Procesamiento digital de seÃ±*ales : estimaciÃ³ndelespectrodeunaseÃ ± al*

Gatica, Isaias
Martin, Santiago
Saez, Lautaro Ãndres
Vidman, Xavier Harry

El objetivo de este informe es analizar el uso de la DFT para estimar el espectro de una seÃ±*al.ParaellloseverÃ!'nloscuatrocasosposibles, segÃºnlaseÃ±alseacontinuaodiscreta, yperiÃ³dicaoaperiÃ³dica*

Se analizarÃ¡ en los distintos casos si es posible obtener una estimaciÃ³*nsinerrorybajoquÃ©condiciones; quÃ©*
padding; ycÃ³moutilizarcorrectamentelafunciÃ³nfftshift.

AdemÃ¡s, cada ejercicio concluirÃ¡ con el armado de una rutina que implemente la estimaciÃ³*ndelespectrousandolaDFT.*

1. Ejercicio 1

En este ejercicio se analiza el caso en que una seÃ±*alesperiÃ³dicaydiscreta.Seconsideraenprimerainstancialasi*
al :

$$x[n] = sen(2\pi n/8) \tag{1}$$

Inciso a)

En este inciso se calcula la DTFS y la DFT de la ecuaciÃ³n(**??**)*.SesabeconanterioridadquelaDTFSdeunaseÃ±*
alestÃ!'definidaporlassiguientesdosecuaciones :

$$x[n] = \sum_{k=<N>} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{2}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{3}$$

Por lo tanto, para calcular la DTFS se deben calcular los coeficientes c_k. Como la seÃ±*aldelaecuaciÃ³n*(**??**)*esuna*
alsenoidal, sepuedeexpresardelasiguientemanera :

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{(j\pi n)/4} - e^{-(j\pi n)/4}\right) \tag{4}$$

Por lo tanto, la DTFS de la seÃ±*aldelaecuaciÃ³n*(**??**)*essimplementelaecuaciÃ³n*(4)*; dondesuscoeficientes*c_k
son:

$$C_1 = \frac{1}{2j} \qquad C_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$X[k]$	0	$-4j$	1	0	0	0	0	$4j$

Tabla 2: $X[k]$ obtenidos para un periodo.

La definiciÃ^3*ndelaDFTqueseutilizaeslasiguiente* :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{5}$$

donde N no representa necesariamente el perÃodo de la seÃ±*al*, *sinoquerepresentalacantidaddemuestrasconsec*
*al*x[n].

Para calcular la DFT, en primera instancia se aplica la ecuaciÃ^3*n*(**??**), *dondeseobtiene* :

$$x[k] = \sum_{n=0}^{7} \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) e^{-j\frac{\pi}{4}nk} \tag{6}$$

Para desarrollar la sumatoria de forma mÃ¡s sencilla la sumatoria presentan los valores de $x[n]$ para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en la Tabla (**??**).

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$

Tabla 1: Valores de $x[n]$ para un periodo.

Con lo que se obtiene

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{5\pi}{4}k} - e^{-j\frac{3\pi}{2}k} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{7\pi}{4}k} \tag{7}$$

Si expresamos las exponenciales correspondientes para $n \in \{5, 6, 7\}$ como $m\pi/4 + \pi$ donde m es un entero entre 0 y 4, es posible expresar

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k}e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}e^{-j\pi k} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}k}e^{-j\pi k} \tag{8}$$

Como k es entero y $e^{-j\pi k}$ es siempre mÃºltiplo de π entonces $e^{-j\pi k} = (-1)^k$.

