# TP N°2
# Sistemas controlados por computadora

Saez, Lautaro Andres

## 1 Ejercicio 1

### 1.1 a)

El sistema para discretizar en este caso es

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} x \end{cases} \tag{1}$$

Para discretizar el sistema primero debemos calcular $e^{At}$, en general utilizaremos la transforma inversa de Laplace salvo que la matriz $A$ sea diagonalizable, para ello calculo los autovalores de $A$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 + 1 \tag{2}$$

Cuyas raices son $\lambda \in \{\pm j\}$. Luego calcularemos los espacios asociados a cada autovalor utilizando la siguiente relación

$$(A - \lambda_i I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Remplazando

$$x = \mp jy \tag{4}$$

Para armar la matriz de transformación que diagonalice a $A$ elijo 1 autovector de cada espacio. Por lo tanto

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahora es posible calcular $e^{At}$ como

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} \tag{6}$$

Donde $\Lambda$ es una matriz diagonal compuesta por lo autovalores de $A$. Realizando las cuentas se obtiene

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \tag{7}$$

Finalmente las matrices discretizadas son

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{Ah} \\ \Gamma &= \int_0^h e^{Al} dl B \end{aligned} \tag{8}$$

Donde $\Phi$ es la versión discretizada de $A$, y $\Gamma$ la versión discretizada $B$, las matrices $C$ y $D$ no se ven modificadas.

Por lo que el sistema discretizado es

$$x[k+1] = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos h & \sin h \\ -\sin h & \cos h \end{bmatrix}}_{\Phi} x[k] + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\cos h \\ \sin h \end{bmatrix}}_{\Gamma} u[k] \tag{9}$$

## 1.2 b)

El sistema a tratar es

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 3u \tag{10}$$

Aplicando la transformada de Laplace obtenemos

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s+3)U(s) \tag{11}$$

Por lo tanto la transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \tag{12}$$

Si descrizamos con un mantenedor de orden cero la transferencia discreta se puede escribir como

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}\left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}\Bigg|_{t=hk} \right\} \tag{13}$$

Como primer paso calcularemos $G(s)/s$ por lo que tenemos

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1} \tag{14}$$

De la ecuación anterior surgue el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} A + B + C = 0 \\ 3A + B + 2C = 1 \\ 2A = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = \frac{3}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -2 \end{array} \right. \tag{15}$$

Antitransformando la respuesta al escalon obtenemos

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(3 + e^{-2t} - 4e^{-t}\right)\mu(t) \tag{16}$$

La versión discretizada que se obtiene es

$$q[k] = \frac{1}{2}\left(3 + \alpha_0^k - 4\alpha_1^k\right)\mu[k], \alpha_i = e^{-(2-i)h} \tag{17}$$

Finalmente si transformamos la expresión anterior

$$G(z) = \frac{(1-z^{-1})}{2}\left(\frac{3}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha_0 z^{-1}} - \frac{4}{1-\alpha_1 z^{-1}}\right) \tag{18}$$

Al trabajar la expresión anterior obtenemos

$$\begin{cases} G(z) = \frac{1}{2}\frac{az+b}{z^2-(\alpha_0+\alpha_1)z+\alpha_0\alpha_1} \\ a = \alpha_0 - 4\alpha_1 + 3 \\ b = 3\alpha_{-1} - 4\alpha_0 + \alpha_1 \end{cases} \tag{19}$$

### 1.3 c)

En este inciso el sistema esta descripto por

$$\dddot{y} = u \tag{20}$$

Realizando el mismo procedimiento que en el inciso anterior se obtiene

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \tag{21}$$

Por simple inspección visual se puede determinar que 0 es polo triple, al calcular el espacio asoaciado a dicho autovalor se obtiene que es de dimensión 1, por lo tanto no es posible diagonalizar a $A$, por ello en este caso utilizaremos la transferencia de Laplace para calular $e^{At}$

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} \tag{22}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \tag{23}$$

Una forma posible de calular la inversa es utilizando la adjunta, donde se obtiene

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} & s^{-3} \\ 0 & s^{-1} & s^{-2} \\ 0 & 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Antitransofrando

