Devoir 1: Photonique et Optique Quantique

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Mathieu Juan

Dû: Dimanche 22 septembre

Oscillation de Rabi

Sous l'effet d'un champ électromagnétique la dynamique d'un système à deux niveaux présente des oscillations temporelles, un effet caractéristique d'un système quantique. Nous avons vu en cours deux traitement, un basé sur l'approche perturbative l'autre sur la diagonalisation du Hamiltonien. Il est aussi possible de retrouver les oscillations de Rabi à partir de l'équation de Schrödinger. Pour cela, considérons un système à deux niveau définit par les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Pour un champ incident $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{E}_0^- \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, sous certaines conditions le Hamiltonien du système peut être écrit comme:

$$H = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| + \hbar\frac{\Omega}{2}\left(|g\rangle\langle e|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + |e\rangle\langle g|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), \tag{1}$$

avec $\Omega = -2\langle g|\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{d}|e\rangle E_0^+/\hbar$, où $\hat{\varepsilon}$ est le vecteur polarisation du champ incident (polarisé linéairement) tel que $\mathbf{E}_0^+ = \hat{\varepsilon}E_0^+$.

Question 1: En partant d'un état quelconque $|\Psi\rangle = c_g|g\rangle + c_e|e\rangle$, utilisez l'équation de Schrödinger $i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$ afin d'obtenir les équations du mouvement pour c_g et c_e.

Question 2: En utilisant la transformation $\tilde{c}_e = c_e\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, montrez alors que ces équations du mouvement ce simplifient en:

$$\partial_t c_g = -i\frac{\Omega}{2}\tilde{c}_e \tag{2}$$

$$\partial_t \tilde{c}_e = i\Delta\tilde{c}_e - i\frac{\Omega}{2}c_g \tag{3}$$

Question 3: En considérant que le champ est résonant avec le système à deux niveaux, trouvez alors l'évolution temporelle de $c_g(t)$ et $c_e(t)$. Montrez alors que pour un système initialement dans l'état fondamental, la population pour l'état excité est donné par:

$$P_e(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\Omega t\right) \tag{4}$$

Question 4: En utilisant l'opération unitaire $\mathcal{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t|e\rangle\langle e|}$ sur $|\Psi\rangle$, montrez que le changement de variable $\tilde{c}_e = c_e \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ est simplement le passage à la base tournante.

Question 5: Dans le cours, nous avions fait le changement de base (avec l'unitaire $\mathcal{U}$) et ensuite une approximation pour se débarrasser des termes qui oscillent à 2ω (approximation séculaire). Dans le calcul effectué ici, où est-ce que l'approximation séculaire intervient (est-ce qu'elle intervient)?

Corrélations et émission d'un atome:

Cet exercice revient sur la notion de corrélations le lien avec les composantes spectrales du champ électromagnétique.

Question 6: Nous avons vu en cours que l'interférence entre deux faisceaux est directement liée à la fonction de corrélation du premier ordre (fig. 1). En considérant un onde monochromatique incidente sur une lame séparatrice, la visibilité de l'interférence est alors parfaite ($V = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min}) = \left|g^{(1)}(\tau)\right| = 1$). Que se passe-t-il si on place en élément venant perturber la phase d'un des bras de l'interféromètre de façon aléatoire? Appuyez vos arguments sur l'effet que cet élément aura sur les corrélations.

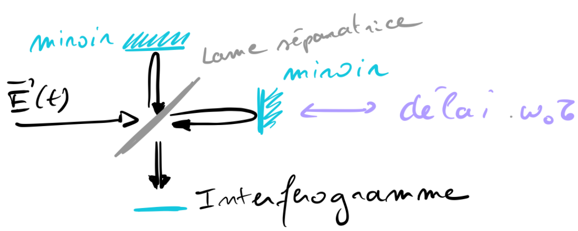

Figure 1: Schéma d'un interféromètre.

Question 7: Nous considérerons ici l'émission d'un atome excité par une impulsion $\pi/2$ très courte au temps $t = 0$. Le champ émis par l'atome est alors donné par:

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^{(+)}}{r} \left[(\hat{\varepsilon} \cdot \hat{r})\, \hat{r} - \hat{\varepsilon}\right] \mathrm{e}^{-(\gamma/2)t} e^{-\mathrm{i}\omega_0 t_r} \mathcal{H}(t_r), \tag{5}$$

avec γ le temps de vie de l'atome, $t_r = t - r/c$ le temps "retardé", $\mathcal{H}(t_r)$ la fonction échelon unité "Heaveside", et $\hat{\varepsilon}$ le vecteur unitaire de polarisation.

Calculez la fonction d'auto-corrélation du premier et second ordre.

Question 8: Montrez alors que densité spectrale, $s(\omega)$, du champ émis par l'atome est une Lorentzienne avec une largeur à mi-hauteur de γ. Dans ce cas, la relation entre $s(\omega)$ et $g^{(1)}(\tau)$ est donnée par:

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau g^{(1)}(\tau)\mathrm{cos}(\omega\tau) + \mathrm{c.c.}, \tag{6}$$

avec $\omega \geq 0$.

État cohérent

Nous avons vu que l'état cohérent $|\alpha\rangle$ est défini comme un état propre l'opérateur annihilation $\hat{a}$. Il est possible de retrouver l'expression de $|\alpha\rangle$ en utilisant l'opération unitaire de déplacement:

$$\mathcal{D}(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger} - \alpha^{*}\hat{a}} \tag{7}$$

Question 9: Retrouvez l'expression de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ en appliquant l'opérateur de déplacement sur le vide $|0\rangle$.

Question 10: Prenons maintenant le cas d'une lame séparatrice qui réalise l'opération suivante:

$$\hat{\mathcal{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Quel est l'état en sortie de la lame, $|\Psi\rangle_{out}$, si nous avons un état cohérent $|\alpha\rangle$ sur un des ports en entrée? Veillez à bien définir vos notations pour les différents modes.

Question 11: Considérez maintenant que deux états cohérents, $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$, sont utilisés en entré (un pour chaque port). Quel est l'état en sortie de la lame séparatrice?