1,$$

alors retourner le nombre $x = (\alpha - 1)v$.

3. Répéter au besoin la procédure depuis l'étape 1.

Faire les vérifications empiriques usuelles de la validité de l'algorithme.

3.4 Quelle procédure pourrait-on suivre pour simuler des nombres d'une loi Gamma(α, λ) où $\alpha > 1$?

3.5 a) Démontrer que si $X|\Theta \sim$ Exponentielle(Θ) et $\Theta \sim$ Gamma(α, λ), alors $X \sim$ Pareto(α, λ). La fonction de densité de probabilité d'une loi de Pareto est

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(x + \lambda)^{\alpha+1}}, \quad x > 0.$$

b) Utiliser le résultat ci-dessus pour proposer un algorithme de simulation de nombres issus d'une loi de Pareto. Faire la mise en oeuvre informatique de cet algorithme et les vérifications d'usage de sa validité.

3.6 La fonction de densité de probabilité de la loi de Pareto translatée est

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \lambda.$$

Simuler trois valeurs d'une telle distribution avec $\alpha = 2$ et $\lambda = 1\,000$ à l'aide de la méthode de l'inverse et du générateur congruentiel linéaire suivant :

$$x_n = (65x_{n-1} + 1) \bmod 2\,048.$$

Utiliser une amorce de 12.

3.7 Simuler à l'aide de R, S-Plus ou Excel des observations du mélange

$$0{,}6 f_1(x) + 0{,}4 f_2(x),$$

où $f_1(x)$ et f_2 sont les densités de deux lois log-normales, la première de paramètres $\mu = 3{,}1$ et $\sigma^2 = 0{,}6$; la seconde de paramètres $\mu = 4{,}3$ et $\sigma^2 = 0{,}4$. Tracer par la suite un histogramme des observations, y superposer la densité théorique de la distribution simulée et vérifier que les deux graphiques correspondent.

3.8 Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle $(0, 1)$ et soit la transformation

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{U_1}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 &= \sqrt{U_1}\sin(2\pi U_2). \end{aligned}$$

Démontrer que la distribution conjointe de X_1 et X_2 est uniforme sur le disque de rayon de 1 centré en $(x_1, x_2) = (0, 0)$. À quoi ce résultat peut-il servir ?

3.9 a) Soit $Y_1 \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ et $Y_2 \sim \text{Gamma}(\beta, 1)$ deux variables aléatoires indépendantes. Démontrer que

$$X = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \sim \text{Bêta}(\alpha, \lambda).$$

b) Utiliser le résultat en a) pour proposer un algorithme de simulation d'observations d'une loi $\text{Bêta}(\alpha, \lambda)$.

c) Faire la mise en oeuvre informatique de l'algorithme en b) ainsi que les vérifications d'usage.

3.10 a) Dans la méthode d'acceptation-rejet, un nombre y tiré d'une variable aléatoire Y avec fonction de densité de probabilité $g_Y(\cdot)$ est accepté comme réalisation d'une variable aléatoire X avec fonction de densité de probabilité $f_X(\cdot)$ si

$$U \leq \frac{f_X(y)}{c g_Y(y)},$$

où $U \sim U(0,1)$. Calculer la probabilité d'accepter une valeur lors de toute itération de la méthode d'acceptation-rejet, c'est-à-dire

$$\Pr\left[U \leq \frac{f_X(Y)}{c g_Y(Y)}\right].$$

Astuce : utiliser la loi des probabilités totales en conditionnant sur $Y = y$.

b) Déterminer la distribution du nombre d'essais avant d'accepter un nombre y dans la méthode d'acceptation-rejet.

c) Déterminer le nombre moyen d'essais avant d'accepter un nombre y dans la méthode d'acceptation-rejet.

3.11 Soit X une variable aléatoire continue définie sur l'intervalle (a, b), où a et b sont des nombres réels. Pour simuler des observations de cette variable aléatoire par la méthode d'acceptation-rejet, on peut toujours inscrire la fonction de densité de probabilité de X dans un rectangle de hauteur M, ou M est le mode de X.

a) Énoncer l'algorithme d'acceptation-rejet découlant d'une telle procédure.

b) Calculer l'*efficacité* de l'algorithme en a), soit la probabilité d'accepter une valeur lors d'une itération de l'algorithme.

3.12 Considérer le problème de simulation d'observations d'une loi Bêta$(3, 2)$ à l'aide de la méthode d'acceptation-rejet.

a) Calculer l'efficacité de l'algorithme développé au problème 3.11 lorsque adapté au cas présent.

b) Calculer l'efficacité de l'algorithme développé dans l'exemple 3.7 des notes de cours, où l'on a déterminé que

$$f_X(x) \leq \begin{cases} 3x, & 0 < x < 0{,}8 \\ 12 - 12x, & 0{,}8 \leq x < 1. \end{cases}$$

c) Faire la mise en oeuvre en S et/ou VBA de l'algorithme le plus efficace entre celui de la partie a) et celui de la partie b). Vérifier la fonction en superposant l'histogramme d'un grand échantillon obtenu avec cette fonction et la vraie fonction de densité de la loi bêta.

3.13 La fonction S de la figure 3.1 permet de simuler des observations de la distribution Bêta(α, β).

a) Identifier le type d'algorithme utilisé dans cette fonction.

b) On vous donne également les valeurs suivantes, obtenues dans R :

```
> set.seed(12345)
> runif(10)
```

```
simul <- function(n, alpha, beta)
{
    M <- dbeta((alpha - 1)/(alpha + beta - 2),
               alpha, beta)
    x <- numeric(n)
    i <- 1
    repeat
    {
        u <- runif(1)
        if (M * runif(1) <= dbeta(u, alpha, beta))
        {
            x[i] <- u
            i <- i + 1
        }
        if (i > n)
            break
    }
    x
}
```

FIG. 3.1 — *Fonction de simulation d'une loi Bêta(α, β) pour l'exercice 3.13.*

```
 [1] 0.72 0.88 0.76 0.89 0.46 0.17 0.33 0.51 0.73
[10] 0.99
```

Évaluer le résultat des expressions suivantes :

```
> set.seed(12345)
> simul(2, alpha = 2, beta = 3)
```

3.14 a) Démontrer que, si $0 < \alpha < 1$,

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leq \begin{cases} x^{\alpha-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

b) Développer un algorithme d'acceptation-rejet pour simuler des observations d'une loi Gamma$(\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$ à partir du résultat en a).

3.15 On vous donne l'inégalité suivante, valide pour $\alpha \geq 1$:

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leq \alpha^{\alpha-1}e^{-x/\alpha+1-\alpha}, \quad x > 0.$$

Utiliser cette inégalité pour justifier l'algorithme d'acceptation-rejet suivant pour simuler des observations d'une loi Gamma$(\alpha, 1)$ avec $\alpha \geq 1$:

1. Simuler deux observations indépendantes v_1 et v_2 d'une loi Exponentielle(1).

2. Si $v_2 < (\alpha - 1)(v_1 - \ln v_1 - 1)$, poser $x = \alpha v_1$. Sinon, retourner à l'étape 1.

3.16 Évaluer l'intégrale
$$\int_0^1 \ln(5x+4)\,dx$$
exactement ainsi qu'à l'aide de l'intégration Monte Carlo. Comparer les réponses.

3.17 Évaluer l'intégrale
$$\int_0^1 \int_0^1 e^{2xy} \ln(3x+y^2)\,dxdy$$
à l'aide de l'intégration Monte Carlo. Comparer la réponse obtenue avec la vraie valeur, 1,203758, obtenue à l'aide de Maple.

3.18 Soit l'intégrale
$$\theta = \int_0^\infty x^2 \sin(\pi x) e^{-x/2}\,dx.$$

a) Évaluer cette intégrale par Monte Carlo en effectuant un changement de variable.

b) Évaluer cette intégrale par Monte Carlo par échantillonnage direct d'une loi de probabilité appropriée.

3.19 Soit $X_1, \dots, X_{25}$ un échantillon aléatoire de taille 25 d'une distribution $N(0,1)$ et soit $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(25)}$ les statistiques d'ordre de cet échantillon, c'est-à-dire les données de l'échantillon triées en ordre croissant. Estimer $E[X_{(5)}]$ par intégration Monte Carlo. Comparer la réponse obtenue avec la vraie espérance, $-0{,}90501$.

Réponses

3.6 1619, 1126, 2103

3.10 a) $1/c$ b) Géométrique$(1/c)$ commençant à 1 c) c

3.11 b) $1/(M(b-a))$

3.12 a) $9/16$ b) $4/5$

3.13 b) `[1] 0.46 0.33`

3.16 Valeur exacte : 1,845969

3.18 Valeur exacte : $-0{,}055292$

Troisième partie

Analyse numérique

4 Arithmétique des ordinateurs

4.1 Convertir les nombres décimaux suivants en base 6, puis en binaire.

a) 119

b) 343

c) 96

d) 43

4.2 Convertir les nombres hexadécimaux suivants en nombres décimaux.

a) A1B

b) 12A

c) B41

d) BAFFE

4.3 a) Utiliser l'algorithme de conversion des nombres en base b vers la base 10 et les idées de l'exemple 4.6 des notes de cours pour trouver une formule générale donnant la position de l'élément a_{ijk} d'un tableau de dimensions $I \times J \times K$ dans l'ordre de la liste des éléments du tableau. Utiliser l'ordre lexicographique, où le tableau est rempli dans l'ordre $a_{111}, a_{112}, \dots, a_{11K}, a_{121}, a_{122}, \dots$

b) Répéter la partie a) en utilisant l'ordre S, où le tableau est plutôt rempli dans l'ordre $a_{111}, a_{211}, \dots, a_{I11}, a_{121}, a_{221}, \dots$. Comparer la réponse avec celle de l'exercice 3.7 b) de Goulet (2007).

4.4 La norme IEEE 754 pour les nombres en virgule flottante (S, E, F) en simple précision est le suivant :

– longueur totale de $m = 32$ bits ;

– 1 bit pour le signe S (valeur de 0 pour un nombre positif) ;

– 8 bits pour l'exposant E, avec un biais de 127 ;

– 23 bits pour la partie fractionnaire F.

Un nombre x est donc représenté comme

$$x = (-1)^S \times 2^{E-127} \times 1{,}F.$$

Trouver les valeurs ε, $x_{\max}$ et $x_{\min}$ pour les nombres en simple précision. Comparer les résultats avec les limites du type `Single` en VBA.

4.5 Outre les types `Single` et `Double` pour représenter des nombres en virgule flottante, le VBA dispose également des types `Integer`, `Long` et `Byte` pour représenter des nombres entiers. Comme son nom l'indique, le type `Byte` utilise huit bits d'espace mémoire et ne sert que pour les entiers positifs. Les types `Integer` et `Long` requièrent 16 et 32 bits, respectivement, et peuvent contenir des nombres négatifs. En supposant qu'un bit est réservé pour le signe dans ces deux derniers types (ce qui n'est pas exactement le cas), trouver le plus grand nombre admissible pour chaque type de données.

4.6 Représenter les nombres suivants comme des nombres en virgule flottante en simple précision selon la norme IEEE 754.

a) $-1\,234$

b) 55

c) $8\,191$

d) -10

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{1}{100}$

4.7 Les nombres ci-dessous sont représentés en format binaire selon la norme IEEE 754 pour les nombres en simple précision. Convertir ces nombres en décimal.

a) $\boxed{0}\,\boxed{00111101}\,\boxed{10010000100000000000000}$

b) $\boxed{1}\,\boxed{00111101}\,\boxed{10010000100000000000000}$

c) $\boxed{0}\,\boxed{10000100}\,\boxed{10010000100000000000000}$

d) $\boxed{1}\,\boxed{10000100}\,\boxed{10010000100000000000000}$

4.8 Trouver, pour les nombres des parties a) et c) de l'exercice 4.7, le nombre suivant et le nombre précédent en représentation binaire.

Réponses

La notation x_b signifie que le nombre x est en base b. On omet généralement b pour les nombres en base 10.

4.1 a) 315_6, 1110111_2

b) 1331_6, 101010111_2

c) 240_6, 1100000_2

d) 111_6, 101011_2

4.2 a) 2 587 b) 298 c) 2 881 d) 765 950

4.3 a) $k + K(j - 1 + J(i - 1))$

b) $i + I(j - 1 + J(k - 1))$

4.4 $\varepsilon = 2^{-23} = 1{,}192 \times 10^{-7}$, $x_{\text{max}} = (2 - 2^{-23}) \times 2^{127} = 3{,}403 \times 10^{38}$, $x_{\text{min}} = 2^{-126} = 1{,}175 \times 10^{-38}$ (nombre normal) ou $x_{\text{min}} = 2^{-149} = 1{,}401 \times 10^{-45}$ (nombre sous-normal)

4.5 Type `Byte` : 255 ; type `Integer` : 32 767 ; type `Long` : 2 147 483 647.

4.6 a) $\boxed{1}\ \boxed{10001001}\ \boxed{00110100100000000000000}$

b) $\boxed{0}\ \boxed{10000100}\ \boxed{10111000000000000000000}$

c) $\boxed{0}\ \boxed{10001011}\ \boxed{11111111111100000000000}$

d) $\boxed{1}\ \boxed{10000010}\ \boxed{01000000000000000000000}$

e) $\boxed{0}\ \boxed{01111110}\ \boxed{01010101010101010101010}$

f) $\boxed{0}\ \boxed{01111000}\ \boxed{01000111101011100001010}$

4.7 a) $2{,}120\,229\,346 \times 10^{-20}$ b) $-2{,}120\,229\,346 \times 10^{-20}$ c) 50,0625 d) $-50{,}0625$

4.8 a) $2{,}120\,229\,508 \times 10^{-20}$ et $2{,}120\,229\,185 \times 10^{-20}$ c) 50,062 503 815 et 50,062 496 185

5 Résolution d'équations à une variable

5.1 Écrire des fonctions S pour effectuer les calculs des algorithmes de bissection, du point fixe, de Newton–Raphson et de la sécante. Outre les arguments communs à toutes les fonctions que sont le niveau de tolérance ε, le nombre maximal d'itérations $N_{\max}$ et une valeur booléenne spécifiant si les valeurs successives des itérations doivent être affichées à l'écran, les fonctions doivent compter les arguments mentionnés dans le tableau ci-dessous.

Méthode d'approximation	Arguments de la fonction S
Bissection	$f(x)$, a, b
Point fixe	$f(x)$, x_0
Newton–Raphson	$f(x)$, $f'(x)$, x_0
Sécante	$f(x)$, x_0, x_1

5.2 Trouver la solution des équations suivantes par les méthodes de bissection, de Newton-Raphson et de la sécante.

a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ pour $1 \leq x \leq 4$

b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ pour $-4 \leq x \leq 0$

c) $x - 2^{-x} = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$

d) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ pour $1 \leq x \leq 2$

e) $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$

5.3 Déterminer la valeur numérique de $\sqrt{2}$ à l'aide de la méthode de bissection dans l'intervalle $[0, 2]$ avec 10 itérations. Comparer avec la vraie valeur.

5.4 Soit $\{x_n\}$ une suite définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrer que $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$, mais que la suite diverge néanmoins. Ceci illustre que l'erreur absolue peut être un mauvais critère d'arrêt dans les méthodes numériques.

5.5 Considérer la fonction $g(x) = 3^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

a) Vérifier si les hypothèses du théorème 5.1 des notes de cours quant à l'existence et l'unicité d'un point fixe dans $[0, 1]$ sont satisfaites.

b) Déterminer graphiquement l'existence et l'unicité d'un point fixe de $g(x)$ dans $[0, 1]$ puis, le cas échéant, calculer ce point fixe.

5.6 Vérifier que les cinq fonctions $g_1, \dots, g_5$ de l'exemple 5.4 des notes de cours ont toutes un point fixe en x^* lorsque $f(x^*) = 0$, où $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

5.7 Soit $g(x) = 4x^2 - 14x + 14$. Pour quels intervalles de valeurs de départ la procédure de point fixe converge-t-elle et diverge-t-elle ?

5.8 Les trois fonctions ci-dessous sont toutes des candidates pour faire l'approximation, par la méthode du point fixe, de $\sqrt[3]{21}$:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{20x + 21x^{-2}}{21} \\
g_2(x) &= x - \frac{x^3 - 21}{3x^2} \\
g_3(x) &= x - \frac{x^4 - 21x}{x^2 - 21}.
\end{aligned}$$

Classer ces fonctions en ordre décroissant de vitesse de convergence de l'algorithme du point fixe. *Astuce* : comparer les valeurs des dérivées autour du point fixe.

5.9 Démontrer, à l'aide du théorème 5.1 des notes de cours, que la fonction $g(x) = 2^{-x}$ possède un point fixe unique dans l'intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$. Calculer par la suite ce point fixe à l'aide de votre fonction S.

5.10 Vérifier graphiquement que le théorème 5.1 des notes de cours demeure valide si la condition $|g'(x)| \leq k < 1$ est remplacée par $g'(x) \leq k < 1$.

5.11 Utiliser la méthode de Newton–Raphson pour trouver le point sur la courbe $y = x^2$ le plus près du point $(1, 0)$. *Astuce* : minimiser la distance entre le point $(1, 0)$ et le point (x, x^2).

5.12 Le taux de rendement interne d'une série de flux financiers $\{CF_t\}$ est le taux i tel que

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1 + i)^t} = 0.$$

Écrire une fonction S permettant de calculer le taux de rendement interne d'une série de flux financiers quelconque à l'aide de la méthode de Newton–Raphson. Les arguments de la fonction sont un vecteur `CF` et un scalaire `erreur.max`. Au moins un élément de `CF` doit être négatif pour représenter une sortie de fonds. Dans tous les cas, utiliser $i = 0{,}05$ comme valeur de départ.

