Vectores, Producto Cruz y sus aplicaciones

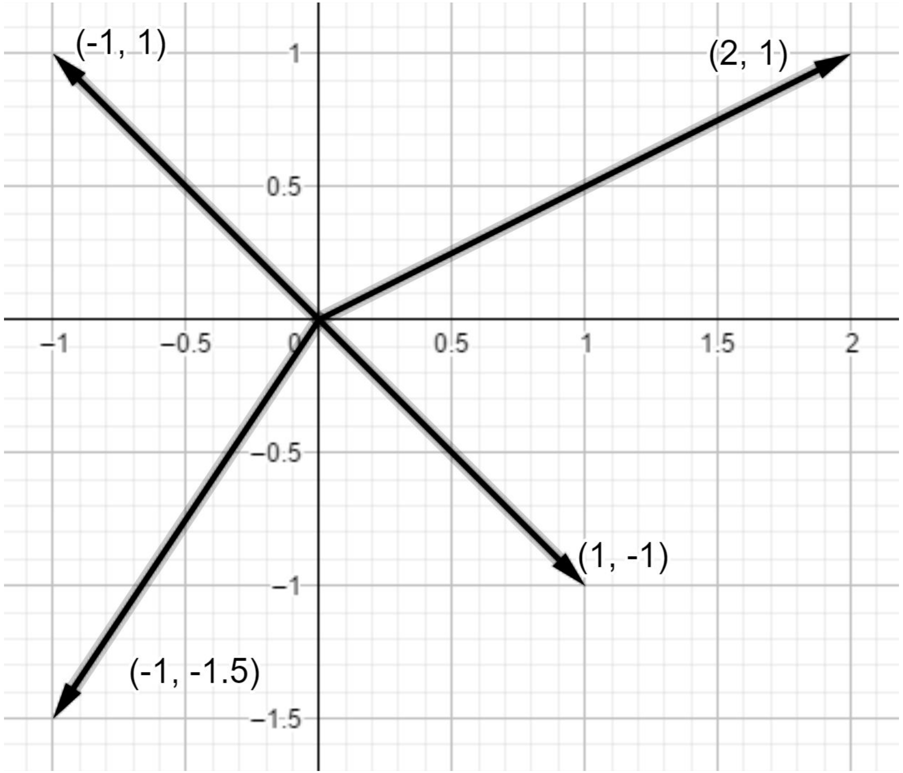
Por Lautaro Lasorsa
Curso O.I.A. UNLAM 2020

Vectores | 1 | Definición

Un vector, para lo que nos interesa a nosotros, es esencialmente una flecha en el plano o en el espacio, teniendo 2 y 3 componentes o coordenadas respectivamente.

Ejemplos de vectores son los de la imagen de al lado, con coordenadas (-1,1) , (2,1) , (-1,-1.5) y (1,-1).

Notar que los vectores y los puntos son, para nosotros, similares.

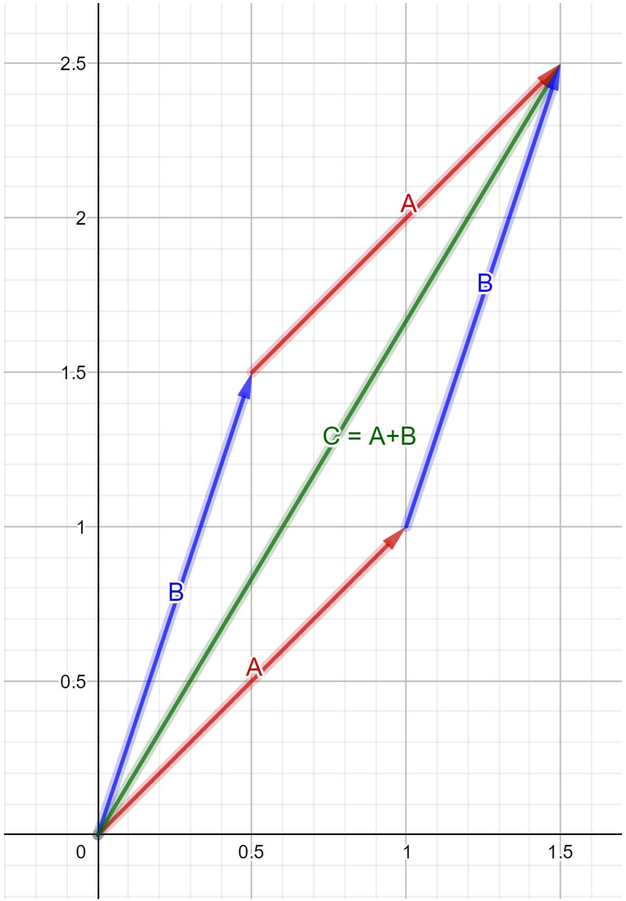


Vectores | 2 | Suma

Sean los vectores $A = (A_x, A_y)$ y $B = (B_x, B_y)$, puedo sumarlos sumando posición a posición. Entonces:

$$\boldsymbol{C = A + B = (A_x + B_x,\ A_y + B_y) = (C_x, C_y)}$$

Gráficamente esto se ve cómo tomar uno de los vectores y arrastrar su inicio hasta el final del otro. Ahora, el final del vector arrastrado apuntará a la suma de ambos vectores.

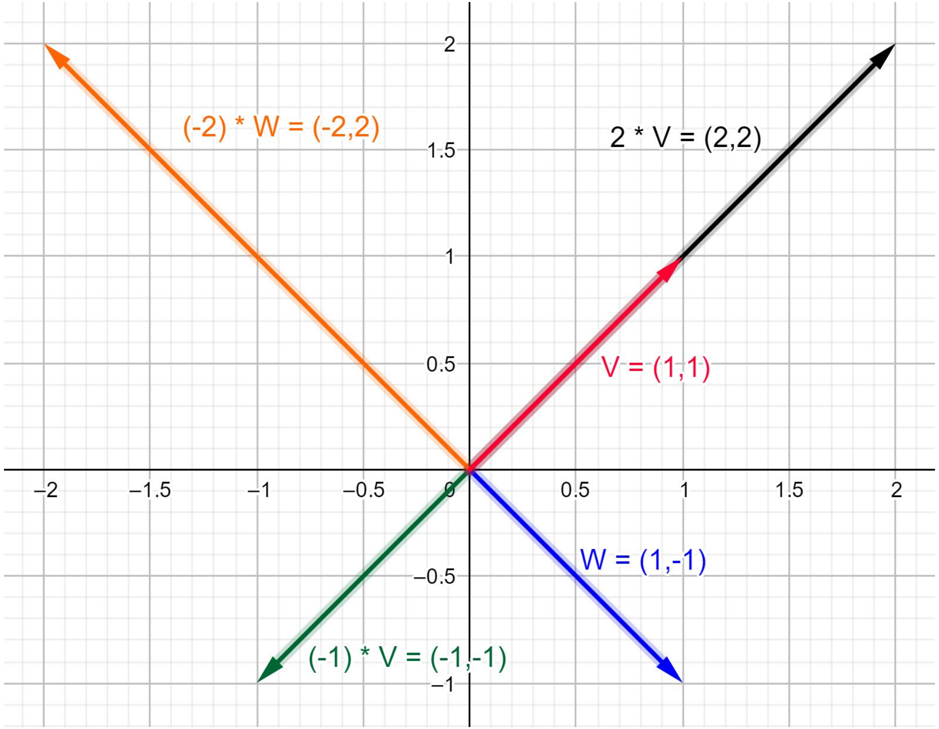


Vectores | 3 | Producto por Escalar

Dado un vector $V = (V_x, V_y)$ y un escalar (un número) K, entonces puedo multiplicar

$$K * V = V * K = (K * V_x, K * V_y)$$

Gráficamente implica cambiar el tamaño de V según $|K|$, y el signo de K indica si preserva su orientación o da un giro de 180°.