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Para la matriz $\Gamma$ realizaremos el mismo producto que en el inciso $b$) con la finalidad de simplificar cuentas

$$e^{At}B = \begin{bmatrix} h^2 \\ h \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Por lo tanto

$$\begin{gathered} \Phi = \begin{bmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h^2 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{27}$$

# 2 Ejercicio 2

Un integrador doble puede ser escrito como

$$\ddot{y} = u \tag{28}$$

Al pasarlo a variables de estado se obtiene

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \tag{29}$$

Para expresar al sistema en su forma canonica controlable primero debemos discretizar el mismo. Pero al igual que el inciso 1-c, el cual es un integrador triple, no es posible diagonalizar la matriz $A$, por lo tanto recuriremos al calculo mediante la transfromada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{e^{At}\right\} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h^2 \\ h \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

Por lo tnto

$$W_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h^2 & 3h^2 \\ 2h & 2h \end{bmatrix} \tag{33}$$

El determinante de la matriz $W_c$ que se obtiene es

$$|W_c| = -h^3 \tag{34}$$

El cual es simpre distinto de 0 salvo que $h = 0$, pero si intrepretamos $h$ como el periodo de muestro del sistema este siempre debe ser mayor a 0. Por lo tanto siempre es posible escribir al sistema en su forma canonica controlable.

Ahora sabemos que las matrices $\Gamma$ y $\Phi$ en forma canocia deberían ser de la forma

$$\begin{aligned} \Phi' &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma' &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

Si planteamos la transformacion $z[k] = Tx[k]$, es posible encontrar las siguientes relaciones

$$\begin{cases} z[k+1] = T^{-1}\Phi T z[k] + T^{-1}\Gamma u[k] \\ y[k] = CTz[k] \end{cases} \tag{36}$$

Luego

$$\begin{cases} T^{-1}\Phi T = \Phi' \\ T^{-1}\Gamma = \Gamma' \end{cases} \tag{37}$$

Con la finalidad de no expresar la matriz $T^{-1}$ ya que puede ser un poco engorroso y sabiendo que existe $T$, es decir, la inversa de $T^{-1}$, podemos expresar el sistema anterios como

$$\begin{cases} \Phi T = T\Phi' \\ \Gamma = T\Gamma' \end{cases} \tag{38}$$

Luego proponemos

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{39}$$

Y realizando los productos matriciales obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a+hc & b+hd \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b & -a \\ 2c+d & -c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{40}$$

Por lo que se tienen las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} a = h^2/2 \\ b = h \\ a + hc = 2a + b \\ b + hd = -a \\ c = 2c + d \\ d = -c \end{array} \right. \tag{41}$$

Al resolver el sistema de ecuacionesanterior se obtiene

$$a = \frac{h^2}{2}, b = \frac{h^2}{2}, c = h, d = -h \tag{42}$$

Por lo tanto

$$T = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} h & h \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

# 3 Ejercicio 3

El sistema esta descripto por

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = -ax + bu \\ y = cx \end{array} \right. \tag{44}$$

El polo del sistema es claramente $-a$, si calculamos la transferencia del sistema obtenemos

$$G(s) = \frac{cb}{s+a} \tag{45}$$

## 3.1 a)

En este caso el calculo de $\Phi$ y $\Gamma$ no tiene mayor complejidad debido a que son escalares, por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{c} \Phi = e^{-ah} \\ \Gamma = -\frac{b}{a}(e^{-ah} - 1) \end{array} \right. \tag{46}$$

Por lo tanto la transferencia del sistema discretizada es

$$H(z) = \frac{c\Gamma}{z - \Phi} = -\frac{cb}{a}\frac{e^{-ah} - 1}{z - e^{-ah}} \tag{47}$$

Donde el polo del sistema discretizado queda ubicado en $e^{-ah}$.

## 3.2 b)

Como se observo en el inciso anterior la ubicación del polo en función de $h$ queda definido como $e^{-ah}$, por lo tanto si el sistema continuo es estable podemos observar que el sistema discreto es inestable y viceversa.

