

optique quantique TA

Lautaro Labarca
labl2714@usherbrooke.ca

September 21, 2024

Contents

1 Course-1. Qubit code.	1
1.1 Configuration de qutip avec Visual Studio Code	1
1.2 Pourquoi nous intéressons-nous aux qubits?	1
1.3 Dynamique simple des qubits	2
1.4 Profil de fréquence de l'impulsion et ses effets sur les fuites (leakage)	3

1 Course-1. Qubit code.

L'objectif est de familiariser les étudiants avec la dynamique simple des qubits. Pour ça, on va faire un exercice computationnel. Nous allons esquisser quelques étapes analytiques pour obtenir les formes simples que nous étudierons numériquement, mais aucun détail de ces dérivations n'est fourni. En général, elles sont simples, mais légèrement fastidieuses à reproduire. Si ce n'est pas déjà fait, il est bon de compléter les étapes manquantes. Le chapitre 4 de Nielsen et Chuang [1], le chapitre 2 de Sakurai [2], et la page Wikipédia sur les transformations unitaires couvrent tout le nécessaire pour combler ces lacunes. En guise de spoiler, la semaine prochaine, lors de la révision des devoirs, nous passerons en revue tous les détails analytiques fastidieux, mais nécessaire.

1.1 Configuration de qutip avec Visual Studio Code

Tout d'abord, nous devons installer Python. Allez sur le lien [3]. Utilisez simplement la version recommandée. Pendant que Python s'installe, nous pouvons installer Visual Studio Code [4]. Ensuite, créez simplement un dossier pour le cours, ouvrez-le, et téléchargez-y le notebook utilisé en classe [5]. Créez un environnement virtuel en tapant dans la palette de commandes **Python: Create Environment**. Maintenant, utilisez simplement la palette de commandes pour ouvrir le terminal. Dans le terminal, tapez `pip install qutip`. De la même manière, installez **numpy** (manipulations basiques de tableaux), **matplotlib** (signification évidente), **scipy** (manipulations de tableaux plus efficaces, précises et variées, avec de nombreuses fonctions spécifiques comme l'intégration, les séries, les polynômes, et le fitting), **tqdm** (pour voir des barres de progression). Vous pouvez voir toutes les versions installées avec `pip list`. Vérifiez les compatibilités dans la documentation d'installation de **qutip**, à savoir essentiellement `numpy < 2.0`, `scipy > 1.8`, `python > 3.9`, `matplotlib > 1.2.1`. Avec cela, vous êtes prêts à exécuter tous les codes utilisés dans ce cours. Enfin, configurez GitHub Copilot. L'utilité de cet outil c'est top. Avec Visual Studio Code, c'est très facile : il suffit d'installer l'extension et de lier votre compte GitHub étudiant.

Alternativement, créez un compte sur Cocalc, allez dans vos projets, démarrez-en un nouveau et téléchargez le notebook qubit-drive-pulse.ipynb trouvé sur le GitHub [5].

1.2 Pourquoi nous intéressons-nous aux qubits?

Tout d'abord, le qubit est l'objet mathématique le plus simple qui capture les caractéristiques essentielles de la mécanique quantique non relativiste. Avec les qubits, nous pouvons avoir la superposition, c'est-à-dire l'interférence. En particulier, le fait qu'il y ait deux signes est suffisant, voir par exemple

[6]. De plus, avec deux qubits ou plus, nous pouvons étudier l’entrelacement, probablement la caractéristique la plus frappante de la mécanique quantique comme l’a posée Einstein et ses collaborateurs [7] (sérieusement, l’article est très facile à lire, allez le lire), ce qui peut conduire à des corrélations non locales entre les particules entrelacées comme le montrent d’abord [8, 9] basées sur les inégalités de Bell [10] (très simples à lire également, c’est fantastique). Plus récemment, les inégalités ont été violées en utilisant des circuits supraconducteurs dans [11]. Il est à noter que certains chercheurs affirment encore que les inégalités de Bell telles que proposées par Bell n’ont pas encore été testées, voir par exemple [12].