5.13 Refaire l'exercice 5.12 en VBA en composant une fonction accessible dans une feuille Excel et comparer le résultat avec la fonction Excel `TRI()`.

5.14 a) Écrire une fonction S pour estimer par la méthode du maximum de vraisemblance le paramètre θ d'une loi gamma de paramètre de forme $\alpha = 3$ et de paramètre d'échelle $\theta = 1/\lambda$ — de moyenne 3θ, donc — à partir d'un échantillon aléatoire $x_1, \dots, x_n$. *Astuce* : maximiser la fonction de log-vraisemblance plutôt que la fonction de vraisemblance.

b) Simuler 20 observations d'une loi gamma avec paramètre de forme $\alpha = 3$ et moyenne 3 000, puis estimer le paramètre d'échelle θ par le maximum de vraisemblance.

5.15 Refaire l'exercice 5.14 à l'aide d'une routine VBA. Comparer votre réponse avec celle obtenue à l'aide du Solveur de Excel.

5.16 À l'aide de la méthode du point fixe, trouver le taux d'intérêt i tel que

$$a^{(12)}_{\overline{10}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i^{(12)}} = 8,$$

où

$$\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} = 1 + i.$$

Comparer les résultats obtenus avec la méthode de Newton–Raphson.

Réponses

5.7 Converge pour $x_0 \in [1{,}5, 2]$; diverge pour $x_0 \leq 1{,}5$ et $x_0 > 2$

5.8 g_2, g_1 ; g_3 ne converge pas

5.11 0,589755

5.16 0,0470806

Quatrième partie

Algèbre linéaire

6 Révision d'algèbre linéaire

6.1 Pour chaque cas ci-dessous, supposer que la matrice donnée est une matrice augmentée d'un système d'équations linéaires exprimée sous forme échelonnée. Résoudre le système d'équations.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.2 Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants par l'élimination gaussienne et l'élimination de Gauss–Jordan.

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} - 2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$$

6.3 Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants par l'élimination gaussienne et l'élimination de Gauss–Jordan.

a) $$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x \qquad &= 7 \end{aligned}$$

6.4 Résoudre les systèmes d'équations homogènes suivants.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

6.5 Pour quelle valeur de a le système d'équations

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

n'aura-t-il aucune solution ? Une seule solution ? Une infinité de solutions ?

6.6 Soit les matrices $\mathbf{A}_{4\times 5}$, $\mathbf{B}_{4\times 5}$, $\mathbf{C}_{5\times 2}$, $\mathbf{D}_{4\times 2}$ et $\mathbf{E}_{5\times 4}$. Lesquelles des expressions matricielles suivantes sont définies ? Pour les expressions définies, donner les dimensions de la matrice résultante.

a) $\mathbf{BA}$ b) $\mathbf{AC} + \mathbf{D}$ c) $\mathbf{AE} + \mathbf{B}$ d) $\mathbf{AB} + \mathbf{B}$

e) $\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ f) $\mathbf{E}(\mathbf{AC})$ g) $\mathbf{E}^T\mathbf{A}$ h) $(\mathbf{A}^T + \mathbf{E})\mathbf{D}$

6.7 Soit les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer les expressions suivantes (lorsque possible).

a) $\mathbf{D} + \mathbf{E}$ b) $\mathbf{AB}$

c) $(2\mathbf{D}^T - \mathbf{E})\mathbf{A}$ d) $(4\mathbf{B})\mathbf{C} + 2\mathbf{B}$

e) $(-\mathbf{AC})^T + 5\mathbf{D}^T$ f) $(\mathbf{BA}^T - 2\mathbf{C})^T$

g) $\mathbf{B}^T(\mathbf{CC}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A})$ h) $\mathbf{D}^T\mathbf{E}^T - (\mathbf{ED})^T$

i) $\mathrm{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)$ j) $\mathrm{tr}(4\mathbf{E}^T - \mathbf{D})$

6.8 Démontrer que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices $n \times n$, alors $\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$, où $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

6.9 Une matrice $\mathbf{A}$ est dite *symétrique* si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ et *antisymétrique* si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Démontrer les énoncés suivants, étant donné une matrice carrée $\mathbf{A}$.

a) $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ et $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sont symétriques.

b) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ est antisymétrique.

6.10 Démontrer que si $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}$, alors $\mathbf{A}$ est symétrique et $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. Une matrice qui satisfait cette dernière égalité est dite *idempotente*.

6.11 Lesquels des ensembles de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivants sont linéairement dépendants ?

a) $(4, -1, 2)$, $(-4, 10, 2)$

b) $(-3, 0, 4)$, $(5, -1, 2)$, $(1, 1, 3)$

c) $(8, -1, 3)$, $(4, 0, 1)$

d) $(-2, 0, 1)$, $(3, 2, 5)$, $(6, -1, 1)$, $(7, 0, -2)$

6.12 Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Déterminer si les trois vecteurs se trouvent dans un plan.

a) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$

b) $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$

6.13 Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

où $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$. Démontrer que $\mathbf{A}$ est inversible et trouver son inverse.

6.14 Soit les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Trouver les matrices élémentaires $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ satisfaisant les équations suivantes.

a) $\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{B}$ b) $\mathbf{E}_2\mathbf{B} = \mathbf{A}$ c) $\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \mathbf{C}$ d) $\mathbf{E}_4\mathbf{C} = \mathbf{A}$

6.15 Utiliser la méthode des opérations élémentaires sur les lignes pour trouver l'inverse des matrices suivantes, si elle existe. Le cas échéant, vérifier votre réponse par multiplication de la matrice et de son inverse.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.16 Trouver l'inverse des matrices suivantes, où $k, k_1, \ldots k_4$ sont des constantes non nulles.

a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

6.17 Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Trouver des matrices élémentaires $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ tel que $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

b) Écrire $\mathbf{A}^{-1}$ comme le produit de deux matrices élémentaires.

c) Écrire $\mathbf{A}$ comme le produit de deux matrices élémentaires.

6.18 Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de la matrice inverse :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 4. \end{aligned}$$

6.19 Soit la matrice et le vecteur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

a) Vérifier que l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ peut s'écrire sous la forme $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et utiliser cette formule pour résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ pour $\mathbf{x}$.

b) Résoudre $\mathbf{Ax} = 4\mathbf{x}$.

6.20 Sans faire aucun calcul, déterminer si les systèmes d'équations homogènes ci-dessous admettent une solution autre que la solution triviale, puis déterminer si la matrice des coefficients est inversible.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 \end{aligned}$

6.21 Par simple inspection visuelle de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

expliquer pourquoi $\det(\mathbf{A}) = 0$.

6.22 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6.23 Soit $\mathbf{A}$ une matrice 3×3 dont $\det(\mathbf{A}) = -7$. Trouver les déterminants suivants.

a) $\det(3\mathbf{A})$ b) $\det(\mathbf{A}^{-1})$ c) $\det(2\mathbf{A}^{-1})$ d) $\det((2\mathbf{A})^{-1})$

6.24 Pour quelle(s) valeur(s) de k les matrices ci-dessous ne sont pas inversibles ?

a) $\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6.25 Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trouver les valeurs suivantes.

a) M_{13} et C_{13}

b) M_{23} et C_{23}

c) M_{22} et C_{22}

d) M_{21} et C_{21}

e) $\det(\mathbf{A})$

Réponses

6.1 a) $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$

b) $x_1 = -10 + 13t, x_2 = -5 + 13t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$

c) $x_1 = -11 - 7s + 2t, x_2 = s, x_3 = -4 - 3t, x_4 = 9 - 3t, x_5 = t$

d) pas de solution

6.2 a) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$

b) $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, x_3 = t$

c) $x_1 = t - 1, x_2 = 2s, x_3 = s, x_4 = t$

d) pas de solution

6.3 a) $x_1 = 2 - 12t, x_2 = 5 - 27t, x_3 = t$

b) pas de solution

c) $u = -2s - 3t - 6, v = s, w = -t - 2, x = t + 3, y = t$

6.4 a) solution triviale

b) $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$

c) $w = t, x = -t, y = t, z = 0$

6.5 Aucune solution : $a = -4$. Une seule solution : $a \neq \pm 4$. Infinité de solutions : $a = 4$.

6.6 a) non défini b) 4×2 c) non défini d) non défini e) 5×5 f) 5×2 g) non défini h) 5×2

6.7 a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ d) non défini

e) $\begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i) 61 j) 35

6.11 d) seulement

6.12 a) non b) oui

6.14 a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.15 a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ b) n'existe pas c) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6.16 a) $\begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1^{-1} \\ 0 & 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & k_3^{-1} & 0 & 0 \\ k_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{bmatrix}$

6.17 a) $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6.18 $x_1 = \frac{16}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$, $x_3 = -\frac{11}{3}$

6.20 a) solution triviale seulement, matrice inversible b) infinité de solutions, matrice singulière

6.22 a) oui b) non c) non d) non

6.23 a) -189 b) $-\frac{1}{7}$ c) $-\frac{8}{7}$ d) $-\frac{1}{56}$

6.24 a) $(5 \pm \sqrt{17})/2$ b) -1

6.25 a) $M_{13} = 0$, $C_{13} = 0$

b) $M_{23} = -96$, $C_{23} = 96$

c) $M_{22} = -48$, $C_{22} = -48$

d) $M_{21} = 72$, $C_{21} = -72$

e) -216

7 Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

7.1 Trouver l'équation caractéristique, les valeurs propres et les bases de vecteurs propres des matrices suivantes. Vérifier les réponses obtenues à l'aide de la fonction `eigen` de R ou S-Plus.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7.2 Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$, alors λ^k est une valeur propre de $\mathbf{A}^k$.

7.3 Trouver les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}^{25}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.4 Soit

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n.$$

Démontrer par induction les identités suivantes.

a) $c_1 = -\sum_{i=1}^n x_i$

b) $c_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i$

7.5 Démontrer que l'équation caractéristique d'une matrice $\mathbf{A}_{2\times 2}$ est

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0.$$

7.6 Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice inversible $\mathbf{A}$ et que $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant, alors λ^{-1} est une valeur propre de $\mathbf{A}^{-1}$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant.

7.7 Trouver les valeurs propres et les bases de vecteurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$, où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

7.8 Démontrer que tout vecteur est un vecteur propre de la matrice identité correspondant à la valeur propre $\lambda = 1$.

7.9 Pour chacune des matrices $\mathbf{A}$ ci-dessous :

i) trouver les valeurs propres de la matrice ;

ii) trouver le rang de la matrice $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ pour chaque valeur propre λ ;

iii) déterminer si la matrice est diagonalisable ;

iv) si la matrice est diagonalisable, trouver la matrice $\mathbf{P}$ qui diagonalise $\mathbf{A}$ et $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$;

v) vérifier les réponses en iv) avec la fonction `eigen` de R ou S-Plus.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Réponses

7.1 a) $\lambda = 3$ avec base $(\frac{1}{2}, 1)$, $\lambda = -1$ avec base $(0, 1)$

b) $\lambda = 4$ avec base $(\frac{3}{2}, 1)$

c) $\lambda = 1$ avec base $(0, 1, 0)$, $\lambda = 2$ avec base $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$, $\lambda = 3$ avec base $(-1, 1, 1)$

d) $\lambda = -4$ avec base $(-2, \frac{8}{3}, 1)$, $\lambda = 3$ avec base $(5, -2, 1)$

e) $\lambda = 1$ avec base $(0, 0, 0, 1)$ et $(2, 3, 1, 0)$, $\lambda = -2$ avec base $(-1, 0, 1, 0)$, $\lambda = -1$ avec base $(-2, 1, 1, 0)$

7.3 $\lambda = 1$ avec base $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$, $\lambda = -1$ avec base $(2, -1, 1)$

7.7 $\lambda = 1$ avec base $(1, 0, 1)$, $\lambda = \frac{1}{2}$ avec base $(\frac{1}{2}, 1, 0)$, $\lambda = \frac{1}{3}$ avec base $(1, 1, 1)$

7.9 a) pas diagonalisable

b) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) pas diagonalisable

d) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8 Décomposition LU

8.1 Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 \phantom{{}-6x_2} + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

par la décomposition LU sachant que

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.2 Soit

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Résoudre le système d'équations

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

par la décomposition LU.

Réponses

8.1 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$

8.2 $\mathbf{x} = (1, 2)$

A Solutions

Chapitre 2

2.1 Dans tous les cas, le générateur de nombres aléatoires est

$$\begin{aligned} x_i &= (ax_{i-1} + c) \bmod m \\ &= (ax_{i-1} + c) - \left\lfloor \frac{ax_{i-1} + c}{m} \right\rfloor m \end{aligned}$$

où $m = 64$ et $x_0 = 19$. Les suites ont été générées avec la fonction `rand` de la figure A.1.

a)
```
> rand(n = 5, a = 29, c = 17, m = 64, seed = 19)
[1] 56 41 54 47 36
```
b)
```
> rand(n = 5, a = 9, c = 1, m = 64, seed = 19)
[1] 44 13 54 39 32
```
c)
```
> rand(n = 5, a = 13, c = 0, m = 64, seed = 19)
[1] 55 11 15  3 39
```
d)
```
> rand(n = 5, a = 11, c = 0, m = 64, seed = 19)
[1] 17 59  9 35  1
```

2.2 a) On utilise de nouveau la fonction `rand` de la figure A.1. Le graphique de la figure A.2 a été créé avec les commandes

```
rand <- function(n, a, c, m, seed)
{
    x <- numeric(n + 1)
    x[1] <- seed
    for (i in seq(n))
        x[i + 1] <- (a * x[i] + c) %% m
    x[-1]
}
```

FIG. A.1 — *Code de la fonction `rand`.*

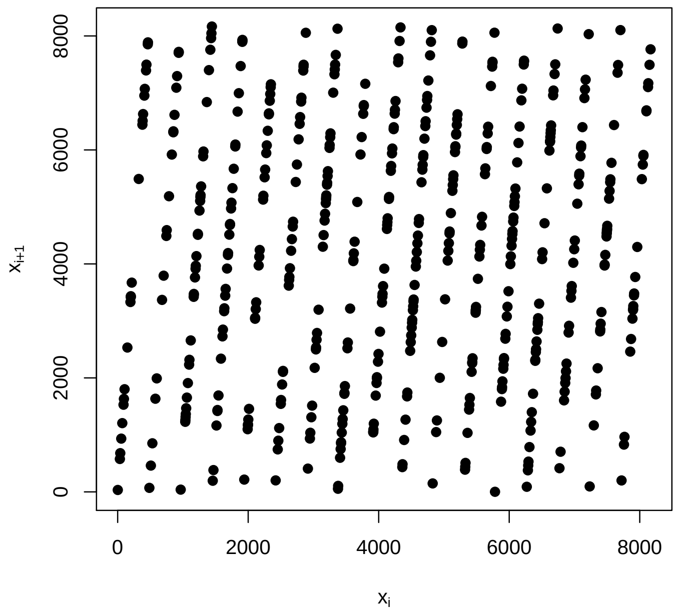


FIG. A.2 — *Paires de valeurs du générateur congruentiel multiplicatif avec* $m = 2^{31} - 1$ *et* $a = 17$.

```
> x <- rand(n = 500, a = 17, c = 0, m = 2^13 -
+     1, seed = 19)
> plot(x[-length(x)], x[-1], xlab = expression(x[i]),
+     ylab = expression(x[i + 1]), pch = 19)
```

On compte 17 lignes dans le graphique.

b) Similaire à la partie a), sauf que les nombres sont générés avec

```
> x <- rand(n = 500, a = 85, c = 0, m = 2^13 -
+     1, seed = 19)
```

Ce générateur semble préférable à celui en a) puisque les points sont plus uniformément disposés sur le graphique (voir figure A.3.

