Geometric Brownian Motion

Vejledningsmøde 2: GBM + videre forløb

Laurs R. Leth

Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
leth.laurs@gmail.com

25. februar 2020

Opsummering fra sidste gang..

- Vi antog, at $S = (S_t)_{t\geq 0}$ var løsning til den stokastiske diffenrential ligning

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

med $S_0 = s > 0$, og hvor (W_t) var en Brownsk bevægelse.

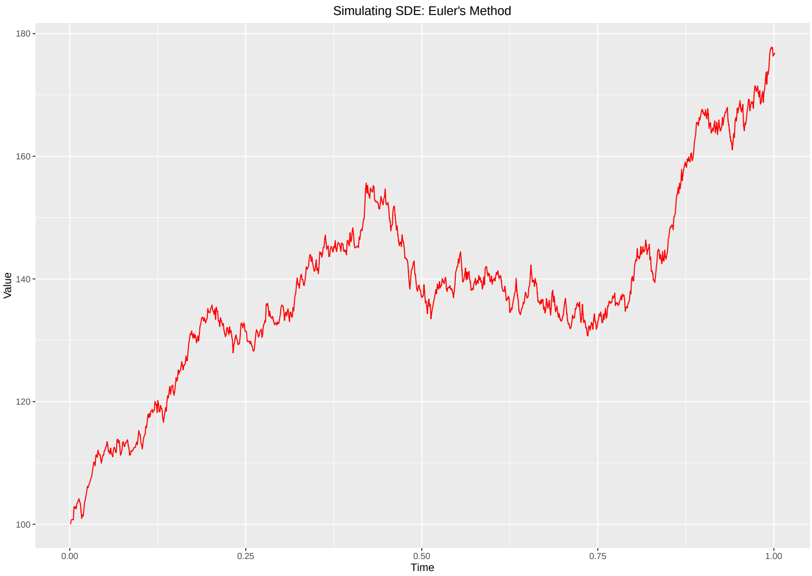
- Simuler S med Euler's metode, hvor det antages $\mu(t, S_t) = \mu S_t$ og $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$

  1. Lad $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$ med $T = 1$ og $dt := t_i - t_{i-1} = T/n$
  2. For $i = 0$ beregn

  $$dS_{t_{i+1}} = \mu S_{t_i} dt + \sigma S_{t_i} \sqrt{dt} Z_i,$$

  hvor $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$
  3. Opdater/beregn $S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + dS_{t_{i+1}}$
  4. Gentag trin 2 og 3 for $i = 1, ..., n-1$

Illustration



Dennge uge: Geometric Brownian Motion

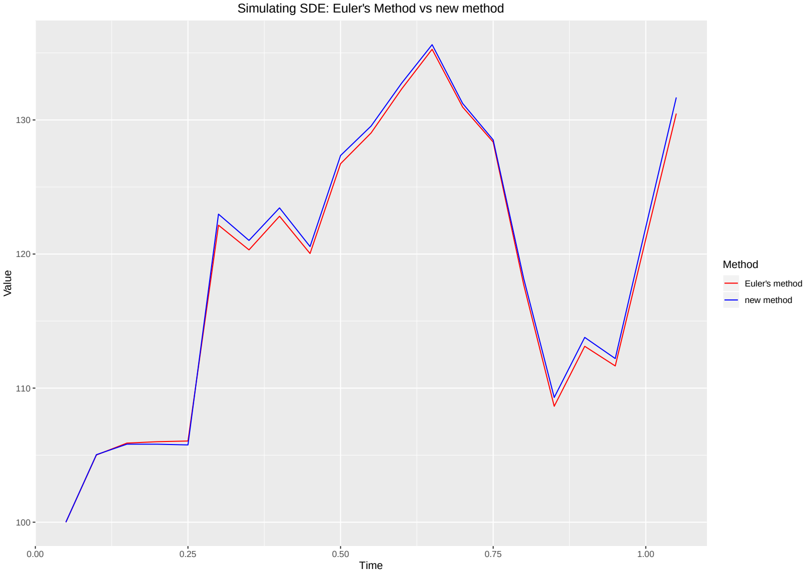
- Antag at $S = (S_t)_{t \geq 0}$ er givet ved
$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t},$$
hvor $S_0 = s > 0$ er startværdier for processen.

- Bemærk: $t \mapsto S_t(\omega)$ er kontinuert, da $t \mapsto W_t(\omega)$ er kontinuert!