## 3.3 c)

De la función $G(s)$ podemos calcular la respuesta al escalon

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{cb}{(s+a)s} \tag{48}$$

Planteando fracciones simples

$$\frac{cb}{(s+a)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} \tag{49}$$

Por lo que podemos plantear

$$\left\{ \begin{array}{c} A + B = 0 \\ Ba = cb \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = -\frac{cb}{a} \\ B = \frac{cb}{a} \end{array} \right. \tag{50}$$

Por lo tanto la respuesta es

$$y(t) = -\frac{cb}{a}(e^{-at} - 1)\mu(t) \tag{51}$$

Por otro lado la respuesta en tiempo discreto es

$$Y(z) = -\frac{cb}{a}\frac{(e^{-ah} - 1)z}{(z - e^{-ah})(z-1)} \tag{52}$$

Al plantear fracciones simples

$$\frac{(e^{-ah} - 1)z}{(z - e^{-ah})(z-1)} = \frac{A}{z - e^{-ah}} + \frac{B}{z-1} \tag{53}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} A + B = e^{-ah} - 1 \\ -A - Be^{-ah} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = e^{-ah} \\ B = -1 \end{array} \right. \tag{54}$$

Por lo tanto

$$y[k] = -\frac{cb}{a}(e^{-ahk} - 1)\mu[k-1] \tag{55}$$

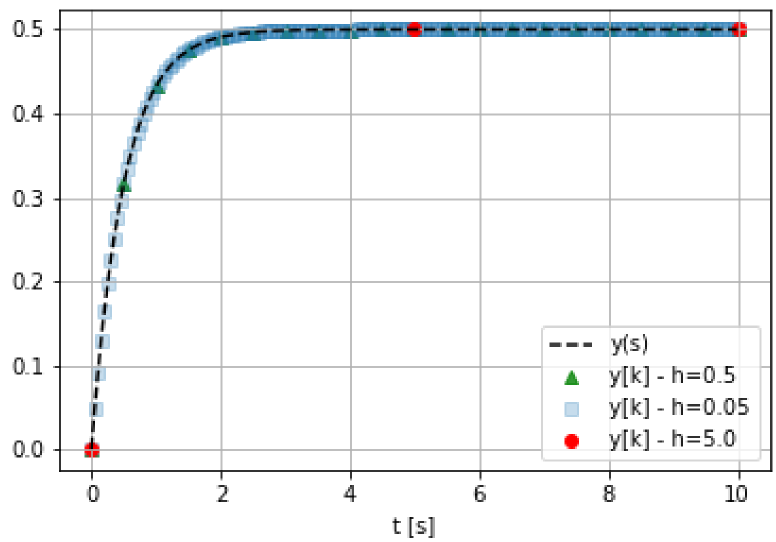


Figure 1: Grafico de la respuesta al escalon del sistema discretizado para diferentes valores de $h$ junto con la respuesta del sistema continuo.

# 4 Ejercicio 4

Para un filtro FIR de la siguiente forma

$$H(z) = \sum_{i}^{n} b_{n-i} z^{-i} \tag{56}$$

## 4.1 a)

El orden del sistema es $n$.

## 4.2 b)

La forma observable esta definida como

$$\begin{cases} x[k+1] = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{57}$$

En este caso como no tenemos polos no nulos o no infinitos los coefientes $a_i$ son nulos mientras que los $b_i$ estan dados por la ecuacion 56.

$$\begin{cases} x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{58}$$

# 5 Ejercicio 5

En este ejercicio se trabajara con la transferencia

$$H(z) = \frac{K}{z(z-0.2)(z-0.4)} \tag{59}$$

Si retroalimentamos negativamente el sistema se obtiene la siguiente transferencia

$$G(z) = \frac{K}{z(z-0.2)(z-0.4)+K} \tag{60}$$

Por lo tanto el polinomio caracteristo es

$$z^3 - \frac{3}{5}z^2 + \frac{2}{25}z + K \tag{61}$$

Aplicando el criterio de Jury

## 5.1 Calculo de $a_i^2$

$$a^3 = a_3^3/a_0^3 = K \tag{62}$$

Luego obtenemos que

$$a_0^2 = a_0^3 - a^3 a_3^3 = 1 - K^2 \tag{63}$$

$$a_1^2 = a_1^3 - a^3 a_2^3 = -\frac{3}{5} - \frac{2}{25}K \tag{64}$$

## 5.2 Calculo de $a_i^1$

$$a^2 = \frac{a_2^2}{a_0^2} = \tag{65}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $-3/5$ | $2/25$ | K |
| $1-K^2$ | $-\frac{15+2K}{25}$ | $\frac{2+15K}{25}$ | |