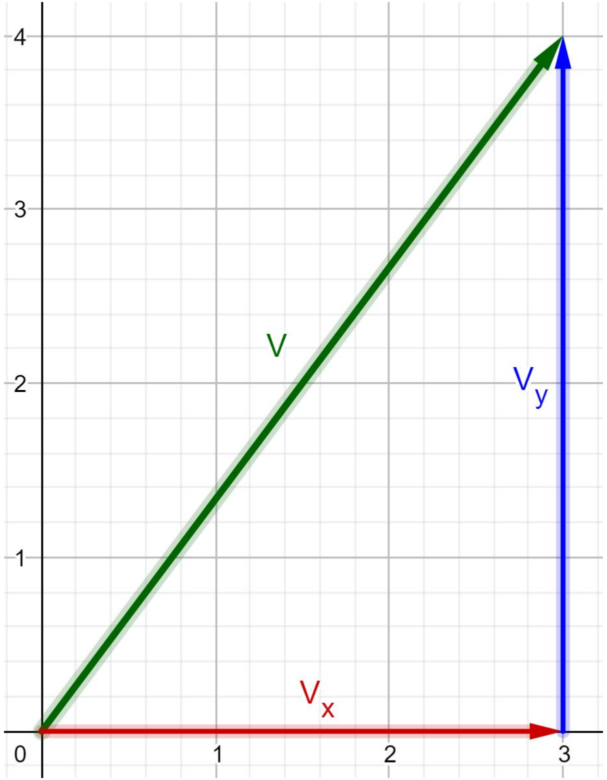


Vectores | 4 | Norma

Sea un vector $V = (V_x, V_y)$, se dice que la norma de V, o $|V|$, es el tamaño o longitud del vector V.

Utilizando el Teorema de Pitágoras podemos deducir que:

$$|V| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$



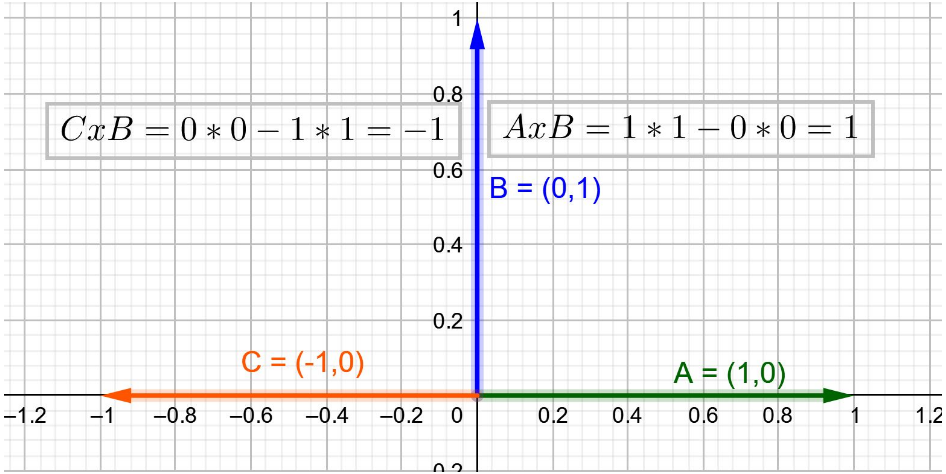
Producto Cruz | 1 | Definición

Dados dos vectores $A = (A_x, A_y)$ y $B = (B_x, B_y)$, definimos A x B el Producto Cruz entre *A* y *B* como:

$$\boldsymbol{A \times B = A_x * B_y - B_x * A_y}$$

Importante notar que *AxB* =/= *BxA*, es decir el producto cruz no es conmutativo.

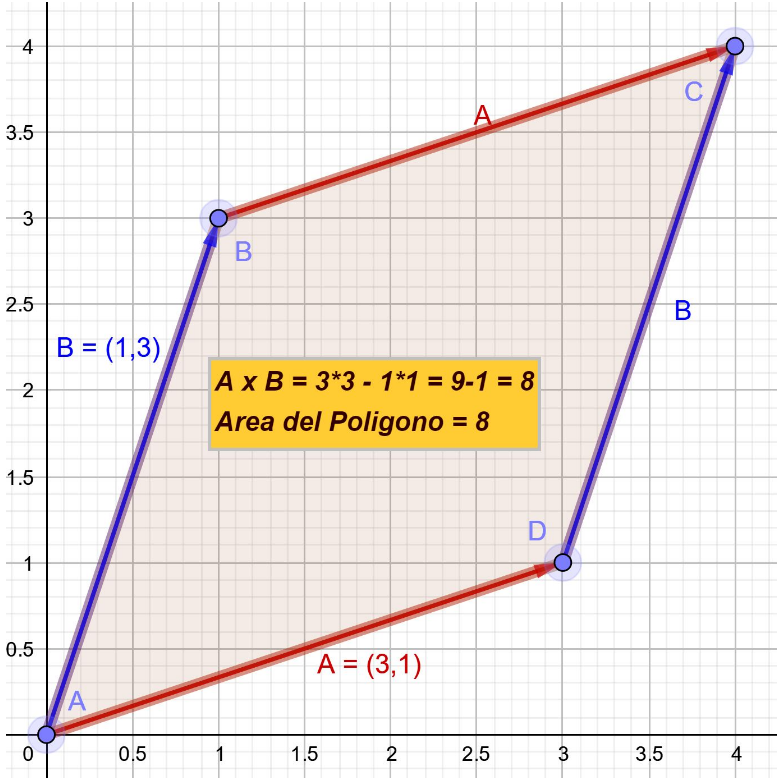
Es importante notar que *A x B > 0* si A está a la derecha de *B*, *A x B = 0* si están alineados (son multiplos) y *A x B < 0* si *A* está a la izquierda de *B*