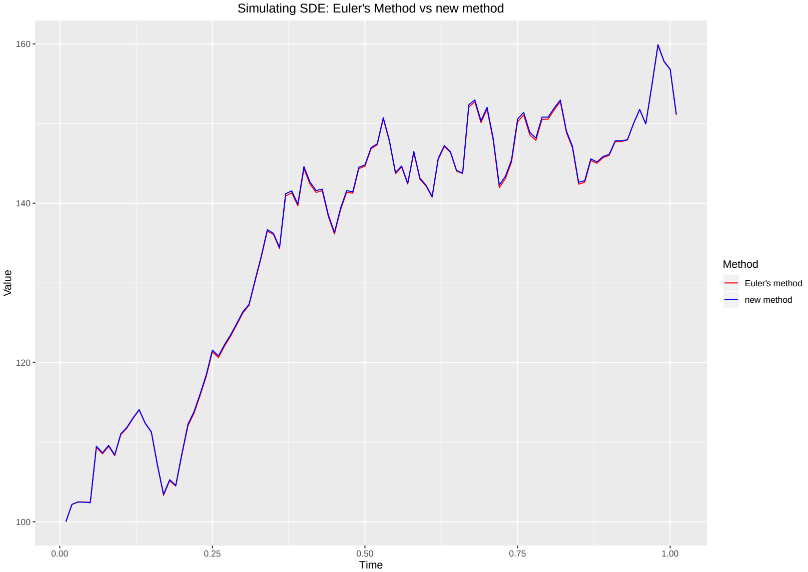
- Vigtigt 'resultat':
$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} = S_{t_i} e^{(\mu - \sigma^2/2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_{i+1}})},$$
hvor $(t_{i+1} - t_i) = dt$ og $W_{t_{i+1}} - W_{t_{i+1}} \sim \mathcal{N}(0, dt)$.

- Simuler S: For $i = 0, ...n - 1$
  1. Simuler: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
  2. Beregn: $X = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma\sqrt{dt}Z_i$
  3. Opdater: $S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^X$

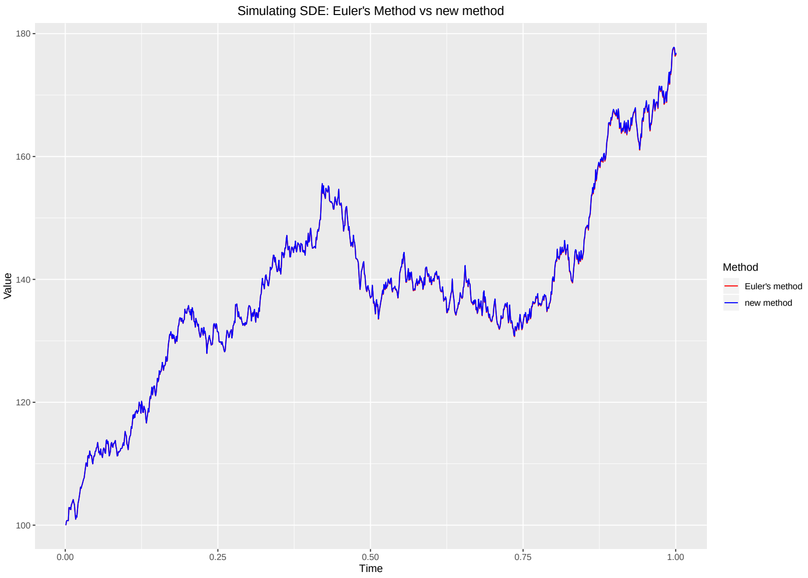
Sammenlign de to metoder: $n = 20$



Sammenlign de to metoder: $n = 100$



Sammenlign de to metoder: $n = 1000$



Egenskaber ved GBM

- Hvis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, så er $e^X \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, hvor

$$E\left(e^X\right) = e^{\mu+\sigma^2/2} \qquad \text{og} \qquad V\left(e^X\right) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$$

- Speciet er

$$S_t/S_0 \sim \log \mathcal{N}\left((\mu - \sigma^2/2))t, \sigma^2 t\right)$$

- Bemærk $ES_t = e^{ut}$, så middelværdien afhænger af tiden!

