Monte Carlo + Europæiske optioner i BS

Vejledningsmøde 4

Laurs R. Leth

Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
leth.laurs@gmail.com

13. april 2020

atp=

Monte Carlo in a nutshell

- Monte Carlo bruges til at beregne integraler, fx middelværdier
- Lad $\theta = E(X)$. Her er X en stokastisk variabel, som kan simuleres (uafhængige udfald)
- Vores setting: X kan både være en transformation af S_T (simpelt T-claim) eller hele stien (S_t)
- Vores simple Monte Carlo estimat for θ findes ved
  1. Simuler N uafhængige udfald af X: $X_1, ..., X_N$
  2. Tag gennemsnittet af de N udfald:

  $$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \to E(X_i) = \theta$$

  næsten-sikkert for $N \to \infty$ (LLN: law of large numbers)

Eksempel: Arbitrage-fri pris for T-claims

- Lad $\mathcal{X} = \phi(S_T)$, hvor (S_t) er en GBM under Q (BS model)
- Risk-neutral valuation giver, at

$$\pi(t\ \mathcal{X}) = e^{-r(T-t)} E^Q(\Phi(S_T) \,|\, \mathcal{F}_t)$$

- Antag at $T = 1$, $t = 1/2$ og $S_t = s$ (vi estimerer prisen til tid $t = 1/2$ og ikke $t = 0$)
  1. Simuler N stier for $(S_s)_{1/2 \le s \le 1}$ under Q. For hver sti gemmes slutværdien: $S_{1,T}, \dots, S_{N,T}$
  2. For hver sti beregnes det realiserede payoff $\Phi_i = (S_{i,T})$ for $i = 1, \dots, N$
  3. Til sidst beregnes det (diskonterede) gennemsnit:

$$\hat{\pi}_i = e^{-r/2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \to e^{-r/2} E^Q(\Phi(S_T) \,|\, \mathcal{F}_{1/2}) = \pi(1/2; \mathcal{X})$$

for $N \to \infty$

Opsummering I: Q-dynamik i BS

- Black-Scholes model under P:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$
$$dB_t = r B_t dt,$$

hvor μ, $\sigma > 0$ og r er konstanter.

- For at modellen har 'no-arbitrage' skal alle *diskonterede* aktiver være martingaler under prismålet Q. Specielt skal

$$B_t/B_t, \qquad S_t/B_t \qquad \text{og} \qquad \pi(t;\mathcal{X})/B_t$$

være martingaler under Q — her er $\pi(t;\mathcal{X})$ den arbitrage-fri pris for et T-claim $\mathcal{X} = \Phi(S_T)$.

- Ved at kombinere Girsanov og Ito fandt vi Q — frembragt af Girsanov kernen $\phi = (r - \mu)$ — hvor S_t/B_t blev martingal: $d(S_t/B_t) = \sigma S_t dW_t^Q$, hvor (W_t^Q) er en Brownian motion under Q

- Black-Scholes model under prismålet Q

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$
$$dB_t = r B_t dt,$$

Opsummering II: BS PDE (under Q)

- Lad $\mathcal{X}$ være et simpelt T-claim med kontraktfunktion $\Phi(s)$, altså $\mathcal{X} = \Phi(S_T)$
- Lad $\pi(t;\mathcal{X}$ være prisen til tid $t \leq T$ med slutbetingelsen $\pi(T;\mathcal{X}) = \Phi(S_T)$
- Antagelse 7.2.2:
  1. $\mathcal{X}$ kan købes og sælges i markedet
  2. No-arbitrage i markedet
  3. Prisprocessen er givet ved $\pi(t;\mathcal{X}) = F(t, S_t)$, hvor F er en tilpas 'pæn' funktion
- Siden $e^{-rt}\pi(t;\mathcal{X}) = e^{-rt}F(t, S_t)$ skal være Q-martingal, får vi fra Ito, at

$$d(e^{-rt}F(t,S_t)) = e^{-rt}\left\{\underbrace{(F_t(t,S_t) + rsF_s(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{ss}(t,S_t) - rF(t,S_t))}_{=0}dt + [\cdots]dW_t^Q\right\}$$

- Ovenstående betingelse skal sælge for alle $S_t(0,\infty)$ og $t \in [0,T]$. Vi kommer dermed frem til BS PDEen (sætning 7.7): $F(t,s)$ løser følgende PDE på domænet $[0,T] \times (0,\infty)$

$$F_t(t,s) + rsF_s(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}(t,s) - rF(t,s) = 0$$

$$F(t,s) = \Phi(s)$$

Opsummering III: Analytisk prisning under Q

- Siden $e^{-rt}\pi(t;\mathcal{X})$ er en Q-martingal, må der gælde

$$\pi(t;\mathcal{X}) = e^{-r(T-t)}E^{Q}\left(\mathcal{X} \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{1}$$

- Fortolkning af (1): Den arbitrage-fri pris er nutidsværdien af det forventede payoff under Q