Producto Cruz | 2 | Calculo de Area

Dados dos vectores $A = (A_x, A_y)$ y $B = (B_x, B_y)$, $|A \times B|$, el valor absoluto del producto cruz entre *A* y *B*, nos indica el área del paralelogramo formado por los puntos *(0,0)*, *A*, *B* y *A*+*B*.

Si queremos el área del triángulo de vértices *(0,0)*, *A* y *B*, tomamos $|A x B|/2$



Producto Cruz | 3 | Ordenar

Por lo anterior, podemos utilizar el producto cruz para ordenar un conjunto de vectores en función de su ángulo.

Es decir, podemos utilizar el producto cruz para ordenar los vectores V_1, V_2, V_3, ..., V_N, en orden horario / antihorario. Es decir, que V_1 esté a la izquierda de V_2, que esté a la izquierda de V_3, etc.

Para que el polígono quede bien ordenado, es necesario usar como pivote un vértice del mismo (es decir, ordenamos los demás V_i según el ángulo de V_i-*pivote*). En general el más abajo y más a la izquierda.

El siguiente código implementa este ordenamiento: https://pastebin.com/tU1zhZav

Producto Cruz | 4 | Calcular Area de un Polígono 1

Dados los puntos de un Polígono, ordenados según sus ángulos como vimos anteriormente, podemos calcular el área del polígono utilizando el producto cruz.

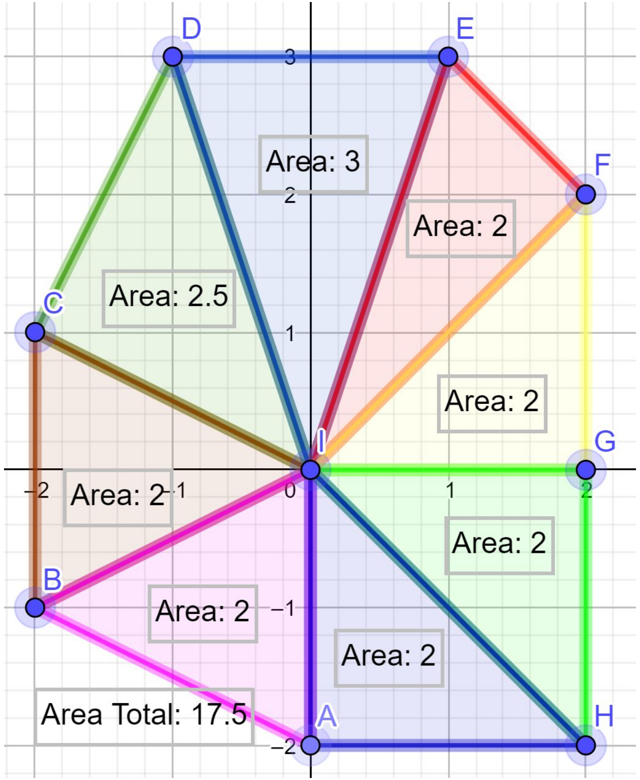
Primero tomamos un punto cualquiera O, que usaremos como pivote. Luego, para cada i, $0 <= i < N$, tomamos los vectores $A = V_i - O$ y $B = V_{(i+1)\%N} - O$, y tomamos $A \times B$. El módulo de la suma de estos productos cruz es igual al área del polígono.

Importante: Todos los productos tendrán el mismo signo si y sólo si el polígono es convexo y el punto O está contenido en el polígono.

Producto Cruz | 5 | Calcular Area de un Polígono 2

En el caso del polígono convexo, cuando *O* está contenido en el polígono, es fácil verlo triangulando el polígono. Porque tomando ese punto *O*, dividimos al polígono en triángulos y cada producto cruz calcula el área de uno de esos triángulos.