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}k}(-1)^{1+k}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + (-1)^{1+k}e^{-j\frac{\pi}{2}k} + (-1)^{1+k}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}k} \tag{9}$$

Agrupando los valores se obtiene:

$$X[k] = [1 + (-1)^{1+k}](\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}k}) \tag{10}$$

Sabiendo que $X[k]$ es periÃ^3*dicaconperiodo*N, *enestecaso*8, *semuestranenlaTabla*(**??**)*losvaloresobtenidosparal*

Al finalizar con el cÃ¡lculo de la DFT, se pueden sustraer varias conclusiones entre la DFT y la DTFS. En primera instancia, al comparar la expresiÃ^3*ndelos*c$_k$ de la DTFS con la expresiÃ^3*ndelaDFT*, *sepuedeverunagransemejanzaporelparecidoentrelassumatoriasdeambas.Perohaydosgrandesdif* estÃ¡n multiplicados por el factor $\frac{1}{N}$, por lo que las amplitudes no serÃ¡n coincidentes. En segundo lugar, para calcular los c_k se debe usar obligatoriamente a N como el valor del perÃodo de la seÃ$\pm al, yenlaDFTnonecesariamente; yaqueelvalordeNenlaexpresi\tilde{A}^3ndelaDFTrepresentalacantidaddemuestra$ alx[n].

Al realizar los cÃ¡lculos y comparar, se puede observar que si en la expresiÃ$^3 ndelaDFTseutilizaelvalordelper\tilde{A}$-$odoenN, losvalores$c$_k$ y los valores de $X(k)$ coinciden en el eje k, pero difieren en el valor de amplitud por el factor $\frac{1}{N}$ de la expresiÃ$^3 n(3)$.

Inciso b)

En este inciso se genera la seÃ$\pm al$x[n]=sen(2 $\pi n/8$) para n de 0 a 7, y se calcula la DFT usando la funciÃ$^3 n$*fft*$.EnlaFigura$**??**$sevisualizalase\tilde{A}\pm al$x[n]$parande0a7$.

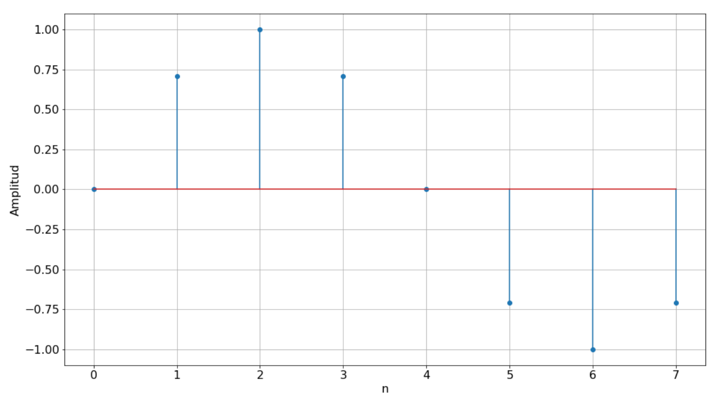


Figura 1: SeÃ$\pm al$x[n]$generadaparande0a7$

El resultado del cÃ¡lculo de la DFT utilizando la *fft*, se puede observar en la Figura **??**.

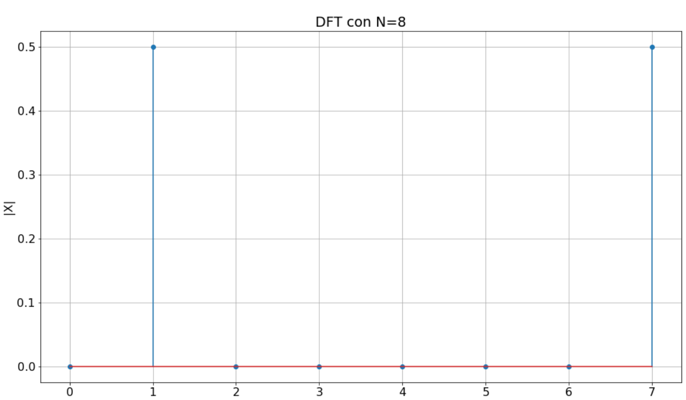


Figura 2: DFT de la seÃ$\pm al$x[n]$utilizandolafftconN = 8$

Comparando la Figura **??** con los resultados teÃ³$ricosobtenidosenelinciso$**a**$, sepuedeafirmarqueefectivamentes$
alx[n]$alusarlafftconN = 8.Estosedebeaquelafunci\tilde{A}^3nfftgeneraunase\tilde{A}\pm alperi\tilde{A}^3dicautilizandolasmuestrasdelas$
alx[n]$queseledieroncomopar\tilde{A}!`metro.$

Inciso c)

En este inciso se realiza lo mismo que en el inciso **b** pero esta vez, el valor de n es de 0 a 8.