2.3 a) On obtient environ 200 points alignés sur 10 lignes.

```
> u <- rand(n = 20002, a = 65539, c = 0,
+     m = 2^31, seed = 19)/2^31
> mat <- matrix(c(u[1:20000], u[2:20001],
+     u[3:20002]), ncol = 3)
> mat <- mat[(0.5 <= mat[, 2]) & (mat[,
+     2] <= 0.51), c(1, 3)]
```

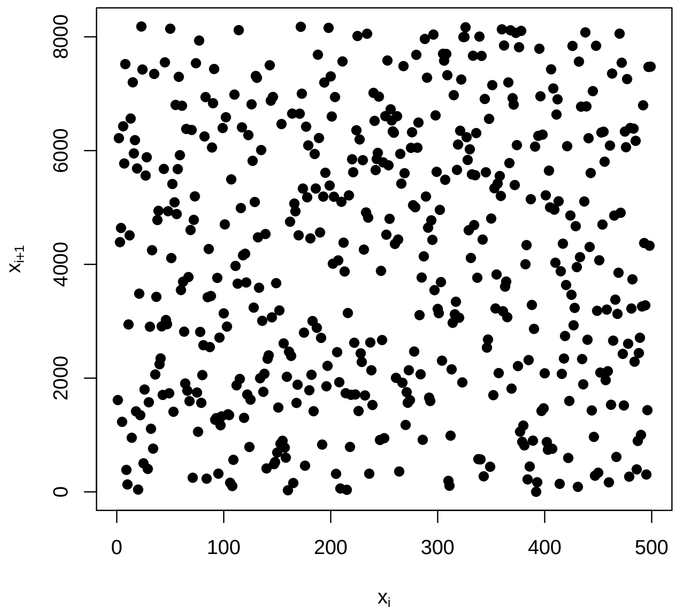


FIG. A.3 — *Paires de valeurs du générateur congruentiel multiplicatif avec* $m = 2^{31} - 1$ *et* $a = 85$.

```
> plot(mat, xlab = expression(u[i]), ylab = expression(u[i +
+     2]))
```

b)
```
> library(rgl)
> u <- rand(n = 1002, a = 65539, c = 0,
+     m = 2^31, seed = 19)/2^31
> rgl.points(u[1:1000], u[2:1001], u[3:1002])
```

Chapitre 3

3.1 a) Tout d'abord, on a que $\cos(2\pi U_2) \in (-1,1)$, $\sin(2\pi U_2) \in (-1,1)$ et $(-2\log U_1)^{1/2} \in (0,\infty)$. Par conséquent, $X_1 \in (-\infty,\infty)$ et $X_2 \in (-\infty,\infty)$. On vérifie la bijectivité de façon heuristique avec quelques valeurs de u_1 et u_2.

b) On a

$$X_1^2 = (-2\log U_1)\cos^2(2\pi U_2)$$
$$X_2^2 = (-2\log U_1)\sin^2(2\pi U_2).$$

Or, puisque $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $X_1^2 + x_2^2 = -2\log U_1$, d'où $U_1 = e^{-(X_1^2+X_2^2)/2}$. D'autre part, $\sin(x)/\cos(x) = \tan(x)$, donc $\tan(2\pi U_2) = X_2/X_1$ ou, de manière équivalente, $U_2 = (2\pi)^{-1} \arctan X_2/X_1$.

c) Soit les fonctions

$$x_1(u_1, u_2) = (-2\log u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2) \quad u_1(x_1,x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$
$$x_2(u_1, u_2) = (-2\log u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2) \quad u_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{x_2}{x_1}.$$

Les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes, donc leur fonction de densité de probabilité conjointe est le produit des densités marginales :

$$f_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = 1, \quad 0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1.$$

La densité conjointe de X_1 et X_2 est, par définition d'une transformation,

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{U_1,U_2}(x_1(u_1, u_2), x_2(u_1,u_2))|\det(J)|$$

où

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} & -x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \\ -\frac{1}{2\pi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{1}{2\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} |\det(J)| &= \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2}, \end{aligned}$$

d'où

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2}$$

et, donc, X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires $N(0, 1)$ indépendantes.

d)
```
> u1 <- runif(500)
> u2 <- runif(500)
> x1 <- outer(u1, u2, function(x, y) sqrt((-2 * log(x))) * cos(2 *
+     pi * y))
> x2 <- outer(u1, u2, function(x, y) sqrt((-2 * log(x))) * sin(2 *
+     pi * y))
> hist(x1, prob = TRUE)
> curve(dnorm(x), add = TRUE)
```

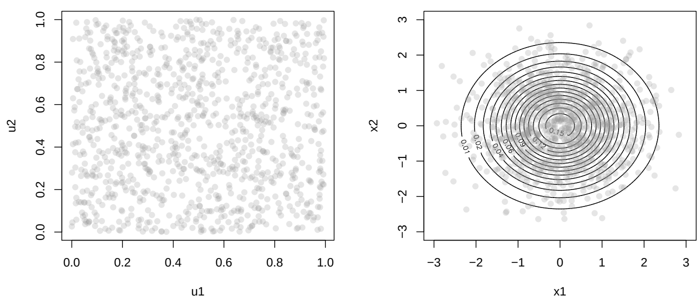


FIG. A.4 — *Démonstration graphique du fonctionnement de la transformation de Box–Muller.*

La figure A.4 illustre d'une autre façon que la transformation de Box–Muller fonctionne bel et bien. Dans le graphique de gauche, on a plusieurs couples de points (u_1, u_2) où chaque composante provient d'une distribution uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$.

Chacun de ces points a été transformé en un point (x_1, x_2) selon la transformation de Box–Muller, puis placé dans le graphique de droite. On a superposé le nuage de points ainsi obtenu aux lignes de niveau d'une distribution normale bivariée (avec paramètre $\rho = 0$). On observe que la répartition et la densité du nuage de points correspond effectivement aux lignes de niveau.

3.2 Deux suggestions :

1. Simuler deux nombres indépendants x_1 et x_2 d'une loi exponentielle de paramètre λ et poser $y = x_1 - x_2$.
2. La fonction de répartition de la distribution de Laplace est

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

d'où

$$F_Y^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\ln(2u) & u < 0{,}5 \\ \frac{-1}{\lambda}\ln(2(1-u)) & u \geq 0{,}5. \end{cases}$$

On peut donc utiliser la méthode inverse.

3.3 Voir la fonction S de la figure A.5. On vérifie graphiquement la validité de l'algorithme :

```
> hist(rgamma2(1000, 5), prob = TRUE)
> curve(dgamma(x, 5, 1), add = TRUE)
```

```
rgamma2 <- function(nsim, alpha)
{
    x <- numeric(nsim)
    i <- 0
    while (i < nsim)
    {
        u <- runif(2)
        v <- (alpha - 1/(6 * alpha)) * u[1] /
               ((alpha - 1) * u[2])

        if ((2 * (u[2] - 1)/(alpha - 1) +
               v + 1/v <= 2) |
            (2 * log(u[2])/(alpha - 1) -
               log(v) + v <= 1))
            x[i <- i + 1] <- (alpha - 1) * v
    }
    x
}
```

FIG. A.5 — *Fonction de simulation d'une distribution Gamma*$(\alpha, 1)$, $\alpha > 1$.

3.4 Deux suggestions.

1. Si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$, alors $Y = X/\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$. On peut donc générer un nombre x d'une loi Gamma$(\alpha, 1)$ avec l'algorithme de l'exercice 3.A, puis poser $y = x/\lambda$.
2. Si α est entier, on peut générer α nombres (indépendants) $x_1, \dots, x_\alpha$ d'une distribution Exponentielle(λ) et poser $y = \sum_{i=1}^{\alpha} x_i$.

3.5 a) On a $X|\Theta \sim \text{Exponentielle}(\Theta)$ et $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$. Par la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f(x|\theta)u(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{\alpha+1-1} e^{-(\lambda+x)\theta}\,d\theta \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

b) Pour générer un nombre d'une distribution de Pareto de paramètres α et λ avec le résultat en a), on génère d'abord un nombre θ d'une distribution gamma de mêmes paramètres, puis on génère un nombre x d'une distribution exponentielle de paramètre θ. En S :

```
> rexp(1, rgamma(1, alpha, lambda))
```

3.6 La fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_\lambda^x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{y^{\alpha+1}}\, dy \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq \lambda \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha, & x > \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

et son inverse est

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \lambda, & y = 0 \\ \frac{\lambda}{(1-y)^{1/\alpha}}, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

Soit $U \sim U(0,1)$. Alors

$$X = \lambda + \frac{\lambda}{U^{1/\alpha}} \sim \text{Pareto translatée}(\alpha, \lambda).$$

Les trois premières valeurs retournées par le générateur

$$x_n = (65 x_{n-1} + 1) \bmod 2\,048$$

avec une amorce de 12 sont :

$$781 \quad 1614 \quad 463.$$

En divisant ces nombres par 2 048, on obtient des nombres dans l'intervalle $(0,1)$:

$$0{,}3813 \quad 0{,}7881 \quad 0{,}2261.$$

Finalement, les observations de la Pareto$(2, 1\,000)$ sont

```
> 1000/sqrt(c(0.3813, 0.7881, 0.2261))
[1] 1619.446 1126.443 2103.051
```

3.7 Le mélange $f_X(x) = 0{,}6 f_{X_1}(x) + 0{,}4 f_{X_2}(x)$ est équivalent à

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{2} f_{X|I}(x|i) \Pr(I = i),$$

où $I \sim$ Bernoulli(0,6) et

$$\begin{aligned} X|I = 0 &\sim \text{Lognormale}(\mu = 3{,}1, \sigma^2 = 0{,}6) \\ X|I = 1 &\sim \text{Lognormale}(\mu = 4{,}3, \sigma^2 = 0{,}4). \end{aligned}$$

On peut simuler 1 000 observations d'un tel mélange et faire une vérification graphique en S avec les expressions suivantes :

```
> w <- sum(runif(10000) <= 0.6)
> x <- c(rlnorm(w, meanlog = 3.1, sdlog = sqrt(0.6)), rlnorm(10000 -
+     w, meanlog = 4.3, sdlog = sqrt(0.4)))
> hist(x, prob = TRUE)
> curve(0.6 * dlnorm(x, meanlog = 3.1, sdlog = sqrt(0.6)) + 0.4 *
+     dlnorm(x, meanlog = 4.3, sdlog = sqrt(0.4)), add = TRUE)
```

3.8 On a la transformation

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{U_1}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 &= \sqrt{U_1}\sin(2\pi U_2) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} U_1 &= X_1^2 + X_2^2 \\ U_2 &= \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{X_2}{X_1}. \end{aligned}$$

Cette transformation associe les points de l'espace $\{(u_1, u_2) : 0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1\}$ à ceux de l'espace $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \backslash (0,0)\}$. Cela se vérifie aisément en examinant les limites de l'espace de départ :

$$\begin{aligned} u_1 > 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ u_1 < 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ u_2 > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} > 0 \\ u_2 < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} < 0. \end{aligned}$$

Les troisième et quatrième inégalités définissent les quadrants I et III, puis II et IV de $\mathbb{R}^2$, respectivement. On remarque également que le point $(0,0)$, qui a probabilité zéro, ne se trouve pas dans l'espace image.

Le Jacobien de la transformation est

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -\frac{1}{2\pi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{1}{2\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité conjointe de X_1 et X_2 est donc

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= f_{U_1,U_2}(u_1, u_2)|J| \\ &= \frac{1}{\pi} \quad -1 < x_1 < 1, -\sqrt{1 - x_1^2} < x_2 < \sqrt{1 - x_1^2}, \end{aligned}$$

soit une distribution uniforme sur le cercle unité.

Le résultat peut évidemment servir à simuler des points uniformément répartis dans un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$. La figure A.6 illustre d'ailleurs cette transformation. Les points (u_1, u_2) du graphique de gauche

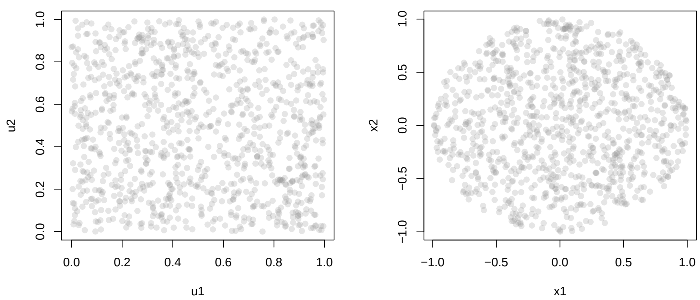


FIG. A.6 — *Démonstration graphique du fonctionnement de la transformation de l'exercice 3.8.*

sont tirés aléatoirement sur le carré $(0,1) \times (0,1)$. Le graphique de droite montre que suite à la tranformation ci-dessus, on obtient des points (x_1, x_2) distribués uniformément sur un cercle de rayon centré en $(0,0)$.

3.9 a) On a

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y_1^{\alpha-1} e^{-y_1}, \quad y_1 > 0,$$
$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} y_2^{\beta-1} e^{-y_2}, \quad y_2 > 0$$

et

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha-1} y_2^{\beta-1} e^{-(y_1+y_2)}, \quad y_1 > 0, y_2 > 0.$$

Soit $X_1 = Y_1/(Y_1 + Y_2)$ et $X_2 = Y_1 + Y_2$ (le choix de X_2 étant justifié par l'exposant de la distribution conjointe de Y_1 et Y_2). On cherche la distribution conjointe de X_1 et X_2, $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. On a la transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{y_1 + y_2} \\ x_2 &= y_1 + y_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 x_2 \\ y_2 &= x_2 - x_1 x_2. \end{aligned}$$

Cette transformation associe de manière évidente les points de l'espace $\{(y_1, y_2) : y_1 > 0, y_2 > 0\}$ à ceux de l'espace $\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, x_2 > 0\}$.

Le Jacobien de la transformation est

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{vmatrix} \\
&= x_2.
\end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité conjointe de X_1 et X_2 est donc

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)|J| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x_1^{\alpha-1}(1 - x_1)^{\beta-1} x_2^{\alpha+\beta-1} e^{-x_2} \\
&= \left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x_1^{\alpha-1}(1 - x_1)^{\beta-1}\right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, x_2^{\alpha+\beta-1} e^{-x_2}\right],
\end{aligned}$$

pour $0 < x_1 < 1$, $x_2 > 0$, d'où X_1 et X_2 sont indépendantes, $X_1 \sim \text{Bêta}(\alpha, \beta)$ et $X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha + \beta)$ (un résultat connu).

b) La conversion du résultat en un algorithme est très simple :

1. Générer y_1 d'une distribution $\text{Gamma}(\alpha, 1)$.
2. Générer y_2 d'une distribution $\text{Gamma}(\beta, 1)$.
3. Poser $x = y_1/(y_1 + y_2)$.

Cet algorithme suppose évidemment qu'une source de nombres provenant d'une loi gamma est disponible.

La figure A.7 illustre le fonctionnement de cette transformation. Dans le graphique de gauche, on a un nuage de points (y_1, y_2) tirés indépendemment de deux distributions gamma de paramètre d'échelle égal à 1. On a superposé ce nuage de points aux courbes de niveaux de la distribution conjointe des deux lois gamma.

Dans le graphique de droite, on a placé en abscisse les points $x = y_1/(y_1 + y_2)$ résultant de la transformation. On voit que la répartition et la densité de ces points correspond à la densité de la loi bêta également représentée sur le graphique.

c) En S :

```
> (y <- rgamma(1, alpha, 1))/(y + rgamma(1, beta, 1))
```

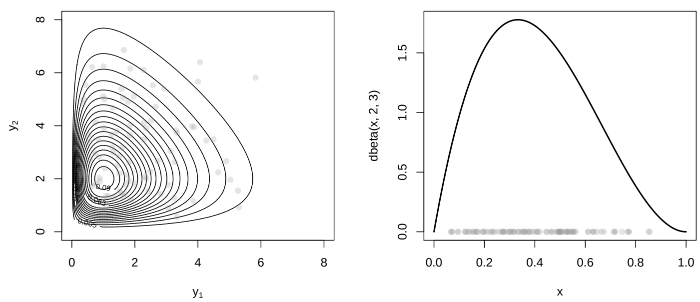


FIG. A.7 — *Démonstration graphique du fonctionnement de la transformation de l'exercice 3.9.*

3.10 a) On a

$$\begin{aligned}
\Pr\left[U \leq \frac{f_X(Y)}{cg_Y(Y)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left[U \leq \frac{f_X(Y)}{cg_Y(Y)} | Y = y\right] g_Y(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(Y)}{cg_Y(Y)}\, g_Y(y)\,dy \\
&= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\,dy \\
&= \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

b) Les essais étant indépendants, la distribution du nombre d'essais avant d'avoir un succès (accepter un nombre y) est géométrique de paramètre $1/c$, c'est-à-dire

$$\Pr[Z = z] = \left(\frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)^{z}, \quad z = 1, 2, \dots,$$

où Z représente le nombre d'essais avant d'accepter un nombre.

c) On a $E[Z] = 1/(1/c) = c$.

3.11 a) On pose

$$cg_Y(x) = M, \quad a < x < b,$$

soit $Y \sim U(a, b)$ et $c = M(b - a)$. L'algorithme d'acceptation-rejet est donc le suivant :

1. Simuler deux nombres indépendants u_1 et u_2 d'une loi $U(0, 1)$.
2. Poser $y = a + (b - a)u_1$.
3. Si $u_2 \leq f_X(y)/M$, poser $x = y$. Sinon, retourner à l'étape 1.

```
rbeta.ar <- function(n)
{
    g <- function(x)
        ifelse(x < 0.8, 2.5 * x, 10 - 10 * x)
    Ginv <- function(y)
        ifelse(y < 0.8, sqrt(0.8 * y),
               1 - sqrt(0.2 - 0.2 * y))
    x <- numeric(n)
    i <- 0
    while(i < n)
    {
        y <- Ginv(runif(1))
        if(1.2 * g(y) * runif(1) <=
           dbeta(y, shape1 = 3, shape2 = 2))
            x[i <- i + 1] <- y
    }
    x
}
```

FIG. A.8 — *Code S de la fonction* `rbeta.ar`.

b) L'efficacité est
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{M(b-a)}.$$

3.12 a) On démontre facilement que le mode M d'une distribution Bêta(α, β) se trouve en
$$x = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}.$$
Par conséquent, l'efficacité de l'algorithme d'acceptation-rejet décrit à l'exercice 3.11 et consistant à borner la densité par un rectangle de hauteur M est
$$\begin{aligned}\frac{1}{M} &= \frac{1}{f((\alpha-1)/(\alpha+\beta-2))} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-2}\right)^{1-\beta}.\end{aligned}$$
Avec $\alpha = 3$ et $\beta = 2$, on obtient une efficacité de $9/16$.

b) On a trouvé $c = 1{,}2$ dans l'exemple 3.7, d'où une efficacité de $1/c = 5/6$. Cet algorithme est évidemment plus efficace puisque la surface de l'enveloppe de la densité bêta est nettement plus petite.

c) On utilise l'algorithme développé à l'exemple 3.7 des notes de cours. Voir le code S à la figure A.8 et le code VBA à la figure A.9. On vérifie l'exactitude la fonction `rbeta.ar` avec

```
Private Function sqrt(x)
    sqrt = x ^ 0.5
End Function

Private Function g(x As Double)
    DensiteTriangle = IIf(x < 0.8, 2.5 * x,
                          10 - 10 * x)
End Function

Private Function Ginv(u As Double)
    InverseTriangle = IIf(u < 0.8, sqrt(0.8 * u),
                          1 - sqrt(0.2 - 0.2 * u))
End Function

Private Function dbeta(x As Double, shape1 As Double,
                       shape2 As Double)
    Dim cte As Double
    With WorksheetFunction
        cte = Exp(.GammaLn(shape1 + shape2) -
                  .GammaLn(shape1) -
                  .GammaLn(shape2))
        dbeta = cte * x ^ (shape1 - 1) *
                (1 - x) ^ (shape2 - 1)
    End With
End Function

Function betasim()
    Dim u1 As Double, u2 As Double, y As Double

    Do
        u1 = Rnd
        u2 = Rnd
        y = Ginv(u1)
    Loop Until u2 <= dbeta(y, 3, 2) / (1.2 * g(y))

    SimuleBeta = y
End Function
```

FIG. A.9 — *Code VBA de la fonction* `betasim`*.*

```
> x <- rbeta.ar(10000)
> hist(x, prob = TRUE)
> curve(dbeta(x, 3, 2), add = TRUE)
```

Pour un exemple d'utilisation de la fonction VBA, voir le fichier `betasim.xls`.

