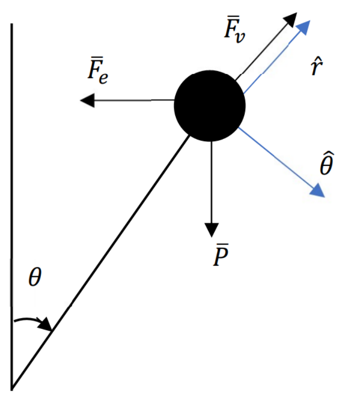
Trabajo practico computacional

Franco, Lautaro, Nicolás, Tomas

October 31, 2020

1 DCL



2 Ecuaciones de Newton

En base al diagrama de cuerpo libre definimos las fuerzas peso y elástica de la siguiente forma:

$$\vec{F}_e = kR\sin^2(\theta)\hat{r} + kR\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta}$$

$$\vec{P} = -mg\cos(\theta)\hat{r} + mg\sin(\theta)\hat{\theta}$$

Desarrollamos las ecuaciones de Newton:

$$\hat{r}) \quad -mR\dot{\theta}^2 = F_v - mg\cos(\theta) - kR\sin^2(\theta) \tag{1}$$

$$\hat{\theta}) \quad mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) - kR\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{2}$$

3 Fuerza de vínculo

Para trabajar $F_v(\theta)$, trabajaremos con la ecuación de movimiento

$$mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) - kR\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin(\theta) - \frac{k}{m}\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Utilizando regla de la cadena,

$$\int_{\dot{\theta}_0=0\,\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g}{R}\sin(\theta)\,d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{k}{m}\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{R}[\cos\theta - \cos(\frac{\pi}{2})] - \frac{k}{2m}(\sin^2\theta - 1)$$

$$\dot{\theta}^2 = -2\frac{g}{R}[\cos\theta - \cos(\frac{\pi}{2})] - \frac{k}{m}(\sin^2\theta - 1)$$

Una vez obtenida esta ecuación, metemos en (1) para así poder despejar $F_v(\theta)$. Queda:

$$-mR[-2\frac{g}{R}[\cos(\theta) - \cos(\frac{\pi}{2})] - \frac{k}{m}(\sin^2(\theta) - 1)] = F_v - mg\cos((\theta)) - kR\sin^2(\theta)$$

$$2mg\cos(\theta) + kR(\sin^2(\theta) - 1) = F_v - mg\cos(\theta) + kR\sin^2(\theta)$$

$$3mg\cos(\theta) - 2kR\sin^2(\theta) - kR = F_v$$

Para hallar los puntos de equilibrio analíticamente, pedimos $f(\theta) = 0$. En (2), si $mR\ddot{\theta} = f(\theta) = 0\mathbf{N}$, hay equilibrio. De (2):

$$mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) - kR\sin(\theta)\cos(\theta))$$

$$0 = \sin(\theta_{\mathbf{eq}})(mg - kR\cos(\theta_{\mathbf{eq}}))$$

Entonces,

$$\to \sin\theta_{\mathbf{eq}} = 0 \to \theta_{\mathbf{eq}} \in \{0, \pi\}$$

O bien,

$$mg - kR\cos(\theta_{\mathbf{eq}}) = 0$$

$$\leftrightarrow mg = kR\cos(\theta_{\mathbf{eq}})$$

$$\leftrightarrow \arccos\frac{mg}{kR} = \arccos\cos(\theta_{\mathbf{eq}})$$

$$\rightarrow \theta_{\mathbf{eq}} \in \{\arccos{(\frac{mg}{kR})}, -\arccos{(\frac{mg}{kR})}\}$$

Hallamos, los siguientes puntos de equilibrio:

$$\theta_{\mathbf{eq}} \in \{0, \pi, \pm 1.37\}\mathbf{rad}$$

Siendo consistentes con los puntos de equilibrio hallados en el problema 4.9. En cuanto a su estabilidad, buscamos $f'(\theta)$ y la evaluamos en los puntos de equilibrio encontrados. Analizamos su signos.

$$f'(\theta) = \cos{(\theta)}(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\cos\theta) + \sin\theta\sin\theta\frac{k}{m}$$

$$\leftrightarrow f'(\theta) = \cos{(\theta)}(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\cos\theta) + \sin^2\theta\frac{k}{m}$$

Reemplazando:

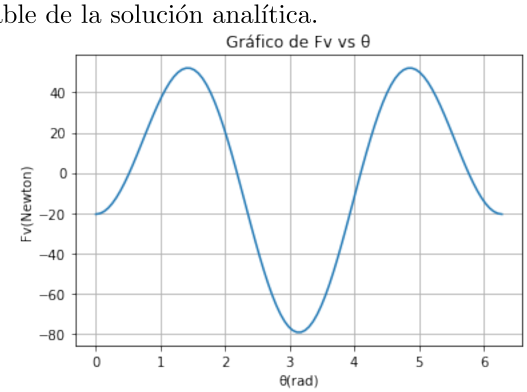
$$f'(0) < 0 \rightarrow \textsf{Estable}$$

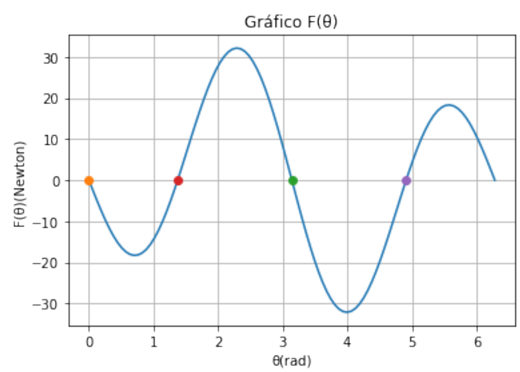
$$f'(\pi) < 0 \rightarrow \textsf{Estable}$$

$$f'(\pm\arccos{(\frac{gm}{Rk})}) > 0 \rightarrow \textsf{Inestable}$$

Coincidiendo con lo pedido, determinando $\theta = 0$ como estable, debido a que $\frac{g}{R} < \frac{k}{m}$

Luego al comparar con la aproximación numérica graficada con Python, obtuvimos que las raíces (marcadas con puntos) coinciden, con un error despreciable de la solución analítica.





4 Pequeñas oscilaciones vs. solución numérica

Para buscar la solución analítica utilizaremos pqueñas oscilaciones. Para ello, desarrollamos el polinomio de Taylor de orden 1 de $f(\theta)$ en un entorno a $\theta_{\mathbf{eq}} = 0$.

$$f(\theta) \simeq f(\theta_{\mathbf{eq}}) + f'((\theta_{\mathbf{eq}}))(\theta - \theta_{\mathbf{eq}})$$

$$f(\theta) \simeq (\cos\theta_{\mathbf{eq}}(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\cos(\theta_{\mathbf{eq}})) + \sin^2(\theta))(\theta - \theta_{\mathbf{eq}}) \tag{3}$$

$$f(0) \simeq (\frac{g}{R} - \frac{k}{m})\theta$$

Para que tenga sentido fisica, $\frac{g}{R} < \frac{k}{m}$ porque sino sería un equilibrio inestable y no podría oscilar. Entonces, coincide con la resolución numérica.

a. Estos resultados tienen sentido físico ya que al posicionar la masa en el punto de equilibrio 0 el resorte crea una mayor fuerza (elástica) que el peso ($kR > mg$), y en π ambas fuerzas "trabajan en conjunto" restituyendo a la masa a su posición de equilibrio luego de un corrimiento de la misma. Luego, los puntos ± 1.37 que provienen de la ecuacion (2) aparentemente también coinciden con el gráfico y son posibles debido a que $mg < kR$ ya que la función $\arccos$ tiene el dominio limitado tal que $\theta \in [-1;1]\mathbf{rad}$.

b. Luego de aproximar la ecuación de movimiento para pequeñas oscilaciones obtenemos la ecuación (3), y despejamos ω resultando:

$$\omega = \pm\sqrt{mg - kR} \tag{4}$$

Para que tenga sentido físico se debe respetar que $\frac{g}{R} < \frac{k}{m}$ ya que solo así el punto de equilibrio puede ser estable y por ende oscilar (sino no tendría sentido hablar de pequeñas oscilaciones). En cuanto a $\dot{\theta}_i$, debemos considerar un intervalo el cual llegue hasta el punto límite donde la velocidad inicial causa que la masa "salga" definivamente del punto de equilibrio y deje de oscilar. Finalmente, $\dot{\theta}_i \in [0; 5.7]\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$.

