



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

MUY BIEN EXPLICADO EN GENERAL

Propuesta de mejora en la medición del bienestar económico: Consideración de la utilidad que cada individuo obtiene de sus ingresos

Tesis de Licenciatura en Ciencias de Datos

Lautaro Lasorsa

Director: Rodrigo Castro

Codirector: Walter Sosa Escudero

Buenos Aires, Argentina, 2024

PROPUESTA DE MEJORA EN LA MEDICIÓN DEL BIENESTAR ECONÓMICO

El uso del logaritmo del ingreso promedio como indicador del bienestar económico de una sociedad tiene diversos problemas. El presente trabajo propone un nuevo indicador, el promedio de los logaritmos de los ingresos, como mejor medición del bienestar económico. Comprobamos que, si los ingresos distribuyen en forma log-normal, esta puede ser aproximada con las encuestas de ingresos ya existentes. A su vez, comparamos si resulta en un mejor predictor de otras variables relacionadas al bienestar económico que la metodología original y que otras mediciones alternativas, corregir por desigualdades o tomar el logaritmo de la mediana, llegando a la conclusión de que estas mediciones alternativas se comportan de forma indistinguible a la medición propuesta en este trabajo, y que a su vez existe una cantidad significativa de casos donde el mejor predictor es el logaritmo del promedio de los ingresos. Esto se comprobó tanto para encuestas de ingresos como para encuestas de consumo (usando el consumo como proxy del ingreso)

Palabras claves: Ingresos, Bienestar económico, Medición, Correlación, Esperanza de Vida, Consumo.

AGRADECIMIENTOS

- **A mis padres:** Por haber hecho posible que yo llegué hasta este punto, por haberme apoyado en todo momento y por colaborar con la corrección de este trabajo.
- **A Maria, mi prometida:** Por su acompañamiento a lo largo de estos últimos años.
- **A mis directores, Rodrigo y Walter:** Por su predisposición y sus valiosos consejos para la realización de este trabajo.
- **A todos los docentes que he tenido a lo largo de mi vida:** Por lo que me han enseñado y su contribución a quién soy hoy.

A quien quiera leer esto, puesto que un escrito no tiene valor salvo en la medida que es leído.

Índice general

1.. Introducción	1
2.. Medición del Bienestar Económico	2
2.1. Definición y motivación	2
2.1.1. Definición	2
2.1.2. Motivación	2
2.2. Medición actual	3
2.2.1. Metodología	3
2.2.2. Ventajas	3
2.2.3. Desventajas	5
2.3. Medición alternativa actual: Corrección por desigualdad	5
2.4. Medición alternativa actual: Mediana de los ingresos	6
2.5. Propuesta de mejora: Medición ideal	6
2.5.1. Metodología	6
2.5.2. Ventajas	6
2.5.3. Desventajas	6
2.6. Propuesta de mejora: Mediciones aproximadas	7
2.6.1. Metodología	7
2.6.2. Ventajas	7
2.6.3. Desventajas	7
2.7. Consideraciones generales	7
3.. Técnicas a utilizar	8
3.1. Correlación de Pearson	8
3.2. Correlaciones no lineales	8
3.2.1. Correlación de Spearman	8
3.2.2. τ de Kendall	9
3.3. Bootstrap	9
4.. Datos sintéticos	10
4.1. Generación	10
4.2. Datos $LN(0, 1)$	11
4.3. Datos $LN(0, \sigma^2)$	12
4.3.1. Comportamiento condicional	12
4.3.2. Interacción con granularidad	15
4.3.3. Comportamiento no condicional	16
5.. Datos reales: Distribución de los ingresos	17
5.1. Datos disponibles	17
5.2. Distribución empírica	18
6.. Datos reales: Mejora de la capacidad predictiva	21
6.1. Hipótesis	21
6.2. Esperanza de Vida al Nacer (EVN)	21
6.3. Otros indicadores	29
6.3.1. Años esperados de educación	29
6.3.2. Suscripciones de celular cada 100 habitantes	29

7.. Conclusiones	32
7.0.1. Conclusión principal	32
7.0.2. Otras conclusiones	32
7.0.3. Falsación de las hipótesis	32
8.. Posibles trabajos futuros	33

1. INTRODUCCIÓN

Llamemos bienestar económico a la utilidad que los individuos obtienen de sus ingresos. Actualmente, para estimar el bienestar económico promedio de una sociedad se calcula el ingreso total de esa sociedad (obtenido por individuos, empresas y gobiernos), se lo corrige por el nivel de precios del país, se lo divide por la cantidad de habitantes y se calcula la utilidad que un individuo obtendría de tener esa cantidad de ingresos. El problema que tiene este indicador es que la función de utilidad no es lineal, por tanto no es lo mismo la utilidad que un individuo obtendría de tener el ingreso promedio que el promedio de la utilidad que los individuos obtienen de sus ingresos.