3.13 a) On reconnaît l'algorithme d'acceptation-rejet de l'exercice 3.11.

b) On doit simuler deux observations d'une loi Bêta$(2,3)$ dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = 12x(1-x)^2, \quad 0 < x < 1.$$

Le mode de cette densité se trouve en $x = 1/3$ (voir la solution de l'exercice 3.12) et la valeur de ce mode est $M = f(1/3) = 16/9$. Pour obtenir le résultat de l'appel de la fonction `simul`, il faut s'assurer d'utiliser les nombres uniformes dans le bon ordre. Quatre itérations de la boucle `repeat` seront nécessaires ; voici leurs résultas.

1. On a $u = 0{,}72$, puis $(16/9)(0{,}88) > f(0{,}72)$, donc u est rejeté.
2. On a $u = 0{,}76$, puis $(16/9)(0{,}89) > f(0{,}76)$, donc u est rejeté.
3. On a $u = 0{,}46$, puis $(16/9)(0{,}17) > f(0{,}46)$, donc u est accepté : $x_1 = 0{,}46$.
4. On a $u = 0{,}33$, puis $(16/9)(0{,}51) > f(0{,}33)$, donc u est accepté : $x_2 = 0{,}33$.

Le résultat est donc le vecteur $\mathbf{x} = (0{,}46, 0{,}33)$.

3.14 a) Si $0 \leq x \leq 1$, $e^{-1} < e^{-x} < 1$, d'où $x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$. De même, puisque $0 < \alpha < 1$, $x^{\alpha-1} < 1$ pour $x > 1$, d'où $x^{\alpha-1}e^{-x} \leq e^{-x}$ pour $x > 1$.

b) On veut borner la densité $f_X(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha)$, $x > 0$ et $0 < \alpha < 1$. Du résultat en a), on a

$$f_X(x) \leq \begin{cases} x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}/\Gamma(\alpha), & x > 1. \end{cases}$$

Posons

$$cg_Y(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}/\Gamma(\alpha), & x > 1. \end{cases}$$

L'aire totale sous la fonction $cg_Y(x)$ est

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{e}\right),$$

d'où

$$g_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1/\alpha)+(1/e)}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{(1/\alpha)+(1/e)}, & x > 1, \end{cases}$$

$$G_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{e}{\alpha+e}\, x^{\alpha}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{(1/\alpha)+(1/e)}, & x > 1, \end{cases}$$

et

$$G_Y^{-1}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha+e}{e}\, x\right)^{1/\alpha}, & 0 \leq x \leq e/(\alpha+e) \\ -\ln[((1/\alpha)+(1/e))(1-x)], & e/(\alpha+e) < x \leq 1. \end{cases}$$

On remarque que

$$\frac{f_X(x)}{c g_Y(x)} = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{\alpha-1}, & x > 1. \end{cases}$$

On a donc l'algorithme de simulation suivant :

1. Simuler deux nombres u_1 et u_2 d'une $U(0,1)$.
2. Poser $y = G_Y^{-1}(u_1)$.
3. Si
$$u_2 \leq \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ y^{\alpha-1}, & y > 1, \end{cases}$$
alors poser $x = y$. Sinon, retourner à l'étape 1.

3.15 On veut simuler des observations de la fonction de densité de probabilité $f_X(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha)$ avec $\alpha \geq 1$. Or, on nous donne

$$f_X(x) \leq \frac{\alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{1-\alpha}\, \frac{1}{\alpha}\, e^{-x/\alpha}, \quad x > 0,$$

d'où $f_X(x) \leq c g_Y(x)$ avec

$$c = \frac{\alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{1-\alpha}$$

et

$$g_Y(x) = \frac{1}{\alpha}\, e^{-x/\alpha}.$$

Ainsi, $Y \sim$ Exponentielle$(1/\alpha)$. Soit y une observation de la variable aléatoire Y et u une observation d'une loi $U(0,1)$. Selon l'algorithme d'acceptation-rejet, on accepte la valeur y comme observation d'une loi Gamma$(\alpha, 1)$ avec $\alpha \geq 1$ si

$$\begin{gathered}
u \leq \frac{f_X(y)}{c g_Y(y)} = y^{\alpha-1} \, \frac{e^{-y(1-1/\alpha)}}{\alpha^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)}} \\
\Updownarrow \\
u^{1/(\alpha-1)} \leq \left(\frac{y}{\alpha}\right) \frac{e^{-y/\alpha}}{e^{-1}} \\
\Updownarrow \\
\ln u \leq (\alpha - 1) \left[\ln\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \frac{y}{\alpha} + 1\right] \\
\Updownarrow \\
-\ln u > (\alpha - 1) \left[\frac{y}{\alpha} - \ln\left(\frac{y}{\alpha}\right) - 1\right].
\end{gathered}$$

Or, tant la distribution de $-\ln U$ que celle de Y/α est une Exponentielle(1), d'où l'algorithme donné dans l'énoncé.

3.16 On a

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_0^1 \ln(5u + 4) \, dx \\
&= E[\ln(5U + 4)],
\end{aligned}$$

où $U \sim U(0,1)$, ou encore simplement

$$\theta = E[\ln(X)],$$

où $X \sim U(4,9)$. Une approximation de θ est

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i),$$

où $x_1, \dots, x_n$ est un échantillon aléatoire d'une distribution $U(4,9)$. Une évaluation avec R donne

```
> mean(log(runif(1e+06, 4, 9)))
[1] 1.845911
```

3.17 On pose

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_0^1 \int_0^1 e^{2xy} \ln(3x + y^2) \, dx dy \\
&= E[e^{2XY} \ln(3X + Y^2)],
\end{aligned}$$

où $X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,1)$ et X et Y sont indépendantes. Ainsi, leur densité conjointe est uniforme sur $(0,1) \times (0,1)$. Une approximation de θ est

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i y_i} \ln(3x_i + y_i^2)$$

où $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ sont deux échantillons aléatoires indépendants d'une distribution $U(0,1)$. Une évaluation avec R donne

```
> x <- runif(1e+06)
> y <- runif(1e+06)
> mean(exp(2 * x * y) * log(3 * x + y^2))

[1] 1.203179
```

3.18 a) Soit le changement de variable $u = e^{-x/2} \Leftrightarrow x = -\ln u^2$, d'où $-2du = e^{-x/2}dx$. On a donc

$$\begin{aligned}\theta &= \int_0^1 2(-\ln u^2)^2 \sin(-\pi \ln u^2)\, du \\ &= 2E[(-\ln U^2)^2 \sin(-\pi \ln U^2)],\end{aligned}$$

où $U \sim U(0,1)$. Une estimation de θ est

$$\hat{\theta} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (-\ln u_i^2)^2 \sin(-\pi \ln u_i^2),$$

où $u_1, \dots, u_n$ est un échantillon aléatoire d'une distribution $U(0,1)$. Une évaluation avec R donne

```
> u <- runif(1e+06)
> 2 * mean((-log(u^2))^2 * sin(pi * (-log(u^2))))

[1] -0.07674176
```

b) On remarque que la fonction à intégrer contient, à une constante près, la fonction de densité de probabilité d'une loi Gamma$(3, 1/2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\theta &= 16 \int_0^\infty \sin(\pi x) \frac{(1/2)^3}{\Gamma(3)}\, x^2 e^{-x/2}\, dx \\ &= 16E[\sin(\pi X)],\end{aligned}$$

où $X \sim$ Gamma$(3, 1/2)$. Une estimation de θ est donc

$$\hat{\theta} = \frac{16}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i)$$

où $x_1, \dots, x_n$ est un échantillon aléatoire d'une Gamma$(3, 1/2)$. Une évaluation avec R donne

```
> 16 * mean(sin(pi * rgamma(1e+06, 3, 0.5)))
```

```
[1] -0.060359
```

3.19 On peut faire l'estimation en R simplement avec les expressions suivantes :

```
> x <- replicate(10000, rnorm(25))
> mean(apply(x, 2, function(x) sort(x)[5]))
```

```
[1] -0.9056168
```

Chapitre 4

La notation x_b signifie que le nombre x est en base b. On omet généralement b pour les nombres en base 10.

4.1 L'algorithme de conversion des nombres décimaux en une base b se résume essentiellement à ceci pour la partie entière :

1. les chiffres du nombre en base b sont obtenus de droite à gauche en prenant le reste de divisions par b ;
2. on divise par b d'abord le nombre décimal d'origine, puis la partie entière de la division précédente, jusqu'à ce que celle-ci soit égale à 0.

On a donc les résultats suivants.

a) Conversion en base 6 :

$$\begin{aligned}119 \div 6 &= 19 \text{ reste } 5\\ 19 \div 6 &= 3 \text{ reste } 1\\ 3 \div 6 &= 0 \text{ reste } 3,\end{aligned}$$

d'où $119 \equiv 315_6$.

Conversion en binaire :

$$\begin{aligned}119 \div 2 &= 59 \text{ reste } 1\\ 59 \div 2 &= 29 \text{ reste } 1\\ 29 \div 2 &= 14 \text{ reste } 1\\ 14 \div 2 &= 7 \text{ reste } 0\\ 7 \div 2 &= 3 \text{ reste } 1\\ 3 \div 2 &= 1 \text{ reste } 1\\ 1 \div 2 &= 0 \text{ reste } 1,\end{aligned}$$

d'où $119 \equiv 1110111_2$.

b) Conversion en base 6 :

$$\begin{aligned} 343 \div 6 &= 57 \text{ reste } 1 \\ 57 \div 6 &= 9 \text{ reste } 3 \\ 9 \div 6 &= 1 \text{ reste } 3 \\ 1 \div 6 &= 0 \text{ reste } 1, \end{aligned}$$

d'où $343 \equiv 1331_6$.

Conversion en binaire :

$$\begin{aligned} 343 \div 2 &= 171 \text{ reste } 1 \\ 171 \div 2 &= 85 \text{ reste } 1 \\ 85 \div 2 &= 42 \text{ reste } 1 \\ 42 \div 2 &= 21 \text{ reste } 0 \\ 21 \div 2 &= 10 \text{ reste } 1 \\ 10 \div 2 &= 5 \text{ reste } 0 \\ 5 \div 2 &= 2 \text{ reste } 1 \\ 2 \div 2 &= 1 \text{ reste } 0 \\ 1 \div 2 &= 0 \text{ reste } 1, \end{aligned}$$

d'où $119 \equiv 101010111_2$.

c) Conversion en base 6 :

$$\begin{aligned} 96 \div 6 &= 16 \text{ reste } 0 \\ 16 \div 6 &= 2 \text{ reste } 4 \\ 2 \div 6 &= 0 \text{ reste } 2, \end{aligned}$$

d'où $96 \equiv 240_6$.

Conversion en binaire :

$$\begin{aligned} 96 \div 2 &= 48 \text{ reste } 0 \\ 48 \div 2 &= 24 \text{ reste } 0 \\ 24 \div 2 &= 12 \text{ reste } 0 \\ 12 \div 2 &= 6 \text{ reste } 0 \\ 6 \div 2 &= 3 \text{ reste } 0 \\ 3 \div 2 &= 1 \text{ reste } 1 \\ 1 \div 2 &= 0 \text{ reste } 1, \end{aligned}$$

d'où $96 \equiv 1100000_2$.

d) Conversion en base 6 :

$$\begin{aligned} 43 \div 6 &= 7 \text{ reste } 1 \\ 7 \div 6 &= 1 \text{ reste } 1 \\ 1 \div 6 &= 0 \text{ reste } 1, \end{aligned}$$

d'où $43 \equiv 111_6$.

Conversion en binaire :

$$\begin{aligned} 43 \div 2 &= 21 \text{ reste } 1 \\ 21 \div 2 &= 10 \text{ reste } 1 \\ 10 \div 2 &= 5 \text{ reste } 0 \\ 5 \div 2 &= 2 \text{ reste } 1 \\ 2 \div 2 &= 1 \text{ reste } 0 \\ 1 \div 2 &= 0 \text{ reste } 1, \end{aligned}$$

d'où $43 \equiv 101011_2$.

4.2 On fait les deux premières conversions à l'aide de la définition d'un nombre hexadécimal, puis les deux dernières à l'aide de l'algorithme de conversion des nombres en base b vers la base 10.

a) $\text{A1B}_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16 + 11 = 2\,587$

b) $\text{12A}_{16} = 1 \times 16^2 + 2 \times 16 + 10 = 298$

c) $\text{B41}_{16} = (11 \times 16 + 4) \times 16 + 1 = 2\,881$

d) $\text{BAFFE}_{16} = ((((11 \times 16 + 10) \times 16) + 15) \times 16) + 15) \times +14 = 765\,950$

4.3 La généralisation de l'algorithme de conversion des nombres en base b vers la base 10 à la conversion d'un nombre

$$x = x_{m-1}x_{m-2}\cdots x_1x_0$$

en base $[b_{m-1}\ \dots\ b_0]$ vers la base 10 est la suivante (nombre entiers seulement) :

1. Poser $x = 0$.
2. Pour $i = m-1, m-2, \dots, 0$, faire les étapes suivantes.
   i) Trouver d_i, le nombre décimal correspondant au symbole x_i.
   ii) Poser $x = xb_{i-1} + d_i$, avec $b_{-1} = 1$.

Cet algorithme permet de trouver les formules demandées.

a) Tel que présenté à l'exemple 4.6 des notes de cours, on trouve la position de l'élément a_{ijk} dans l'ordre de la liste des éléments du tableau en convertissant le nombre $[i-1\ j-1\ k-1]$ de la base $[I\ J\ K]$ à la base 10, puis à additionnant 1. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, on obtient

$$[((i-1)\times J + j - 1)\times K + k - 1] + 1 = k + K(j - 1 + J(i-1))$$

b) Dans l'ordre S, on convertit le nombre $[k-1\ j-1\ i-1]$ exprimé dans la base $[K\ J\ I]$ en base 10. On obtient alors

$$[((k-1)\times J + j - 1)\times I + i - 1] + 1 = i + I(j - 1 + J(k-1))$$

soit la même réponse qu'à l'exercice 3.7 b) de Goulet (2007).

4.4 Voir les notes de cours de la section 4.4. Les calculs sont exactement les mêmes que pour les nombres en double précision.

4.5 L'étendue des nombres admissibles pour le type `Byte` est $[0, 2^8-1] = [0, 255]$. Les nombres maximaux pour les types `Integer` et `Long` sont, respectivement, $2^{15}-1 = 32\,767$ et $2^{31}-1 = 2\,147\,483\,647$. L'étendue est plus grande de 1 pour les nombres négatifs ($-32\,768$ et $-2\,147\,483\,648$) parce que les nombres sont en fait stockés en compléement à deux ; voir `http://fr.wikipedia.org/wiki/ComplÃl'ment_Ãă_deux`.