- (S_t) er ikke en martingal for $\mu \neq 0$: Lad $t > s$ og indse

$$E\left(S_t \,|\, \mathcal{F}_s\right) = S_s e^{\mu(t-s)} \neq S_s.$$

Afkast og log-afkast

- Investorer er hovedsagligt interesseret i afkast og ikke priser
- Hvis S_t er prisen til tidspunkt t for et finansielt aktiv, så defineres afkastet mellem t_{i+1} og t_i ved

$$R_{t_{i+1}} = \frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} = \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} - 1$$

- Hvis (S_t) er GBM, så er $R_{t_{i+1}} + 1 \sim \log \mathcal{N}(..., ...)$
- Log-afkastet mellem t_{i+1} og t_i er defineret ved

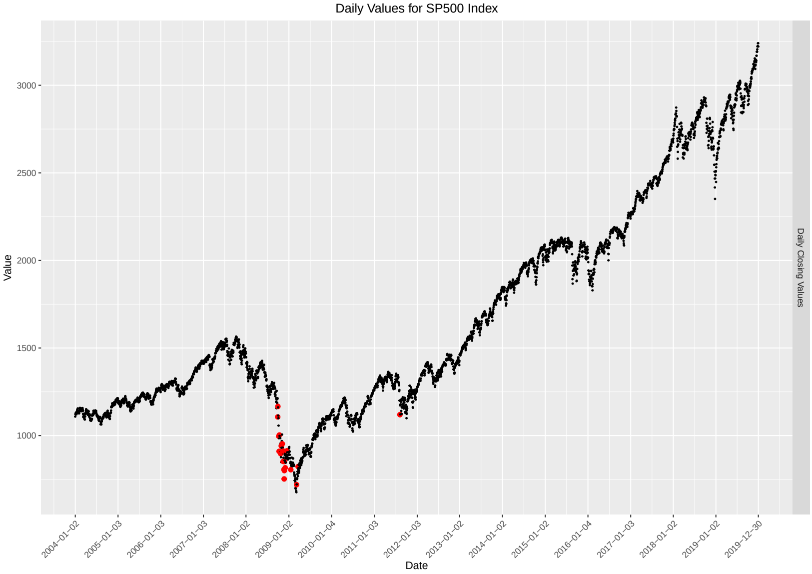
$$r_{t_{i+1}} := \log\left(R_{t_{i+1}} + 1\right) = \log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \sim \mathcal{N}(..., ...)$$

- Bemærk at $\log(1 + R) \approx R$ for $|R| << 1$.
- Compounded afkast:

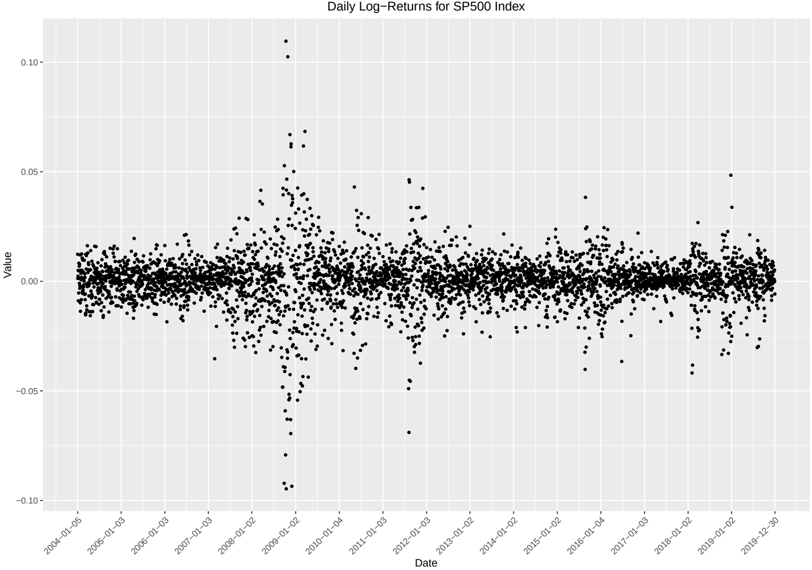
$$(1 + R_1) \times (1 + R_2) \times \cdots \times (1 + R_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 + R_i)$$

$$\Rightarrow \log\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + R_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \log(1 + R_i) = \log(S_n) - \log(S_0)$$

