

Procesamiento digital de señales : estimación del espectro de una señal

Gatica, Isaias
Martin, Santiago
Saez, Lautaro Andrés
Vidman, Xavier Harry

El objetivo de este informe es analizar el uso de la DFT para estimar el espectro de una señal. Para ello se verán los cuatro casos posibles, según la señal sea continua o discreta, y si la señal es periódica o aperiódica. Se analizará en los distintos casos si es posible obtener una estimación sin error y bajo qué condiciones; qué padding; y cómo utilizar correctamente la función `fftshift`. Además, en cada ejercicio concluirá con el armado de una rutina que implemente la estimación del espectro usando la DFT.

1. Ejercicio 1

En este ejercicio se analiza el caso en que una señal es periódica y discreta. Se considera en primer instancia la señal:

$$x[n] = \sin(2\pi n/8) \quad (1)$$

Inciso a)

En este inciso se calcula la DTFS y la DFT de la ecuación (1). Se sabe con anterioridad que la DTFS de una señal es la serie de Fourier de su período de finidad por lo que las siguientes son las ecuaciones:

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} c_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (2)$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (3)$$

Por lo tanto, para calcular la DTFS se deben calcular los coeficientes c_k . Como la señal es la ecuación (1) es una senooidal, se puede expresar de la siguiente manera:

$$x[n] = \frac{1}{2j} \left(e^{(j\pi n)/4} - e^{-(j\pi n)/4} \right) \quad (4)$$

Por lo tanto, la DTFS de la señal es la ecuación (4); donde sus coeficientes c_k son:

$$C_1 = \frac{1}{2j} \quad C_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$X[k]$	0	$-4j$	1	0	0	0	0	$4j$

Tabla 2: $X[k]$ obtenidos para un periodo.

La definici3n de la DFT que se utiliza es la siguiente :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (5)$$

donde N no representa necesariamente el periodo de la se3al, sino que representa la cantidad de muestras consecutivas $x[n]$.

Para calcular la DFT, en primera instancia se aplica la ecuaci3n (??), donde se obtiene :

$$x[k] = \sum_{n=0}^7 \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) e^{-j \frac{\pi}{4} nk} \quad (6)$$

Para desarrollar la sumatoria de forma m3s sencilla la sumatoria presentan los valores de $x[n]$ para $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en la Tabla (??).

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$

Tabla 1: Valores de $x[n]$ para un periodo.

Con lo que se obtiene

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4} k} + e^{-j \frac{\pi}{2} k} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{3\pi}{4} k} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{5\pi}{4} k} - e^{-j \frac{3\pi}{2} k} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{7\pi}{4} k} \quad (7)$$

Si expresamos las exponenciales correspondientes para $n \in \{5, 6, 7\}$ como $m\pi/4 + \pi$ donde m es un entero entre 0 y 4, es posible expresar

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4} k} + e^{-j \frac{\pi}{2} k} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{3\pi}{4} k} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4} k} e^{-j\pi k} - e^{-j \frac{\pi}{2} k} e^{-j\pi k} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{3\pi}{4} k} e^{-j\pi k} \quad (8)$$

Como k es entero y $e^{-j\pi k}$ es siempre m3ltiplo de π entonces $e^{-j\pi k} = (-1)^k$.

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4} k} + e^{-j \frac{\pi}{2} k} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{3\pi}{4} k} (-1)^{1+k} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4} k} + (-1)^{1+k} e^{-j \frac{\pi}{2} k} + (-1)^{1+k} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{3\pi}{4} k} \quad (9)$$

Agrupando los valores se obtiene:

$$X[k] = [1 + (-1)^{1+k}] \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4} k} + e^{-j \frac{\pi}{2} k} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{3\pi}{4} k} \right) \quad (10)$$

Sabiendo que $X[k]$ es peri3dica con periodo N, en este caso 8, se muestran en la Tabla (??) los valores obtenidos para k .

