IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMO DE DEUTSCH Y DEUTSCH-JOZSA

Laura Valentina Gutiérrez Rico
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Laura.gutierrez-r@mail.escuelaing.edu.co

27 noviembre 2022

Este reporte se entrega para cumplir con los requisitos parciales del curso CNYT: Computación Cuántica- 2020-1

Tabla de contenidos

1 Introducción

¿Qué es una computacional cuántica?, la computación cuántica es un método diferente al tradicional, ya que no se usan computadoras clásicas con un lenguaje clásico, se usan cubits que son superconductores para hacer eficiente la velocidad de los ordenadores, un procesador clásico utiliza bits para realizar sus operaciones, una computadora cuántica usa qubits para ejecutar algoritmos cuánticos multidimensionales, se compone de una combinación de 1’s y 0’s los cuales son estados binarios, escomo por ejemplo, en el lenguaje clásico es una maquina de Turing, en el cuántico es una maquina de Turing cuántica, aprovechando directamente las leyes de la mecánica cuántica para hacer calculos, Su enfoque principal es lograr resolver problemas que no son posibles en un computador normal, otro de sus usos es en el área de optimización total, y muestreo.

Todo esto a traves de un procesador IBM, el cual hace que el hardware cuántico sea real, cuando dos qubits están entrelazados, los cambios que se realizan en un qubit impactan directamente en el otro.

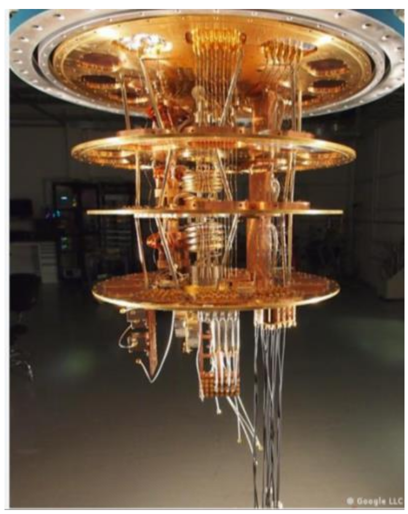


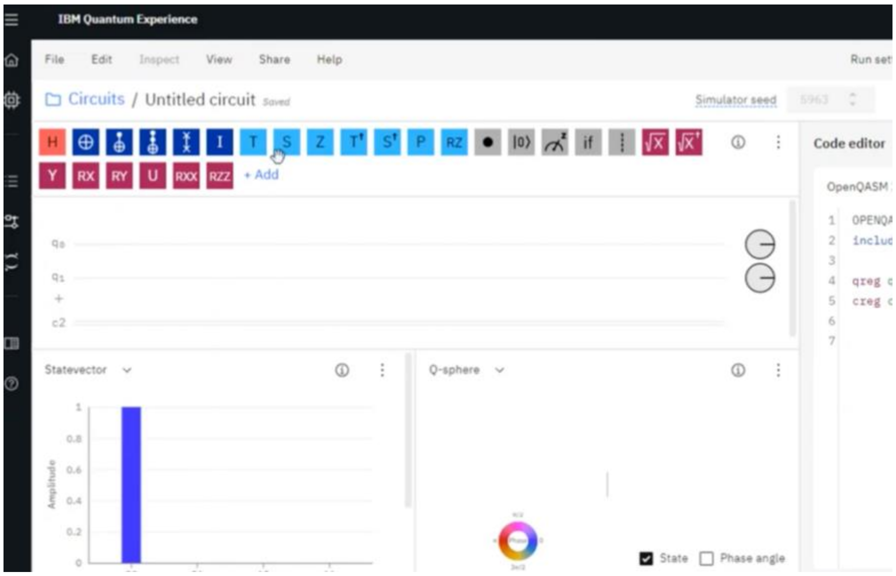
Imagen de una computadora cuántica

Un estado cuántico se puede ver como una combinación lineal de todos aquellos posibles estados que se forman con el mismo número de bits, viendola matemáticamente sería:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,.$$

Para $\alpha2 + \beta2 = 1$, α 2 es la probabilidad de que el qubit valga 0 y el $\beta2$ representa la probabilidad de que si valga 1. Si se cambian los valores de α y β, el qubit podría llegar a tener valores infinitos, que son vectores unitarios dentro del espacio vectorial en los números complejos. Estas computadoras las usan los ingenieros, cientificos, grandes empresas como Mercedes-Benz, Exxon Mobile, CERN, para afrontar grandes problemas e innovar.

Hoy en día la plataforma de IBM, tiene un espacio para usuarios y es totalmente gratis, donde se puede crear, experimentar a cerca de este interesante tema, estás computadoras están programas con Qiskit que también es un programa gratis, donde enseñan a como programar sin tener un buen conocimiento sobre la programación.



Ejemplo de ventana del IBM gratis

En este reporte trataré tres temas, el primero, conocer e implementar los algoritmos de Deutsch y Deutsch Jozsa, el segundo, mostrar el funcionamiento de algunas funciones sobre estos algoritmos para conocer cuales son constantes y cuales son balanceadas, por ultimo, comprobando el funcionamiento de las funciones con n = 4 en los algoritmos.