Alternativas para

Alternativas como corregir este indicador por la desigualdad tienen el problema de que la penalizan de forma artificial y no como un resultado natural de las ineficiencias económicas que genera. Otras alternativas, como la mediana o la proporción de la población que está debajo de cierto umbral, tienen el problema de sintetizar excesivamente la información y ser insensibles a grandes partes de la distribución.

En el presente trabajo, estudiamos si al estimar primero la utilidad que cada individuo obtiene de sus ingresos y luego tomar el promedio de estas utilidades obtenemos un mejor estimador, el cómo nos podemos aproximar a este indicador ideal con los datos disponibles y si nos permite predecir mejor otros indicadores socioeconómicos.

En el capítulo 2 se comparará la metodología actual para medir el bienestar económico de una sociedad y se propondrá una medición alternativa. En el capítulo 4 se buscará aplicar ambos métodos a un conjunto de datos sintéticos para comparar su comportamiento. En el capítulo 5 se comenta la disponibilidad de datos reales sobre distribución del ingreso, y en el capítulo 6 se busca comparar ambos indicadores (propuesto y actual) mediante su capacidad de predecir otras variables de interés, como la esperanza de vida al nacer. El capítulo 3 explica las distintas técnicas que se utilizarán en este trabajo, para quienes no las conozcan o quieran refrescarlas antes de seguir la lectura, y los últimos 2 capítulos son sobre las conclusiones y posibles trabajos futuros.

2. MEDICIÓN DEL BIENESTAR ECONÓMICO

En este capítulo se presenta la problemática a tratar en la tesis, se motiva su estudio y se comparan las formas actuales de medirlo con las alternativas propuestas.

2.1. Definición y motivación

2.1.1. Definición

En este trabajo definiremos el bienestar económico (BE) de un individuo como la utilidad que obtiene de sus ingresos. Es decir, el valor que puede obtener de los recursos económicos, principalmente monetarios, de los que dispone.

Sea W el nivel de ingresos de un individuo, modelamos la utilidad que obtiene de esos ingresos como $U = \log(W)$. Entonces, $BE = U(W) = \log(W)$

Es importante tener presente que si bien al definirlo como $BE = \log(W)$ estamos dando una definición constructiva que nos permite calcularlo a partir de los datos recabados, **está es una aproximación que realizamos al concepto en base al comportamiento que esperamos que tenga:**

- **Es creciente:** Esperamos que un mayor ingreso cause un mayor bienestar económico en el individuo que lo recibe. Formalmente, $W_1 \geq W_2 \rightarrow U(W_1) \geq U(W_2)$
- **Ley de utilidades marginales decrecientes:** Esperamos que, a partir de un valor W_1 , la utilidad marginal del ingreso sea decreciente. Formalmente:

$$\exists W_1 / \forall W \geq W_1, \epsilon > 0, U(W + \epsilon) - U(W) > U(W + 2 * \epsilon) - U(W + \epsilon)$$

no lleva tilde

Este es un comportamiento análogo a la especificación y la implementación de una función en programación, donde las expectativas que tenemos sobre el indicador (su definición conceptual) cumplen el rol de la especificación y la definición objetivamente medible cumple el rol de la implementación.

2.1.2. Motivación

La correcta medición del bienestar económico tiene diversas motivaciones, como por ejemplo:

- Es uno de los objetos de estudio elementales de las ciencias económicas.
- Permite medir el impacto de las políticas públicas.
- Es un insumo para otras disciplinas y puede utilizarse como predictora de otras variables de interés.

De estas motivaciones puede deducirse que tiene tanto un valor intrínseco (por sí mismo) como un valor instrumental, y que en conjunto vuelven a la correcta medición de este concepto un asunto de interés.

