Ito + Black-Scholes

Vejledningsmøde 3

Laurs R. Leth

Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
leth.laurs@gmail.com

13. april 2020

Opsummering fra sidste gang..

- Vi simulerede processen $S = (S_t)_{t \geq 0}$ med udgangspunkt i dynamikken
$$dSt = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1}$$
- Vi simulerede processen $S = (S_t)_{t \geq 0}$ med udgangspunkt i
$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t} \tag{2}$$
- De to metoder var gav (næsten) identiske udfald, når vi brugte samme seed
- Ved at bruge Ito's formel kan vi vise, at (2) er løsning til SDEen fra ligning (1)

Ito's formula

- Theorem: Assume that the process $X = (X_t)_{t \geq 0}$ has dynamics given by

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \tag{3}$$

where μ_t and σ_t are adapted processes, and let $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be $C^{1,2}$-function. Introduce a new process by $Z_t = f(t, X_t)$. Then $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ has dynamics given by

$$dZ_t = \left(f_t(t, X_t) + \mu_t f_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f_{xx}(t, X_t) \right) dt + \sigma_t f_x(t, X_t) dW_t, \tag{4}$$

- Proposition: dZ_t is given by

$$dZ_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{5}$$

where

$$(dt)^2 = 0, \qquad dt \cdot dW_t = 0 \qquad and \qquad (dW_t)^2 = dt.$$

Properties

- Jf. proposition 4.7, corollary 4.8 og lemma 4.9 i **?**, så er X_t en martingal hvis og kun hvis
$$dX_t = \sigma_t dW_t \tag{6}$$
- $\Rightarrow$ Altså er (X_t) en martingal hvis og kun hvis $\mu_t = 0$ for alle t
- Bemærk: Hvis $P(\mu_t \geq 0) = 1$ for alle t, så er (X_t) en submartingal.
- Lad $Z_t = f(t, X_t)$. Hvis f er løsning til
$$f_t(t,x) + \mu_t f_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f_{xx}(t,x) = 0,$$
for alle $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, så er (Z_t) en martingal!

Eksempler

- Hvis $S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma_2^2)t + \sigma W_t}$, så giver Ito

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$
$$S_0 = s > 0$$

...altså er GBM med drift μ og volatilitet σ løsning til ovenstående SDE!

- Vi kan regne på dS_t og vise, at $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$

- Specielt er vi interesseret i dynamikken af den diskonterede proces (S_t/B_t):

$$d(S_t/B_t) = (\mu - r)(S_t/B_t)dt + \sigma(S_t/B_t)dW_t$$

- Altså er (S_t/B_t) en martingal hvis og kun hvis $\mu = r$ (hvilket ikke passer i virkeligheden!)

Black-Scholes Model and Q-Dynamics

- Black-Scholes model:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ dB_t &= r B_t dt, \end{aligned}$$

hvor μ, $\sigma > 0$ og r er konstanter.

- Black-Scholes model under prismålet Q

$$\begin{aligned} dS_t &= r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \\ dB_t &= r B_t dt, \end{aligned}$$

hvor (W_t^Q) er en Brownian motion under Q.

- Her er Q er det (unikke) pricing measure

Arbitrage free price: risk neutral valuation

- Definition 10.4 (flettet sammen med definition 10.11): Q is an equivalent martingale measure (EMM) if
  - $Q \sim P$ on $\mathcal{F}_T$
  - (S_t/B_t) is a martingale under Q on $[0, T]$

- First Fundamental Theorem (theorem 10.14, 10.9, 10.5): The model is free of arbitrage if and only if there exists an EMM Q.

- For (S_t) betyder det, at

$$S_t = e^{-r(T-t)} E^Q \left(S_T \,|\, \mathcal{F}_t \right)$$

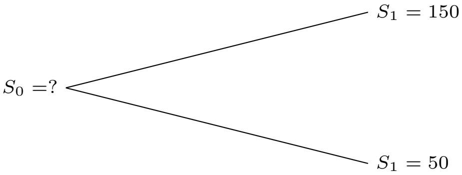
- Mere generelt: For vores T-claim $\mathcal{X}$ med arbitrage-fri pris $\pi(t\ \mathcal{X})$ betyder det, at (se sætning 10.18 og 10.19 eller tilsvarende i kapitel 7)

$$\pi(t; \mathcal{X}) = e^{-r(T-t)} E^Q \left(\mathcal{X} \,|\, \mathcal{F}_t \right) \tag{7}$$

- Ovenstående formel kaldes for *risk-neutral valuation*!
  - P bruges kun bestemme de udfald, som kan ske, og de udfald der aldrig sker.
  - Når vi beregner prisen for $\mathcal{X}$, antager vi, at vi lever i en risiko-neutral verden formlen uafhængig af præferencer

Example: One-Period Model

- Betragt one-period modellen, hvor $S_1 \in \{150, 50\}$ og $p = P(S_1 = 150) = 0.5$:



- Hvad skal prisen være i dag? Hvad er de implicitte Q-sandsynligheder?
- Morale: Markedet vælger Q!

One-Dimensional Girsanov in Black-Scholes

- Lad T være givet og definer (L_t) på $[0, T]$ ved

$$dL_t = \phi_t L_t dW_t$$
$$L_0 = 1.$$

- Antag at $E^P(L_T) = 1$ og definer det nye ssh. mål Q på $\mathcal{F}_T$ ved

$$L_T = \frac{dQ}{dP}.$$

- Så er

$$dW_t = \phi_t dt + dW_t^Q,$$

hvor (W_t^Q) er en Brownian motion under Q!

Q-dynamics

- Antag at betingeler i Girsanov er opfyldt og beregn

$$dS_t = (\mu + \sigma\phi_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$
$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = e^{-rt}\left((\mu + \sigma\phi_t - r)S_t dt + \sigma S_t dW^Q t\right)$$

- Bestem ϕ_t så (S_t/B_t) er en Q-martingal og undersøg, om antagelserne er opfyldt i Girsanov!

- Bestem Q-dynamikken af (S_t) for dit valg af (ϕ_t)

- Specielt bruges den dynamik, når vi beregner de risiko-neutrale priser:

$$\pi(t; \mathcal{X}) = e^{-r(T-t)} E^Q\left(\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Black-Scholes Equation

- Antag at $\pi(t;\mathcal{X}) = F(t, S_t)$ og husk at $\pi(t;\mathcal{X})/B_t$ er en martingal under Q
- Ito viser, at $F : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ er løsning til følgende boundary value problem:

$$F_t(t,s) + rsF_s(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}(t,s) - rF(t,s) = 0$$
$$F(T,s) = \Phi(s),$$

  hvor Φ er kontraktfunktionen for $\mathcal{X}$, altså $\mathcal{X} = \Phi(S_T)$

- Ovenstående PDE kaldes for Black-Scholes ligningen og kan løses ved brug af numeriske metoder..