A WKB-Type Approximation to the Schrödinger Equation

René Czepluch *, Rasmus Klitgaard †, Laurits N. Stokholm ‡
Department of physics

30. november 2017

1 Indledning

HEJ MED DIG

2 Solution to the stationary Schrödinger Equation

Antages, at der betragtes en partikel i en dimension, x, er Schrödinger ligningen

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi \tag{1}$$

isoleres $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ i ligning (1), opnås

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2m\psi(E - V(x))\frac{1}{\hbar^2} \tag{2}$$

defineres $p(x)$ klassisk

$$p(x) \equiv \sqrt{2m(E - V(x))} \tag{3}$$

Kan ligning (2) omskrives til

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi. \tag{4}$$

Anvendes ansatzen

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)} \tag{5}$$

hvor $\psi(x)$ e$\in \mathbb{C}$. Antages

$$E > V(x)\forall x \tag{6}$$

Er $A(x)$ en reel amplitude og $\phi(x)$ er en reel fase. Dette kan altid gøres, der man ved hjælp af ledet $e^{i\phi(x)}$. Dette led danner en vektor $\in \mathbb{C}$ med normen 1, herefter kan $A(x)$ skalere vektoren, til at ramme alle punkter. Anvendes venstre side af ligning (4) på ligning (5) fås (hvor mærke $'$ angiver differentation med hensyn til x)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = e^{i\phi(x)}(A' + iA\phi') \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \tag{8}$$

3 kvantisering

Vi antager nu at vi har det klassiske vendepunkt, hvor $E > V(x)$ for alle x. Vi siger nu at vores bølgefunktion kun må eksistere på x-intervallet [a,b], hvilket medfører at vores sandsynlighedstæthed skal være 0 udenfor dette interval, altså $|\psi|^2 = 0$. Dette medfører at $\psi = 0$ Ser vi på bølgefunktionen, Ψ, ser vi at vi kan skrive den som to dele:

$$\psi(x) \cong \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[C_1 e^{i\phi(x)} + C_2 e^{-i\phi(x)}\right] \tag{9}$$

Her ses det at vi kan skrive dette om, ved at definere to nye konstanter, $C_3 \equiv i(C_1 - C_2)$ og $C_4 \equiv C_1 + C_2$.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[C_3 \sin\phi(x) + C_4 \cos\phi(x)\right] \tag{10}$$

*rene.czepluch@post.au.dk
†rasmusklitgaard97@gmail.com
‡laurits.stokholm@post.au.dk

4 The hydrogen atom

5 Tunnelering

6 Ionisation af et Rydberg-atom

7 konklusion