4.6 Dans les égalités ci-dessous, le côté droit est en binaire.

a) Premièrement, $1234 \equiv 10011010010_2$. On a donc

$$\begin{aligned} -1\,234 &= (-1)^1 \times 2^{10} \times 1{,}001101001 \\ &= (-1)^1 \times 2^{137-127} \times 1{,}1010010. \end{aligned}$$

Or, puisque $137 \equiv 10001001_2$, on a la représentation en simple précision

$$\boxed{1}\ \boxed{10001001}\ \boxed{00110100100000000000000}$$

b) On a $55 \equiv 110111_2$, d'où

$$\begin{aligned} 55 &= (-1)^0 \times 2^5 \times 1{,}10111 \\ &= (-1)^0 \times 2^{132-127} \times 1{,}10111. \end{aligned}$$

Or, puisque $132 \equiv 10000100_2$, on a la représentation en simple précision

$$\boxed{0}\,\boxed{10000100}\,\boxed{10111000000000000000000}$$

c) On a $8\,191 \equiv 1111111111111_2$ et $149 \equiv 10001011$, d'où

$$\begin{aligned} 8\,191 &= (-1)^0 \times 2^{12} \times 1{,}111111111111 \\ &= (-1)^0 \times 2^{149-127} \times 1{,}111111111111 \\ &= \boxed{0}\,\boxed{10001011}\,\boxed{11111111111100000000000}. \end{aligned}$$

d) On a $10 \equiv 1010_2$ et $130 \equiv 10000010$, d'où

$$\begin{aligned} -10 &= (-1)^1 \times 2^3 \times 1{,}010 \\ &= (-1)^1 \times 2^{130-127} \times 1{,}010 \\ &= \boxed{1}\,\boxed{10000010}\,\boxed{01000000000000000000000}. \end{aligned}$$

e) La représentation de $\frac{2}{3}$ en binaire est $0{,}101010\dots$. (La façon la plus simple d'obtenir ce résultat consiste à convertir $\frac{2}{3} \times 2^n$, où n est le nombre de bits souhaité après la virgule). Puisque $126 \equiv 1111110_2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= (-1)^0 \times 2^{-1} \times 1{,}01010101010101010101010 \\ &= (-1)^0 \times 2^{126-127} \times 1{,}01010101010101010101010 \\ &= \boxed{0}\,\boxed{01111110}\,\boxed{01010101010101010101010}. \end{aligned}$$

f) La représentation binaire de $\frac{1}{100}$ est infinie : $0{,}000000101000111101\dots$. Puisque $120 \equiv 01111000_2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} &= (-1)^0 \times 2^{-7} \times 1{,}01000111101011100001010 \\ &= (-1)^0 \times 2^{120-127} \times 1{,}01000111101011100001010 \\ &= \boxed{0}\,\boxed{01111000}\,\boxed{01000111101011100001010} \end{aligned}$$

4.7 a) Puisque $111101_2 \equiv 61$, on a le nombre

$$\begin{aligned} (-1)^0 \times 2^{61-127} \times 1{,}100100001 &= (-1)^0 \times 2^{-66} \times 1{,}100100001 \\ &= 2^{-66}(1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9}) \\ &\equiv 2{,}120\,229\,346 \times 10^{-20}. \end{aligned}$$

b) Signe inversé par rapport à la partie a).

c) Puisque $10000100_2 = 2^7 + 2^2 \equiv 132$, on a le nombre

$$\begin{aligned}(-1)^0 \times 2^{132-127} \times 1{,}100100001 &= (-1)^0 \times 2^5 \times 1{,}100100001 \\ &= 2^5(1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9}) \\ &\equiv 50{,}062\,5.\end{aligned}$$

d) Signe inversé par rapport à la partie c).

4.8 a) Le nombre suivant est

$$\boxed{0}\,\boxed{00111101}\,\boxed{10010000100000000000001},$$

soit

$$2^{-66}(1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9} + 2^{-23}) \equiv 2{,}120\,229\,508 \times 10^{-20}.$$

Le nombre précédent est

$$\boxed{0}\,\boxed{00111101}\,\boxed{10010000011111111111111},$$

soit

$$2^{-66}(1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9} - 2^{-23}) \equiv 2{,}120\,229\,185 \times 10^{-20}.$$

c) Le nombre suivant est

$$\boxed{0}\,\boxed{10000100}\,\boxed{10010000100000000000001},$$

soit

$$2^5(1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9} + 2^{-23}) \equiv 50{,}062\,503\,815.$$

Le nombre précédent est

$$\boxed{0}\,\boxed{10000100}\,\boxed{10010000011111111111111},$$

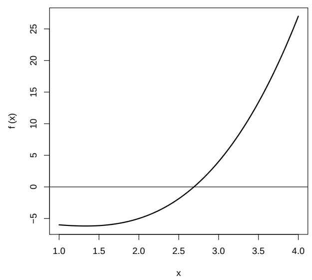
soit

$$2^5(1 + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-9} - 2^{-23}) \equiv 50{,}062\,496\,185.$$

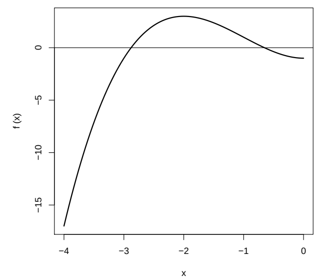
On remarque que les nombres sont beaucoup plus éloignés les uns des autres ici qu'en a).

Chapitre 5

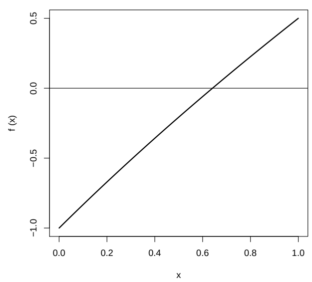
5.1 Se baser sur la fonction de point fixe `fp` présentée au chapitre 5 de Goulet (2007) pour composer les fonctions de bissection, de Newton–Raphson et de la sécante.



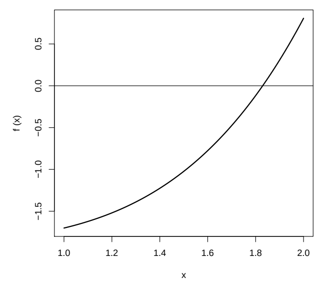
(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$



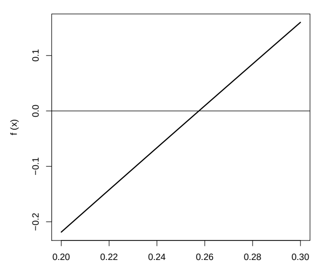
(b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$



(c) $f(x) = x - 2^{-x}$



(d) $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6$



(e) $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

FIG. A.10 — *Fonctions de l'exercice 5.2.*

5.2 Les solutions suivantes ont été obtenues à l'aide de nos fonctions de résolution d'équations à une variable. Les valeurs intermédiaires sont affichées pour montrer la convergence. La figure A.10 contient les graphiques des cinq fonctions pour les intervalles mentionnés dans l'énoncé.

a) La fonction n'a qu'une seule racine dans $[1, 4]$.

```
> f1 <- function(x) x^3 - 2 * x^2 - 5
> f1p <- function(x) 3 * x^2 - 4 * x
> bissection(f1, lower = 1, upper = 4, echo = TRUE)
```

```
[1]  1.000  4.000  2.500 -1.875
[1] 2.5000 4.0000 3.2500 8.2031
[1] 2.5000 3.2500 2.8750 2.2324
[1]  2.500000  2.875000  2.687500 -0.034424
[1] 2.6875 2.8750 2.7812 1.0432
[1] 2.68750 2.78125 2.73438 0.49078
[1] 2.68750 2.73438 2.71094 0.22481
[1] 2.687500 2.710938 2.699219 0.094355
[1] 2.687500 2.699219 2.693359 0.029757
[1]  2.6875000  2.6933594  2.6904297 -0.0023855
[1] 2.690430 2.693359 2.691895 0.013673
[1] 2.6904297 2.6918945 2.6911621 0.0056403
[1] 2.6904297 2.6911621 2.6907959 0.0016266
[1]  2.69042969  2.69079590  2.69061279 -0.00037968
[1] 2.6906128 2.6907959 2.6907043 0.0006234
[1] 2.69061279 2.69070435 2.69065857 0.00012185
[1]  2.69061279  2.69065857  2.69063568 -0.00012892
[1]  2.6906e+00  2.6907e+00  2.6906e+00 -3.5365e-06
[1] 2.6906e+00 2.6907e+00 2.6907e+00 5.9155e-05
[1] 2.6906e+00 2.6907e+00 2.6906e+00 2.7809e-05
[1] 2.6906e+00 2.6906e+00 2.6906e+00 1.2136e-05
$root
[1] 2.6906

$nb.iter
[1] 21
```

```
> nr(f1, f1p, start = 2.5, echo = TRUE)
```

```
[1] 2.7143
[1] 2.6910
[1] 2.6906
$root
[1] 2.6906

$nb.iter
[1] 3
```

```
> secante(f1, start0 = 1, start1 = 4, echo = TRUE)
```

```
[1] 1.5455
[1] 1.9969
[1] 4.1051
```

```
[1] 2.2947
[1] 2.4787
[1] 2.7514
[1] 2.6831
[1] 2.6904
[1] 2.6906
$root
[1] 2.6906

$nb.iter
[1] 9
```

b) La fonction possède deux racines dans $[-4, 0]$. La convergence se fera vers l'une ou l'autre selon la position de la ou des valeurs de départ par rapport à l'extremum de la fonction dans l'intervalle. Ici, il s'agit d'un maximum $x = -2$. Ainsi, avec des valeurs de départ inférieures au maximum, on trouve la première racine :

```
> f2 <- function(x) x^3 + 3 * x^2 - 1
> f2p <- function(x) 3 * x^2 + 6 * x
> bissection(f2, lower = -3, upper = -2.8, echo = TRUE)
```

```
[1] -3.000 -2.800 -2.900 -0.159
[1] -2.90000 -2.80000 -2.85000  0.21838
[1] -2.900000 -2.850000 -2.875000  0.033203
[1] -2.900000 -2.875000 -2.887500 -0.062014
[1] -2.887500 -2.875000 -2.881250 -0.014185
[1] -2.8812500 -2.8750000 -2.8781250  0.0095642
[1] -2.8812500 -2.8781250 -2.8796875 -0.0022966
[1] -2.8796875 -2.8781250 -2.8789062  0.0036373
[1] -2.87968750 -2.87890625 -2.87929688  0.00067121
[1] -2.87968750 -2.87929688 -2.87949219 -0.00081245
[1] -2.8795e+00 -2.8793e+00 -2.8794e+00 -7.0567e-05
[1] -2.87939453 -2.87929688 -2.87934570  0.00030034
[1] -2.87939453 -2.87934570 -2.87937012  0.00011489
[1] -2.8794e+00 -2.8794e+00 -2.8794e+00  2.2161e-05
[1] -2.8794e+00 -2.8794e+00 -2.8794e+00 -2.4203e-05
[1] -2.8794e+00 -2.8794e+00 -2.8794e+00 -1.0210e-06
[1] -2.87938538 -2.87938232 -2.87938385  0.00001057
$root
[1] -2.8794

$nb.iter
[1] 17
```

```
> nr(f2, f2p, start = -3, echo = TRUE)
```

```
[1] -2.8889
[1] -2.8795
[1] -2.8794
$root
[1] -2.8794
```

```
$nb.iter
[1] 3
```

```
> secante(f2, start0 = -3, start1 = -2, echo = TRUE)
```

```
[1] -2.75
[1] -3.0667
[1] -2.862
[1] -2.8772
[1] -2.8794
[1] -2.8794
$root
[1] -2.8794

$nb.iter
[1] 6
```

Pour trouver la seconde racine, on utilise des valeurs de départ supérieures au maximum :

```
> bissection(f2, lower = -1, upper = 0.5, echo = TRUE)
```

```
[1] -1.00000  0.50000 -0.25000 -0.82812
[1] -1.000000 -0.250000 -0.625000 -0.072266
[1] -1.00000 -0.62500 -0.81250  0.44409
[1] -0.81250 -0.62500 -0.71875  0.17850
[1] -0.718750 -0.625000 -0.671875  0.050953
[1] -0.671875 -0.625000 -0.648438 -0.011236
[1] -0.671875 -0.648438 -0.660156  0.019719
[1] -0.6601562 -0.6484375 -0.6542969  0.0042058
[1] -0.6542969 -0.6484375 -0.6513672 -0.0035239
[1] -0.65429688 -0.65136719 -0.65283203  0.00033872
[1] -0.6528320 -0.6513672 -0.6520996 -0.0015932
[1] -0.65283203 -0.65209961 -0.65246582 -0.00062736
[1] -0.65283203 -0.65246582 -0.65264893 -0.00014435
[1] -6.5283e-01 -6.5265e-01 -6.5274e-01  9.7175e-05
[1] -6.5274e-01 -6.5265e-01 -6.5269e-01 -2.3592e-05
[1] -6.5274e-01 -6.5269e-01 -6.5272e-01  3.6791e-05
[1] -6.5272e-01 -6.5269e-01 -6.5271e-01  6.5995e-06
[1] -6.5271e-01 -6.5269e-01 -6.5270e-01 -8.4961e-06
[1] -6.5271e-01 -6.5270e-01 -6.5270e-01 -9.4828e-07
[1] -6.5271e-01 -6.5270e-01 -6.5270e-01  2.8256e-06
[1] -6.5270e-01 -6.5270e-01 -6.5270e-01  9.3867e-07
[1] -6.527e-01 -6.527e-01 -6.527e-01 -4.804e-09
$root
[1] -0.6527

$nb.iter
[1] 22
```

```
> nr(f2, f2p, start = -1, echo = TRUE)
```

```
[1] -0.66667
[1] -0.65278
```

```
[1] -0.6527
$root
[1] -0.6527

$nb.iter
[1] 3
```

```
> secante(f2, start0 = -2, start1 = -1, echo = TRUE)
```

```
[1] -0.5
[1] -0.63636
[1] -0.65394
[1] -0.6527
[1] -0.6527
$root
[1] -0.6527

$nb.iter
[1] 5
```

On remarquera que les deux valeurs de départ de la méthode de la sécante n'ont pas à se trouver de part et d'autre de la racine.

c) La fonction n'a qu'une seule racine dans $[0, 1]$ et elle est légèrement supérieure à 0,6.

```
> f3 <- function(x) x - 2^(-x)
> f3p <- function(x) 1 + log(2) * 2^(-x)
> bissection(f3, lower = 0.6, upper = 0.65,
+      echo = TRUE)
```

```
[1]  0.60000  0.65000  0.62500 -0.02342
[1]  0.6250000  0.6500000  0.6375000 -0.0053259
[1] 0.6375000 0.6500000 0.6437500 0.0037029
[1]  0.63750  0.64375  0.64062 -0.00081
[1] 0.6406250 0.6437500 0.6421875 0.0014468
[1] 0.6406250 0.6421875 0.6414062 0.0003185
[1]  0.64062500  0.64140625  0.64101562 -0.00024573
[1] 6.4102e-01 6.4141e-01 6.4121e-01 3.6390e-05
[1]  0.64101562  0.64121094  0.64111328 -0.00010467
[1]  6.4111e-01  6.4121e-01  6.4116e-01 -3.4140e-05
[1] 6.4116e-01 6.4121e-01 6.4119e-01 1.1251e-06
[1]  6.4116e-01  6.4119e-01  6.4117e-01 -1.6507e-05
[1]  6.4117e-01  6.4119e-01  6.4118e-01 -7.6910e-06
[1]  6.4118e-01  6.4119e-01  6.4118e-01 -3.2830e-06
[1]  6.4118e-01  6.4119e-01  6.4118e-01 -1.0789e-06
[1] 6.4118e-01 6.4119e-01 6.4119e-01 2.3101e-08
[1]  6.4118e-01  6.4119e-01  6.4119e-01 -5.2791e-07
$root
[1] 0.64119

$nb.iter
[1] 17
```

```
> nr(f3, f3p, start = 0.6, echo = TRUE)
[1] 0.641
[1] 0.64119
$root
[1] 0.64119

$nb.iter
[1] 2
> secante(f3, start0 = 0.6, start1 = 0.65, echo = TRUE)
[1] 0.64122
[1] 0.64119
$root
[1] 0.64119

$nb.iter
[1] 2
```

d) La fonction n'a qu'une seule racine dans $[1,2]$ et elle est légèrement supérieure à 1,8.

```
> f4 <- function(x) exp(x) + 2^(-x) + 2 * cos(x) -
+     6
> f4p <- function(x) exp(x) - 2^(-x) * log(2) -
+     2 * sin(x)
> bissection(f4, lower = 1.8, upper = 1.85,
+     echo = TRUE)
[1]  1.800000  1.850000  1.825000 -0.017913
[1] 1.825000 1.850000 1.837500 0.033517
[1] 1.825000 1.837500 1.831250 0.007667
[1]  1.8250000  1.8312500  1.8281250 -0.0051567
[1] 1.8281250 1.8312500 1.8296875 0.0012468
[1]  1.8281250  1.8296875  1.8289063 -0.0019571
[1]  1.82890625  1.82968750  1.82929688 -0.00035568
[1] 1.8292969 1.8296875 1.8294922 0.0004454
[1] 1.8293e+00 1.8295e+00 1.8294e+00 4.4827e-05
[1]  1.82929688  1.82939453  1.82934570 -0.00015544
[1]  1.8293e+00  1.8294e+00  1.8294e+00 -5.5307e-05
[1]  1.8294e+00  1.8294e+00  1.8294e+00 -5.2405e-06
[1] 1.8294e+00 1.8294e+00 1.8294e+00 1.9793e-05
[1] 1.8294e+00 1.8294e+00 1.8294e+00 7.2762e-06
[1] 1.8294e+00 1.8294e+00 1.8294e+00 1.0178e-06
$root
[1] 1.8294

$nb.iter
[1] 15
> nr(f4, f4p, start = 1.8, echo = TRUE)
[1] 1.8301
[1] 1.8294
```

```
$root
[1] 1.8294

$nb.iter
[1] 2
```

```
> secante(f4, start0 = 1.8, start1 = 1.85, echo = TRUE)
```

```
[1] 1.8289
[1] 1.8294
[1] 1.8294
$root
[1] 1.8294

$nb.iter
[1] 3
```

e) Encore ici, la fonction n'a qu'une seule racine dans l'intervalle mentionné et elle se situe autour de 0,25.

```
> f5 <- function(x) exp(x) - x^2 + 3 * x - 2
> f5p <- function(x) exp(x) - 2 * x + 3
> bissection(f5, lower = 0.24, upper = 0.26,
+     echo = TRUE)
```

```
[1]  0.240000  0.260000  0.250000 -0.028475
[1]  0.2500000  0.2600000  0.2550000 -0.0095634
[1]  0.25500000  0.26000000  0.25750000 -0.00011444
[1] 0.2575000 0.2600000 0.2587500 0.0046084
[1] 0.2575000 0.2587500 0.2581250 0.0022471
[1] 0.2575000 0.2581250 0.2578125 0.0010664
[1] 0.25750000 0.25781250 0.25765625 0.00047597
[1] 0.25750000 0.25765625 0.25757812 0.00018077
[1] 2.5750e-01 2.5758e-01 2.5754e-01 3.3166e-05
[1]  2.5750e-01  2.5754e-01  2.5752e-01 -4.0637e-05
[1]  2.5752e-01  2.5754e-01  2.5753e-01 -3.7355e-06
[1] 2.5753e-01 2.5754e-01 2.5753e-01 1.4715e-05
[1] 2.5753e-01 2.5753e-01 2.5753e-01 5.4898e-06
[1] 2.5753e-01 2.5753e-01 2.5753e-01 8.7717e-07
[1]  2.5753e-01  2.5753e-01  2.5753e-01 -1.4291e-06
[1]  2.5753e-01  2.5753e-01  2.5753e-01 -2.7598e-07
[1] 2.5753e-01 2.5753e-01 2.5753e-01 3.0059e-07
$root
[1] 0.25753

$nb.iter
[1] 17
```

```
> nr(f5, f5p, start = 0.26, echo = TRUE)
```

```
[1] 0.25753
[1] 0.25753
$root
[1] 0.25753
```

TAB. A.1 — Valeurs successives de la méthode de bissection pour l'exercice 5.3.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	0	2	1	-1
2	1,00	2,00	1,50	0,25
3	1,0000	1,5000	1,2500	$-0{,}4375$
4	1,250000	1,500000	1,375000	$-0{,}109375$
5	1,37500000	1,50000000	1,43750000	0,06640625
6	1,37500000	1,43750000	1,40625000	$-0{,}02246094$
7	1,40625000	1,43750000	1,42187500	0,02172852
8	1,4062500000	1,4218750000	1,4140625000	$-0{,}0004272461$
9	1,41406250	1,42187500	1,41796875	0,01063538
10	1,41406250	1,41796875	1,41601562	0,00510025

```
$nb.iter
[1] 2
> secante(f5, start0 = 0.24, start1 = 0.26,
+     echo = TRUE)
[1] 0.25753
[1] 0.25753
$root
[1] 0.25753

$nb.iter
[1] 2
```

5.3 On trouve la racine de $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[0, 2]$ par la méthode de bissection avec un maximum de 10 itérations. Le tableau A.1 contient les valeurs successives de a, b, $x = (a + b)/2$ et $f(x)$. On obtient donc une réponse de 1,41601562, alors que la vraie réponse est le nombre irrationnel $\sqrt{2} = 1{,}414214$.

