1 Note: Δ for Europæisk Call option i BS-model

Lad $C(t,s)$ være prisfunktionen for en Europæisk call option med udløb $T>0$ og strike $K>0$. Jf. risk-neutral valuation har vi, at

$$\begin{aligned}
C(t,S_t) &= e^{-r(T-t)}E_t^Q\left((S_t-K)^+\right) \\
&= e^{-r(T-t)}E_t^Q\left(1_{S_T>K}(S_T-K)\right) \\
&= e^{-r(T-t)}E_t^Q\left(1_{S_T>K}S_T\right) - e^{-r(T-t)}E_t^Q\left(1_{S_T>K}K\right) \\
&= e^{-r(T-t)}E_t^Q\left(1_{S_T>K}S_t(S_T/S_t)\right) - e^{-r(T-t)}KE_t^Q\left(1_{S_T>K}\right) \\
&= S_t\tilde{Q}_t(S_T>K) - e^{-r(T-t)}KQ_t(S_T>K),
\end{aligned}$$

hvor $\tilde{Q}$ er målet (EMM), der bruger den underliggende (S_t) som *numeraire*, i.e.

$$d\tilde{Q} = \frac{B_t/B_T}{S_t/S_T}dQ.$$

Bemærk at $\tilde{Q}$ er bestemt ved

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)}E_t^Q\left(1_{S_T>K}S_t(S_T/S_t)\right) &= S_tE_t^Q\left(1_{S_T>K}(B_t/B_T)(S_T/S_t)\right) \\
&= S_t\int 1_{S_T>K}(B_t/B_T)(S_T/S_t)dQ_t \\
&= S_t\int 1_{S_T>K}d\tilde{Q}_t \\
&= S_t\tilde{Q}_t(S_T>K).
\end{aligned}$$

Pas på min meget dovne notation! Altså er den arbitrage-fri pris dekomponeret af

1. Spot-or-nothing prisen under $\tilde{Q}$: $S_t\tilde{Q}_t(S_T>K)$. Intuition: Et T-claim der udbetaler den underliggende, hvis denne ender in-the-money $S_T>K$.

2. Cash-or-nothing prisen under Q: $e^{-r(T-t)}KE_t^Q\left(1_{S_T>K}\right)$. Intuition: Et T-claim der udbetaler strike-prisen K (diskonteret), hvis den underliggende ender i pengene $S_T>K$.

1.1 Heuristisk Δ-hedge af Europæisk call

Vi ønsker en Δ-*neutral* strategi/portefølje, der replikerer/hedger call-optionen $\mathcal{X}$ med prisfunktion $C(t,s)$. Δ-neutralitet (risiko-neutralitet i BS-model) betyder, at porteføljens værdi ikke påvirkes af små ændringer i den underliggende aktie.

Antag først at vi sælger én option og ønsker at eliminere risikoen/tabet (vi er forpligtet til at betale køber $S_T - K$, hvis optionen ender in-the-money), når S_t ændrer sig. Lad $h(t) = (h_0(t), \Delta(t), -1)$ være porteføljen med værdi til tid $t < T$

$$V^h(t, S_t) = h_0(t)B_t + \Delta_t S_t - C(t, S_t), \tag{1}$$

hvor $h_0(t)$ er beholdning i banken (lån eller sæt penge ind), Δ_t er antal aktier og $C(t, S_t)$ er værdien af optionen. Δ-neutralitet opnås, hvis vi for et hvert $t < T$ har

$$\frac{\partial V^h(t)}{\partial s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta_t = C_s(t, S_t).$$

Δ-hedging i praksis med en Ito-tilgang

Jf. proposition 9.7 vil vores dynamiske Δ-hedge i kontinuert tid replikere værdien af $C(t, S_t)$. Problemet er at vælge $h_0(t)$ og Δ_t — løsningen er givet i sætning 8.5, som vi nu viser:

Betragt igen ovenstående scenarie

1. Sælg $\mathcal{X}$ til $t = 0$ for prisen $C(0, S_0)$
2. Beregn Δ_0 og køb Δ_0 aktier. Dette køb finansieres af $C(0, S_0$ og hvis nødvendigt et lån i banken ($h_0(0)$).