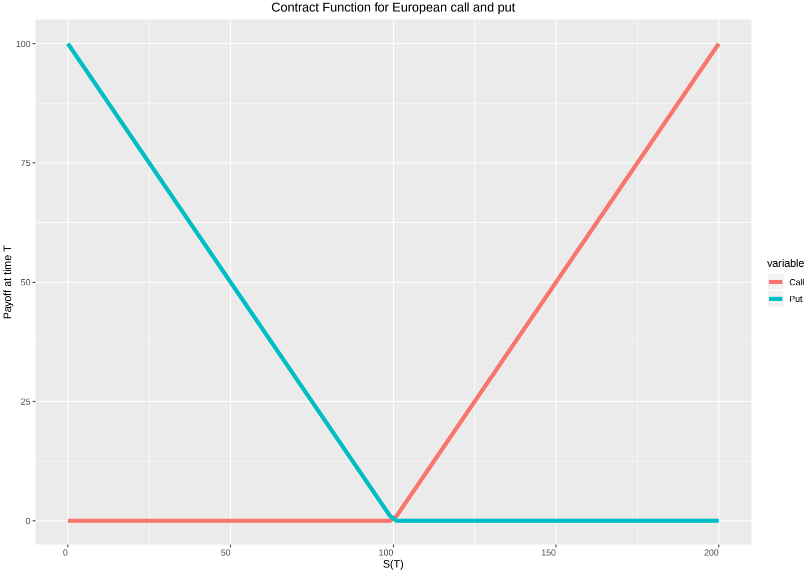
- Proposition 5.6 (Feynman-Kac) giver os netop relationen mellem vores BS PDE og udtrykket (1)!

- Med fare for at gentage os selv har vi tre muligheder for at prisfastsætte $\mathcal{X}$:
  1. BS PDE (numerisk)
  2. Risk-neutral valuation (ligning 1) (analytisk)
  3. Monte Carlo metoden af den betinget middelværdi i ligning (1) (simulation)

Europæiske optioner

- Vores fokus er nu på Europæiske optioner (calls og puts) skrevet på den underliggende aktie (S_t) med *time of maturity* T og strike-pris $K > 0$
- Europæisk call: En kontrakt mellem køber og sælger, som giver førstnævnte *retten* til at købe S_t for prisen K på tidspunkt T (exercise optionen)
- Hvis $S_T > K$ vil køber exercise optionen og opnå profitten $S_T - K$. Hvis $S_T \leq K$ vil køber ikke exercise optionen — her er profitten 0
- Specielt er call optionen et simpelt T-claim med kontraktfunktion $\phi(s) = (s - K)^+$
- Tilsvarende er put-optionen et simpelt T-claim med kontraktfunktion $\phi(s) = (K - s)^+$
- Hvis vi holder en call, ønsker vi, at S_t stiger (og vice verca for put)
- Mål for nu: bestemme artitrage-fri pris for Europæiske optioner til tidspunkt t

Illustration af payoffs med $K = 100$



Call: Hvis $S_t < K$ er optionen out-the-money (OTM), $S_t = K$ at-the money (ATM) og $S_t > K$ in-the-money (ITM). Og vice verca for put optionen!

Put-call parity I

- Vi kan replikere/hedge payoff for call-optionen ($\mathcal{X}_C$) med den underliggende S_t, bankbogen B_t og put-optionen ($\mathcal{X}_P$).
  1. For $S_T > K$ er $\Phi_C(S_T) = S_T - K$ — ret linje med hældning 1 og intercept $-K \Rightarrow$ Porteføljen skal indeholde 1 aktie (S_t), mens vi låner K DKK i banken
  2. For $S_T \leq K$ er $\Phi_C(S_T) = 0$, mens vores nuværende(!) portefølje har slutværdi $S_T - K$
  3. Vi køber derfor også 1 put med strike K, som udbetaler $(K - S_T)^+$
- Med ovenstående procedure fås strategien/porteføljen til tid t $h(t) = (-K, 1, 1)$ med værdi til tidspunkt T

$$V^h(T) = -K \cdot 1 + 1\dot{S}_T + 1 \cdot (K - S_T)^+ = (S_T - K) = \mathcal{X}_C$$

- Eller mao. kan kontraktfunktionen Φ_C dekomponeres ved

$$\Phi_C(s) = -K\Phi_B(s) + \Phi_S(s) + \Phi_P(s),$$

hvor $\Phi_B(s) = 1$ er kontrakfunktion for zero-coupon bond, $\Phi_S(s) = s$ er kontraktfunktion for S_t, mens $\Phi_P(s) = (K - s)^+$ er kontraktfunktion put-optionen!

Put-call parity II

- Prisen for en call til tid t, $C(t, S_t)$, kan derfor dekomponeres ved prisen $-K$ obligationer, prisen for 1 aktie og prisen for 1 put, $P(t, S_t)$,

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E^Q(\mathcal{X}_C \,|\mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q(-K + S_T + \mathcal{X}_P \,|\, \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} K + S_t + P(t, S_t), \end{aligned}$$

  hvor vi udnytter linearitet af den betingede middelværdi samt, at S_t/B_t er en Q-martingal:

$$S_t/B_t = E^Q(S_T/B_T \,|\, \mathcal{F}_t)$$

- Ovenstående resultat kaldes put-call parity og giver relationen mellem prisen for en call og prisen for en put!