El resultado del cÃ¡lculo de la DFT utilizando la *fft*, con n de 0 a 8, se puede visualizar en la Figura **??**.

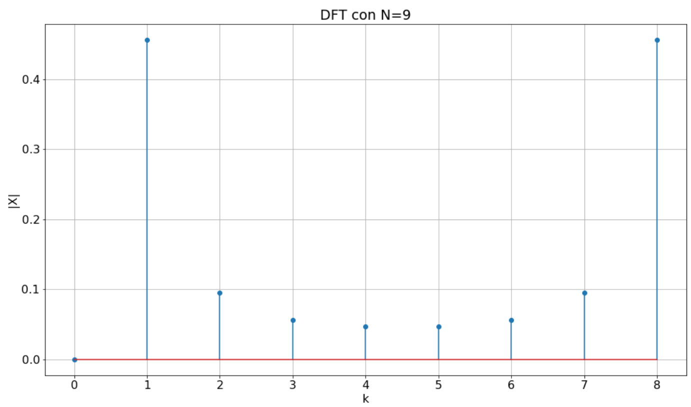


Figura 3: DFT de la seÃ$\pm al$x[n]$utilizandolafftconN = 9$

Se puede observar que el grÃ¡fico obtenido difiere con el espectro de la seÃ$\pm aloriginal$x[n]$.Estoesconsecuenciade$

Inciso d)

En esta secciÃ$^3nsegeneranuevamentelase\tilde{A}\pm al$x[n]$connde0aN, paralossiguientesvaloresdeN :$
$16, 24y160.$

En la Figura **??** se encuentran los resultados del cÃ¡lculo de la DFT utilizando la *fft* para los valores de N mencionados anteriormente.

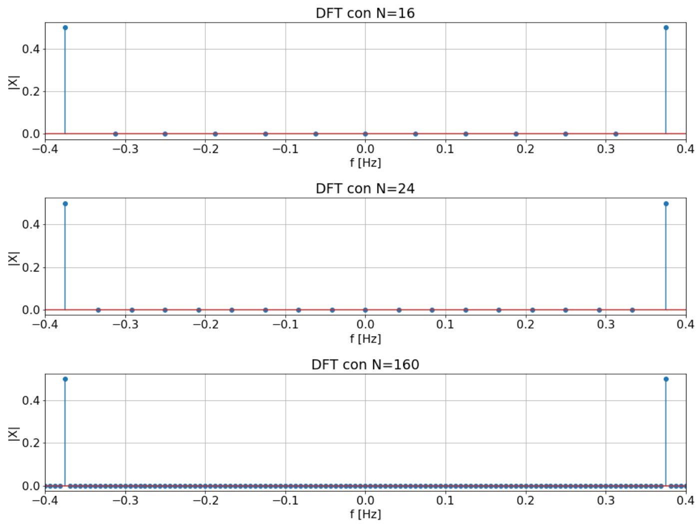


Figura 4: DFT de la seÃ±alx[n]utilizandolafftconlossiguientesvaloresdeN : 16, 24y160.

Se puede observar que los grÃ¡ficos coinciden con lo analizado de forma teÃ³rica, ylastressimulacionesrepresent
alx[n].LaseÃ±alperiÃ³dicageneradaporlafftenlostrescasoscoincideconlaseÃ±alperiÃ³dicaoriginal, yaquelacanti
odofundamentaldex[n].

Inciso e)

Cerrando con el anÃ¡lisis de la ecuaciÃ³n(**??**), enesteincisoseanalizaquÃ©sucedecuandosegeneralaseÃ±
alx[n]connde0aN, paralossiguientesvaloresdeN : 17, 25y161.

En la Figura **??** se encuentran los resultados del cÃ¡lculo de la DFT utilizando la *fft* para los valores de N mencionados anteriormente.