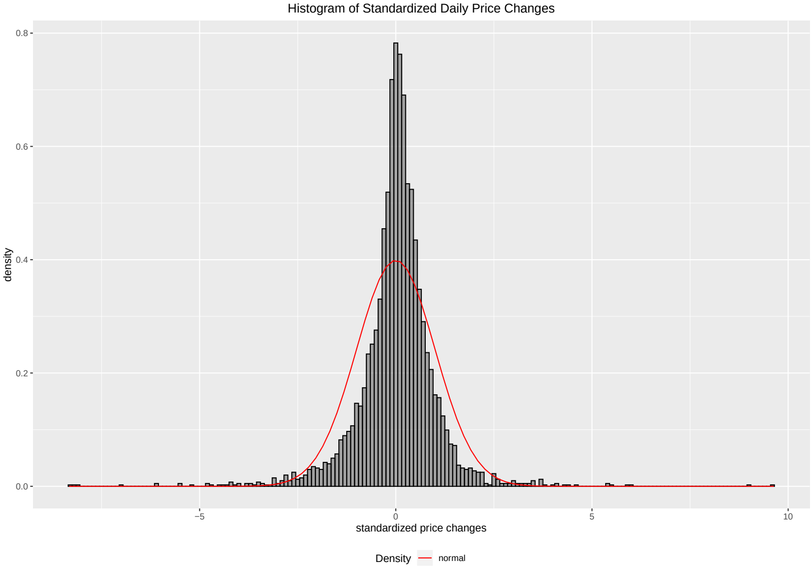
Daily Values for SP500



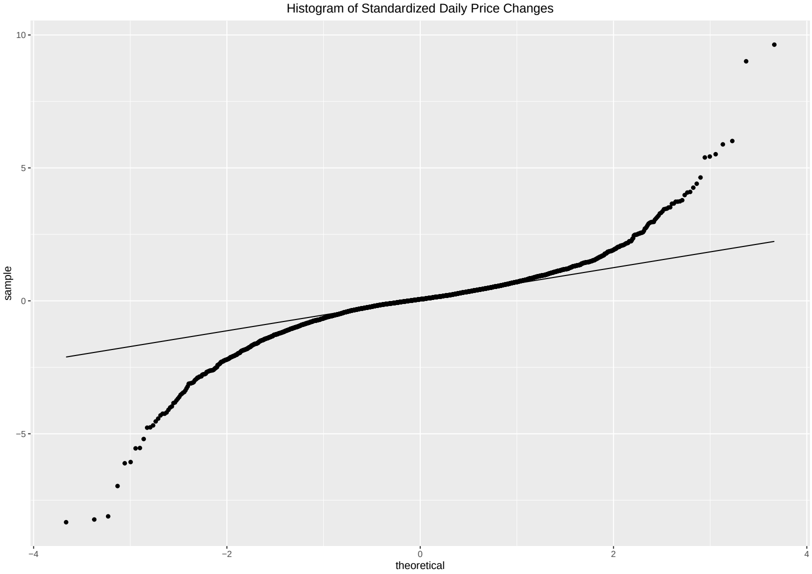
Daily log-returns for SP500



Histogram of Standardized log-returns



QQ-plot of Standardized log-returns



Observationer

- GBM kan ikke modellere ekstreme værdier (tail events)
- Realiseret log-afkast har tykkere haler end normalfordelingen
- Volatilitet clustering: Høje (absolut) afkast medfører typisk høje afkast i næste periode (og vice verca for lave afkast)
- Volatilitet mean-reversion: Vol vil reverte mod dets gennemsnint
- Løsning: Garch?

MLE af GBM

- Husk at

$$\log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \sim \mathcal{N}\left((\mu - \sigma^2/2)dt, \sigma^2 dt\right),$$

  hvor $dt = t_{i+1} - t_i$

- Lad $\theta_1 = \mu - \sigma^2/2$ og $\theta_2 = \sigma^2$. Så er MLE

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{T}\left(\log S_T - \log S_0\right) \qquad \text{og} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) - \hat{\theta}_1\right)^2$$

- Vi bruger kun startværdien og sidste observation til at estimere middelværdien!

Næste vejledning + videre forløb

- Vi snakker om emne 3: Ito kalkulus (vigtigt!). Læs s. 49-62 i Björk og eventuelt kapitel 6 + starten af kapitel 7 (ikke mange sider).
- Vi snakker om emne 4: Q-dynamik for processen (S_t) (teknisk men nødvendigt)
- Vi (I) skal også overveje retningen på projektet
  - The Fundamental Theoreom of Derivative Trading
  - Stokastisk volatilitet

References