Al finalizar con el c3lculo de la DFT, se pueden sustraer varias conclusiones entre la DFT y la DTFS. En primera instancia, al comparar la expresi3n de la DTFS con la expresi3n de la DFT, se puede ver una gran semejanza por el parecido entre las sumatorias de ambas. Pero hay dos grandes diferencias:

est \tilde{A} n multiplicados por el factor $\frac{1}{N}$, por lo que las amplitudes no ser \tilde{A} n coincidentes. En segundo lugar, para calcular los c_k se debe usar obligatoriamente a N como el valor del periodo de la se \tilde{A} $\pm al$, y en la DFT no necesariamente; ya que el valor de N en la expresi \tilde{A}^3 de la DFT representa la cantidad de muestras $alx[n]$.

Al realizar los cálculos y comparar, se puede observar que si en la expresi \tilde{A}^3 de la DFT se utiliza el valor del periodo en N, los valores c_k y los valores de $X(k)$ coinciden en el eje k, pero difieren en el valor de amplitud por el factor $\frac{1}{N}$ de la expresi \tilde{A}^3 n(3).

Inciso b)

En este inciso se genera la se \tilde{A} $\pm alx[n] = \sin(2\pi n/8)$ para n de 0 a 7, y se calcula la DFT usando la funci \tilde{A}^3 nfft. En la Figura ?? se visualiza la se \tilde{A} $\pm alx[n]$ para n de 0 a 7.

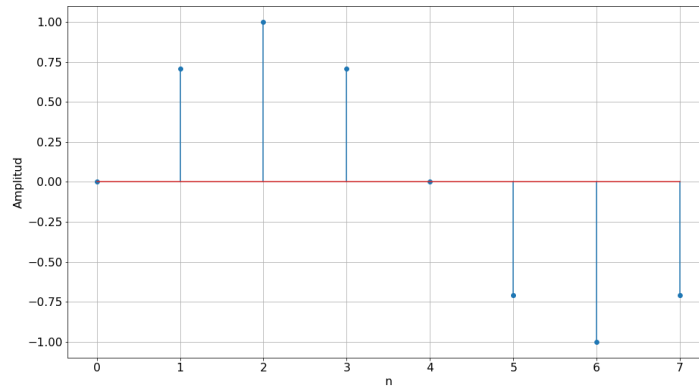


Figura 1: Se \tilde{A} $\pm alx[n]$ generada para n de 0 a 7

El resultado del cálculo de la DFT utilizando la fft, se puede observar en la Figura ??.

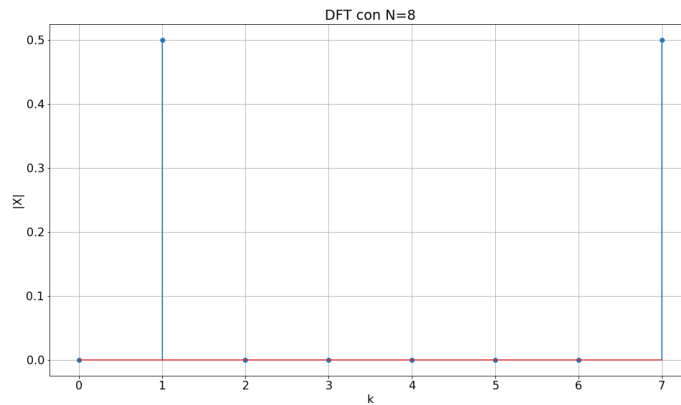


Figura 2: DFT de la se \tilde{A} $\pm alx[n]$ utilizando la fft con $N = 8$

Comparando la Figura ?? con los resultados teóricos obtenidos en el inciso a, se puede afirmar que efectivamente $\tilde{A}^3 n$ al usar la fft con $N = 8$. Esto se debe a que la función $\tilde{A}^3 n$ genera una señal periódica al utilizar las muestras de \tilde{A}^3 que se le dieron como parámetro.