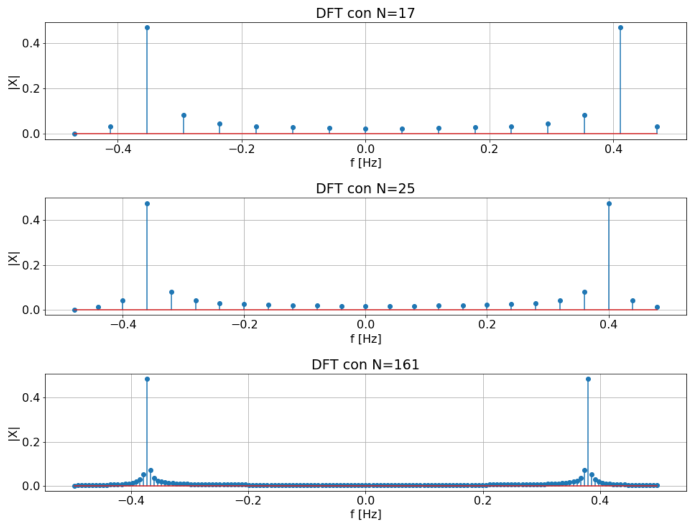


Figura 5: DFT de la seÃ±alx[n]utilizandolafftconlossiguientesvaloresdeN : 17, 25y161.

Si se comparan los grÃ¡ficos mostrados en la Figura ?? con el espectro de la seÃ±alx[n]calculadoteÃ³ricamente, s
vocaelecciÃ³ndelvalordeNutilizadoparagenerarlaseÃ±alperiÃ³dicaycÃ!‘lculodelaDFT.Lacantidaddemuestrasot
ododelaseÃ±al.Porlotanto, elalgoritmogeneraunaseÃ±alperiÃ³dicaconunperÃododistintoaloriginal, yenconsecu
aldiferente.EstefenÃ³menoseobservaenlaFigura??.

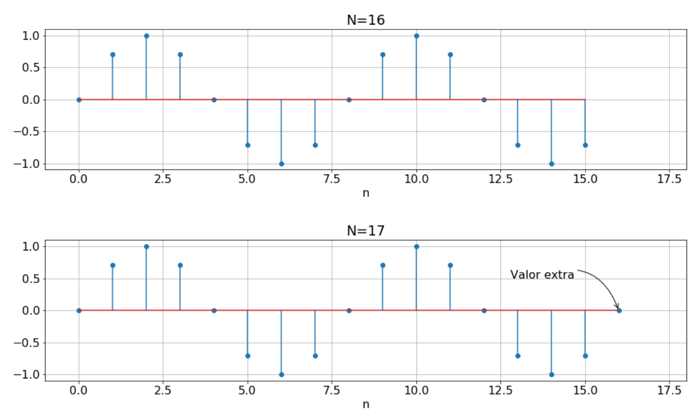


Figura 6: DFT de la seÃ±alx[n]utilizandolafftconN = 16yN = 17.

Analizando la Figura ?? es importante destacar que el espectro generado con un valor de N=161 se aproxima mejor al espectro original que el generado con un valor de N=17. Esto sucede ya que para N=161, en la seÃ±alreconstruidaporlaffthayunsolovalorerrÃ³neocada161valores, conrespectoalaseÃ±
aloriginal.Asimismo, siN = 17hayunerrorcada17muestras, yporlotanto, elerroracumuladoesmuchomayor.

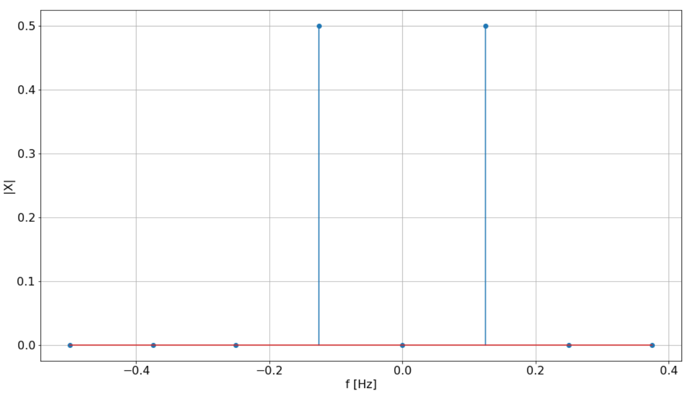
Inciso f)