Deuxièmement, pour la physique fondamentale, les qubits, en raison de leur simplicité, sont très utiles pour concevoir des expériences mesurant une force ou une interaction désirée. Par exemple, des tests ont été réalisés pour rechercher la matière noire [13]. Cette expérience, comme beaucoup d’autres, est basée sur le schéma montré dans fig. 1. De plus, les qubits (sous forme d’atomes, on mesure les probabilités de transition ; si une seule transition est pertinente, alors les deux niveaux correspondants forment un qubit) sont utilisés dans des expériences mesurant la constante gravitationnelle (je manque d’une référence particulière pour cela) et font partie de propositions testant la nature quantique de la gravité, voir par exemple le dossier [14].

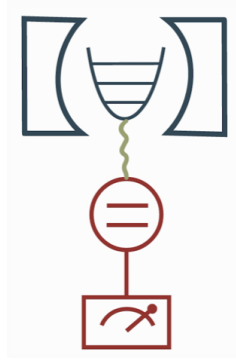


Figure 1: Oscillateur couplé à un qubit. Dans ce cas, le qubit est utilisé pour extraire des informations de l’oscillateur, mais l’inverse est également utilisé.

Troisièmement, les qubits forment la base de l’informatique et de l’information quantiques. Au-delà de la promesse de démontrer que le modèle computationnel le plus fondamental n’est pas la machine de Turing classique, mais l’ordinateur quantique, ils promettent d’améliorer les protocoles cryptographiques. Nous verrons cela dans le chapitre 4.¹

1.3 Dynamique simple des qubits

En général, la dynamique d’un qubit conservatif est générée par l’Hamiltonien

$$\hat{H}(t) = f(t)\sigma_z + g(t)\sigma_x + h(t)\sigma_y. \quad (1.3.1)$$

Ainsi, formellement, l’évolution est donnée par

$$\hat{U} = \mathcal{T} \left[i \exp \left\{ \int_0^t dt' f(t')\sigma_z + g(t')\sigma_x + h(t')\sigma_y \right\} \right] \equiv \exp\{i\alpha(t)\sigma_z\} \exp\{i\beta(t)\sigma_x\} \exp\{i\gamma(t)\sigma_y\}, \quad (1.3.2)$$

où la dernière équivalence est due à la décomposition des rotations, voir [1] chapitre 4. En résumé, toute évolution non dissipative d’un qubit unique est simplement une rotation et nous pouvons la visualiser dans la sphère de Bloch. Dans le code partagé [5], vous trouverez une animation montrant l’impulsion de $\pi/2$ permettant de préparer $|+\rangle$ à partir de $|0\rangle$.

En raison de la décomposition des rotations ci-dessus, nous pouvons nous concentrer simplement sur les Hamiltoniens de la forme,

$$\hat{H}(t) = f(t)\sigma_z + g(t)\sigma_x. \quad (1.3.3)$$

¹Il y a eu tant de choses écrites à ce sujet que je préfère ne pas commenter davantage pour le moment. De plus, je manque de temps, donc je ne vais pas inclure d’autres références pour l’instant, mais je pourrais mettre à jour cela à l’avenir.

L'Hamiltonien ci-dessus est couramment généré dans les circuits supraconducteurs en utilisant un qubit avec une fréquence dépendante du temps (par exemple, en faisant passer un flux magnétique à travers un SQUID), et en excitant le qubit à travers une ligne de charge (la partie $g(t)\sigma_x$). Pour simplifier, concentrons-nous sur $f(t) = \omega_0/2$ constant, ou ω_0 étant la fréquence du qubit. En passant à un cadre tournant à la fréquence ω , nous obtenons dans le cadre d'interaction un Hamiltonien de la forme suivante

$$\hat{H}(t) = \Delta\sigma_z + g(t)\sigma_x. \quad (1.3.4)$$

Notez que $g(t)$ est modifié, mais pour notre étude qualitative, la forme exacte n'est pas importante. En fait, nous simplifierons encore davantage, et nous poserons $\Delta = 0$, pour obtenir

$$\hat{H}(t) = g(t)\sigma_x. \quad (1.3.5)$$

Ensuite, l'évolution unitaire est donnée par

$$\hat{U}(t) = \exp\left[-i \int_0^t dt' g(t')\sigma_x\right]. \quad (1.3.6)$$

Ainsi, en redimensionnant simplement $g(t) \rightarrow 2\pi g(t)$, et en utilisant le fait qu'une rotation autour de l'axe x dans la sphère de Bloch par un angle θ est donnée par

$$\hat{R}_x(\theta) \equiv \exp\{-i\theta\sigma_x/2\}, \quad (1.3.7)$$

nous obtenons

$$\hat{U}(t) = \hat{R}_x(2I), \quad \text{avec} \quad I = \int_0^t dt' g(t'). \quad (1.3.8)$$

Cela signifie que si nous ne considérons que le sous-espace des qubits, seule l'intégrale de l'impulsion, c'est-à-dire son amplitude totale, est importante, et sa forme est sans importance pour la fidélité de l'état final. Cependant, en ajoutant un troisième état, nous verrons que ce n'est plus le cas et que la forme de l'impulsion, et en particulier son profil de fréquence, jouent un rôle crucial.