Inciso c)

En este inciso se realiza lo mismo que en el inciso b pero esta vez, el valor de n es de 0 a 8.

El resultado del cálculo de la DFT utilizando la fft , con n de 0 a 8, se puede visualizar en la Figura ??.

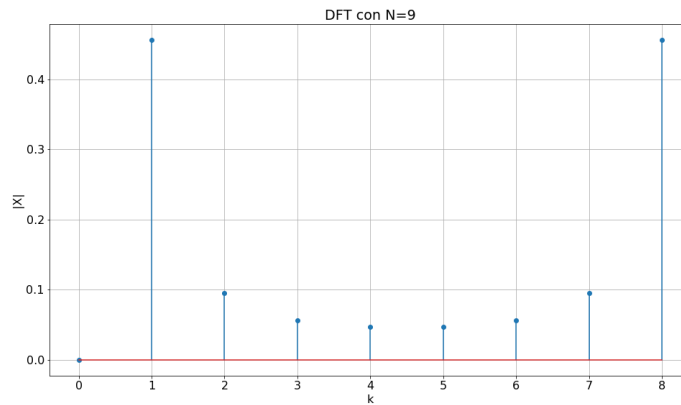


Figura 3: DFT de la señal $\tilde{A}^3 al_x[n]$ utilizando la fft con $N = 9$

Se puede observar que el gráfico obtenido difiere con el espectro de la señal original $\tilde{A}^3 al_x[n]$. Esto es consecuencia de la

Inciso d)

En esta sección se generan nuevamente las señales $\tilde{A}^3 al_x[n]$ con n de 0 a N , para los siguientes valores de N : 16, 24 y 160.

En la Figura ?? se encuentran los resultados del cálculo de la DFT utilizando la fft para los valores de N mencionados anteriormente.

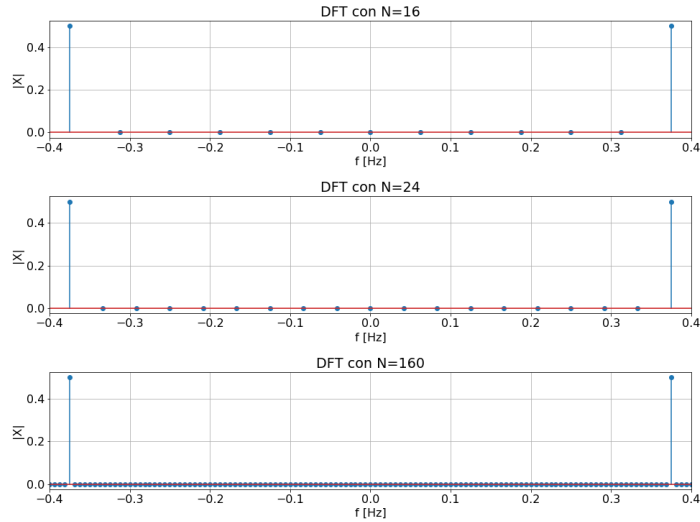


Figura 4: DFT de la se $\tilde{a}l x[n]$ utilizandola fft con los siguientes valores de N : 16, 24 y 160.

Se puede observar que los gr \tilde{a} ficos coinciden con lo analizado de forma te \tilde{a} rica, y la fft con las simulaciones representadas en la figura 3. La se \tilde{a} l $\tilde{a}l x[n]$ generada por la fft con los tres casos coincide con la se \tilde{a} l $\tilde{a}l x[n]$ original, ya que la cantidad de \tilde{a} l $\tilde{a}l x[n]$ es la misma.

Inciso e)

Cerrando con el an \tilde{a} lisis de la ecuaci \tilde{a} $\tilde{a}l x[n]$ (??), en este inciso se analiza qu \tilde{a} \tilde{a} l $\tilde{a}l x[n]$ sucede cuando se genera la se \tilde{a} l $\tilde{a}l x[n]$ con $N=0$ a $N=160$, para los siguientes valores de N : 17, 25 y 161.