Ovenstående fremgangsmetode gentages, når S_t ændrer sig over tiden $t \in [0, T]$: For hvert t beregnes et nyt Δ_t, og $h_0(t)$ vælges så net positionen er 0:

$$V^h(t) = h_(t)B_t + \Delta_t S_t - C(t, S_t) = 0$$

Strategien er *self-financing*, hvilket medfører (se kapitel 6), at

$$dV^h(t) = h_0(t)dB_t + \Delta_t dS_t - dC(t, S_t) = 0.$$

Ved at bruge Ito direkte på $dC(t, S_t)$ (sætning 4.10) fås

$$\begin{aligned} dV^h(t) &= h_0 r B_t dt + \Delta_t(rS_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &\quad - \Big\{ \Big(C_t(t, S_t) + rS_t C_s(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 C_{ss}(t, S_t) \Big) dt - \sigma S_t C_s(t, S_t) dW_t \Big\}. \end{aligned}$$

Først bestemmes $\Delta_t = C_s(t, S_t)$ så vi eliminerer risikoen/stokastikken fra W_t. Dernæst vælges $h_0(t)$, så $dV^h(t) = 0$:

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{C_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 C_{ss}(t, S_t)}{rB_t} \\ &= \frac{C(t, S_t) - S_t C_s(t, S_t)}{B_t} \\ &= \frac{C(t, S_t) - S_t \Delta_t}{B_t}. \end{aligned}$$

Vi har dermed vist sætning 8.5. Sidste lighedstegn bruger $\Delta_t = C_s(t, S_t)$, mens andet lighedstegn udnytter Black-Scholes ligningen:

$$\begin{aligned} C_t(t, S_t) + rS_t C_s(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 C_{ss}(t, S_t) - rC(t, S_t) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \\ C_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 C_{ss}(t, S_t) = rC(t, S_t) - rS_t C_s(t, S_t) \end{aligned}$$

I praksis beregnes Δ_t, hvorefter $h_0(t)$ bestemmes ved ovenstående identitet. Som et sanity check ser vi, at

$$h_0(t)B_t + \Delta_t S_t = C(t, S_t).$$

For at Δ-hedge $\mathcal{X}$ mangler vi nu kun at beregne $\Delta_t = C_s(t, S_t)$.

Beregn $C_s(t, s)$

Jf. kapitel 9 er

$$\Delta_t = C_s(t, S_t) = N(d_1(t, S_t),$$

hvor $N(\cdot)$ er CDF for en standard normalfordelt variabel, mens (se Black-Scholes formlen)

$$\begin{aligned} d_1(t, S_t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2(T-t)\right), \\ d_2(t, S_t) &= d_1(t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Resultatet kan vises på følgende måde. Lad $\alpha > 0$ være en konstant og betragt en ny call-option på den skalerede underliggende (αS_t) med strike αK. Simple udregninger viser, at

$$C(t, \alpha S_t; \alpha K) = \alpha S_t N(d_1(t, S_t; K)) - e^{-r(T-t)} \alpha K N(d_2(t, S_t; K)) = \alpha C(t, S_t\ K),$$

hvor $C(t, S_t; K)$ er lazy notation for prisen for en call på (S_t) med strike K.

Vi konkluderer, at $C(t, S_t; K)$ er homogen af grad 1 med hensyn til S_t og K. Specielt kan vi bruge Euler's homogene funktionssætning:

$$\begin{aligned} C(t, S_t\ K) &= S_t C_s(t, S_t\ K) + K C_K(t, S_t; K) && \Leftrightarrow \\ C_s(t, S_t; K) &= \frac{C(t, S_t; K) - K C_K(t, S_t; K)}{S_t}. && (2) \end{aligned}$$

Endvidere følger det fra Leibniz's integral rule, at

$$\begin{aligned} C_K(t, S_t; K) &= \partial_K e^{-r(T-t)} E_t^Q((S_T - K)^+) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \partial_K (x - K) q(x) dx \\ &= -e^{-(T-t)} \int_K^\infty K q(x) dx \\ &= -e^{-r(T-t)} E_t^Q(1_{S_T > K}) \\ &= -e^{-r(T-t)} N(d_2(t, S_t)). \end{aligned}$$

Ved at indsætte udtrykket i (2) (og en enkelt mellemreging) fås

$$\Delta_t = C_t(t, S_t) = N(d_1(t, S_t)).$$