1.4 Profil de fréquence de l'impulsion et ses effets sur les fuites (leakage)

Ici, je vais développer un exemple avec un qutrit, avec des détails. Le code associé est téléchargé dans [5] et s'appelle qutrit. Cela devrait (légèrement) vous être utile pour l'exercice 1 de votre devoir. Nous pouvons commencer à étudier le problème dans sa forme abstraite la plus générale pour mieux le comprendre. Du fait que l'évolution quantique est linéaire, nous pouvons imaginer le scénario général où l'évolution du qutrit est générée par un Hamiltonien hermitien arbitraire $\hat{H}(t)$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.4.1)$$

sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_0(t) \\ \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) & H_{13}(t) \\ \bar{H}_{12}(t) & H_{22}(t) & H_{23}(t) \\ \bar{H}_{13}(t) & \bar{H}_{23}(t) & H_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.4.2)$$

où les barres représentent la conjugaison. Pour simplifier encore davantage, disons que l'Hamiltonien ne couple que les états voisins, c'est-à-dire $H_{13}(t) = 0$. De plus, simplifions encore notre analyse en supposant que les termes diagonaux sont constants dans le temps et que les termes hors diagonale évoluent de manière harmonique à la fréquence ω_0 , c'est-à-dire que la transformée de Fourier de $H_{ij}(t)$ est $\delta(\omega - \omega_0)$. Nous écrivons donc,

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_0(t) \\ \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & A_{12}e^{i\omega_0 t} & 0 \\ \bar{A}_{12}e^{-i\omega_0 t} & H_{22} & A_{23}e^{i\omega_0 t} \\ \bar{A}_{23}e^{-i\omega_0 t} & \bar{A}_{23}e^{-i\omega_0 t} & H_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

De plus, avec un simple décalage des énergies, nous pouvons fixer H_{11} à zéro, donc nous avons

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_0(t) \\ \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}e^{i\omega_0 t} & 0 \\ \bar{A}_{12}e^{-i\omega_0 t} & H_2 & A_{23}e^{i\omega_0 t} \\ \bar{A}_{23}e^{-i\omega_0 t} & \bar{A}_{23}e^{-i\omega_0 t} & H_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}. \quad (1.4.4)$$

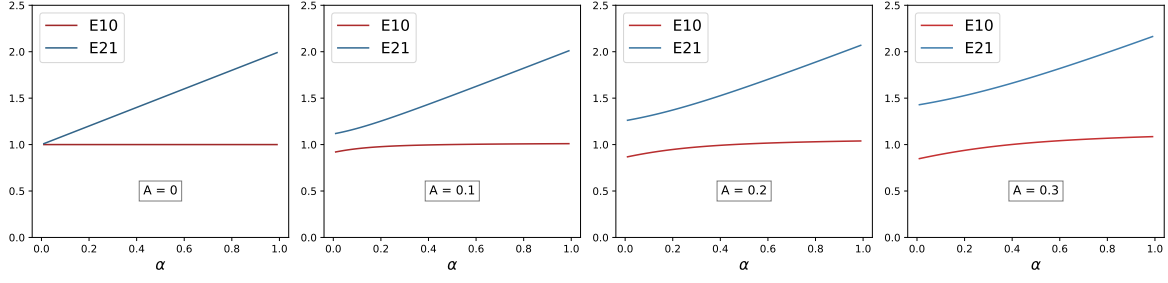


Figure 2: Énergies propres du qutrit en fonction de l'anharmonicité pour différentes amplitudes de contrôle. E10 correspond à $E_1 - E_0$.