# 6 Ejercicio 6

Para este problema se tiene el siguiente sistema

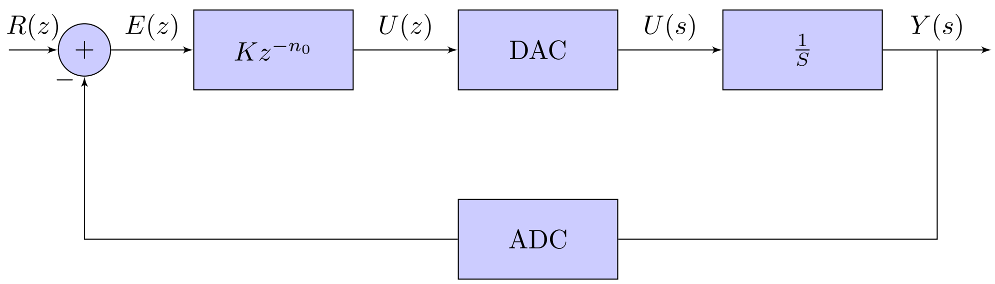


Figure 2: Diagrama del proceso.

Donde $n_0$ es $\tau = n_0 h$.

Es posible pensar al proceso muestreado por un mantenedor de orden cero, dando como resultado

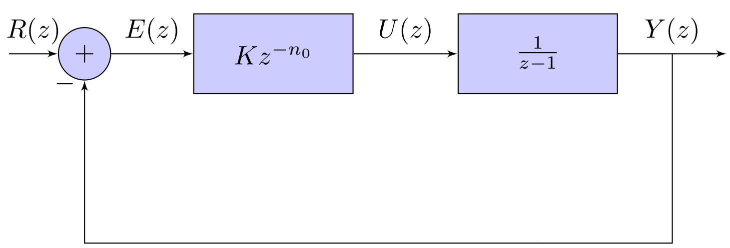


Figure 3: Diagrama del proceso.

Por lo tanto la tranferencia total del sistema retroalimentamo es

$$H(z) = \frac{K}{z^{n_0+1} - z^{n_0} + K} \tag{66}$$

## 6.1 a)

Para este ejercicio tomaremos $n_0 \in \{0, 1\}$.

### 6.1.1 $n_0 = 0$

En este caso el ecuacion caracterisca del sistema esta dada por

$$P(\lambda) = \lambda + (K - 1) \tag{67}$$

Donde el polo esta dado por la ecuacion

$$p = 1 - K \tag{68}$$

Para un sistema discreto la estabilidad esta dada cuando $|p| < 1$, por lo tanto

$$|1 - K| < 1 \tag{69}$$

Por lo cual obtenemos que $K \in (0; 2)$

#### 6.1.2 $n_0 = 1$

En este caso el retardo es unitario por lo tanto el polinomio caracteristo esta dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + K \tag{70}$$

En este caso para calcular cuando el sistema es estable aplicaremos el criterio de Jury

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | $-1$ | $K$ |
| $1 - K^2$ | $K + 1$ | $0$ |
| $\frac{(1+K)[1-(K-1)^2]}{K-1}$ | $0$ | $0$ |

Por lo que obtenemos que $K \in (0; 1)$
Es posible observar que en el segundo caso el rango de $K$ disminuye.

### 6.2 b)

En control equivalente seria un proporcional con un retardo de una unidad, siendo la transferencia de la planta

$$H(s) = \frac{Ke^{-s}}{s + Ke^{-s}} \tag{71}$$

## 7 Ejercicio 7