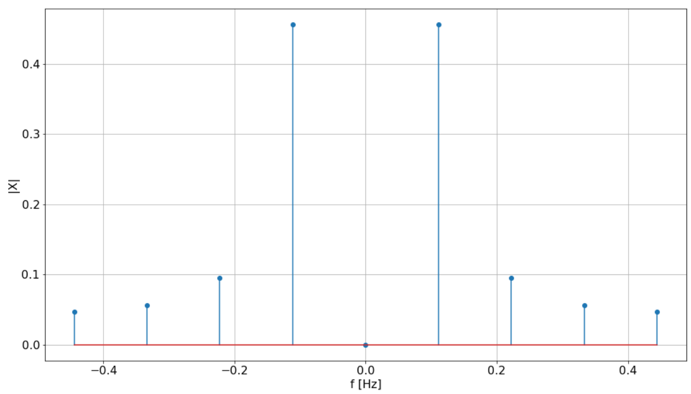
A raÃz de las conclusiones que se obtuvieron en los incisos anteriores, las condiciones para calcular la DTFS de una seÃ±*alperiÃ*^{3}*dicaydiscretausandolafftsonlassiguientes* :
El valor de N, el cual representa la cantidad de muestras consecutivas que se otorgan como información: maciÃ^3*nparaelcÃ!'lculodelaDFT, mediantefft, debeserunmÃltiplodelperiodofundamentaldelaseÃ± al.Casocontrario, elalgoritmoconstruirÃ!'unaseÃ±aldiferente, alreplicarunperÃodoerrÃ*^{3}*neo.Elresultadoqueen*
Por consiguiente, se debe tener en cuenta este escalado de amplitud al momento de querer obtener los c_k de una seÃ±*alperiÃ*^{3}*dicaydiscretaapartirdelafft.*

Inciso g)

Para el uso correcto de la funciÃ^3*nfftshiftsedebegenerarunvectorquecontengalasmuestrasdelaseÃ± alcentradasencero* :n$_{centrado}$ $= -N/2 : 1 : N/2$, donde N es la cantidad de muestras de la seÃ±*aldiscreta.Posteriormente, utilizarelvectorgeneradodeformacentradaalmomentodeimplementarelgrÃ!'fic mitesenelvector*n$_{centrado}$.

En la Figura **??** y **??** se pueden visualizar los resultados obtenidos en los incisos **b)** y **c)** respectivamente, utilizando esta vez, la funciÃ^3*nfftshift.*





Inciso h)

i)

$$x_1[n] = sin(2\pi n/7) + 2cos(4\pi n/7) + 3sin(6\pi n/7) \tag{11}$$

Utilizando la identidad de *Euler*:

$$x_1[n] = \frac{e^{j2\pi n/7} - e^{-j2\pi n/7}}{2j} + e^{j4\pi n/7} + e^{-j4\pi n/7} + \frac{3e^{j6\pi n/7} - 3e^{-j6\pi n/7}}{2j} \tag{12}$$

Por lo tanto los coeficientes son:

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
c_k	$-j3/2$	1	$-2j$	0	$2j$	1	$j3/2$

Tabla 3: Coeficientes c_k.

ii)

$$x_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 10k-2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \tag{13}$$

Del conocimiento previo de seÃ±$alesysistemassesabequeloscoeficientesdelaseriesonvaloresmuestreadosdeuns$

iii)

$$x_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta n - 3 - 20l \tag{14}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta n - 3 - 20le^{\frac{-2\pi nkj}{N}} \tag{15}$$

La segunda sumatoria desaparece ya que se analiza solo un periodo de la seÃ±$al, porconvenienciasetomak =$ 0.

