Monte Carlo Simulation

MLE of GBM + example (5.5)

Laurs R. Leth

Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
leth.laurs@gmail.com

7. april 2020

MLE for (μ, σ) (GBM)

- Ved simulation af GBM (S) konstrueres et time-grid $0 = t_0 < \dots < t_n < T$ med $dt = t_{i+1} - t_i$, hvor

$$\log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \sim \mathcal{N}\left((\mu - \sigma^2/2)dt, \sigma^2 dt\right),$$

- Vi observerer n IID variable: $\log(S_{t_1}/S_{t_0}), \dots, \log(S_{t_n}/S_{t_{n-1}})$

- Lad $\theta_1 = (\mu - \sigma^2/2) \cdot dt$ og $\theta_2 = \sigma^2 dt$. Så er MLE

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}(\log S_T - \log S_0) \qquad \text{og} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) - \hat{\theta}_1\right)^2,$$

  da observationerne er normalt fordelte — nå selv frem til $\hat{\theta}_1$ og $\hat{\theta}_2$

- Specielt er MLE for (μ, σ) givet ved

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\theta}_2 \cdot n} \qquad \text{og} \qquad \hat{\mu} = (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2/2) \cdot n$$

- Vi bruger kun startværdien og sidste observation til at estimere middelværdien!

Monte Carlo estimator for (μ, σ)

- Fix S_0, μ, σ og T
- Monte Carlo estimatoren for (μ, σ) fås ved følgende procedure
  1. Simuler N uafhængige stier for (S_t).
  2. For hver sti beregnes MLE for (μ, σ) (se forrige slide): $(\hat{\mu}_1, \ldots \hat{\mu}_N$ og $(\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_N$
  3. Til sidst beregens Monte Carlo estimatoren for henholdsvis μ and σ:

$$\hat{\mu}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\mu}_i \qquad \text{og} \qquad \hat{\sigma}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i$$

- Vi kan undersøge, om vi har regnet rigtigt: Monte Carlo estimaterne skal være 'tætte' på de sande værdier for μ og σ.

MC Simulation: Risk-Neutral Valuation (5.5)

- Vi ønsker at bestemme den arbitrage-fri pris for

$$\mathcal{X} = K \cdot 1_{S_T > K},$$

hvor $K > 0$.

- Ved brug af risk-neutral valuation er prisen til tid t givet ved

$$\pi(t; \mathcal{X}) = e^{-r(T-t)} E^Q (\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} K \times (1 - N(d)),$$

hvor Q er vores prismål (EMM), $N(\cdot)$ er CDF for en standard normalfordelt variabel, mens

$$d = \frac{\log(K/S_t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

- I stedet kunne vi have regnet prisen med MC simulation (eller eftervise den teoretiske pris)

    1. Simuler N uafhængige stier for (S_t) på $0 = t_0 < ... < t_m = T$
    2. For hver sti beregnes simuleret pay-off: $\theta_i = K \times 1_{S_{m,i} > K}$ for $i = 1, ..., N$
    3. Til sidst beregens Monte Carlo estimatoren for pay-offs (og diskonteres)

$$\hat{\theta}_{MC} = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \theta_i$$