En la Figura ?? se encuentran los resultados del c \tilde{a} lculo de la DFT utilizando la fft para los valores de N mencionados anteriormente.

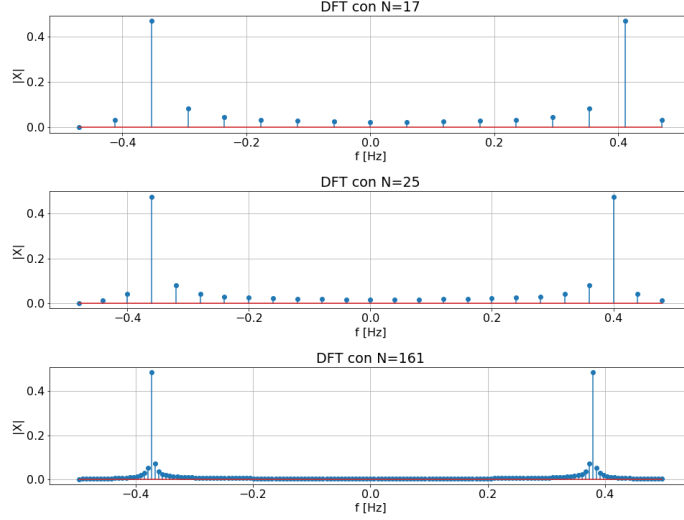


Figura 5: DFT de la se $\tilde{a}l x[n]$ utilizandola fft con los siguientes valores de N : 17, 25 y 161.

Si se comparan los grÁficos mostrados en la Figura ?? con el espectro de la se $\tilde{a}l x[n]$ calculadote \tilde{a}^3 ricamente, s
voca elecci \tilde{a}^3 ndel valor de N utilizadoparagenerarlase $\tilde{a}l$ peri \tilde{a}^3 dica y $\tilde{a}!$ culodela DFT. Lacantidad demuestrasot
ododelase $\tilde{a}l$. Porlotanto, el algoritmogenera unase $\tilde{a}l$ peri \tilde{a}^3 dica con unper $\tilde{a}o$ distintoal original, yen consecu
aldiferente. Este fen \tilde{a}^3 meno se observa en la Figura ??.

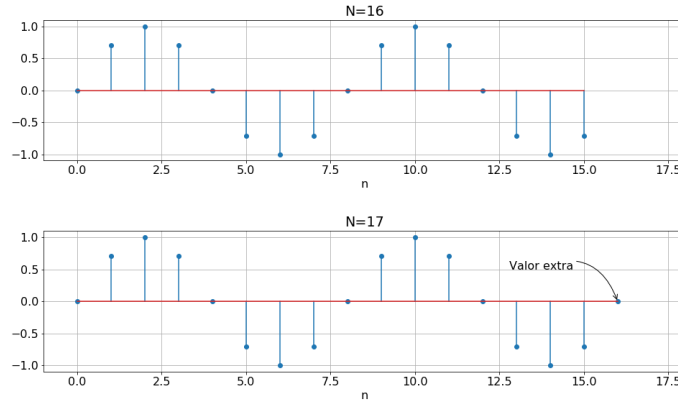


Figura 6: DFT de la se $\tilde{a}l x[n]$ utilizandola fft con $N = 16$ y $N = 17$.

Analizando la Figura ?? es importante destacar que el espectro generado con un valor de $N=161$ se aproxima mejor al espectro original que el generado con un valor de $N=17$. Esto sucede
ya que para $N=161$, en la se $\tilde{a}l$ reconstruidaporla fft hay un solo valorerr \tilde{a}^3 neocada 161 valores, con respecto alase $\tilde{a}l$
al original. Asimismo, si $N = 17$ hay un error cada 17 muestras, y porlotanto, el error acumulado es mucho mayor.

