Introduktion til bachelorforløb

Vejledningsmøde 1: Praktisk information + blød introduktion

Laurs R. Leth

Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
leth.laurs@gmail.com

13. februar 2020

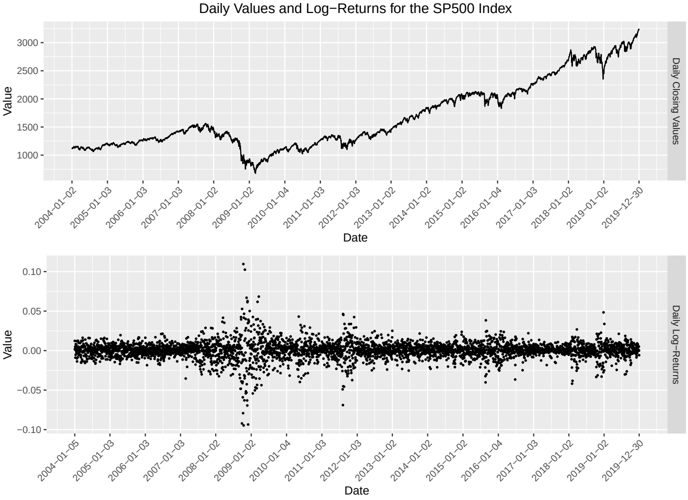
Praktisk information

- **Kontaktinformation**:
  - Laurs: leth.laurs@gmail.com
  - Johan og Jonatan: fvr343@alumni.ku.dk og jonatansiegrist@hotmail.com
- **Tid og sted for vejledning:**
  - Laurs: Hveranden tirsdag klokken 13-15 på HCØ i mødelokale (tba). Første tirsdag bliver d. d. 25/02 klokken 15.
  - Johan og Jonatan: Står til rådighed 15-17 (de andre tirsdage).
- Hjemmeside for relevante dokumenter, opdateringer, slides, litteratur osv.: `https://github.com/LaursLeth/Math-Econ-Bachelor-Project-2020`
- Projektets struktur og udbytte af vejledning:
  - Emner fra problemformuleringen diskuteres til vejledningmøder: 1 møde $\sim$ 1 emne. Emner fungerer som et skelet for jeres selvstændige opgave?
  - I forbereder jer før møderne
  - Udbytte: slavisk gennemgang af øvelser? fokus på selve opgaven? en blanding?

Wiener processen (Brownian motion)

- En stokastisk proces $(W_t)_{t\geq 0}$ kaldes for Wiener proces (definition 1.7 i Seydel (2012) eller definition 4.1 i Björk (2009)), hvis den opfylder følgende:
    - i Starter i 0: $W_0 = 0$.
    - ii Uafhængige tilvækster: For $t_4 > t_3 \geq t_2 > t_1$ gælder, at $W_{t_4} - W_{t_3} \perp\!\!\!\perp W_{t_2} - W_{t_1}$.
    - iii Stationære (Gaussiske) tilvækster: For $t > s$ er $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
    - iv Kontinuerte stier: $t \mapsto W_t(\omega)$ er kontinuert.
- Nyttige resultater
    - $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp W_s$ for $t > s$.
    - $W_{t-s} = W_{t-s} - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t-s) \Rightarrow W_{t-s} \stackrel{D}{=} W_t - W_s$.
- Flere transformation af W_t er også Wiener processer:
    - Brownian symmetry: $(Y_t)_{t\geq 0}$ givet ved $Y_t = -W_t$.
    - Brownian scaling: For $c > 0$ er processen $(Y_t)_{t\geq 0}$ givet ved $Y_t = c^{-1/2} W_{ct}$.
    - Time inversion: $(Y_t)_{t\geq 0}$ givet ved $Y_t = tW_{1/t}$.
    - Time reversal: $(Y_t)_{t\geq 0}$ givet ved $Y_t = W_T - W_{T-t}$ for $t < T$.

SP500: Price is erratic but increasing over time..



Figur: The top plot shows daily closing values for the SP500 index between 2004/01/02-2019/12/30. Source: `https://finance.yahoo.com/quote/%5EGSPC/`.

Kontinuerttidsmodellering: Risikofyldt aktiv

- Idé: Prisdynamikken kan beskrives af en stokastisk proces $(S_t)_{t \geq 0}$
- Modellering: (S_t) har dynamik givet ved den stokastiske differensligning
$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu(t, S_t)\Delta t + \sigma(t, S_t)\Delta W_t, \tag{1}$$
hvor $\mu(\cdot,\cdot)$ og $\sigma(\cdot,\cdot)$ er deterministiske funktioner, mens $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
- Intuition: Over tidsintervallet $[t, t+\Delta t]$ er processen/prisen S_t drevet af to komponenter:
  - deterministisk led: $\mu(t, S_t)\Delta t$
  - stokastisk led: $\sigma(t, S_t)\Delta W_t$
- Kontinuerttidsmodellering: Lad $\Delta t \to 0$ for at få dynamikken
$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \tag{2}$$
$$S_0 = s > 0 \tag{3}$$
Den stokastiske differentialligning (SDE) givet ved (2)-(3) er *lazy* notation for et stokastisk integral. Læs s. 40-48 i Björk (2009).

...og risikofrit aktiv (tilskrivning)

- Diskret tid: Årlig tilskrivning med nominel rente r og n terminer er givet vefd
$$(1 + r/n)^n$$
- Fx hvis $n = 4$ tilskrives renten $r/4$ 4 gange årligt (hvert kvartal)
- Kontinuert tid: Årlig nominel rente betyder tilskrivning med e^{rt} for perioden $[0, t]$. Vi kan tilskrive over enhver periode!l
- Sammenhæng mellem diskret og kontinuert tid:
$$(1 + r/n)^n \to e^r$$
for $n \to \infty$
- Vi laver kontinuerttidsmodellering $\Rightarrow$ det finansielle marked består også (udover S_t) af et risikofrit aktiv (bankbog) med prisproces
$$B_t = e^{rt}$$
- Intuition: 1 krone i dag (tidspunkt 0) er e^{rt} kroner til tidspunkt t. Eller omvendt: e^{-rt} er *nutidsværdien* af 1 krone på tidspunkt t.

Model

- Introducer det filtrerede sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W), P)$, hvor

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\left\{W_s \,|\, 0 \leq s \leq t\right\}$$

er informationen genereret af W_t på $[0,t]$. Specielt er W_s $\mathcal{F}_t$-målelig for $s \leq t$.

- Vi betragter to aktiver (et risikofyldt og et risikofrit) i kontinuert tid:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \qquad S_0 = s > 0 \tag{4}$$

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B_0 = 1 \tag{5}$$

- Bemærk at $B_t = e^{rt}$ er løsning til ovenstående differentialligning (5), mens (4) er short-hand notation

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(u, S_u)du + \int_0^t \sigma(u, S_u)dW_u$$

References

Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3 ed.). Oxford University Press.

Seydel, R. U. (2012.). *Tools for Computational Finance* (Fourth Edition ed.). Universitext. New York :: Springer.