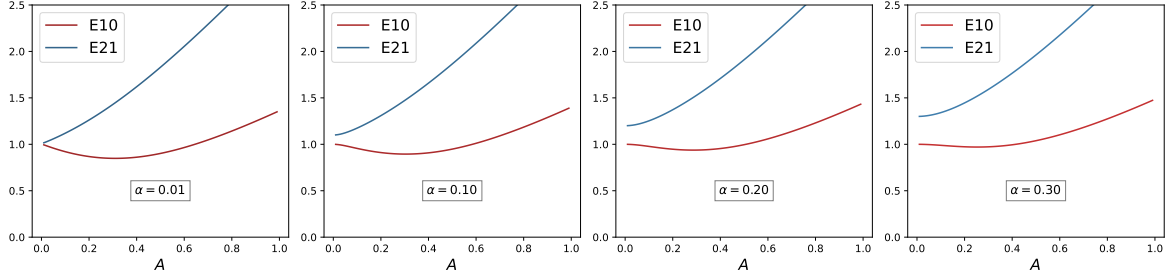


Figure 3: Énergies propres du qutrit en fonction de l'amplitude du contrôle pour différentes anharmonicités. E10 correspond à $E_1 - E_0$.

Enfin, faisons une simplification supplémentaire en supposant $A_{12} = A_{13} \equiv A \in \mathbb{R}$, afin d'isoler la composante en fréquence du champ de contrôle dans notre analyse. En faisant cela, nous trouvons maintenant les valeurs propres. Pour ce faire, nous résolvons simplement l'équation déterminantielle $\det(H - \lambda I) = 0$, qui dans ce cas se lit :

$$\lambda(H_2 - \lambda)(H_3 - \lambda) + A^2(H_3 - 2\lambda) = 0. \quad (1.4.5)$$

Les valeurs propres ne dépendent alors pas de la fréquence du contrôle, mais seulement de son amplitude et de l'anharmonicité relative entre H_2 et H_3 . Il est également à noter que l'équation ci-dessus est un polynôme de degré trois, et bien que nous puissions essayer de trouver des solutions analytiques, cela serait plutôt fastidieux, nous allons donc les résoudre numériquement. Pour ce faire, nous fixons $H_2 = 1$, $H_3 = 1 + \alpha$. Notez que ce choix signifie que $\omega = 1$ est la fréquence d'oscillation entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$. De plus, nous fixons $A = 0.2$, ce qui correspond à un faible champ de contrôle, afin d'étudier la structure des vecteurs propres et des énergies propres en fonction de la fréquence du contrôle ω_0 et de l'anharmonicité α .

Dans la fig. 2, nous représentons les valeurs propres en fonction de α pour différentes valeurs de A , et dans la fig. 3, nous les représentons en fonction de A pour différentes valeurs de α . Il est clair qu'en augmentant α , comme attendu, l'écart entre E_{10} et E_{21} augmente. De même, l'augmentation de l'amplitude du contrôle élargit l'écart entre E_{21} et E_{10} . C'est l'écart typique qui apparaît lorsqu'un Hamiltonien est perturbé dans ses éléments non diagonaux de plus proche voisin. Maintenant, disons que nous voulons réaliser une porte, soit de $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ou de $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$. Quelle fréquence de pilotage devons-nous choisir pour maximiser la fidélité de la porte ? Pour répondre à cette question, nous pouvons simplement résoudre l'évolution sur une durée suffisamment longue, disons $T = 10(2\pi/\omega_0)$, et trouver les valeurs maximales de

$$c_i = |\langle i|\psi(t)\rangle|. \quad (1.4.6)$$

Nous le faisons numériquement en fixant $A = 0.2$ et $\alpha = 0.5A$ dans la fig. 4. De toute évidence, la fréquence des termes de pilotage a une forte influence sur les fidélités atteignables. Il est certain que trouver les fréquences qui maximisent la fidélité est simple numériquement, mais qu'en est-il de prédire cette fréquence uniquement à partir des paramètres du système non piloté et de l'amplitude du pilote A par exemple. Là, dans la fig. 4, nous avons tracé les énergies E_{21} et E_{10} , et bien que ces valeurs

donnent un ordre de grandeur des pics, elles échouent considérablement en tant qu'outil prédictif. Si vous savez comment prédire les pics, faites-le moi savoir². Nous notons que, naturellement, les profils dépendent de A et α , par exemple en fixant $A = 0.2$, $\alpha = 5A = H_2$, nous obtenons le profil intéressant de la fig. 5.