Inciso f)

A raíz de las conclusiones que se obtuvieron en los incisos anteriores, las condiciones para calcular la DTFS de una señal discreta usando la FFT son las siguientes :

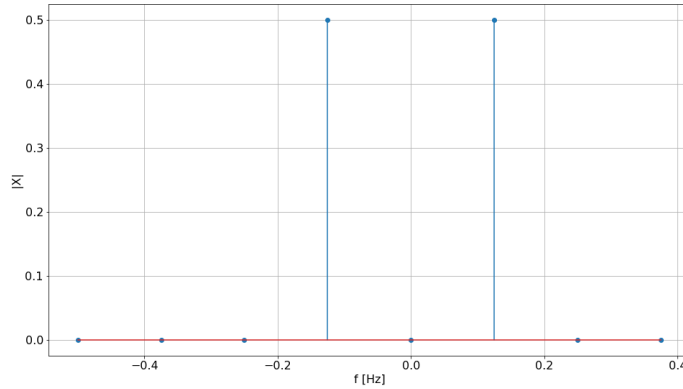
El valor de N , el cual representa la cantidad de muestras consecutivas que se otorgan como información para el cálculo de la DFT, mediante FFT, debe ser un múltiplo del periodo fundamental de la señal.

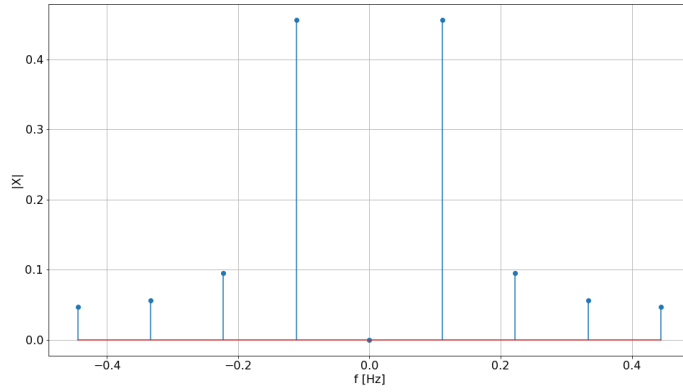
Caso contrario, el algoritmo construirá una señal diferente, al replicar un periodo erróneo. El resultado que en consecuencia se obtiene es un escalado de amplitud al momento de querer obtener los c_k de una señal discreta a partir de la FFT.

Inciso g)

Para el uso correcto de la función `fftshift` se debe generar un vector que contenga las muestras de la señal centradas en cero : $n_{centrado} = -N/2 : 1 : N/2$, donde N es la cantidad de muestras de la señal discreta. Posteriormente, utilizar el vector generado de forma centrada al momento de implementar el gráfico de la función `fftshift`.

En la Figura ?? y ?? se pueden visualizar los resultados obtenidos en los incisos b) y c) respectivamente, utilizando esta vez, la función `fftshift`.





Inciso h)

i)

$$x_1[n] = \sin(2\pi n/7) + 2\cos(4\pi n/7) + 3\sin(6\pi n/7) \quad (11)$$

Utilizando la identidad de *Euler*:

$$x_1[n] = \frac{e^{j2\pi n/7} - e^{-j2\pi n/7}}{2j} + e^{j4\pi n/7} + e^{-j4\pi n/7} + \frac{3e^{j6\pi n/7} - 3e^{-j6\pi n/7}}{2j} \quad (12)$$

Por lo tanto los coeficientes son:

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
c_k	$-j3/2$	1	$-2j$	0	$2j$	1	$j3/2$

Tabla 3: Coeficientes c_k .

ii)

$$x_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 10k - 2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad (13)$$

Del conocimiento previo de seÑales sistemas se sabe que los coeficientes de la serie son valores muestreados de una

iii)

$$x_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{n-3-20l} \quad (14)$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{n-3-20l} e^{-\frac{2\pi n k j}{N}} \quad (15)$$

