Señales y Sistemas - 66.74

Práctica 2
Sistemas en general y sistema LTI

La presente guía de ejercicios se acompaña dos breves apuntes de conceptos que el alumno debe afianzar con la presente guía, que constituye un complemento del material bibliográfico básico. El objetivo de dicho material es ampliar conceptos que aparecen en la bibliografía general. Es importante destacar que la lectura de estos apuntes de ningún modo puede considerarse un sustituto de la realización de ejercicios de esta guía como método de aprendizaje, aún en el caso en que el alumno entienda los ejemplos desarrollados en dicho material.

1. Sistemas: análisis de propiedades

El foco de esta materia son los sistemas que poseen dos propiedades fundamentales: son lineales y también invariantes ante desplazamientos. A estos sistemas se los denomina abreviadamente LTI en estas guías, por sus siglas en inglés: Linear and Time Invariant. La primera parte de esta guía por lo tanto se dirige a entender cuándo un sistema cumple estas 2 propiedades. Además se estudia otras propiedades como estabilidad, memoria y causalidad. El material de referencia puede encontrarse en Atributo de los sistemas

1. Para los siguientes sistemas continuos:

    a) $y(t) = x(t/3)$

    b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau + 2) d\tau$

    c) $y(t) = 2x(t) + 1$

    se pide

    a) Encontrar la salida para $\delta(t)$.

    b) Encontrar la salida para $\delta(t - t_0)$ y determinar una relación con la salida anterior.

    c) Determinar si el sistema es invariante ante desplazamientos. La relación entre la respuesta al impulso y al impulso desplazado es suficiente evidencia para determinar si un sistema es invariante ante desplazamientos?

    d) Encontrar la salida para $\alpha\delta(t) + \beta\delta(t - t_0)$. Determine la relación entre esta salida y las salidas calculadas en los puntos $1a$ y $1b$.

    e) Determinar si el sistema es lineal. La relación encontrada en el punto anterior es suficiente evidencia para determinar si el sistema es lineal?

    f) Determine si el sistema es estable. Para el caso de que el sistema además sea LTI, utilice su respuesta al punto $1a$ para corroborar su respuesta.

    g) Determine si el sistema es causal. En caso de que el sistema sea LTI, utilice su respuesta en $1a$ para corroborar su respuesta.

    h) Determinar si el sistema tiene o no memoria.

2. Para los siguientes sistemas discretos:

a) $y(n) = x(-n)$

b) $y(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ \pi\, x(n) & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$

c) $y(n) = n\, x(n)$

d) $y(n) = \mathbb{R}\,(x(n))$

repetir las cuestiones planteadas en el ejercicio sobre sistemas continuos.

3. Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar la respuesta.

   a) La conexión en cascada de sistemas LTI resulta en un sistema total que también es LTI.

   b) La conexión en cascada de sistemas no lineales es un sistema no lineal.

   c) La conexión en cascada de sistemas no invariantes es un sistema no invariante.

   d) La conexión en cascada de sistemas causales con sistemas no causales es siempre no causal.

   e) El orden de conexión de sistemas no invariantes no altera la salida para una misma entrada.

   f) En un sistema LTI si la entrada es periódica entonces la salida también lo es.

4. Dos sistemas LTI con respuesta al impulso $h_1(n)$ y $h_2(n)$ son conectados en cascada en ese orden. La entrada no se conoce pero la salida $y(n)$ es como muestra la figura 1.