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta n - 3 e^{\frac{-2\pi n k j}{N}} \tag{16}$$

$$c_k = \frac{1}{N} e^{\frac{-6\pi k j}{N}} \tag{17}$$

$$c_k = \frac{1}{20} e^{\frac{-3\pi k j}{10}} \tag{18}$$

Donde la exponencial que multiplica al tÃ©rmino $\frac{1}{20}$ implica un desplazamiento en la frecuencia de los coeficientes.

2. Ejercicio 2

En este ejercicio se analiza el caso de que una seÃ±$alesperi\tilde{A}^3dicaycontinua.PararealizarelanÃ!`lisisseutilizal$ al :

$$x_c(t) = sin(200\pi t) \tag{19}$$

Inciso a)

En este inciso se calcula la CTFS de eq.**??**. Se sabe con anterioridad que la CTFS de una seÃ±$alestadefinida$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t} \tag{20}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_0 k t} \tag{21}$$

Aplicando la fÃ$^3rmuladeEuleralaeq.$**??**$seobtiene$:

$$x_c(t) = \frac{1}{2j}(e^{j200\pi t} - e^{-j200\pi t}) \tag{22}$$

Es posible apreciar que los coeficientes de la serie son:

$$c_1 = \frac{1}{2j} \wedge c_{-1} = -\frac{1}{2j} \tag{23}$$

Inciso b)

En este inciso se muestrea la seÃ±$alaunafrecuenciaadecuada, yluegoselecalculadeDFT.$

Aplicando el teorema del muestreo, se debe elegir una frecuencia mayor a $2F_N$, siendo en este caso $F_N = 100Hz$, por ello se utilizara $F_s = 400Hz$. Con dicha frecuencia se obtiene

$$x[n] = x(n/F_s) \rightarrow x[n] = sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \tag{24}$$

Cuyo perÃodo fundamental (N_0) es 4.

Aplicando la ecuaciÃ³*n*(**??**) :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) e^{-j\frac{\pi}{2}nk} \tag{25}$$

Calculando los valores de $x[n]$ para $n \in 1, 2, 3, 4$

n	0	1	2	3
$sin(\pi n/2)$	0	1	0	-1

Tabla 4: Valores de la seÃ±*almuestreadaenunperiodo*.

Reemplazando en la ecuaciÃ³*nanterior, seobtiene* :

$$X[k] = e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{3\pi}{2}k} \tag{26}$$

Es posible expresar a $e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$ como $e^{-j\frac{\pi}{2}k}e^{-j\pi k}$, aplicando la identidad de Euler $e^{-j\pi k} = (-1)^k$.

$$X[k] = [1 + (-1)^{k+1}]e^{-j\frac{\pi}{2}k} \tag{27}$$

k	0	1	2	3
$X[k]$	0	$-2j$	0	$2j$

Tabla 5: Valores de $X[k]$.

Inciso c)

En este inciso se analiza la relaciÃ³*nentrelaCTFSyDFT, ysiesposiblecalcularlaCTFSapartirdelaCTFSsinerr*

Al dividir los coeficientes $X[k]$ (Tab.**??**) por el el nÃºmero de muestras N, el resultado son los coeficientes c_k. Luego se puede establecer a priori la relaciÃ³*n* :

$$c_k = \frac{X[k]}{N} \tag{28}$$

Para la ecuaciÃ³*nanteriorseaplicaelconocimientoque*X[k]*esperiÃ³dica, yporlotanto*X[-1]=X[3].

Cabe mencionar que si la seÃ±*alseencuentracorrectamentemuestreada(cumpleelteoremademuestreo)yenelcas*
alseadebandalimitada(tengaunnÃºmerofinitodearmÃ³nicos)comoenestecaso, sepuedeobtenerdemaneraexactalaap
alquenoseadebandalimitada(comoelcasodeuncajÃ³n)setendriaunerrordebidoaquenoesposiblecumputacionalment

Inciso d)

En este inciso se genera una cantidad entera de perÃodos de la seÃ±*almuestreada, paraluegocalcularlaDFTyve*