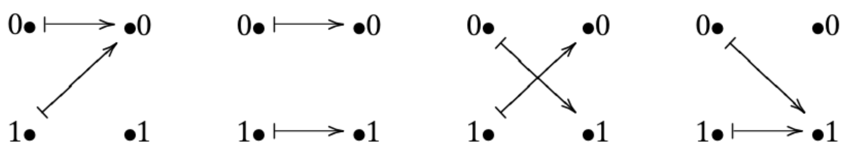
El documento se divide en diferentes temas, los temas que mencionamos anteriormente, brindando una breve explicación en cada problema.

2 Algoritmo de Deutsch

En este punto voy a presentar las cuatro funciones que pide el problema dentro de {0,1} a {0,1}, también voy a explicar que son funciones balanceadas y funciones constantes, todo esto para exponer el algoritmo de Deutsch y conocer través del algoritmo como se calculan las funciones diferenciando cuales son balanceadas y cuales son constantes. Con ayuda del espacio IBM se simulará cada el circuito cuántico.

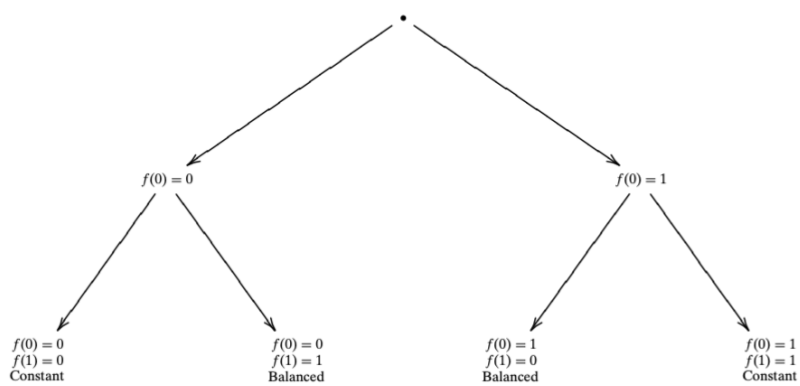
Para el este algoritmo se ha asegurado previamente que una función f, tiene la propiedad de que si es constante devuelve siempre cero o uno para cualquier entrada. Por el contrario, es balanceada sus salidas son la mitad uno y la otra mitad cero, por ejemplo una función que tiene como entrada números en binario de la forma f(x2, x1, x0), con N=2^3 posibles entradas.

La función tendrá el valor 0, si x0 = 1 y el valor 1, si x0 = 0. En el mejor de los casos encontramos dos valores distintos en dos comprobaciones, f(1, 0, 1) = 0 y f(0, 0, 0) = 1.



(6.1)

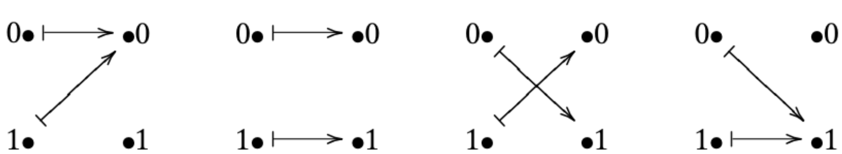
De las cuatro funciones que se ven, dos son equilibradas y dos son constantes, esto lo podemos verificar con un ordenador clásico, se evalua primero f en una entrada, luego evaluar f en la segunda entrada y, finalmente, comparar las salidas, la siguiente imagen es un árbol de decisión se usa para muestrar lo que debe hacer un ordenador clásico:



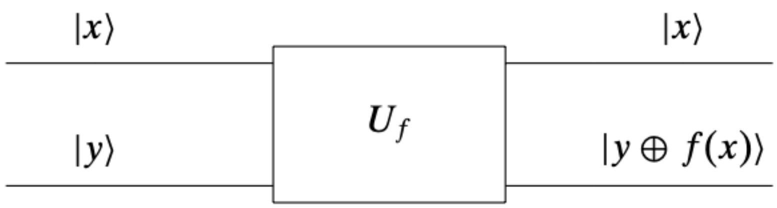
Se pueden ver las f que son balanceadas y las constantes.

2.1 Problema

Hay que implementar las funciones que tienen su dominio en {0, 1} y su rango en {0, 1}, voy a usar las 4 posibles que mostré arriba:



(6.1)



Esta es la manera general de implementar las funciones en cualquier circuito cuántico, lo que se hacer es crear una compuerta que es Uf que recibe un Qubit y va a retornar otro, según la función que estemos aplicando y unas operaciones lógicas entre estos 2

$$
\begin{array}{l}
f'(0)=0 \\
f'(1)=1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
|00\rangle = |00\rangle = 1|00\rangle + 0|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle \\
|01\rangle = |01\rangle = 0|00\rangle + 1|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle \\
|10\rangle = |11\rangle = 0|00\rangle + 0|01\rangle + 0|10\rangle + 1|11\rangle \\
|11\rangle = |10\rangle = 0|00\rangle + 0|01\rangle + 1|10\rangle + 0|11\rangle
\end{array}
\Rightarrow U_{f'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l}
f(0)=0 \\
f(1)=0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
|00\rangle = |00\rangle = 1|00\rangle + 0|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle \\
|01\rangle = |01\rangle = 0|00\rangle + 1|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle \\
|10\rangle = |10\rangle = 0|00\rangle + 0|01\rangle + 1|10\rangle + 0|11\rangle \\
|11\rangle = |11\rangle = 0|00\rangle + 0|01\rangle + 0|10\rangle + 1|11\rangle
\end{array}
\Rightarrow U_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{00} \\ \mathbf{01} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}.
\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{00} \\ \mathbf{01} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}.
\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{00} \\ \mathbf{01} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}.
\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{00} & \mathbf{01} & \mathbf{10} & \mathbf{11} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{00} \\ \mathbf{01} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}.
$$