5.4 On a que

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

d'où $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$. Or, $\sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ est la série harmonique qui est connue pour diverger. On peut, par exemple, justifier ceci par le fait que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$$

diverge elle-même. Cet exercice illustre donc que le critère $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ peut être satisfait même pour une série divergente.

5.5 a) On considère la fonction $g(x) = 3^{-x}$ dans l'intervalle $[0,1]$. En premier lieu, $1/3 \leq 3^{-x} \leq 1$ pour $0 \leq x \leq 1$, donc $g(x) \in [0,1]$. De plus, $g'(x) = -3^{-x-1}(\ln 3)$, d'où

$$|g'(x)| = \frac{\ln 3}{3^{x+1}} \leq \ln 3 < 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Par le théorème 5.1 des notes de cours, la fonction g possède un point fixe unique dans l'intervalle $[0,1]$.

b) Le graphique de la fonction g se trouve à la figure A.11. On constate que la fonction a effectivement un point fixe unique dans l'intervalle $[0,1]$ et que celui-ci se trouve près de $x = \frac{1}{2}$. On peut donc utiliser cette valeur comme point de départ de l'algorithme du point fixe :

```
> pointfixe(function(x) 3^(-x), start = 0.5)

$fixed.point
[1] 0.54781

$nb.iter
[1] 24
```

On remarque que la réponse est indépendante de la valeur de départ :

```
> pointfixe(function(x) 3^(-x), start = 0)

$fixed.point
[1] 0.54781

$nb.iter
[1] 29

> pointfixe(function(x) 3^(-x), start = 1)

$fixed.point
[1] 0.54781

$nb.iter
[1] 28

> pointfixe(function(x) 3^(-x), start = 2)

$fixed.point
[1] 0.54781

$nb.iter
[1] 29
```

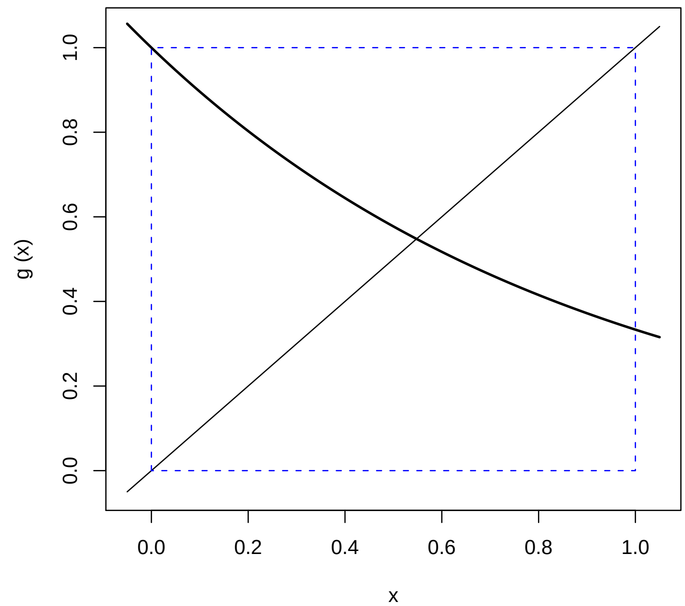


FIG. A.11 — *Fonction* $g(x) = 3^{-x}$ *dans* $[0, 1]$.

5.6 Les cinq fonctions sont les suivantes :

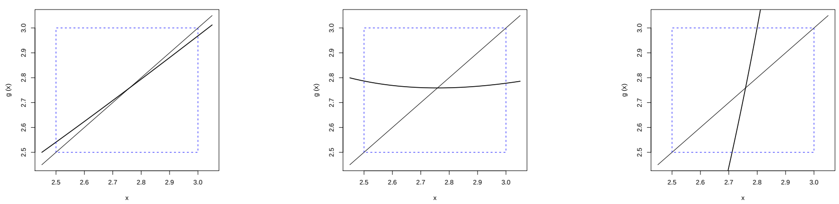
$$\begin{aligned} g_1(x) &= x - x^3 - 4x^2 + 10 \\ g_2(x) &= \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2} \\ g_3(x) &= \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} \\ g_4(x) &= \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2} \\ g_5(x) &= x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}. \end{aligned}$$

Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. On peut réécrire l'équation $f(x) = 0$ de différentes façons :

a) $x = x - f(x)$;

b) $x^3 = 10 - 4x^2 \Rightarrow x^2 = 10/x - 4x \Rightarrow x = (10/x - 4x)^{1/2}$;

c) $4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow x^2 = (10 - x^3)/4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$;



(a) *Fonction* $g_1(x)$ (b) *Fonction* $g_2(x)$ (c) *Fonction* $g_3(x)$

FIG. A.12 — *Fonctions de l'exercice 5.8.*

d) $4x^2 + x^3 = 10 \Rightarrow x^2 = 10/(4+x) \Rightarrow x = (10/(4+x))^{1/2}$;

e) $x = x - f(x)/f'(x)$.

Les fonctions g_1 à g_5 correspondent, dans l'ordre, au côté droit de chacune des équations ci-dessus. On remarquera que la fonction g_5 est celle préconisée par la méthode de Newton–Raphson — et celle qui converge le plus rapidement.

5.7 La fonction $g(x) = 4x^2 - 14x + 14$ est une parabole ayant deux points fixes. On observe graphiquement que l'un se trouve en $x = 2$ et que $g(1{,}5) = g(2)$. Or, pour toute valeur de départ $x_0 < 1{,}5$ de l'algorithme du point fixe, on constate que les valeurs de $x_1, x_2, \dots$ se retrouveront de plus en plus loin sur la branche droite de la parabole. Il en va de même pour tout $x_0 > 2$. La procédure diverge donc pour de telles valeurs de départ. En revanche, il est facile de vérifier graphiquement que la procédure converge pour toute valeur de départ dans l'intervalle $[1{,}5, 2]$. Si $x_0 = 1{,}5$, on obtient le point fixe $x = 2$ après une seule itération.

5.8 En premier lieu, on remarque que les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont développées à partir de l'équation $x^3 = 21$ pour calculer $\sqrt[3]{21}$ par la méthode du point fixe. La figure A.12 présente ces trois fonctions. On a

$$
\begin{aligned}
g_1'(x) &= \frac{20}{21} - \frac{2}{x^3} \\
g_2'(x) &= \frac{2}{3} - \frac{14}{x^3} \\
g_3'(x) &= 1 - \frac{2x^5 - 84x^3 + 21x^2 + 441}{(x^2 - 21)^2}.
\end{aligned}
$$

Considérons l'intervalle $[2{,}5, 3]$ autour du point fixe. On a que $|g_2'(x)| < |g_1(x)|$ pour tout x dans cet intervalle, donc la procédure du point fixe converge plus rapidement pour g_2 (la fonction de la méthode de Newton–Raphson). Cela se vérifie aisément sur les graphiques de la figure A.12. Toujours à l'aide des graphiques, on voit que la procédure diverge avec la fonction g_3.

5.9 On considère la fonction $g(x) = 2^{-x}$ dans l'intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$. En premier lieu, on a $g(x) \in [\frac{1}{2}, 1/\sqrt[3]{2}] \subset [\frac{1}{3}, 1]$ pour $x \in [\frac{1}{3}, 1]$. De plus, on a $g'(x) = -2^{-x-1}(\ln 2)$, d'où

$$|g'(x)| = \frac{\ln 2}{2^{x+1}} \leq \ln 2 < 1, \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 1.$$

Par le théorème 5.1 des notes de cours, la fonction g possède donc un point fixe unique dans l'intervalle $[\frac{1}{3}, 1]$. La valeur de ce point fixe est

```
> pointfixe(function(x) 2^(-x), start = 2/3)
$fixed.point
[1] 0.64119

$nb.iter
[1] 14
```

5.10 La condition $|g'(x)| \leq k < 1$ du théorème 5.1 assure l'unicité d'un point fixe. Cette condition est nécessaire pour que la fonction $g(x)$ ne puisse repasser au-dessus de la droite $y = x$ après l'avoir déjà croisée une première fois pour créer un point fixe. Or, il est seulement nécessaire de limiter la croissance de la fonction — soit les valeurs positives de sa pente. Peu importe la vitesse de décroissance de la fonction dans l'intervalle $[a, b]$ (mais toujours sujet à ce que $g(x) \in [a, b]$), la fonction ne peut croiser la droite $y = x$ qu'une seule fois. La condition $g'(x) \leq k < 1$ est donc suffisante pour assurer l'unicité du point fixe dans $[a, b]$.

5.11 La distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\mathbb{R}^2$ est

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Par conséquent, la distance entre le point (x, x^2) et le point $(1, 0)$ est une fonction de x

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2 - 0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 1}.$$

On cherche la valeur de minimisant $d(x)$ ou, de manière équivalente, $d^2(x)$. On doit donc résoudre

$$\frac{d}{dx} d^2(x) = f(x) = 4x^3 + 2x - 2 = 0$$

à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Cela requiert également

$$f'(x) = 12x^2 + 2.$$

Le point sur la courbe $y = x^2$ le plus du point $(1, 0)$ est donc la limite de la suite

$$x_n = x_{n-1} - \frac{4x_{n-1}^3 + 2x_{n-1} - 2}{12x_{n-1}^2 + 2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

avec x_0 une valeur de départ «près» de la solution. On obtient

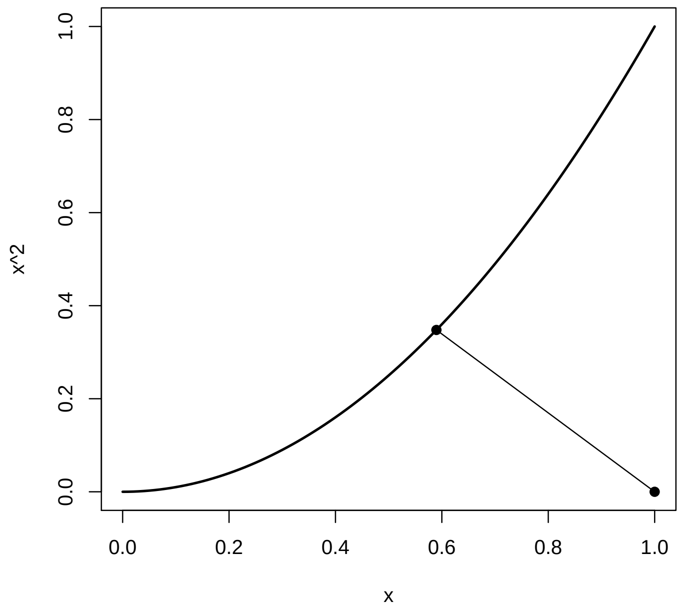


FIG. A.13 — *Point de $y = x^2$ le plus près du point $(1, 0)$.*

```
> nr(function(x) 4 * x^3 + 2 * x - 2, function(x) 12 *
+     x^2 + 2, start = 0.6)

$root
[1] 0.58975

$nb.iter
[1] 2
```

On voit à la figure A.13 que la solution, disons le point $(x^*, (x^*)^2)$, est la projection du point $(1, 0)$ sur la courbe $y = x^2$; autrement dit, la droite passant par $(x^*, (x^*)^2)$ et $(1, 0)$ est perpenticulaire à la tangente de $y = x^2$ en $x = x^*$.

5.12 La fonction devra utiliser la méthode de Newton–Raphson pour trouver la racine de $f(i) = 0$, où

$$f(i) = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

```
tri <- function(CF, erreur.max = 1E-6)
{
    if (!any(CF < 0))
        stop("au moins un flux financier doit être
              négatif")

    t <- 0:(length(CF) - 1)

    f <- function(i) sum(CF/(1 + i)^t)
    fp <- function(i) sum((-CF * t)/((1 + i)^(t + 1)))

    nr(f, fp, start = 0.05, TOL = erreur.max)$root
}
```

FIG. A.14 — *Fonction S de calcul du taux de rendement interne d'une série de flux financiers.*

et

$$f'(i) = -\sum_{t=0}^{n} \frac{tCF_t}{(1+i)^{t+1}}.$$

La fonction `tri` de la figure A.14 calcule le taux de rendement interne d'un vecteur de flux financiers en utilisant notre fonction de Newton–Raphson `nr`.

5.13 La figure A.15 contient le code d'une fonction VBA `tri2` effectuant le calcul du taux de rendement interne d'un ensemble de flux financiers. Ceux-ci sont passés en argument à la fonction par le bais d'une plage horizontale ou verticale de montants périodiques consécutifs. La procédure de Newton–Raphson est codée à même cette fonction. On peut vérifier facilement que le résultat de cette fonction est identique à celui de la fonction Excel `TRI()`.

5.14 a) On veut estimer par la méthode du maximum de vraisemblance le paramètre θ d'une loi Gamma$(3, 1/\theta)$, dont la fonction de densité de probabilité est

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta^3}\, x^2 e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

La fonction de log-vraisemblance d'un échantillon aléatoire $x_1, \dots, x_n$

```
Function tri2(flux As Range, Optional ErreurMax
              As Double = 0.000000001)
    Dim nrow As Integer, ncol As Integer, n As Integer
    Dim CF() As Double, f As Double, fp As Double,
        i As Double, it As Double

    nrow = flux.Rows.Count
    ncol = flux.Columns.Count
    n = IIf(nrow > 1, nrow, ncol) - 1
    ReDim CF(0 To n)

    For t = 0 To n
        CF(t) = flux.Cells(t + 1, 1)
    Next t

    If CF(0) > 0 Then
        tri2 = "Erreur"
        Exit Function
    End If

    i = 0.05
    Do
        f = 0
        fp = 0
        it = i
        For t = 0 To n
            f = f + CF(t) / (1 + i) ^ t
            fp = fp - t * CF(t) / (1 + i) ^ (t + 1)
        Next t
        i = i - f / fp
    Loop Until Abs(i - it) / i < ErreurMax
    tri2 = i
End Function
```

FIG. A.15 — *Fonction VBA de calcul du taux de rendement interne d'une série de flux financiers.*

```
emv.gamma <- function(x, erreur.max = 1E-6)
{
    n <- length(x)
    xsum <- sum(x)
    f <- function(theta) xsum/theta^2 -
         (3 * n)/theta
    fp <- function(theta) -2 * xsum / theta^3 +
          (3 * n)/theta^2
    nr(f, fp, xsum / n /3, TOL = erreur.max)$root
}
```

FIG. A.16 — *Fonction S d'estimation du paramètre d'échelle d'une loi gamma par le maximum de vraisemblance.*

tiré de cette loi est

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(2\ln x_i - \frac{x_i}{\theta} - \ln 2 - 3\ln\theta\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln 2 - 3n\ln\theta. \end{aligned}$$

On cherche le maximum de la fonction $l(\theta)$, soit la valeur de θ tel que

$$l'(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} - \frac{3n}{\theta} = 0.$$

Résoudre cette équation à l'aide de la méthode de Newton–Raphson requiert également

$$l''(\theta) = -\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{3n}{\theta^2}.$$

La figure A.16 présente une fonction S pour effectuer le calcul à l'aide de notre fonction de Newton–Raphson `nr`. On remarquera que la somme des valeurs de l'échantillon — qui ne change pas durant la procédure itérative — est calculée une fois pour toute dès le début de la fonction. De plus, on utilise comme valeur de départ l'estimateur des moments de θ, $\bar{x}/3$.

b) On a, par exemple,

```
> x <- rgamma(20, shape = 3, scale = 1000)
> emv.gamma(x)
```

```
Function emvGamma(Data As Range, Optional ErreurMax
                  As Double = 0.000000001)
    Dim n As Integer
    Dim sData As Double, f As Double,
        fp As Double, x As Double, xt As Double

    n = Data.Rows.Count
    sData = WorksheetFunction.Sum(Data)

    x = sData / n / 3
    Do
        f = sData / x ^ 2 - (3 * n) / x
        fp = -2 * sData / x ^ 3 + 3 * n / x ^ 2
        xt = x
        x = x - f / fp
    Loop Until Abs(x - xt) / x < ErreurMax
    emvGamma = x
End Function
```

FIG. A.17 — *Fonction VBA d'estimation du paramètre d'échelle d'une loi gamma par le maximum de vraisemblance.*

```
[1] 1006.8
```

5.15 La figure A.17 présente le code VBA d'une fonction `emvGamma` très similaire à la fonction S de l'exercice précédent. Pour l'utiliser dans Excel, il suffit de lui passer en argument une plage (verticale) contenant un échantillon aléatoire d'une loi Gamma$(3, 1/\theta)$.