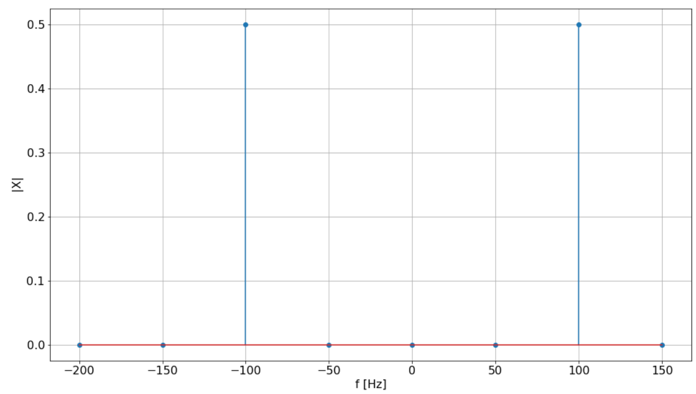


Figura 9: CTFS obtenida mediante el algoritmo de FFT para N=4.

Es posible obervar en la Fig.**??** se cumple la ide previa concebida em el inciso anterior.

Inciso e)

En este inciso se agrega una muestras mÃ¡s, y se analiza lo que sucede con la DFT.

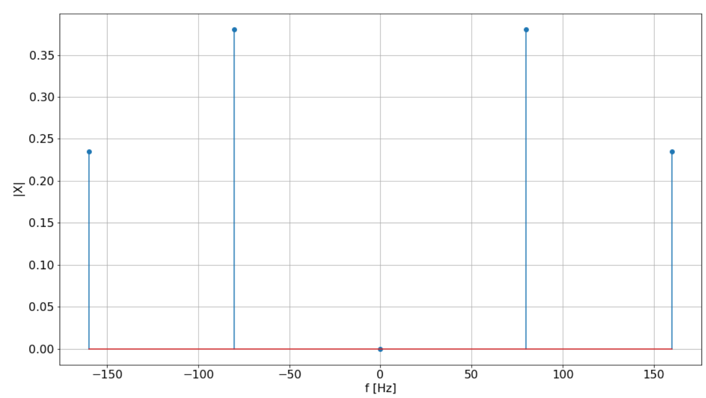


Figura 10: CTFS obtenida para N=5

Al aÃ±adirunamuestramasalaseÃ±alingresada, debidoacomoseimplementaelalgoritmo, laseÃ± alsevemodificadaysuextensiÃ³nperiÃ³dicaesdiferente, similararaloquesucediÃ³enelinciso1−e, porloqueseobserva Ã!‘ldeperiodo5, enestecaso, lacualnorepresentalaseÃ±alreal, yporlotantoelespectronocoincideconeldelaseÃ± aloriginal.

Inciso f)

En este inciso se establecen las condiciones para poder obtener de forma exacta la CTFS a partir de la DFT.

Para obtener la CTFS usando la FFT, es necesario realizar un buen muestreio de la seÃ±*al, paraobtenerlaseÃ±*
almuestrada.AdichaseÃ±alseapalicalaFFTconelnÃmerocorrespondientedepuntos(sedebecumplirqueelnÃmerod
nimodepuntosquerepresentaunperiododelaseÃ±al).Posteriormentesenormalizaconelvalordepuntosydeesamaner

Por otro lado, para que la representaciÃ³*nseaexactasedebencumplirlassiguientescondiciones* :

La seÃ±*aloriginaldebeserdebandalimitada.Sedebemuestrearrespetandoeltoremademuestreo*$F_s \geq 2F_N$

El nÃºmero de puntos que se usan en la FFT debe ser un mÃºltiplo del nÃºmero de muestras que representan un perÃodo ($N \geq L$)

Inciso g)

En este inciso se comprueba de forma prÃ¡ctica las conclusiones obtenidas en el inciso anterior, las siguientes seÃ±*ales*

1. $x_1(t) = 4sen(2\pi 1000t) + 3sen(2\pi 2000t) + 2sen(2\pi 3000t)$
2. $x_2(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mu(t - 10l - 2)\mu(2 + 10l - t)$

i)

Para poder comparar y verificar el correcto funcionamiento del algoritmo de FFT se buscara la CTFS de forma teorica, para ello se aplica la formula de Euler

$$x_1(t) = \frac{1}{2j}(4e^{j2000\pi t} - 4e^{-j2000\pi t} + 3e^{j4000\pi t} - 3e^{-j4000\pi t} + 2e^{j6000\pi t} - 2e^{-j6000\pi t}) \tag{29}$$

Por lo que se obtienen los coeficientes de la serie de forma sencilla de la Tabla (**??**).