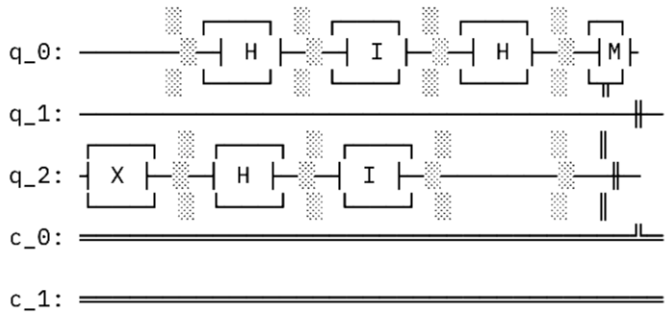
Luego de hacerlo, se pasa a tener como resultado unas matrices que representan las funciones de un circuito cuántico, y podemos representar las funciones en un circuito cuántico.

2.2 Implementando las funciones en el computador cuántico

Poniendo las 4 posibles entradas de las funciones las cuales según las matrices, serían las salidas 00, 01, 10 y 11, a continuación voy a poner las salidas posibles simulando en el computador cuántico.

Primera Función es:

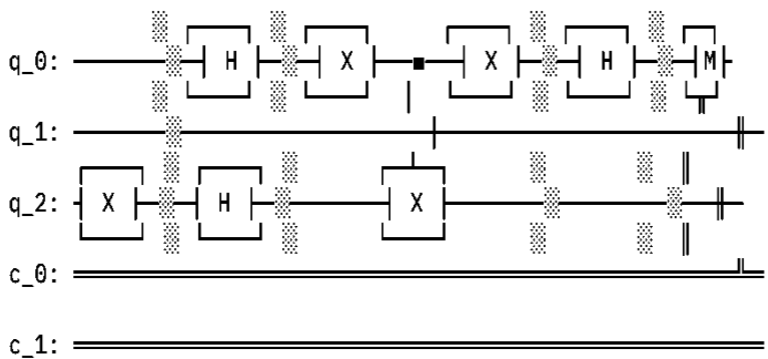
El circuito básic



Esta es como resultado 00

Segunda Función es:

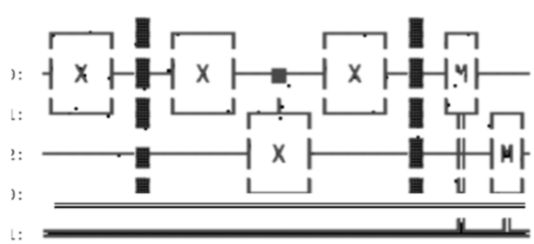
El circuito básico sería:



Va a tener como resultado 01

Tercer Función es:

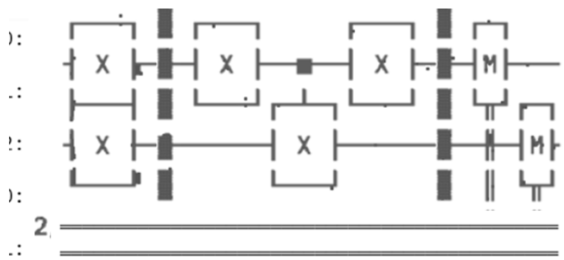
El circuito básico sería:



Va a tener como resultado 10

Cuarta Función es:

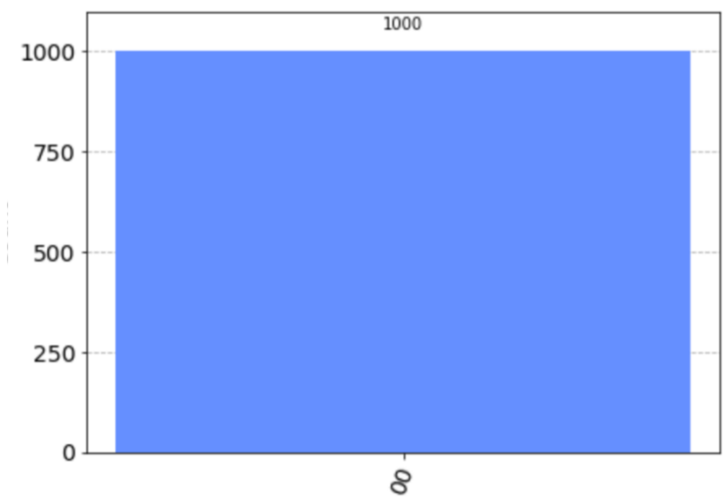
El circuito básico sería:



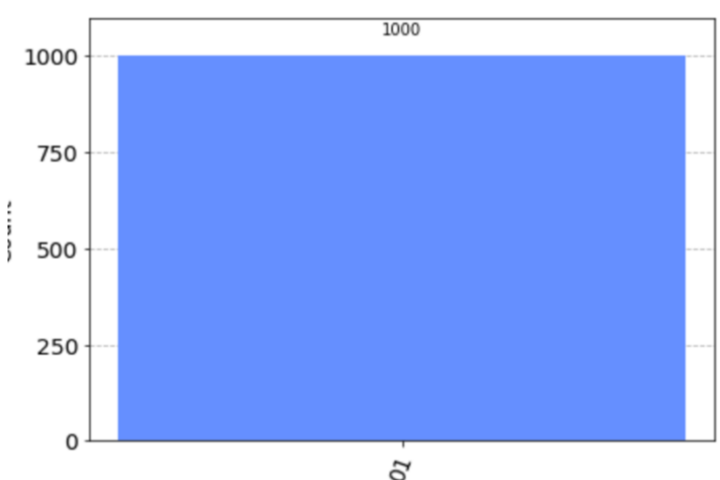
2.3 Implementando el algoritmo de Deutsch en un computador cuántico

Primera Función es:

La grafica del circuito es:

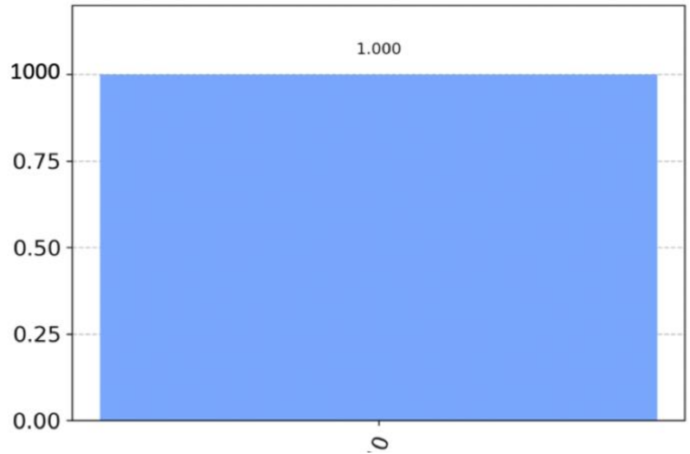


Segunda Función es:
La grafica del circuito es:



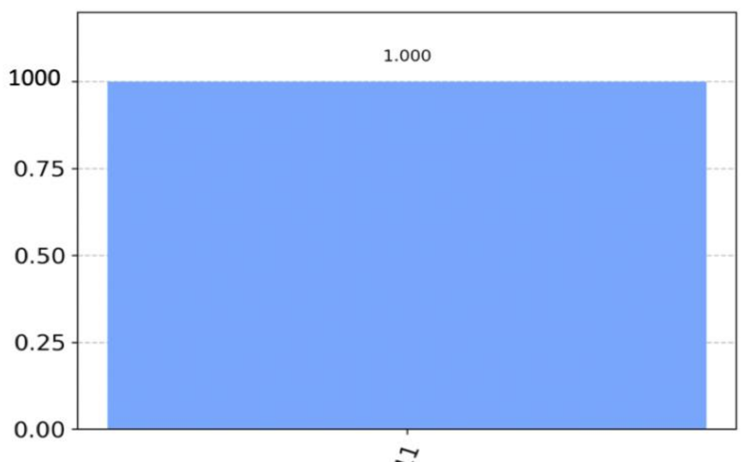
Tercer Función es:

La grafica del circuito es:



Cuarta Función es:

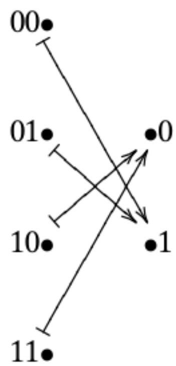
La grafica del circuito es:



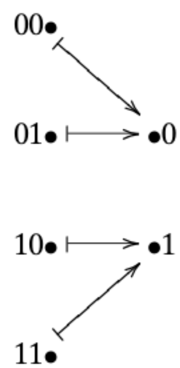
3 Algoritmo de Deutsch-Jozsa

El problema de Deutsch resuelve el problema para un único qubit, el algoritmo de Deutsch a otras funciones, en lugar de hablar de funciones de la forma f : {0, 1} -→ {0, 1}, son las funciones de forma f : {0, 1}^n → {0, 1}, que aceptan una cadena de n donde hay 0's y 1's y dan como resultado un cero o un uno. El dominio puede considerarse como cualquier número natural entre 0 y 2n -1. Es una función f :{0,1}^n →{0,1} balanceada si exactamente la mitad de las entradas van a 0 y la otra mitad van a 1, se llama constante a una función si todas las entradas van a 0 o todas las entradas van a 1.

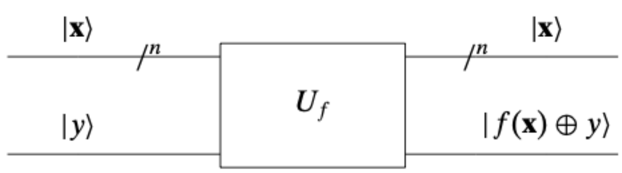
1.



2.



Así se representan las funciones que voy a usar



Usando la formula general que nos permite hallar la matriz que representa a la función en un circuito cuántico de la siguiente manera, como en el caso anterior.