5.16 On cherche à résoudre l'équation

$$a^{(12)}_{\overline{10}|i} = \frac{1-(1+i)^{-10}}{i^{(12)}} = 8$$

ou, de manière équivalente,

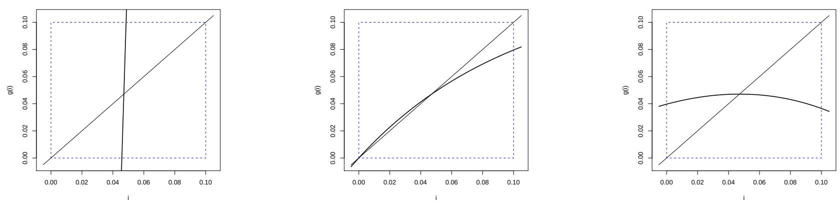
$$f(i) = \frac{1-(1+i)^{-10}}{12(1+i)^{1/12}-1} - 8 = 0.$$

Pour résoudre le problème à l'aide de la méthode du point fixe, on peut considérer la fonction

$$g_1(i) = i - f(i),$$

mais, comme le graphique de la figure A.18(a) le montre, la procédure itérative divergera. En posant

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{8} = 12[(1+i)^{1/12}-1],$$



(a) Fonction $g_1(x)$ (b) Fonction $g_2(x)$ (c) Fonction $g_3(x)$

FIG. A.18 — *Trois fonctions pour résoudre* $a_{\overline{10}|i}^{(12)} = 8$ *par la méthode du point fixe.*

puis en isolant i du côté droit de l'équation, on obtient une alternative

$$g_2(i) = \left(\frac{97 - (1+i)^{-10}}{96} \right)^{12} - 1.$$

Cette fonction satisfait les hypothèses pour l'existence et l'unicité d'un point fixe, mais sa pente est toutefois près de 1, donc la convergence sera lente ; voir la figure A.18(b). Enfin, on peut considérer la fonction

$$\begin{aligned} g_3(i) &= i - \frac{f(i)}{f'(i)} \\ &= \frac{120(1+i)^{-11}[(1+i)^{1/12} - 1] - [1 - (1+i)^{-10}](1+i)^{-11/12}}{144[(1+i)^{1/12} - 1]^2}. \end{aligned}$$

On remarquera que cette dernière est la fonction utilisée dans la méthode de Newton–Raphson et sa pente est presque nulle, d'où une convergence très rapide ; voir la figure A.18(c). On obtient les résultats suivants :

```
> f <- function(i) (1 - (1 + i)^(-10))/(12 *
+     ((1 + i)^(1/12) - 1)) - 8
> fp <- function(i) (120 * (1 + i)^(-11) * ((1 +
+     i)^(1/12) - 1) - (1 - (1 + i)^(-10)) *
+     (1 + i)^(-11/12))/(144 * ((1 + i)^(1/12) -
+     1)^2)
> g2 <- function(i) ((97 - (1 + i)^(-10))/96)^12 -
+     1
> g3 <- function(i) i - f(i)/fp(i)
> pointfixe(g2, start = 0.05)

$fixed.point
[1] 0.047081

$nb.iter
[1] 40

> pointfixe(g3, start = 0.05)
```

```
$fixed.point
[1] 0.047081

$nb.iter
[1] 2
```

Chapitre 6

6.1 a) On a une solution unique. Le système d'équations correspondant est

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Par substitution successive, on obtient $x_3 = 5$, $x_2 = 2 - 2(5) = -8$ et $x_1 = 7 + (3)(-8) - 4(5) = -37$.

b) Le système est sous-déterminé : il compte plus d'inconnues que d'équations. Il y a donc une infinité de solutions. Le système d'équations correspondant est

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_3 - 5x_3 &= 6 \\ x_2 + 4x_3 - 9x_4 &= 3 \\ x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

On utilise la variable libre $x_4 = t$. Ainsi, la solution générale du système d'équations est $x_3 = 2 - t$, $x_2 = 3 - 4(2 - t) + 9t = -5 + 13t$ et $x_1 = 6 - 8(2 - t) + 5t = -10 + 13t$.

c) On avait à l'origine un système d'équations à quatre équations et cinq inconnues. La matrice échelonnée contient une ligne complète de zéros, ce qui indique que la quatrième équation était une combinaison linéaire des trois autres. Ne reste donc qu'un système sous-déterminé à trois équations et cinq inconnues :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - 8x_5 &= -3 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 &= 5 \\ x_4 + 3x_5 &= 9. \end{aligned}$$

Ce système a une infinité de solutions et il faudra, pour les exprimer, poser deux variables libres. Les candidates sont les variables correspondant aux colonnes sans un 1 sur la diagonale. On pose donc $x_2 = s$ et $x_5 = t$. On a alors $x_4 = 9 - 3t$, $x_3 = 5 - (9 - 3t) - 6t = -4 - 3t$ et $x_1 = -3 - 7s + 2(-4 - 3t) + 8t = -11 - 7s + 2t$.

d) La dernière ligne de la matrice échelonnée correspond à l'équation impossible à satisfaire

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1,$$

d'où le système n'a pas de solution.

6.2 a) On donne la solution pour l'élimination gaussienne seulement. La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Les opérations élémentaires à effectuer sur cette matrice pour l'exprimer sous forme échelonnée sont, dans l'ordre :

1. additionner la première ligne à la seconde ;
2. additionner -3 fois la première ligne à la troisième ;
3. additionner -3 fois la première ligne à la troisième ;
4. multiplier la deuxième ligne par -1 ;
5. additionner 10 fois la deuxième ligne à la troisième ;
6. diviser la troisième ligne par -52.

On obtient alors la matrice échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

d'où $x_3 = 2$, $x_2 = -9 + 5(2) = 1$ et $x_1 = 8 - 1 - 2(2) = 3$.

b) On donne la solution pour l'élimination de Gauss–Jordan seulement. La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les opérations élémentaires à effectuer sur cette matrice pour l'exprimer sous forme échelonnée réduite sont les suivantes :

1. multiplier la première ligne par $\frac{1}{2}$;
2. additionner 2 fois la première ligne à la deuxième ;
3. additionner -8 fois la première ligne à la troisième ;
4. additionner la deuxième ligne à la troisième ;
5. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{7}$;
6. additionner -1 fois la deuxième ligne à la première.

On obtient alors la matrice échelonnée réduite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En posant $x_3 = t$, on a la solution générale $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t$ et $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t$.

c) On donne la solution pour l'élimination gaussienne seulement. La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Les opérations élémentaires à effectuer sur cette matrice pour l'exprimer sous forme échelonnée sont, dans l'ordre :

1. additionner -2 fois la première ligne à la seconde ;
2. additionner la première ligne à la troisième ;
3. additionner -3 fois la première ligne à la quatrième ;
4. additionner -1 fois la deuxième ligne à la quatrième ;
5. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{3}$;
6. additionner -1 fois la deuxième ligne à la troisième.

On obtient alors la matrice échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_2 = 2s$ et $x_1 = -1 + 2s - 2s + t = -1 + t$.

d) En échangeant les première et troisième équations, on a la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Après les opérations élémentaires

1. multiplier la première ligne par $\frac{1}{6}$;
2. additionner -3 fois la première ligne à la deuxième ;
3. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{3}$;
4. additionner 2 fois la deuxième ligne à la troisième,

on obtient la matrice échelonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 5/6 \\ 0 & 1 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La troisième équation étant impossible à satisfaire, le système n'a pas de solution.

6.3 La procédure de réduction des matrices augmentées sous forme échelonnée est similaire à celle utilisée dans les solutions de l'exercice 6.2. On ne donne, ici que les résultats de cette procédure.

a) La matrice échelonnée est

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}$$

et la matrice échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution générale est $x_3 = t$, $x_2 = 5 - 27t$ et $x_1 = 2 - 12t$.

b) La matrice échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 6/5 & 6/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ce système n'a donc pas de solution.

c) La matrice échelonnée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 7/2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution générale est $v = 2$, $y = t$, $x = 3 + t$, $w = -2 - t$ et $u = -6 - 3t - 2s$.

6.4 a) Après quelques opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée correspondant à ce système d'équations, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $x_3 = x_2 = x_1 = 0$, soit la solution triviale.

b) La somme des deux équations donne une nouvelle équation $4x_1 + x_3 = 0$, d'où $x_3 = -4x_1$. De la première équation, on a également $x_2 = -3x_1 - x_3 - x_4 = x_1 - x_4$. En posant $x_1 = -s$ et $x_4 = t$, on a la solution générale $x_3 = 4s$ et $x_2 = -s - t$. Il y a évidemment de multiples autres façons d'exprimer la solution générale en utilisant des variables libres différentes.

c) La matrice échelonnée de ce système d'équations est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc $z = 0$ et, en posant $y = t$, $x = -t$, $w = t$.

6.5 Après des opérations élémentaires sur la matrice augmentée du système d'équations, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{bmatrix}.$$

On constate alors que le système d'équations n'a pas de solution si $a^2 - 16 = 0$ et $a - 4 \neq 0$, donc lorsque $a = -4$. En revanche, si $a^2 - 16 = 0$ et $a - 4 = 0$, soit lorsque $a = 4$, le système a une infinité de solutions. Finalement, si $a^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq 4$, le système a une solution unique.

6.6 La somme (ou la différence) entre deux matrices est définie si les dimensions des matrices sont identiques. Les dimensions du résultat seront les mêmes. Quant au produit, il est défini si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde ; le résultat est une matrice dont le nombre de lignes est égal à celui de la première matrice et le nombre de colonnes à celui de la seconde matrice.

a) Le produit $\mathbf{BA}$ n'est pas défini.

b) Le résultat de $\mathbf{AC}$ est une matrice 4×2, donc l'opération $\mathbf{AC} + \mathbf{D}$ est définie et le résultat est une matrice 4×2.

c) Le résultat de $\mathbf{AE}$ est une matrice 4×4, donc l'opération $\mathbf{AE} + \mathbf{B}$ n'est pas définie.

d) Le produit $\mathbf{AB}$ n'est pas défini.

e) La somme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est définie, tout comme le produit $\mathbf{E}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$. Le résultat est une matrice 5×5.

f) Le résultat du produit $\mathbf{AC}$ est une matrice 4×2, donc $\mathbf{E}(\mathbf{AC})$ est une matrice 5×2.

g) Puisque $\mathbf{E}^T$ est une matrice 4×5, le produit $\mathbf{E}^T\mathbf{A}$ n'est pas défini.

h) Le résultat de $\mathbf{A}^T + \mathbf{E}$ est une matrice 5×4, donc $(\mathbf{A}^T + \mathbf{E})\mathbf{D}$ est une matrice 5×2.

6.7 a) On a

$$\mathbf{D}+\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

b) On a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) On a

$$\begin{aligned}(2\mathbf{D}^T - \mathbf{E})\mathbf{A} &= \left(2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 36 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

d) On a $(4\mathbf{B})\mathbf{C} + 2\mathbf{B} = 2\mathbf{B}(2\mathbf{C} + \mathbf{I})$. Or la somme entre parenthèses n'est pas définie puisque la matrice $\mathbf{C}$ n'est pas carrée.

e) On a

$$\begin{aligned}(-\mathbf{AC})^T + 5\mathbf{D}^T &= \left(- \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \right)^T + 5 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T \\ &= \left(- \begin{bmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \right)^T + \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -12 & 2 & -5 \\ -6 & -8 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

f) On a

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{B}\mathbf{A}^T - 2\mathbf{C})^T &= \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \left(\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

g) On a

$$
\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix}
$$

et

$$
\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},
$$

d'où

$$
\mathbf{B}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}
$$

h) On a $\mathbf{D}^T\mathbf{E}^T - (\mathbf{E}\mathbf{D})^T = (\mathbf{E}\mathbf{D})^T - (\mathbf{E}\mathbf{D})^T = \mathbf{0}_{3\times 3}$.

i) Pour calculer la trace, il suffit de connaître les éléments de la diagonale. Or l'élément d_{ii} de $\mathbf{D}\mathbf{D}^T$ est la somme des carrés des éléments de la ligne i de la matrice $\mathbf{D}$. Par conséquent, $\mathrm{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T) = (1+25+4) + (1+0+1) + (9+4+16) = 61$.

j) Encore une fois, on se concentre seulement sur les éléments de la diagonale de $4\mathbf{E}^T - \mathbf{D}$. La transposée ne joue donc aucun rôle, ici. Ainsi, $\mathrm{tr}(4\mathbf{E}^T - \mathbf{D}) = (24-1) + (4-0) + (12-4) = 35$.

6.8 Puisque $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}).
\end{aligned}
$$

6.9 a) On a que $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, d'où $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ est symétrique. On procède de même pour le second résultat.

b) On a que $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, d'où $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ est anti-symétrique.

6.10 Tout d'abord, $\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}$, d'où $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est symétrique. De plus, si $\mathbf{A}$ est symétrique, alors $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. La matrice $\mathbf{A}$ est donc idempotente.

6.11 a) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement linéairement indépendants à moins que l'un ne soit un multiple de l'autre. Ce n'est pas le cas ici.

b) Trois vecteurs sont linéairement dépendants si l'un est une combinaison linéaire des deux autres. Si c'est le cas, le déterminant de la matrice formée des coordonnées des vecteurs sera nul. Or, ici,

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 39 \neq 0.$$

Les vecteurs sont donc linéairement indépendants.

c) Le second vecteur n'est pas un multiple du premier, donc les vecteurs sont linéairement indépendants.

d) Un ensemble de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement linéairement dépendant.

6.12 Les trois vecteurs se trouvent dans un plan si seulement deux vecteurs sont linéairement indépendants (ceux-ci engendrent un plan dont fait alors partie le troisième).

a) Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

En additionnant la première et la deuxième ligne, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

La troisième ligne n'étant pas un multiple de la deuxième, on voit que la seule solution du système d'équations homogène $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est la solution triviale. Par conséquent, les trois vecteurs sont linéairement indépendants et ne se trouvent pas dans un plan. On pourrait également vérifier que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

b) Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

À la suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il n'y a donc que deux vecteurs linéairement indépendants formant un plan dans cet ensemble.

6.13 La condition $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ peut, d'une part, signifier que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ou, d'autre part, qu'il n'y aucun zéro sur la diagonale et, par conséquent, aucune ligne de zéros dans la matrice. Dans un cas comme dans l'autre, cela signifie que l'inverse existe. En utilisant la technique consistant à transformer la matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ en $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$, on voit immédiatement que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}.$$

6.14 Une matrice élémentaire est le résultat d'une opération élémentaire sur la matrice identité.

a) On souhaite inverser les première et troisième ligne de la matrice **A**. Par conséquent,

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Même chose que ci-dessus.

c) La matrice **C** est obtenue à partir de la matrice **A** en additionnant -2 fois la première ligne à la troisième ligne. Par conséquent,

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) De façon similaire, on obtient la matrice **A** en additionnant 2 fois la première ligne de la matrice **C** à la troisième ligne. On a donc

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.15 Par des opérations élémentaire sur les lignes, on cherche à transformer la matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ en $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$. Ci-dessous, L_i identifie la ligne i d'une matrice, le symbole $\leftarrow$ signifie qu'une ligne est remplacée et le symbole $\leftrightarrow$ que deux lignes sont échangées.

a) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -3L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_2 \leftrightarrow L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -4L_2 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -7 & -4 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_3/10$
$L_1 \leftarrow -3L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right]$$

b) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow -4L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

L'inverse n'existe pas puisque l'on obtient une ligne de zéros du côté gauche de la matrice augmentée.

c) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_3 \leftarrow -L_3/2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$
$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

d) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow L_1/2$
$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow -3L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow -3L_2 + L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

e) Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_3 \leftarrow L_1 + L_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_3 \leftarrow L_3/2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

6.16 a) Tel que démontré à l'exercice 6.13, l'inverse est
$$\begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix}.$$

b) Pour obtenir l'inverse de cette matrice par la méthode utilisée à l'exercice 6.15, il suffit d'échanger les lignes de bas en haut, puis de diviser celles-ci par k_4, k_3, k_2 et k_1, respectivement. On trouve alors que l'inverse est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1^{-1} \\ 0 & 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & k_3^{-1} & 0 & 0 \\ k_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) On utilise la méthode de l'exercice 6.15.

