Editorial Operando un Robot

por Lautaro Lasorsa

1 Solución general

La solución esperada tiene una complejidad de $O(N+Q*log(N))$ y es utilizando un Segment Tree.

Para esto la clave es observar que es posible componer instrucciones y que esta composición es una operación asociativa.

Para hacer esto hay que modelar cada instrucción de la siguiente forma:

- Un par (punto) (x, y) que representa la posición a la que se mueve el robot si ejecuta esa instrucción.
- Un entero d que representa la orientación en la que queda al final el robot.

Notar que estos son los mismos datos exactos que se deben devolver.

La forma de hacer la composición asociativa es:

Sean mis instrucciones $I_1 = (p_1, d_1)$ e $I_2 = (p_2, d_2)$, $I = I_1 o I_2 = (p, d)$ es :

- $p = p_1 + p_2 * d_1$, donde el producto entre un punto y una rotación da el resultado de rotar ese punto con esa rotación (al ser rotaciones múltiplo de 90 grados y los puntos de coordenadas enteras el resultado siempre tiene sus coordenadas enteras)
- $d = d_1 * d_2$, donde el producto de rotaciones es la composición. (Podemos incluso pensarlo como la suma en Z_4, forma en la que lo encara mi implementación)

Modeladas así, las instrucciones de tipo 1 son $((M, 0), 0)$ y las tipo 2 son $((0, 0), M)$

Esto es posible pensarlo de forma adhoc pero también de una forma muy elegante utilizando números complejos o algebra lineal en R^2.

Como la composición es $O(1)$, entonces podemos utilizar un Segment Tree para realizar queries y updates (operaciones tipo 1 y 2) en $O(log(N))$ con inicialización $O(N)$

2 Subtarea 1

$1 \leq N, Q \leq 1.000$ (10 puntos)
La solución en este caso es que simplemente simulen las instrucciones. Lo unico importante es que sepan modelar la dirección y cómo esta influye en las instrucciones de tipo 1.
La complejidad resultante es $O(N * Q)$

3 Subtarea 2

Solo hay instrucciones de tipo 1 y no hay operaciones de tipo 2 (5 puntos)
Como en este caso el robot no rota, se puede ver que solo tenemos la posibilidad de avanzar. Por tanto, el resultado es $((X, 0), 0)$ donde X es la suma de los avances de cada instrucción. Esto es una consulta de suma en rango sin updates, que se puede resolver por ejemplo con una tabla aditiva en $O(N + Q)$

4 Subtarea 3

Solo hay instrucciones de tipo 1. (10 puntos)
Esta es similar a la anterior pero al agregar updates es necesario utilizar un Segment Tree para calcular la suma en rango. Esto lleva la complejidad a $O(N + Q * log(N))$. Es posible que soluciones con SQRT descomposition entren en $O(N + Q * N^{1/2})$

5 Subtarea 4

Solo hay instrucciones de tipo 2 y no hay operaciones de tipo 2 (5 puntos)
Si observamos como en la solución general que podemos modelar las rotaciones como la suma en Z_4, al solo poder rotar volvemos a tener una consulta de suma en rango sin updates que sale en $O(N)$ con una tabla aditiva.

6 Subtarea 5

Solo hay instrucciones de tipo 2. (10 puntos)
Ocurre lo mismo que con la subtarea 3 respecto de la 2, es la misma solución que la subtarea 4 pero agregando un Segment Tree o una SQRT descomposition para resolverlo en $O(N + Q * log(N))$ o en $O(N + Q * N^{1/2})$ respectivamente.

7 Subtarea 6

No hay operaciones de tipo 2 (25 puntos)
En este caso lo interesante es observar que si se la solución a un rango de instrucciones $[L, R]$ podemos obtener el resultado para $[L + 1, R]$.

La forma de hacer esto es observar que para cada instrucción existe una instrucción que es su inversa, es decir que al componerlas dan como resultado la instrucción neutra $((0,0),0)$.

- En el caso de las instrucciones tipo 1 $((M,0),0)$ su inverso es $((-M,0),0)$
- Para las instrucciones tipo 2 $((0,0),M)$ su inverso es $((0,0),(4-M)\%4)$

Así, si tengo $I_{[L,R]} = [L,R]$, y sea $inv(I_L)$ la inversa de la instrucción en posición L, $inv(I_L) o I_{[L,R]} = (inv(I_L) o I_L) o I_{[L+1,R]} = (neutra) o I_{[L+1,R]} = I_{[L+1,R]}$, donde $I_{[L+1,R]}$ es la respuesta para [L+1,R]

Con esta observación clave y al no haber updates es posible aplicar una Sparse Table para resolver el problema en $O((N+Q) * log(N))$ o el algoritmo de Mo para resolverlo en $O((N+Q) * N^{1/2})$