Lo único que cambia es que el ket 'x' que se observa es que ya no representa un solo estado 0 o 1 sino una combinación de esos que son los estados y con ese se va a representar una entrada a la función presentada, cable de arriba no es un solo cable, por eso se le añade la barra con la n pues así denotamos que este cable representa n cables que entran a la función para poder arrojar otro valor.

Haciendo esto se obtienen las matrices:

1.

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccccc} \mathbf{00,0} & \mathbf{00,1} & \mathbf{01,0} & \mathbf{01,1} & \mathbf{10,0} & \mathbf{10,1} & \mathbf{11,0} & \mathbf{11,1} \end{array} \\
\begin{array}{r} \mathbf{00,0} \\ \mathbf{00,1} \\ \mathbf{01,0} \\ \mathbf{01,1} \\ \mathbf{10,0} \\ \mathbf{10,1} \\ \mathbf{11,0} \\ \mathbf{11,1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Los espacios en blanco son rellenos de ceros valores nulos

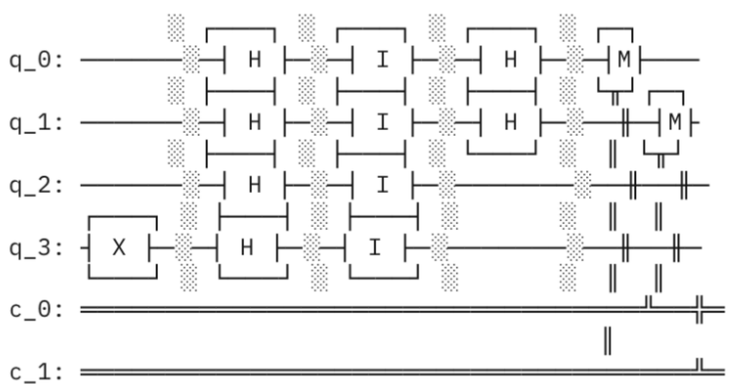
2.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \mathbf{00,0} & \mathbf{00,1} & \mathbf{01,0} & \mathbf{01,1} & \mathbf{10,0} & \mathbf{10,1} & \mathbf{11,0} & \mathbf{11,1} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{00,0} \\ \mathbf{00,1} \\ \mathbf{01,0} \\ \mathbf{01,1} \\ \mathbf{10,0} \\ \mathbf{10,1} \\ \mathbf{11,0} \\ \mathbf{11,1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Y ahora como en el algoritmo anterior con estas matrices se puede representar las funciones en un circuito cuántico, sigue encontrar que compuertas y asi se aplicara la compuerta directa de Uf, para así poder representar en el computador del IBM el circuito cuántico y obtener nuestros resultados.

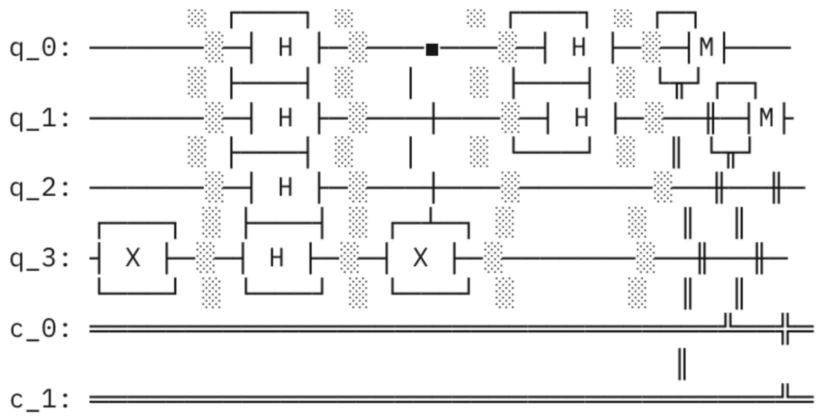
3.1 Implementando las funciones en el computador cuántico

Implementando para la primer función :



Da como resultado 000

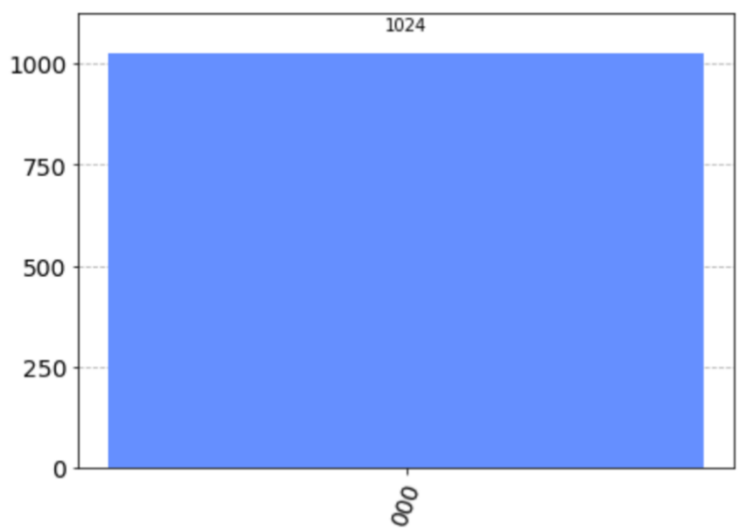
Segunda:



Da como resultado 001

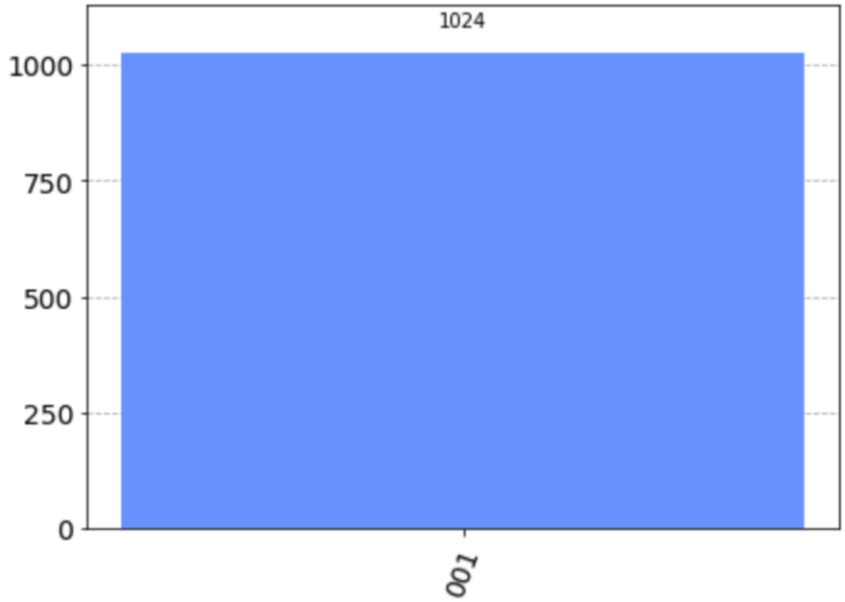
3.2 Implementando el algoritmo de Deutsch-Josza en un computador cuántico

1. Funcion 1



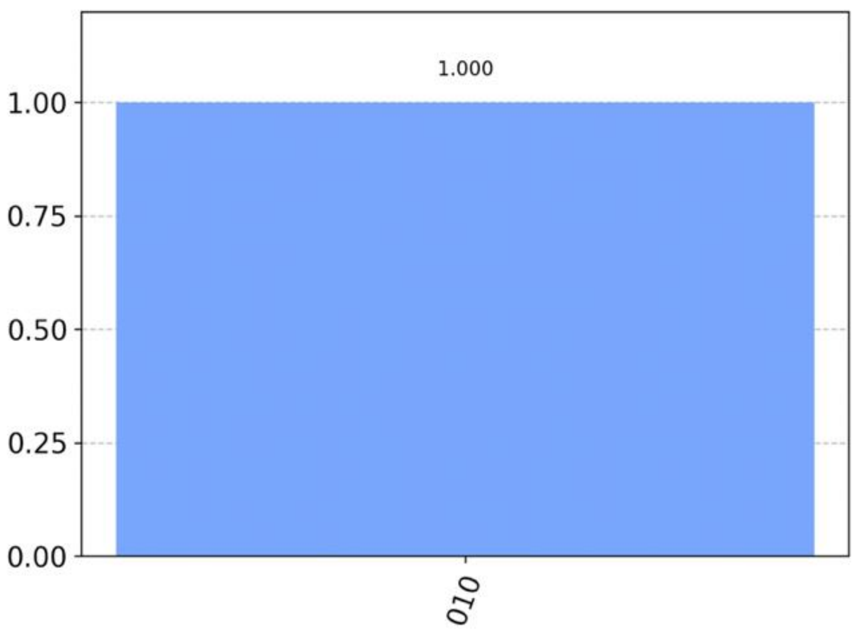
De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 000 en el anterior circuito la salida es de 000, el esperado por la matriz Uf.

2. Funcion 2



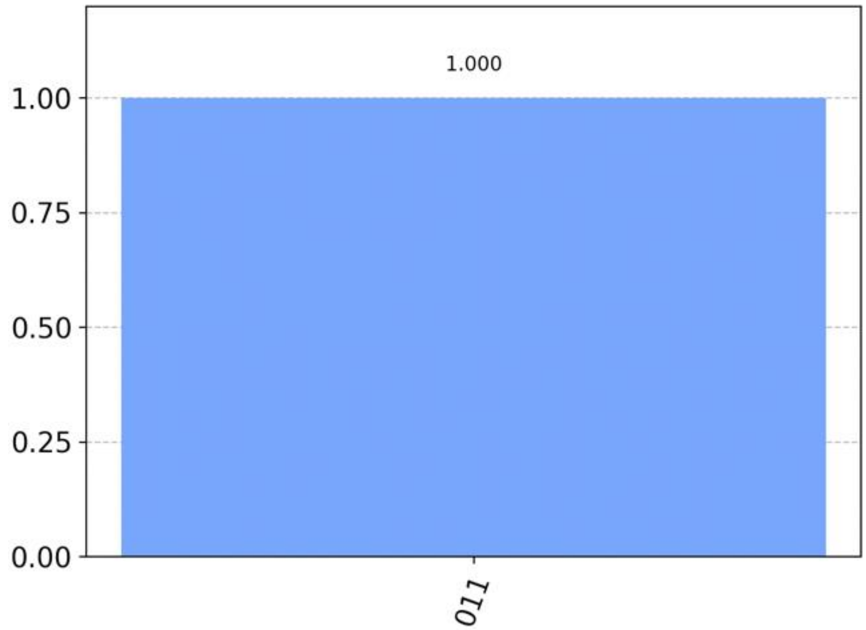
De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 001 en el anterior circuito la salida es de 001, el esperado por la matriz de Uf.

