

# A WKB-Type Approximation to the Schrödinger Equation

René Czepluch <sup>\*</sup>,

Rasmus Klitgaard <sup>†</sup>,  
Department of physics

Laurits N. Stokholm <sup>‡</sup>

30. november 2017

## 1 Indledning

## 2 Solution to the stationary Schrödinger Equation

Antages, at der betragtes en partikel i en dimension,  $x$ , er Schrödinger ligningen

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (1)$$

isoleres  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  i ligning (1), opnås

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2m\psi(E - V(x)) \frac{1}{\hbar^2} \quad (2)$$

defineres  $p(x)$  klassisk

$$p(x) \equiv \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (3)$$

Kan afsnit 2 omskrives til

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi. \quad (4)$$

Anvendes ansatzen

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

hvor  $\psi(x) \in \mathbb{C}$ . Antages

---

<sup>\*</sup>rene.czepluch@post.au.dk

<sup>†</sup>rasmusklitgaard97@gmail.com

<sup>‡</sup>laurits.stokholm@post.au.dk

$$E > V(x) \forall x \quad (6)$$

Er  $A(x)$  en reel amplitude og  $\phi(x)$  er en reel fase. Dette kan altid gøres, der man ved hjælp af ledet  $e^{i\phi(x)}$ . Dette led danner en vektor  $\in \mathbb{C}$  med normen 1, herefter kan  $A(x)$  skalere vektoren, til at ramme alle punkter. Anvendes venstre side af ligning (4) på ligning (5) fås (hvor mærke ' angiver differentiation med hensyn til  $x$ )

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{i\phi(x)}(A' + iA\phi') \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = e^{i\psi} \quad (8)$$

## 3 Kvantisering

Vi antager nu at vi har det klassiske vendepunkt, hvor  $E > V(x)$  for alle  $x$ . Vi siger nu at vores bølgefunktion kun må eksistere på  $x$ -intervallet  $[a, b]$ , hvilket medfører at vores sandsynlighedstæthed skal være 0 udenfor dette interval, altså  $|\psi|^2 = 0$ . Dette medfører at  $\psi = 0$  Ser vi på bølgefunktionen,  $\psi$ , ser vi at vi kan skrive den som to dele:

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ C_1 e^{i\phi(x)} + C_2 e^{-i\phi(x)} \right] \quad (9)$$

(5) Her ses det at vi kan skrive dette om, ved at definere to nye konstanter,  $C_3 \equiv i(C_1 - C_2)$  og  $C_4 \equiv C_1 + C_2$ .

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ C_3 \sin \phi(x) + C_4 \cos \phi(x) \right] \quad (10)$$

- 4 The hydrogen atom
- 5 Tunnelering
- 6 Ionisation af et Rydberg-atom
- 7 konklusion