Notar que al ser un concepto al cuál aproximamos con una definición constructiva, hay 2 aspectos independientes:

- La calidad de la implementación que realicemos, es decir, qué tan bien captura la definición objetivamente medible las expectativas que tenemos sobre el concepto.
- La calidad de la medición de esta implementación.

De estos dos puntos, el presente trabajo propone posibles mejoras sobre el segundo, basándose en la definición empírica ya explicada. Sin embargo, al estudiar la correlación entre el bienestar económico y otras variables, ambos puntos tendrán impacto aunque solo el segundo se estudie explicitamente.

2.2. Medición actual

2.2.1. Metodología

La medición actual del *BE*, utilizada por ejemplo por el **Índice de Desarrollo Humano** [1] (HDI por sus siglas en inglés, Human Development Index), es mediante el logaritmo del promedio de los ingresos.

En el caso puntual del HDI utiliza como insumo el **GNI** (Gross Domestic Income, **GDI?** Ingreso Nacional Bruto) a Paridad de Poder Adquisitivo (PPA, PPP en inglés). Es decir:

$$HDI_{income} = \min(1, \frac{\ln(GNI \text{ per capita}) - \ln(100)}{\ln(75000) - \ln(100)})$$

Generalizándolo, dada una población de N individuos, cuyos ingresos son X_1, X_2, \dots, X_N , la medición actual del bienestar económico es:

$$BE(X) = \log\left(\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N X_i\right)$$

2.2.2. Ventajas

La principal ventaja de este método es a nivel logístico, dado que calcula el *BE* en base a una colección de datos que pueden ser calculados o estimados de forma independiente:

- **GNI PPP:** El ingreso total de los individuos del país, deflactado a la paridad de poder adquisitivo. Inclusive es posible calcular de forma separada el GNI **nominal** y el deflactor de PPP, pero también hay metodologías que apuntan directamente al valor GNI PPP utilizando cantidades en vez del valor **monetario** de los bienes y servicios.
- **Población:** La población de esa economía durante ese año. Usualmente se utiliza la cantidad de población a mitad del año.

Al estar estas métricas (GNI, deflactor, población) ya calculadas por tener interés en sí mismas, no supone una dificultad adicional obtener esta métrica derivada. Adicionalmente, es una metodología confiable ya que su confianza se deriva de la confianza que tenemos en la capacidad de medir las métricas base.

Además, las métricas base que se utilizan para calcular esta métrica tienen la ventaja adicional de ser valores aditivos. Es decir, cada uno de estos puede ser medido de forma independiente en subdivisiones de la economía a estudiar (por ejemplo las provincias de un país, y dentro de estas los municipios) y luego simplemente sumar las cantidades medidas por cada subdivisión para obtener la cantidad correspondiente al total de la economía.

A su vez, como el GNI se pueden descomponer en distintos componentes, estos componentes pueden calcularse independientemente.

Se puede hacer esto utilizando que $GNI = GDP + EX_{net}$, donde:

- GDP (Gross Domestic Product, Producto Interior Bruto) es la producción total de bienes y servicios en el país
- EX_{net} es el neto de pagos y transferencias (salvo importaciones y exportaciones, que se incluyen en el GDP) hacia el exterior (donde el signo positivo indica que a la economía ingresó más dinero del que salió)

Y a su vez podemos descomponer al principal sumando, el GDP, en sus componentes de dos maneras distintas, utilizando la Perspectiva de los Gastos y la Perspectiva de los ingresos.

Perspectiva de Gastos

$$GDP = C + I + G + (X - M)$$

Donde:

- C = Consumo
- I = Inversión
- G = Gasto del gobierno
- X = Exportaciones
- M = Importaciones

Perspectiva de los ingresos

$$GDP = S + B + R + I + II + D - SU$$

Donde:

- S = Salarios
- B = Beneficios empresariales
- R = Rentas (alquileres)
- I = Intereses
- II = Impuestos Indirectos (ejemplo: IVA)
- D = Depreciación de bienes de capital
- SU = Subsidios

El tener estos dos enfoques permite:

- Descomponer el cálculo del GNI en muchas variables chicas que se pueden medir de forma especializada y tienen interés en sí mismas. Por tanto, se vuelve en sí mismo una estadística derivada de otras.

- Al tener 2 métodos independientes de calcular el GDP, que es el factor más importante en el computo del GNI, es posible detectar y corregir errores e inconsistencias en las mediciones.