La segunda sumatoria desaparece ya que se analiza solo un periodo de la $\tilde{x} \pm al$, por conveniencia se toma $k = 0$.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta n - 3e^{\frac{-2\pi n k j}{N}} \quad (16)$$

$$c_k = \frac{1}{N} e^{\frac{-6\pi k j}{N}} \quad (17)$$

$$c_k = \frac{1}{20} e^{\frac{-3\pi k j}{10}} \quad (18)$$

Donde la exponencial que multiplica al término implica un desplazamiento en la frecuencia de los coeficientes.

2. Ejercicio 2

En este ejercicio se analiza el caso de que una $\tilde{x} \pm ale$ sea \tilde{x}^3 de \tilde{x} continua. Para realizar el análisis se utiliza $\tilde{x} \pm al$:

$$x_c(t) = \sin(200\pi t) \quad (19)$$

Inciso a)

En este inciso se calcula la CTFS de eq. ???. Se sabe con anterioridad que la CTFS de una $\tilde{x} \pm ale$ está definida:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t} \quad (20)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_0 k t} \quad (21)$$

Aplicando la fórmula de Euler a la eq. ?? se obtiene:

$$x_c(t) = \frac{1}{2j} (e^{j200\pi t} - e^{-j200\pi t}) \quad (22)$$

Es posible apreciar que los coeficientes de la serie son:

$$c_1 = \frac{1}{2j} \wedge c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad (23)$$

Inciso b)

En este inciso se muestrea la $\tilde{x} \pm ale$ a una frecuencia adecuada, y luego se calcula la DFT.

Aplicando el teorema del muestreo, se debe elegir una frecuencia mayor a $2F_N$, siendo en este caso $F_N = 100Hz$, por ello se utilizará $F_s = 400Hz$. Con dicha frecuencia se obtiene

$$x[n] = x(n/F_s) \rightarrow x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (24)$$

Cuyo período fundamental (N_0) es 4.

Aplicando la ecuaci3n(??) :

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) e^{-j\frac{\pi}{2}nk} \quad (25)$$

Calculando los valores de $x[n]$ para $n \in 1, 2, 3, 4$

n	0	1	2	3
$\sin(\pi n/2)$	0	1	0	-1

Tabla 4: Valores de la se3nalmuestreadaenunperiodo.

Reemplazando en la ecuaci3nanterior, seobtiene :

$$X[k] = e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{3\pi}{2}k} \quad (26)$$

Es posible expresar a $e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$ como $e^{-j\frac{\pi}{2}k}e^{-j\pi k}$, aplicando la identidad de Euler $e^{-j\pi k} = (-1)^k$.

$$X[k] = [1 + (-1)^{k+1}]e^{-j\frac{\pi}{2}k} \quad (27)$$

k	0	1	2	3
$X[k]$	0	-2j	0	2j

Tabla 5: Valores de $X[k]$.

Inciso c)

En este inciso se analiza la relaci3nentre laCTFSyDFT, y si es posible calcular laCTFSa partir de laCTFSsin error.

Al dividir los coeficientes $X[k]$ (Tab.??) por el n3mero de muestras N , el resultado son los coeficientes c_k . Luego se puede establecer a priori la relaci3n :

$$c_k = \frac{X[k]}{N} \quad (28)$$

Para la ecuaci3nanterior se aplica el conocimiento que $X[k]$ es peri3dica, y por lo tanto $X[-1]=X[3]$.

Cabe mencionar que si la se3nalmuestreada cumple el teorema de muestreo y en el caso de banda limitada (tenga un n3mero finito de arm3nicos) como en este caso, se puede obtener de manera exacta la se3n original (como en el caso de un caj3n) se tendr3a un error debido a que no es posible computacionalmente.