Matrice de départ
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow L_1/k$
$L_2 \leftarrow -L_1 + L_2$
$L_2 \leftarrow L_2/k$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$
$L_3 \leftarrow L_3/k$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$
$L_4 \leftarrow L_4/k$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{array}\right]$$

6.17 a) Les opérations élémentaires à effectuer pour transformer la matrice $\mathbf{A}$ en la matrice identité sont, dans l'ordre :

1. additionner 5 fois la première ligne à la deuxième ;
2. multiplier la deuxième ligne par $\frac{1}{2}$.

Les matrices élémentaires correspondantes sont

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) De la partie a), on a que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Du théorème 6.7 des notes de cours, une matrice élémentaire est inversible et son inverse est aussi une matrice élémentaire. Par conséquent, on peut isoler $\mathbf{A}$ dans l'équation $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$ pour obtenir $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}$. Or,

$$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.18 On a le système d'équations linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Par la même technique que les exercices précédents, on trouve

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

6.19 a) On a $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{A}x = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On veut par la suite résoudre ce système d'équations homogène, où

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Or, on peut vérifier que le déterminant de cette matrice est non nul, ce qui signifie que le système d'équations n'admet que la solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. On verra au chapitre 7 que cela signifie que 1 n'est pas une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$.

b) On procède comme ci-dessus en résolvant cette fois le système d'équations linéaires homogène $(4\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Or,

$$4\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Après quelques opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le système d'équations a donc une infinité de solutions. En posant $x_3 = t$, on a $x_2 = 0$ et $x_1 = t$. Autrement dit, tout vecteur de la forme

$$\begin{bmatrix} t & 0 & t \end{bmatrix}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{Ax} = 4\mathbf{x}$. Encore une fois, on verra au chapitre 7 que 4 est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ et que $(t, 0, t)$ est un vecteur propre correspondant.

6.20 Tel que vu au théorème 6.13 des notes de cours, les concepts d'inversibilité et de solution d'un système d'équations linéaires homogène sont liés : une matrice carrée $\mathbf{A}$ est inversible si et seulement si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale.

a) Les quatre équations sont linéairement indépendantes, donc la matrice des coefficients est inversible et la seule solution du système est la solution triviale.

b) Puisque que le coefficient de x_2 est 0 dans la seconde équation, les équations sont linéairement dépendantes, d'où la matrice des coefficients est singulière et il existe une infinité de solution pour le système d'équations homogène.

6.21 On voit que la troisième ligne de la matrice est la somme des deux premières. Les lignes n'étant pas linéairement indépendantes, le déterminant est nul.

6.22 a) Les lignes (et les colonnes) sont linéairement indépendantes, donc la matrice est inversible.

b) La troisième colonne est un multiple de la première. Par conséquent, les colonnes ne sont pas linéairement indépendantes et la matrice est singulière.

c) Le déterminant est clairement nul, donc la matrice est singulière.

d) Idem.

6.23 On utilise les propriétés du déterminant énoncées dans le théorème 6.11 des notes de cours.

a) $\det(3\mathbf{A}) = 3^3 \det(\mathbf{A}) = -189$

b) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A}) = -\frac{1}{7}$

c) $\det(2\mathbf{A}^{-1}) = 2^3/\det(\mathbf{A}) = -\frac{8}{7}$

d) $\det((2\mathbf{A})^{-1}) = 2^{-3}/\det(\mathbf{A}) = -\frac{1}{56}$

6.24 Une matrice n'est pas inversible si son déterminant est nul.

a) Le déterminant de la matrice est $k^2 - 5k + 2$, donc la matrice est singulière lorsque $k = (5 \pm \sqrt{17})/2$.

b) Le déterminant de la matrice est $8k + 8$, donc la matrice est singulière lorsque $k = -1$.

6.25 a) On a

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 14 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

donc $C_{13} = 0$.

b) On a

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 14 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(-12) - 4(-8) + 4(-20) = -96$$

et $C_{23} = (-1)^5(-96) = 96$.

c) On a

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 14 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(-42) - 4(-16) + 4(14) = -48$$

et $C_{22} = (-1)^4(-48) = -48$.

d) On a

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 14 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-12) - 3(-20) = 72$$

et $C_{21} = (-1)^3(-72) = -72$.

e) En développant par la deuxième ligne, on a $\det(\mathbf{A}) = -3C_{23} + 3C_{24}$. Or, de ce qui précède, $C_{23} = 96$ et $C_{24} = M_{24} = 24$. Par conséquent, $\det(\mathbf{A}) = -216$.

Chapitre 7

7.1 Dans tous les cas, la matrice mentionnée dans l'énoncé est notée $\mathbf{A}$.

a) On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$. D'une part, la forme échelonnée du système d'équations $(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s/2$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est donc $(\frac{1}{2}, 1)$. D'autre part, le système d'équations $(-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 0$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -1$ est donc $(0, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(3, 8, 0, -1), nrow = 2)
> eigen(m)

$values
[1]  3 -1

$vectors
          [,1] [,2]
[1,] 0.4472136    0
[2,] 0.8944272    1
```

On remarque que les vecteurs propres obtenus avec `eigen` sont normalisés de sorte que leur norme soit toujours égale à 1.

b) On a

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 9 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 10)(\lambda + 2) + 36 \\ &= (\lambda - 4)^2. \end{aligned}$$

On a donc une seule valeur propre : $\lambda = 4$. Le système d'équations $(4\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 3s/2$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 4$ est donc $(\frac{3}{2}, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(10, 4, -9, -2), nrow = 2)
> eigen(m)

$values
[1] 4 4

$vectors
           [,1]      [,2]
[1,] -0.8320503 0.8320503
[2,] -0.5547002 0.5547002
```

c) On a

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1)^2+2(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$. En premier lieu, le système d'équations $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = x_3 = 0$ et $x_2 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est donc $(0, 1, 0)$. Deuxièmement, le système d'équations $(2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s/2$, $x_2 = s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est donc $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$. Finalement, le système d'équations $(3\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s$, $x_2 = s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est donc $(-1, 1, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(4, -2, -2, 0, 1, 0, 1, 0,
+     1), nrow = 3)
> eigen(m)

$values
[1] 3 2 1

$vectors
           [,1]       [,2] [,3]
[1,]  0.5773503 -0.3333333    0
[2,] -0.5773503  0.6666667    1
[3,] -0.5773503  0.6666667    0
```

d) On a

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 8 \\ -1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 2) - 2(\lambda + 1) + 48 \\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 \\
&= (\lambda - 3)^2(\lambda + 4).
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -4$. En premier lieu, le système d'équations $(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

soit $x_1 = 5s$, $x_2 = -2s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est donc $(5, -2, 1)$. Deuxièmement, le système d'équations $(-4\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

soit $x_1 = -2s$, $x_2 = 8s/3$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -4$ est donc $(-2, \frac{8}{3}, 1)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(5, 0, 1, 6, -1, 0, 2, -8,
+      -2), nrow = 3)
> eigen(m)

$values
[1] -4  3  3

$vectors
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,]  0.5746958 -0.9128709  0.9128709
[2,] -0.7662610  0.3651484 -0.3651484
[3,] -0.2873479 -0.1825742  0.1825742
```

e) On a

$$\begin{aligned}
\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2) \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ et $\lambda_4 = -2$. En premier lieu, le système d'équations $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 2s$, $x_2 = 3s$, $x_3 = s$ et $x_4 = t$. Or, $(2s, 3s, s, t) = s(2, 3, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est donc composée des vecteurs $(2, 3, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$. Deuxièmement, le système d'équations $(-\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -2s$, $x_2 = s$, $x_3 = s$ et $x_4 = 0$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -1$ est donc $(-2, 1, 1, 0)$. Finalement, le système d'équations $(-2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s$, $x_2 = 0$, $x_3 = s$ et $x_4 = 0$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -2$ est donc $(-1, 0, 1, 0)$. Vérification :

```
> m <- matrix(c(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
+       2, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 1), nrow = 4)
> eigen(m)
```

```
$values
[1] -2 -1  1  1
```

```
$vectors
              [,1]       [,2] [,3]       [,4]
[1,] -7.071068e-01  0.8164966    0 -0.5345225
[2,]  4.317754e-16 -0.4082483    0 -0.8017837
[3,]  7.071068e-01 -0.4082483    0 -0.2672612
[4,]  0.000000e+00  0.0000000    1  0.0000000
```

7.2 On procède par induction. Premièrement, l'énoncé est clairement vrai pour $k = 1$. On suppose par la suite qu'il est vrai pour $k = n$, soit que si $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, alors $\mathbf{A}^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$. Ainsi,

$$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^n\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^n\mathbf{x}) = \lambda^n(\mathbf{Ax}) = \lambda^n(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{n+1}\mathbf{x},$$

d'où l'énoncé est vrai pour $k = n + 1$. Ceci complète la preuve.

7.3 On va utiliser les résultats de l'exercice 7.2. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-1)^2,\end{aligned}$$

d'où les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$. Par conséquent, les valeurs propres de $\mathbf{A}^{25}$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1^{25} = 1$ et $\lambda_3 = (-1)^{25} = -1$. Toujours par le résultat de l'exercice 7.2, les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ correspondant à $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ sont également des vecteurs propres de $\mathbf{A}^{25}$. Or, le système d'équations $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$ et $x_3 = t$. Puisque $(-s-t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$, une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est composée de $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$. D'autre part, le système d'équations $(-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = 2s$, $x_2 = -s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -1$ est donc $(2, -1, 1)$.

7.4 On peut démontrer les deux résultats simultanément. Tout d'abord, les résultats sont clairement vrais pour $n = 1$, c'est-à-dire $c_1 = c_n = -x_1$. On suppose ensuite que les résultats sont vrais pour $n = k$, soit

$$\prod_{i=1}^{k}(x - x_i) = x^k + \left(-\sum_{i=1}^{k} x_i\right) x^{k-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{k} x_i.$$

Si $n = k+1$, on a

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}(x-x_i) &= \left(\prod_{i=1}^{k} x - x_i\right)(x - x_{k+1})\\ &= \left(x^k + \left(-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)x^{k-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{k} x_i\right)(x - x_{k+1})\\ &= x^{k+1} + \left(-\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right)x^k + \cdots + x_{k+1}\prod_{i=1}^{k} x_i\\ &= x^{k+1} + \left(-\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)x^k + \cdots + \prod_{i=1}^{k+1} x_i.\end{aligned}$$

Les résultats sont donc vrais pour $n = k+1$. Ceci complète la preuve.

7.5 Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}\\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}\\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

d'où l'équation caractéristique est $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$.

7.6 On a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. En multipliant de part et d'autre (par la gauche) par $\mathbf{A}^{-1}$, on obtient $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, soit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$. Par conséquent, λ^{-1} est une valeur propre de $\mathbf{A}^{-1}$ et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre correspondant.

7.7 On utilise le résultat de l'exercice 7.6 pour éviter de devoir calculer l'inverse de la matrice. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 & -3 \\ 2 & \lambda - 3 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}\\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6\\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3),\end{aligned}$$

d'où les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. Par conséquent, les valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$ sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Toujours par le résultat de l'exercice 7.6, les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ correspondant à $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$ sont également des vecteurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$

correspondant à $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Or, le système d'équations $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s$, $x_2 = 0$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est donc $(1, 0, 1)$. D'autre part, le système d'équations $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s/2$, $x_2 = s$ et $x_3 = 0$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ (ou $\lambda = \frac{1}{2}$) est donc $(\frac{1}{2}, 1, 0)$. Finalement, le système d'équations $(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit $x_1 = s$, $x_2 = s$ et $x_3 = s$. Une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ (ou $\lambda = \frac{1}{3}$) est donc $(1, 1, 1)$.

7.8 Le résultat découle simplement du fait que l'équation $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$ est vraie pour tout vecteur $\mathbf{x}$.

7.9 a) Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. On a donc

$$2\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1$. Puisque la matrice $\mathbf{A}$ ne possède qu'un seul vecteur propre, elle n'est pas diagonalisable. Vérification :

```
> m <- matrix(c(2, 1, 0, 2), nrow = 2)
> eigen(m)
$values
[1] 2 2

$vectors
     [,1]          [,2]
[1,]    0  4.440892e-16
[2,]    1 -1.000000e+00
```

b) Le polynôme caractéristique est $(\lambda - 3)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5)$, donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 5$. La forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où rang$(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est composée des vecteurs $(-1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$. D'autre part, la forme échelonnée de la matrice $5\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où rang$(5\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 5$ est $(1, 2, 1)$. Bien que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ ne sont pas toutes distinctes, les vecteurs propres $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalise $\mathbf{A}$ et

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

```
> m <- matrix(c(4, 2, 1, 0, 3, 0, 1, 2,
+     4), nrow = 3)
> eigen(m)

$values
[1] 5 3 3

$vectors
          [,1] [,2]       [,3]
[1,] 0.4082483    0 -0.7071068
[2,] 0.8164966    1  0.0000000
[3,] 0.4082483    0  0.7071068
```

c) La matrice étant triangulaire, on sait immédiatement que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. La forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où rang$(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est $(1, 0, 0)$. D'autre part, la forme échelonnée de la matrice $2\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où rang$(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est $(0, 0, 1)$. Par conséquent, la matrice $\mathbf{A}$ n'a pas trois vecteurs linéairement indépendants, donc elle n'est pas diagonalisable. Vérification :

```
> m <- matrix(c(3, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0,
+     2), nrow = 3)
> eigen(m)
$values
[1] 3 2 2

$vectors
     [,1] [,2]          [,3]
[1,]    1    0  0.000000e+00
[2,]    0    0  4.440892e-16
[3,]    0    1 -1.000000e+00
```

d) Le polynôme caractéristique est $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$, donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$. Les valeurs propres étant distinctes, la matrice est diagonalisable. Or, la forme échelonnée de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où rang$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$. La base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$ est $(1, 1, 1)$. Deuxièmement, la forme échelonnée de la matrice $2\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où rang$(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$ est $(2, 3, 3)$. Enfin, la forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où rang$(3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est $(1, 3, 4)$. Par conséquent,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonalise $\mathbf{A}$ et

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

```
> m <- matrix(c(-1, -3, -3, 4, 4, 1, -2,
+      0, 3), nrow = 3)
> eigen(m)
$values
[1] 3 2 1

$vectors
          [,1]      [,2]       [,3]
[1,] 0.1961161 0.4264014 -0.5773503
[2,] 0.5883484 0.6396021 -0.5773503
[3,] 0.7844645 0.6396021 -0.5773503
```

e) La matrice est triangulaire : les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$. La forme échelonnée de la matrice $-2\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où $\text{rang}(-2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = -2$ est composée des vecteurs $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$. D'autre part, la forme échelonnée de la matrice $3\mathbf{I} - \mathbf{A}$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $\text{rang}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 2$ et la base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 3$ est composée des vecteurs $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, -1, 0, 1)$. Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ ne sont pas toutes distinctes, mais les vecteurs propres $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, -1, 0, 1)$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalise $\mathbf{A}$ et

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

```
> m <- matrix(c(-2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0,
+      0, 5, 3, 0, 0, -5, 0, 3), nrow = 4)
> eigen(m)
$values
[1]  3  3 -2 -2

$vectors
          [,1]       [,2] [,3] [,4]
[1,] 0.0000000  0.0000000    1    0
[2,] 0.7071068 -0.7071068    0    1
[3,] 0.7071068  0.0000000    0    0
[4,] 0.0000000  0.7071068    0    0
```

Chapitre 8

8.1 La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

est exprimée sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, où

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le système d'équations $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (où $\mathbf{b} = (-3, -22, 3)^T$) peut être exprimé sous la forme $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, soit $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$. On résoud tout d'abord $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ par simple substitution successive. On trouve

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= \frac{-22 - 2y_1}{4} = -5 \\ y_3 &= \frac{3 + 4y_1 + y_2}{2} = -3. \end{aligned}$$

Par la suite, on résoud de même $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} x_3 &= -3 \\ x_2 &= -5 - 2x_3 = 1 \\ x_1 &= -1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{aligned}$$

8.2 On cherche tout d'abord des matrices triangulaires inférieure et supérieure $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$, respectivement, tel que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. On nous donne dans l'énoncé

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 3\mathbf{I} \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre par décomposition *LU* le système d'équations $\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{b} = (0, 1)$, on pose $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ et résout d'abord $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ par substitution. On a donc le système d'équations

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dont la solution est $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$. Par la suite, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

d'où, finalement, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Bibliographie

Abraham, B. et J. Ledolter. 1983, *Statistical methods for forecasting*, Wiley, New York, ISBN 0-4718676-4-0.

Anton, H. 2000, *Elementary linear algebra*, 8e éd., Wiley, ISBN 0-4711705-5-0.

Brockwell, P. J. et R. A. Davis. 1996, *Introduction to time series and forecasting*, Springer, New York, ISBN 0-3879471-9-1.

Burden, R. L. et J. D. Faires. 1988, *Numerical analysis*, 4e éd., PWS-Kent, Boston, ISBN 0-5349158-5-X.

Draper, N. R. et H. Smith. 1998, *Applied regression analysis*, 3e éd., Wiley, New York, ISBN 0-4711708-2-8.

Gentle, J. E. 1998, *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer, New York, ISBN 0-3879852-2-0.

Goulet, V. 2007, *Introduction à la programmation en S*, Document libre publié sous licence GNU FDL, ISBN 978-2-9809136-7-9. URL `http://vgoulet.act.ulaval.ca/intro_S`.

Monahan, J. F. 2001, *Numerical methods of statistics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, ISBN 0-5217916-8-5.

Ripley, B. D. 1987, *Stoschastic simulation*, Wiley, New York, ISBN 0-4718188-4-4.

Rubinstein, R. Y. 1981, *Simulation and the Monte Carlo method*, Wiley, New York, ISBN 0-4710891-7-6.

ISBN
978-2-9809136-8-6