El siguiente código calcula el área de un polígono dado: https://pastebin.com/GkB2tJC0



Cápsula Convexa | 1 | Definición

Se define como polígono convexo a aquel que tiene todos sus ángulos interiores menores o iguales a 180°. Otra forma de pensarlo es que, para cualquier par de puntos contenidos en el polígono, el segmento de recta que los une está totalmente contenido en el polígono.

Dado un conjunto de puntos, se dice que su **Cápsula Convexa** es el mínimo polígono convexo que contiene (posiblemente como vértices o en el borde) a todos esos puntos.

Y, dado un conjunto de tamaño *N*, podemos obtener su cápsula convexa en *O(N*log(N))*

Cápsula Convexa | 2 | Algoritmo 1

Primero será necesario definir un pivote, que debe ser el más arriba / abajo / izquierda / derecha (debe tener a todos los demás en un mismo costado) y con ese pivote ordenar todos los demás puntos. Notar que el pivote será un vértice de la cápsula convexa.

El algoritmo greedy asume que el primer punto, de los demás puntos ordenados, pertenece a la cápsula convexa.

Cápsula Convexa | 3 | Algoritmo 2

Posteriormente, lo que hace es evaluar el resto de puntos en orden, y en cada paso mira lo siguiente:

Suponiendo que los 2 últimos puntos que agregue a la cápsula convexa son *A* y *B*, y quiero agregar el punto *C*, va a calcular $V = (B-A) \times (C-B)$. Si $V >= 0$, entonces esos lados forman un ángulo menor o igual a 180° y puedo agregar el punto *C* a la cápsula convexa.

En el caso contrario, eliminó al punto *B* de la cápsula convexa y repito el proceso hasta poder agregar el punto *C*.

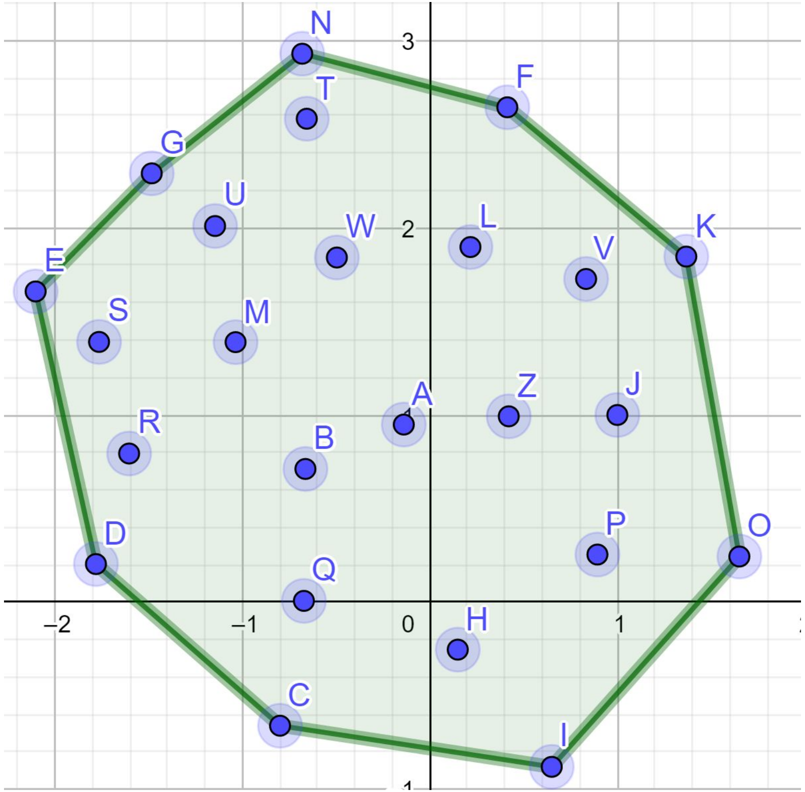
Implementación: https://pastebin.com/6bQcURqx

Cápsula Convexa | 4 | Ejemplo

En la siguiente imagen se muestra un ejemplo de cápsula convexa.

El siguiente código en HTML/JS realiza la cápsula convexa de un conjunto de puntos al azar y permite ver el proceso.

https://pastebin.com/Xmu25v1W



Gracias por ver