Inciso d)

En este inciso se genera una cantidad entera de per3odos de la se3nalmuestreada, para luego calcular la DFT y ver

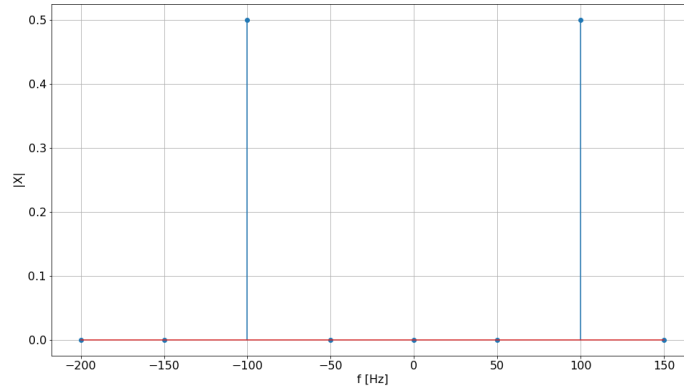


Figura 9: CTFS obtenida mediante el algoritmo de FFT para $N=4$.

Es posible observar en la Fig.?? se cumple la idea previa concebida en el inciso anterior.

Inciso e)

En este inciso se agrega una muestra más, y se analiza lo que sucede con la DFT.

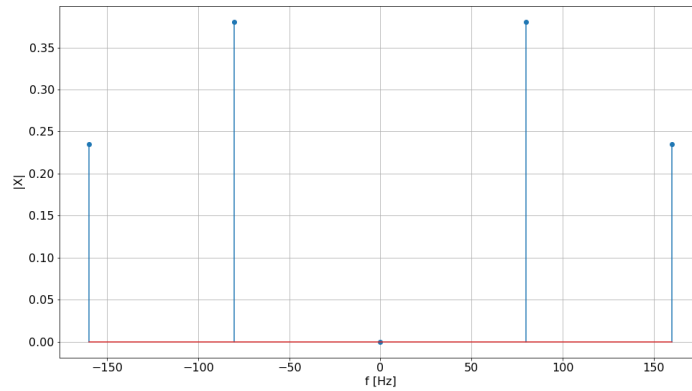


Figura 10: CTFS obtenida para $N=5$

Al añadir una muestra más a la señal ingresada, debido a como se implementa el algoritmo, la señal se modifica y su extensión periódica es diferente, similar a lo que sucede en el inciso 1-e, por lo que se observa el período 5, en este caso, la cual no se representa al real, y por lo tanto el espectro no coincide con el de la señal original.

Inciso f)

En este inciso se establecen las condiciones para poder obtener de forma exacta la CTFS a partir de la DFT.

Para obtener la CTFS usando la FFT, es necesario realizar un buen muestreo de la seÃ±al, para obtener la seÃ±al muestreada. Adichase se aplica la FFT con el nÃºmero correspondiente de puntos (se debe cumplir que el nÃºmero de puntos que representa un periodo de la seÃ±al). Posteriormente se normaliza con el valor de puntos y de esa manera

Por otro lado, para que la representaciÃ³n sea exacta se deben cumplir las siguientes condiciones :

La seÃ±al original debe ser de banda limitada. Se debe muestrear respetando el teorema de muestreo $F_s \geq 2F_N$

El nÃºmero de puntos que se usan en la FFT debe ser un mÃºltiplo del nÃºmero de muestras que representan un periodo ($N \geq L$)

Inciso g)

En este inciso se comprueba de forma prÃ¡ctica las conclusiones obtenidas en el inciso anterior, las siguientes seÃ±ales

1. $x_1(t) = 4\text{sen}(2\pi 1000t) + 3\text{sen}(2\pi 2000t) + 2\text{sen}(2\pi 3000t)$
2. $x_2(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mu(t - 10l - 2)\mu(2 + 10l - t)$

i)

Para poder comparar y verificar el correcto funcionamiento del algoritmo de FFT se buscara la CTFS de forma teorica, para ello se aplica la formula de Euler

$$x_1(t) = \frac{1}{2j} (4e^{j2000\pi t} - 4e^{-j2000\pi t} + 3e^{j4000\pi t} - 3e^{-j4000\pi t} + 2e^{j6000\pi t} - 2e^{-j6000\pi t}) \quad (29)$$

Por lo que se obtienen los coeficientes de la serie de forma sencilla de la Tabla (??).