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
c_k	j	$3j/2$	$2j$	0	$-2j$	$-3j/2$	$-j$

Tabla 6: Coeficientes c_k.

Para calcular la DFT se debe seleccionar una frecuencia de muestreo, debido a que la frecuencia mÃ¡xima de la seÃ±*alesde*3000Hz*setoma*$F_s = 9000 muestras/seg.$

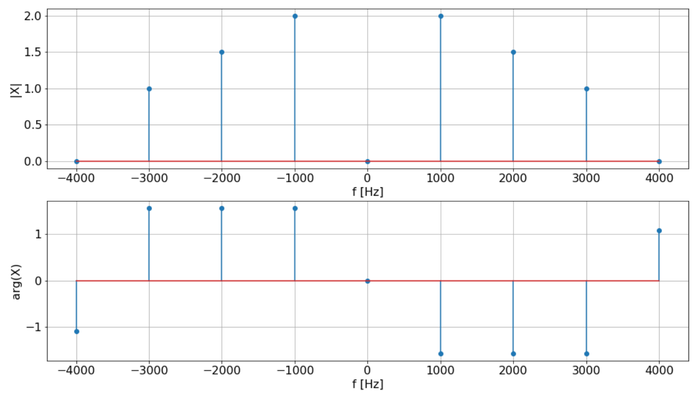


Figura 11: CTFS de $x_1(t)$ obtenida con el algoritmo de FFT.

ii)

Dicha ecuaciÃ^3$ndescribeuntrendepulsosdeancho4yperiodo10, alcalcularloscoeficientesdelaCTFSseobtieneenin$
$alnoesdebandalimitadanoseraposiblerecuperarasuespectrodeformacompleta.$

$$a_k = \frac{4}{10} sinc\left(\frac{2}{4}k\right) \tag{30}$$

Debido a que no es posible recuperar el espectro de la seÃ±$aloriginal, perosiaproximarlo, setoma$F$_s =$ $5muestras/seg$, para obtener una aproximaciÃ^3$naceptable, encasoelper$Ã$ododelase$Ã±$almuestreadaserade50$ muestras.

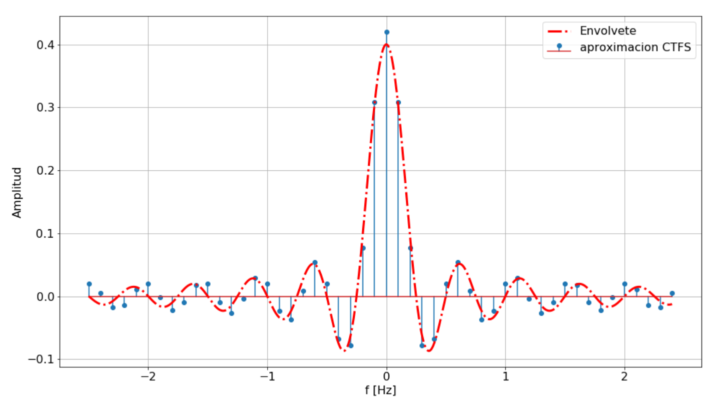


Figura 12: CTFS de $x_2(t)$ con $F_2 = 5muestras/s$ y $N = 50$ y la envolvente.

En la Figura **??** se observa como los valores de los coeficientes obtenidos difieren con los valores reales. No obstante, se puede concluir que dicha aproximaciÃ^3nesÃ$tilparaestimarelespectro.Deformaadicionals$

los coeficientes de la CTFS se ajustan cada vez mejor a los valores de la envolvente. Cabe destacar que nunca se podrÃ¡ obtener de forma exacta la CTFS, pero si es posible lograr una muy buena aproximaciÃ^3n.