CAMINO DE TORIIS

AUTOR: LAUTARO LASORSA

Solución Esperada

La solución esperada está compuesta de 2 conocimientos teóricos fundamentales :

- La noción de cómo calcular las diferentes formas de recorrer un Grafo Dirigido Acíclico (o D.A.G. por sus siglas en inglés). Este concepto ya ha sido tomado en problemas de O.I.A., como puede ser Inspeccionando la Reserva, Problema 2 del Día 1 del Selectivo 2007. Este conocimiento es evaluado en las primeras 2 subtareas, en las cuales **cantidad[i]** <= 5.

- Potenciación binaria. Este conocimiento es evaluado en la tercera subtarea, en la cual **N** = 2 y **M** = 1

La solución esperada se realiza de la siguiente manera :

- Dado que el parque planteado es un D.A.G., el competidor deberá ordenarlo topológicamente. Esto se hace partiendo de un vector vacío y usando un DFS que recorra el D.A.G. empezando por las entradas (nodos sin padres). Cuando el DFS termina de pasar por un nodo lo agrega al final del vector. Al terminar todo el proceso, debe invertirse el orden del vector

- En segunda medida, se le asignará a cada nodo 2 valores. Uno referido a cuantas formas existen de llegar a él pasando por un número impar de Toriis, llámese I[i], y el otro a la cantidad de formas de llegar pasando por un número par de Toriis, llámese P[i]. Si el nodo i es una entrada, P[i] = 1, en otro caso, P[i] = 0. I[i] = 0 para todo i.

- En tercera medida, se debe recorrer el grafo en el orden topológico. Al pasar por un nodo se evaluaran todas las aristas que salen de este de la siguiente manera :

    - Si la arista A, que sale del nodo i y llega al nodo j, contiene k Toriis, entonces hay 2^k formas de recorrerlo. 2^(k-1) formas de recorrerlo pasando debajo de una cantidad par de Toriis, con lo que se mantiene la paridad, y otras 2^(k-1) formas de recorrerlo pasando un número impar, por lo que la paridad cambia.

- Como k puede ser hasta 10^18, es necesario realizar la potenciación utilizando potenciación binaria. (que realiza, para un exponente k, la potencia en O(log(k))) Esta consiste en ver que, si k es par, 2^k puede expresarse como (2^(k/2))^2, y si k es impar, puede expresarse como 2^(k-1) * 2. Este algoritmo debe aplicarse recursivamente.

- Llamemos FormasI a la cantidad de formas que hay de recorrer el camino cambiando la paridad, y FormasP a la cantidad de formas que hay de recorrer el camino sin cambiarla. Así, la cantidad de caminos que pasan por i y llegan a j recorriendo una cantidad par de Toriis de forma par será igual a I[i] * FormasI + P[i] * FormasP. Y, análogamente, la cantidad de caminos que pasen por i y lleguen a j pasando por una cantidad impar de Toriis será I[i] * FormasP + P[i] * FormasP.

- Como FormasI y FormasP son iguales, ahora podemos decir que Formas = FormasI = FormasP = 2^(k-1). Lo que nos permite reformular lo anterior diciendo que hay (I[i] + P[i])*Formas caminos que pasan por i y llegan a j pasando por cantidad par de Toriis, y la misma cantidad de caminos que llegan pasando por una cantidad impar.

- Sabemos que si desde los nodos i,k,l… se puede llegar a j, entonces I[j] será la suma de todas las formas de llegar a j pasando por cantidad impar de Toriis desde i,k,l… , y ocurre lo análogo con P[j].

- Por lo anterior, se debe hacer I[j] += (I[i] + P[i])*Formas, P[j] += (I[i] + P[j])*Formas.

* Finalmente, lo único que queda es la suma de los P[i] correspondientes a las salidas.

Como el módulo “distribuye” sobre la suma, se puede realizar la operación módulo en cada suma realizada durante el algoritmo.