3.



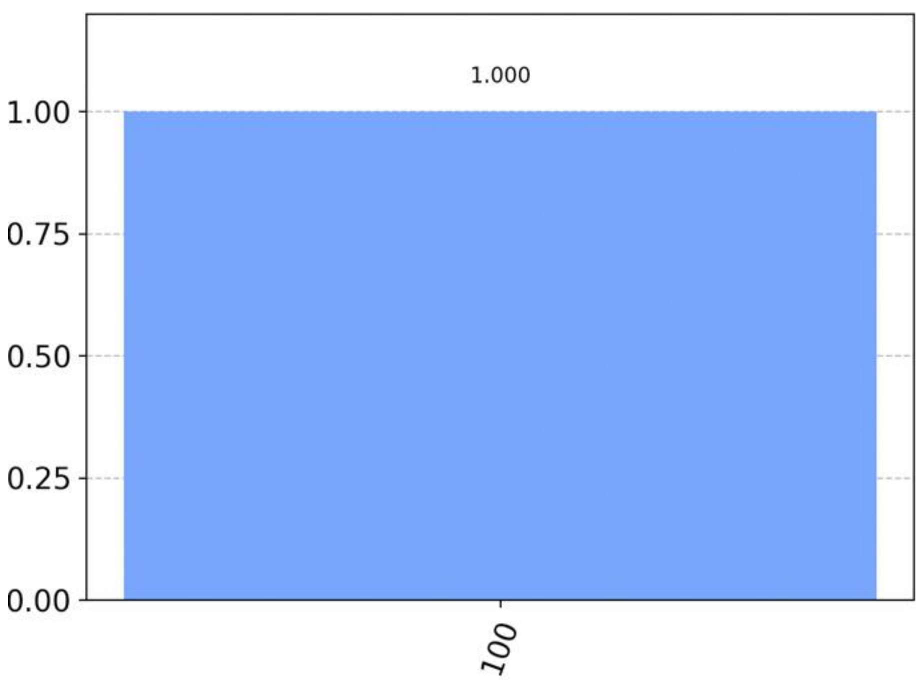
De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 010 en el anterior circuito la salida es de 010, el esperado por la matriz de Uf.

4.



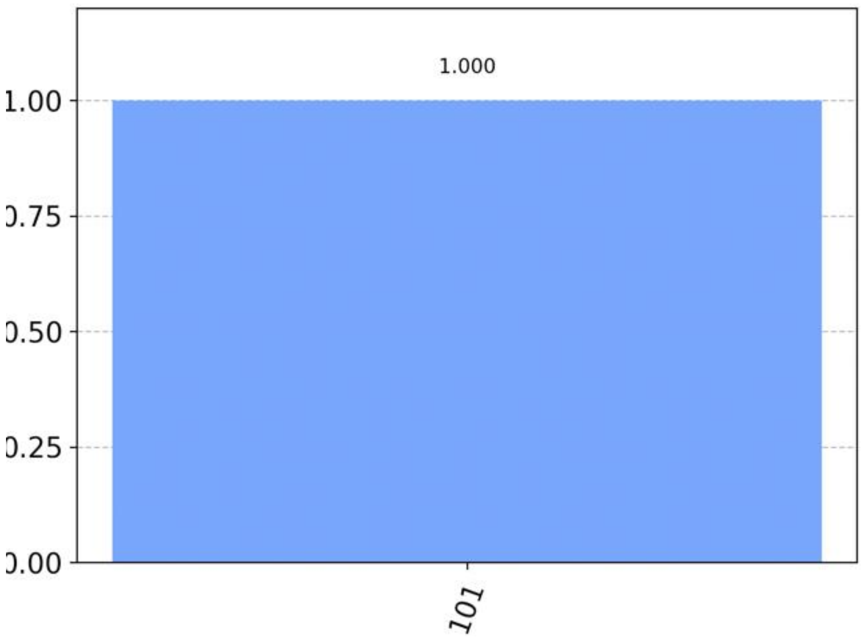
De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 011 en el anterior circuito la salida es de 011, el esperado por la matriz de Uf.

5.