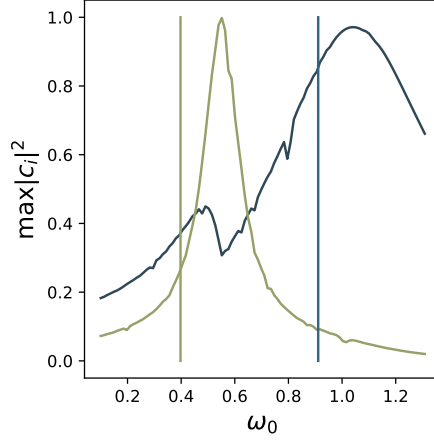


Figure 4: Maximum atteignable c_i en partant de $|0\rangle$ avec $A = 0.2$ et $\alpha = 0.5A$. c_1 en bleu, c_2 en vert. Les lignes verticales correspondent à E_{10} et E_{21} .

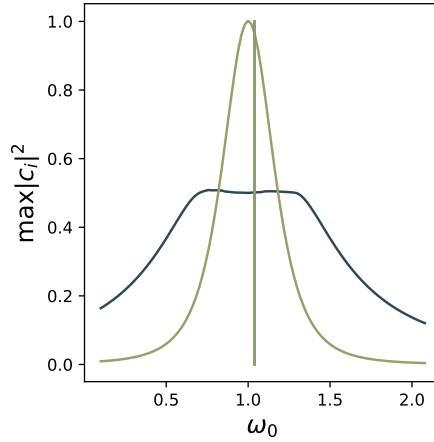


Figure 5: Maximum atteignable c_i en partant de $|0\rangle$ avec $A = 0.2$ et $\alpha = 5A = H_2$. c_1 en bleu, c_2 en vert. Les lignes verticales correspondent à E_{10} .

Enfin, nous remarquons qu'il est clair que si le profil de fréquence du ton de pilotage est proche d'une résonance ou de l'autre, cela affectera les fuites. Imaginez une situation où le profil du ton de pilotage correspond à deux deltas de Dirac, l'un à la fréquence qui maximise c_1 (l'autre c_2), alors nous nous attendrions à ce que le maximum atteignable de chacun d'eux soit réduit par rapport au cas idéal. Pour cette raison, l'ingénierie des tons de pilotage est un sujet de recherche qui suscite un grand intérêt. Une approche numérique courante pour trouver des tons de pilotage idéaux est une boucle d'optimisation basée sur la descente de gradient.

References

- [1] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.

²Attention, je ne dis pas que cette prédiction est inconnue, je dis simplement que je ne la connais pas pour le moment.

- [2] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2020.
- [3] *python.org*. <https://www.python.org/downloads/>. [Accessed 16-09-2024].
- [4] *Getting started with Visual Studio Code* — *code.visualstudio.com*. <https://code.visualstudio.com/docs/introvideos/basics>. [Accessed 16-09-2024].
- [5] *GitHub - LautaroLabarcaG/optique-quantique: optique-quantique 2024 UdeS* — *github.com*. <https://github.com/LautaroLabarcaG/optique-quantique/tree/main>. [Accessed 16-09-2024].
- [6] Christopher M Dawson et al. “Quantum computing and polynomial equations over the finite field \mathbb{Z}_2 ”. In: *arXiv preprint quant-ph/0408129* (2004).
- [7] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” In: *Physical review* 47.10 (1935), p. 777.
- [8] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. “Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers”. In: *Physical review letters* 49.25 (1982), p. 1804.
- [9] Stuart J Freedman and John F Clauser. “Experimental test of local hidden-variable theories”. In: *Physical review letters* 28.14 (1972), p. 938.
- [10] John S Bell. “On the einstein podolsky rosen paradox”. In: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), p. 195.
- [11] Simon Storz et al. “Loophole-free Bell inequality violation with superconducting circuits”. In: *Nature* 617.7960 (2023), pp. 265–270.
- [12] Andrea Aiello. *Against Bell’s Theorem*. 2024. arXiv: [2406.03028 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/2406.03028). URL: <https://arxiv.org/abs/2406.03028>.
- [13] Akash V Dixit et al. “Searching for dark matter with a superconducting qubit”. In: *Physical review letters* 126.14 (2021), p. 141302.
- [14] *Topical on quantum gravity tests with atoms*. https://smd-cms.nasa.gov/wp-content/uploads/2023/05/45_e8d91f69e93d0cf59de3959b6bb25b55_BiedermannGrantW.pdf. [Accessed 16-09-2024].