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
c_k	j	$3j/2$	$2j$	0	$-2j$	$-3j/2$	$-j$

Tabla 6: Coeficientes c_k .

Para calcular la DFT se debe seleccionar una frecuencia de muestreo, debido a que la frecuencia mÃ¡xima de la seÃ±al es de 3000 Hz se toma $F_s = 9000 \text{ muestras/seg}$.

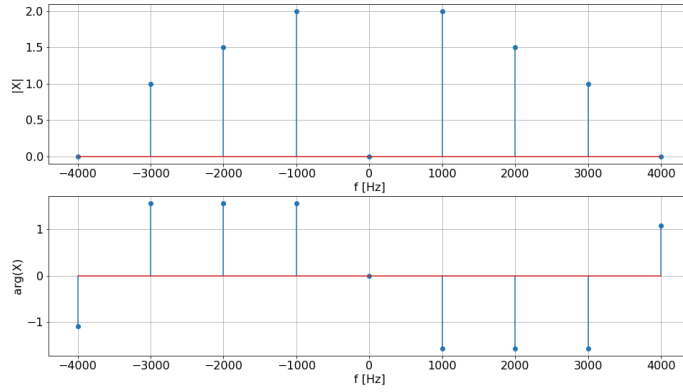


Figura 11: CTFS de $x_1(t)$ obtenida con el algoritmo de FFT.

ii)

Dicha ecuaci3 describe un trend de pulsos de ancho 4 y periodo 10, al calcular los coeficientes de la CTFS se obtienen in al no es de banda limitada no se puede recuperar su espectro de forma completa.

$$a_k = \frac{4}{10} \text{sinc} \left(\frac{2}{4} k \right) \quad (30)$$

Debido a que no es posible recuperar el espectro de la se3 al original, pero si aproximarla, se toma $F_s = 5 \text{ muestras/seg}$, para obtener una aproximaci3 naceptable, en caso el per3 o de la se3 al muestreada se de 50 muestras.

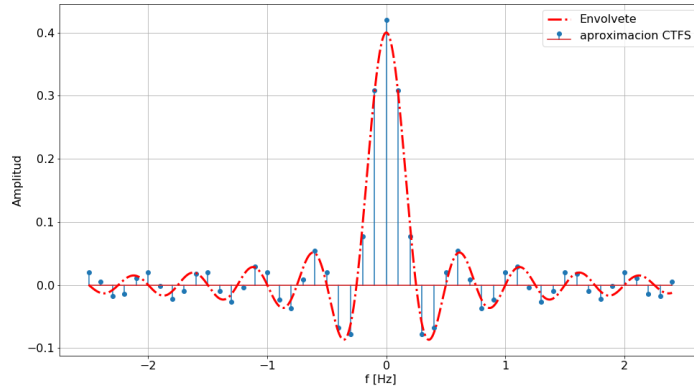


Figura 12: CTFS de $x_2(t)$ con $F_2 = 5 \text{ muestras/s}$ y $N = 50$ y la envolvente.

En la Figura ?? se observa como los valores de los coeficientes obtenidos difieren con los valores reales. No obstante, se puede concluir que dicha aproximaci3 nes3 til para estimar el espectro. De forma adicional.

los coeficientes de la CTFS se ajustan cada vez mejor a los valores de la envolvente. Cabe destacar que nunca se podrá obtener de forma exacta la CTFS, pero si es posible lograr una muy buena aproximación.