En síntesis, la medición actualmente utilizada supone una gran cantidad de ventajas en materia lógistica y de ser consecuencia de otra batería de mediciones con interés en si mismas.

2.2.3. Desventajas

Hay un primer problema que podemos observar en esta metodología y es que el GNI incluye también los ingresos empresariales y del gobierno, mientras que el *BE* lo definimos a nivel de individuos y sus ingresos personales. Sin embargo, como las empresas y gobiernos pueden utilizar estos recursos para proveer bienes y servicios a las personas (que a estas no se les imputan dentro de sus ingresos personales, por ejemplo la educación pública no arancelada), este alejamiento de la definición que dimos originalmente puede permitir capturar mejor el bienestar económico de una sociedad.

Sin embargo, hay otro problema que en principio es más importante a tener en cuenta. La utilidad marginal decreciente se aplica en los ingresos de cada individuo y no en los ingresos agregados de la sociedad. Por tanto, es importante aplicar la función de utilidad (U , en este caso \log) a los ingresos de cada individuo y no al promedio de los ingresos. Y lo importante es que **el logaritmo del promedio no es el promedio de los logaritmos**

Es esta última desventaja la que este trabajo busca subsanar proponiendo una medición alternativa, y a su vez evaluar que mejoras ofrece dicha alternativa frente a la metodología actual.

2.3. Medición alternativa actual: Corrección por desigualdad

Reconociendo que una de las falencias del método para calcular el HDI es la insensibilidad frente a la desigualdad, el informe de la UNDP (United Nations Development Programme) también incluye el *IHDI* (Índice de Desarrollo Humano ajustado por Desigualdad). En este se define una métrica de penalización para cada indicador:

$$A_X = 1 - \frac{\sqrt[N]{\prod_{i=1}^N X_i}}{\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N X_i}$$

Así, si el GNI PPP per cápita de un país en el año 2024 fue X , su puntaje de ingresos para el *HDI* sería $HDI_{income} = \min(1, \frac{(\log(X) - \log(100))}{(\log(75000) - \log(100))})$, y su puntaje de ingresos para el *IHDI* sería $IHDI_{income} = (1 - A_{income}) * HDI_{income}$

El principal problema achacable a esta métrica es que la penalización de la desigualdad surge de la propia definición (exógena) de la misma y no como una consecuencia natural (endógena) de las inefficiencias que esta causa en la economía y en el bienestar de los individuos.

Generalizando, esta genera una métrica tal que :

Es confuso cual es el problema y cual la causa

$$BE_I(X) = \frac{\sqrt[N]{\prod_{i=1}^N X_i}}{\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N X_i} * \log\left(\frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N X_i\right)$$

2.4. Medición alternativa actual: Mediana de los ingresos

Una alternativa para aportar robustez es utilizar la mediana de los ingresos en vez de la media. El problema de este indicador es que descarta demasiada información de la muestra. Dada una distribución del ingreso, cualquier modificación en los ingresos **de a aquellos** que están por sobre la mediana de los ingresos será ignorada por el indicador, así como cualquier modificación de aquellos que tienen menos ingresos que no sea lo suficientemente significativa para llevarlos a un nivel de ingresos superior a la mediana actual.

Generalizando, esto resulta en:

$$BE_M(X) = F_X^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donde F_X es la función de densidad acumulada de X (es decir, dado un valor a , $F_X(a)$ nos da la proporción de valores de X menores a a), y F_X^{-1} es su inversa (de no ser invertible la función, da el mínimo de la preimagen)

2.5. Propuesta de mejora: Medición ideal

2.5.1. Metodología

Dada una población X de N individuos cuyos ingresos son X_1, X_2, \dots, X_N , definimos el Bienestar Económico (promedio) de esa población como:

$$BE(X) = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N \log(X_i) = \log\left(\sqrt[N]{\prod_{i=1}^N X_i}\right)$$

2.5.2. Ventajas **Que es la "medicion exacta"?. La ventaja?**

Es la medición exacta de la definición que propusimos de Bienestar Económico. Por tanto, es la mejor aproximación a dicho concepto. Lo que tiene especial sentido si pensamos que los ingresos son un instrumento para obtener bienestar y no el bienestar en sí mismo, y eso es lo que se busca reflejar al aplicarles una función de utilidad distinta de la identidad.