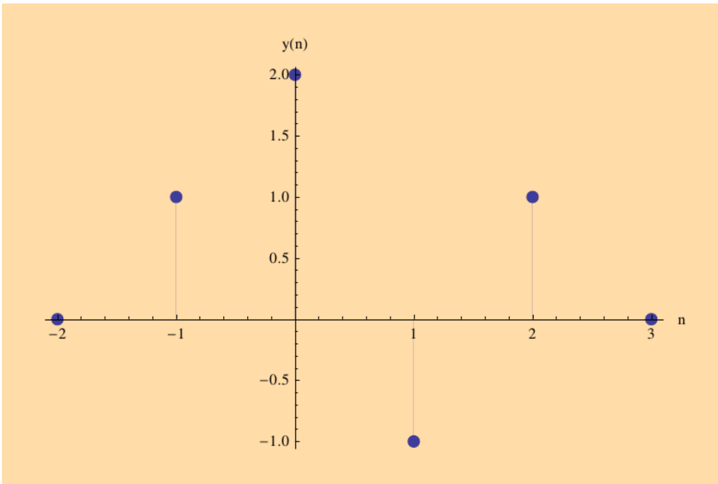

Figura 1: Salida del sistema ejercicio 4

   a) Si los dos sistemas son causales, qué se puede decir acerca del momento en que la entrada podría haber empezado? Se puede establecer el momento exacto de comienzo?

   b) La entrada $x(n)$ que produjo la salida $y(n)$ anterior es aplicada a un nuevo par de sistemas conectados en cascada donde el primero tiene una respuesta impulsiva $h_a(n) = h_1(n+1)$ y el segundo $h_b(n) = 2h_2(n)$. Dibujar la salida.

5. Sobre un único sistema TI (invariante en el tiempo) se aplican las siguientes entradas obteniéndose como respuesta:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\,\delta(n-2) \quad \rightarrow \quad y_1(n) = \delta(n-1) + 2\,\delta(n-2)$$

$$x_2(n) = 3\,\delta(n-2) \quad \rightarrow \quad y_2(n) = \delta(n-1) + 2\,\delta(n-3)$$

$$x_3(n) = \delta(n-3) \quad \rightarrow \quad y_3(n) = \delta(n+1) + 2\,\delta(n) + \delta(n-1)$$

a) Se puede afirmar algo sobre la linealidad del sistema?.

b) Es posible hallar la respuesta del sistema $y_4(n)$ cuando la entrada es $x_4(n) = \delta(n)$ con los datos disponibles?. En caso de ser posible, encuéntrela.

c) Es posible hallar la respuesta del sistema $y_5(n)$ cuando la entrada es $x_5(n) = 5\,\delta(n-2)$ con los datos disponibles?. En caso de ser posible, encuéntrela.

En todos los casos *justifique debidamente* su respuesta.

2. Sistemas LTI y convolución

Cuando sabemos positivamente que el sistema es LTI, el conocimiento de la salida del sistema ante el impulso en el origen ($\delta(n)$ en tiempo discreto o $\delta(t)$ en tiempo continuo), que en estas guías se escribirá como $h(n)$ ($h(t)$ en continuo) o respuesta al impulso, tiene mucha importancia. No sólo será posible conocer mediante dicha señal si el sistema es o no estable o si es causal, como se vio en la sección anterior: el conocimiento de la respuesta al impulso nos permitirá conocer todas las salidas del sistema frente a cualquier entrada acotada, utilizando la operación de convolución entre la entrada y la respuesta al impulso. De este modo para un sistema LTI el conocimiento de $h(n)$ contiene toda la información de la transformación del sistema. Una buena parte de los ejercicios de esta sección tienen por objetivo la mecanización de esta operación por parte del alumno, así como también entender y mecanizar las operaciones de convolución más triviales. En esta sección puede utilizarse como material ilustrativo la explicación interactiva Ejemplo de convolución interactivo

6. Si $h(n) = \alpha^n\, u(n)$ con $\alpha < 1$, encuentre la salida del sistema para cada una de las siguientes entradas:

   a) $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$.

   b) $x(n) = u(n) - u(n-5)$

   Utilice primeramente la fórmula de convolución y luego verifique su resultado utilizando fórmulas que involucren versiones escaladas y desplazadas de $h(n)$.