c. Luego proponemos una solución a la ecuación diferencial mediante la ecuación:

$$\theta(t) = A\cos\omega t + \phi \tag{5}$$

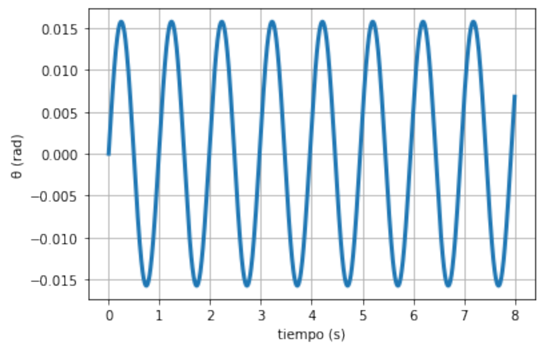
Resulta, de (5), resulta

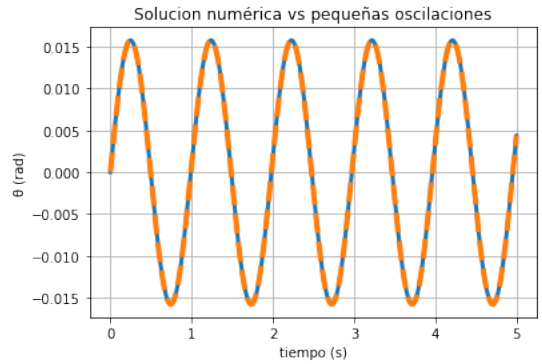
$$\dot{\theta}(t) = -A\omega\sin\omega t + \phi$$

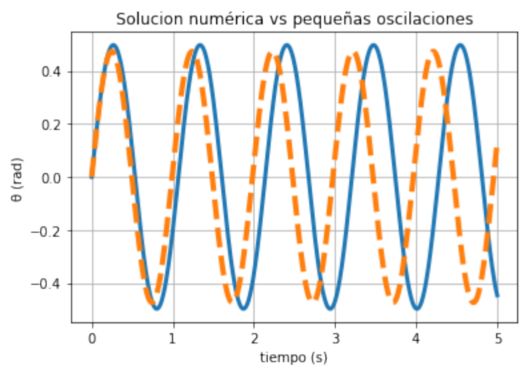
y con las condiciones iniciales dadas por el enunciado, obtenemos la amplitud A y la fase ϕ. Al graficar este resultado y compararlo con el método numérico realizado con *odeint* podemos sacar las siguientes conclusiones: Nos encontramos con que las funciones acuerdan con un error despreciable, siendo practicamente iguales ($\dot{\theta}_i = 0.1\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$).

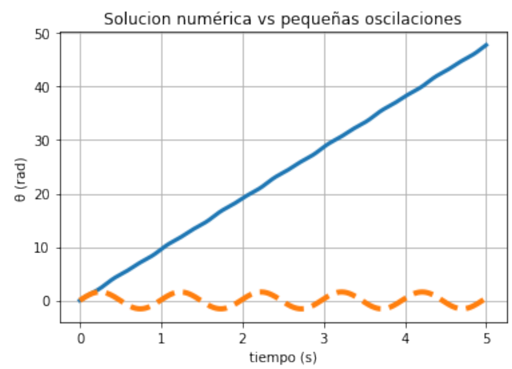
Para $\dot{\theta}_i = 3\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$ notamos un desfase marcado, que con el paso del tiempo va aumentando.

Para $\dot{\theta}_i = 10\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$ notamos un gráfico diferente a los que veníamos teniendo. Nos encontramos ante una situación en la cual la velocidad inicial es tan alta que deja de haber oscilación, dado que la masa *sale* del punto de equilibrio.

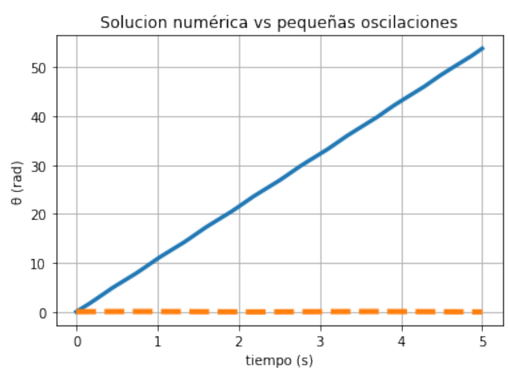








d. Cambiando el valor de k por $k = 5\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$ no nos encontramos, claramente, con el comportamiento típico de pequeãs oscilaciones dado que no hay oscilación. Como $k = 5\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$ tenemos que en $\theta = 0$ hay un equilibrio inestable, ya que $\frac{g}{R} > \frac{k}{m}$.



Al analizar los gráficos podemos ver que para $t \in [0, 2)$ hay un acuerdo entre ambas soluciones. Luego de $t = 2\mathbf{s}$ comienza a haber un desfase y con el paso del tiempo el desfase aumenta notablemente. En cuanto a la posicion angular, notemos que cuando θ es muy pequeña, los gráficos coinciden. Incluso encontramos acuerdo hasta $\theta \simeq 1\mathbf{rad}$. Luego empieza el desfase y con el tiempo aumenta.