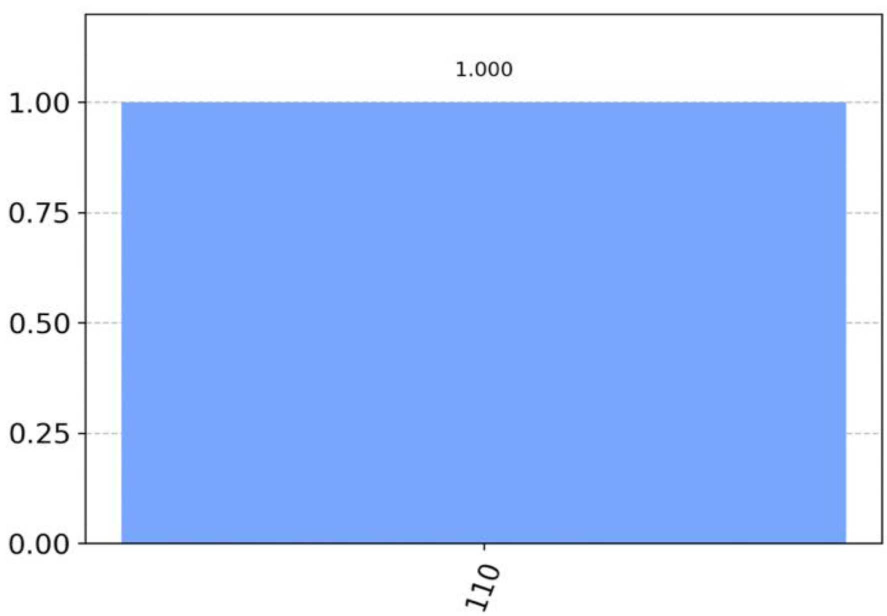
De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 100 en el anterior circuito la salida es de 100, el esperado por la matriz de Uf.

6.

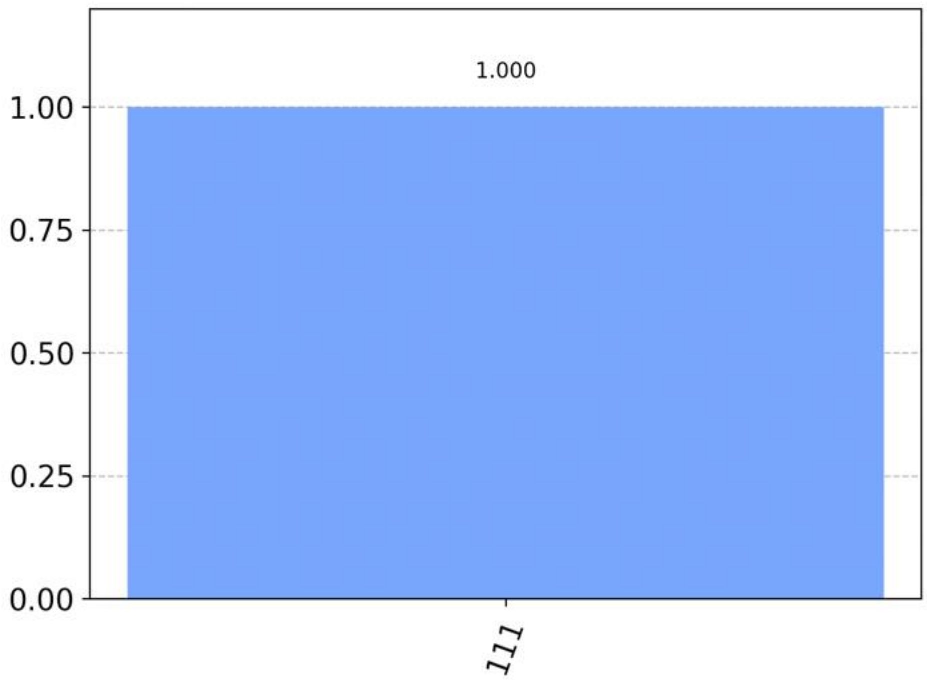


De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 101 en el anterior circuito la salida es de 1s01, el esperado por la matriz de Uf.

7.



De la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 110 en el anterior circuito la salida es de 110, el esperado por la matriz de Uf.



Por ultimo, en la gráfica anterior podemos ver que para una entrada de 111 en el anterior circuito la salida es de 111, el esperado por la matriz de Uf.

4 Conclusiones

En este informe se puedo evidenciar y conocer el funcionamiento de las funciones como de dominio de {0, 1} a {0, 1} y como representarlas a través de compuertas cuánticas, lo mismo para las funciones de {dominio 0, 1}^n a {0, 1} para poder representarlas después por compuertas cuánticas y luego observar si eran balanceadas o constantes. Se aprendió que los algoritmos cuánticos pueden llegar a ser muchas veces mas eficientes que los algoritmos clásicos. Con el algoritmo de Deutsch-Jozsa, los computadores cuánticos tienen la capacidad de mejorar el tiempo de ejecución de este de O(2^n) a O(1) usando el multiverso para realizar cálculos, se aprendió que el mejor algoritmo para comprobar que una función es constante o no es el de Deutsch. La computación cuántica nos lleva a un acercamiento al avance de la tecnología como seres humanos.

5 Bibliografía

- https://qiskit.org/textbook/ch-algorithms/deutsch-jozsa.html#1.-Introduction-

- https://www.ibm.com/co-es/topics/quantum-computing

- https://www.iberdrola.com/innovacion/que-es-computacion-cuantica#:~:text=%C2%BFQU%C3%89%20ES%20LA%20COMPUTACI%C3%93N%20CU%C3%81NTICA,computaci%C3%B3n%20distinta%20a%20la%20tradicional.

- https://www.dw.com/es/para-qu%C3%A9-sirve-en-realidad-una-computadora-cu%C3%A1ntica/a-50991735

- Libro clase Quantum Computing for Computer Scientists (PDFDrive)