7. Si $h(t) = u(t)$, calcule la salida del sistema ante la entrada $u(t-1)\sin(t)$.

8. Para la misma entrada anterior, calcule la salida cuando el sistema es $h(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$. Nota: no es necesario realizar nuevamente una convolución. Demuéstrelo.

9. Demuestre que $x(t) * \delta(t-t_0)$ es igual a $x(t-t_0)$ utilizando la propiedad $\displaystyle\int \delta(t-t_0) f(t) = f(t_0)$.

10. Encontrar $x(n) * x(n)$, con $x(n) = u(n+3) - u(n-4)$

11. Dado un sistema cuya respuesta impulsiva está dada por un pulso triangular dada por:

$$h(n) = \delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

   al cual se le aplica una entrada $x(n)$ que consiste en un tren de impulsos de período N, calcular mediante la suma de convolución la salida $y(n)$ para los siguientes casos:

   a) $N = 6$

   b) $N = 4$

   c) $N = 2$

Realice los gráficos para cada salida.

12. Para el sistema cuya $h(t) = u(t) - u(t-1)$ y $x(t) = h(t/\alpha)$:

    a) encuentre la salida del sistema.

    b) si la derivada de la salida tiene sólo 3 discontinuidades, deduzca el valor de α.

3. Ecuaciones en diferencias

Esta sección apunta al aprendizaje y familiarización con los sistemas definidos por ecuaciones en diferencias. Este tema tiene aspectos cuya comprensión total se completará en la última parte de esta materia, cuando se estudie Transformada $\mathcal{Z}$ en la guía 7. En esta etapa el énfasis está puesto en la operatoria de dichos sistemas así como en la comprensión de sus propiedades. Para esta parte es posible leer ciertos aspectos relevantes en Sistemas Definidos por Ecuaciones en Diferencias

13. Calcule iterativamente la respuesta al impulso del sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = x(n) + 0{,}75\,y(n-1) \tag{1}$$

    para los casos siguientes.

    - $y(-1) = 0$
    - $y(1) = 0$
    - $y(0) = 0$
    - $y(0) = 1$

    En base a los valores obtenidos mediante la recursión para varios tiempos discretos alrededor de $n = 0$, encuentre una expresión cerrada para cada una de las $h(n)$ obtenidas en cada caso para todo n.

14. Para cada uno de los sistemas definidos en el punto anterior determine si son lineales, invariante ante desplazamientos, estables y causales.

15. Demuestre que un sistema definido por ecuaciones en diferencias pero FIR siempre será lineal, invariante ante desplazamientos, y estable. Determine además qué condición debe cumplir un sistema de este tipo para ser causal.

16. Realice la recursión para el sistema definido por la ecuación 1 del ejercicio 13, para la entrada $\delta(n)$ pero considerando los siguientes casos de condiciones de borde:

    - condiciones iniciales de reposo
    - condiciones finales de reposo.

    Determine en cada caso a qué condición fija se traduce cada una de las condiciones de contorno planteadas. Igual que en ese ejercicio, determine una expresión cerrada para todo n a partir de las recursiones alrededor de cero. También determine si los sistemas definidos en cada caso son lineales, invariante ante desplazamientos, estables y causales (o anticausales).

17. Repetir el ejercicio anterior, para las siguientes entradas:

    - $\delta(n-1)$

- $\delta(n+1)$

Cómo cambian las condiciones iniciales fijas equivalentes en cada caso? Cambiaron las propiedades de los sistemas? Implemente en Matlab cada uno de los cuatro casos.

18. Encuentre la respuesta al impulso para el sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias con condiciones iniciales en reposo:

$$y(n) = x(n+1) + x(n) + x(n-1) + 0{,}75\, y(n-1)$$

Implemente la resolución en Matlab.

19. Encuentre la respuesta al impulso para el sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias con condiciones finales en reposo:

$$y(n) = x(n+1) + x(n) + x(n-1) + 1{,}25\, y(n-1)$$

Implemente la resolución en Matlab.