Prisfastsættelse for Europæisk call i BS-model

- Lad $C(t,s)$ være prisfunktionen for $\mathcal{X}_C = (S_T - K)^+$. Risk-neutral valuation siger, at

$$C(t,S_t) = e^{-r(T-t)} E^Q \left((S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t \right)$$

- Ved at regne på ovenstående middelværdi (s. 105 i bogen) fås proposition 7.10 (Black-Scholes formula):

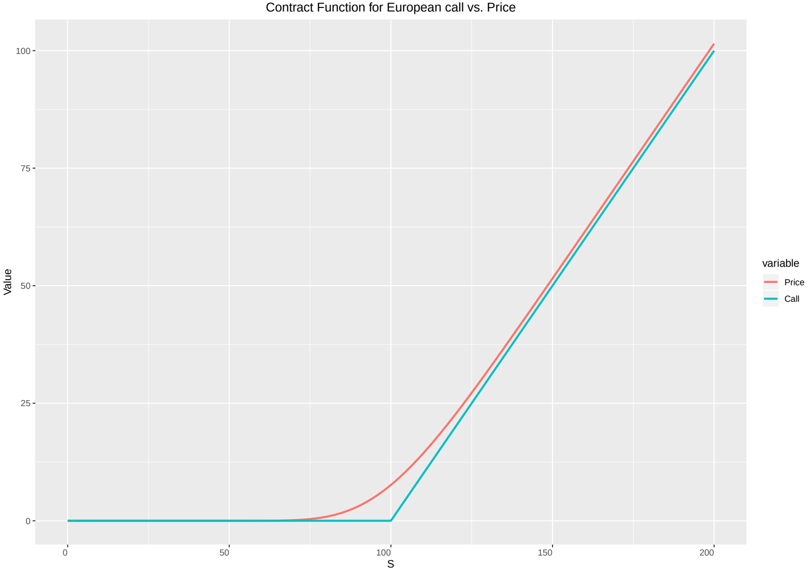
$$C(t,s) = sN(d_1(t,s)) - e^{-r(T-t)} K N(d_2(t,s)),$$

  hvor $N(\cdot)$ er CDF for en standard normalfordelt variabel, mens

$$d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log(s/K) + (r + \sigma^2/2))T - t) \right)$$
$$d_2(t,2) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}$$

- Prisen til tidspunkt t afhænger altså af værdien af den underliggende (S_t), volatiliteten (σ), renten (r), strike-prisen (K) og time-to-maturity $(T-t)$

Illustration af $C(t, s)$ som funktion af s



Parametre: $T = 1$, $K = 100$, $r = 0.02$, $\sigma = 0.2$, $t = 1/2$ og $S_t \in [0, 200]$. Prisen er (oplagt) voksende i S_t

Eksempel: OTM, ATM og ITM

- Lad S_t være lig henholdsvis 90, 100 og 110 og brug parametreværdierne fra forrige slide:

$$C(1/2, 90) = 3.11, \qquad C(1/2, 100) = 7.62, \qquad C(1/2, 110) = 14.35.$$

- Prisens sensitivitet over for 'små' ændringer i s kaldes for optionens Delta: $\Delta(t,s) = C_s(t,s) > 0$. Bemærk $\Delta(t,s) \in [0,1]$.

- Generelt: Prisens følsomhed over for små ændringer i parametrene kaldes for optionens 'Greeks'. Disse er essentielle mht. hedging og risikovurdering af Europæiske optioner — se/læs kapitel 9

- Næste gang ser vi, hvordan vi kan lave et perfekt hedge af optionen med $\Delta(t,s)$ — dette kaldes for et Δ-hedge :)

Monte Carlo af European call

```
> N <- 10000     # Numer of simulations (simulated payoffs)
> m <- 1000     # Number of evaluations for each simulated path
> tau <- T -t
> dt <- tau/(m)   # Equidistant time step for each simulated path
>  # Vector to save simulated payoffs
> S0 <- c(90,100,110)
> call_prices <- numeric(length(S0))
> for (j in 1:length(S0)){
+   payoff_vec <- numeric(N)
+   for (i in 1:N){
+     # Simulate under Q-measure (Q-dynamics)
+     Z <- rnorm(m, mean=0, sd=1)
+     X <- cumsum((r-1/2*sigma^2)*dt + sigma*sqrt(dt)*Z)
+     S <- c(S0[j],S0[j]*exp(X))
+     # Compute simulated payoff at time T
+     payoff_vec[i] <- max(S[m+1]-K, 0)
+   }
+   call_prices[j] <- mean(payoff_vec)
+ }
> exp(-r*tau)* call_prices
[1]  3.125111  7.530863 14.617743
```

Plan for næste gang

- Læs gerne kapitel 6, 8 og 9 med fokus på hedging (korte kapitler)
- Vi skal snakke om hedging, Greeks og 'market implied volatility'