Adicionalmente, al contemplar que un aumento en los ingresos de individuos que ya tienen altos ingresos les genera un menor beneficio marginal que aumentar en la misma cantidad absoluta los ingresos de individuos de menores ingresos, esta métrica refleja la eficiencia de la distribución del ingreso en una sociedad.

De esta forma, esta métrica premia simultáneamente un aumento de la productividad de una economía como una distribución más eficiente de la misma.

2.5.3. Desventajas

La principal desventaja de esta metodología es la contracara de la ventaja de la metodología actual, la logística. En este caso llega al punto de la infactibilidad, puesto que para poder realizar el cálculo propuesto es necesario conocer los ingresos de cada uno de los individuos, algo que es logisticamente imposible.

2.6. Propuesta de mejora: Mediciones aproximadas

2.6.1. Metodología

Debido a la imposibilidad fáctica de aplicar la metodología ideal propuesta en este trabajo, es necesario buscar aproximaciones con los datos disponibles.

De esta forma podemos introducir el concepto de **Granularidad** de una medición, G .

Sea una población X de N individuos, cuyos ingresos son X_1, X_2, \dots, X_N , con $X_i \leq X_{i+1} \forall 1 \leq i < N$, y sea la granularidad G , tal que $N = G * T$, definimos $BE_G(X)$ como:

$$BE_G(X) = \frac{1}{G} * \sum_{i=0}^{G-1} \log\left(\frac{1}{T} \sum_{j=i*T}^{(i+1)*T-1} X_j\right)$$

De esta definición se pueden reescribir la medición actual, utilizando el promedio de los ingresos de los individuos, como BE_1 y la medición ideal antes propuesta como BE_N . Si en lugar del promedio de los ingresos de los individuos, utilizamos el GNI (que también incluye ingresos de las empresas y del gobierno), lo llamaremos BE_{GN1}

2.6.2. Ventajas

Esta metodología tiene, parcialmente, las ventajas tanto de la metodología ideal propuesta como de la metodología actual:

- $\exists G > 1$ para el cuál la metodología es logisitcamente factible. Puede calcularse en base a encuestas de ingresos como la EPH (Encuesta Permanente de Hogares).
- Modera más que BE_1 el impacto de los outliers (ultra ricos) muy gracioso pero queda feo en la medición del bienestar económico, ya que solo impactan de forma líneal en el último de los G grupos en los que se divide la población.

2.6.3. Desventajas

Tiene la desventaja de ser una solución de compromiso, y justamente parte del interés de este trabajo es ver, para valores logisticamente factibles de G , cuál es la diferencia entre BE_G y BE_N .

2.7. Consideraciones generales

Todas las metodologías propuestas coinciden para una sociedad con una distribución perfectamente igualitaria de los ingresos.

A su vez, si asumimos que los ingresos tienen una distribución log-normal $LN(\mu, \sigma^2)$, como sugiere (Gibrat, 1931)[2], tanto la medición ideal propuesta como el logaritmo de la mediana de los ingresos son estimadores insesgados de μ .

3. TÉCNICAS A UTILIZAR

En este capítulo se explicarán las técnicas que se utilizarán a lo largo del trabajo para analizar los datos, tanto sintéticos como reales, y obtener conclusiones de los mismos.

3.1. Correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson se utiliza para medir la similitud lineal entre 2 variables. Se define como:

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X * \sigma_Y}$$

Donde $Cov(X, Y)$ es la covarianza entre ambas variables, y σ_X y σ_Y son los desvios estandar de las mismas. Este indicador tiene varias propiedades interesantes:

- Si planteamos el modelo $Y = \alpha * X + \beta$, para los valores $\alpha*$ y $\beta*$ que minimizan el MSE (Mean Square Error):
 - $R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - X_i * \alpha * + \beta)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \mu_Y)^2}$
 - $R^2 = (r(X, Y))^2$

Es decir, captura la capacidad predictiva (en sentido estadístico) del modelo lineal $Y = \alpha * X + \beta$

- Podemos tratar a L^2 (variables aleatorias con segundo momento finito) como un espacio vectorial euclídeo donde:
 - $Cov(X, Y)$ es el producto interno entre X e Y
 - $Var(X) = Cov(X, X)$ es la norma cuadrada de X . Analogamente, $std(X) = \sigma_X = \|X\|$
 - $r(X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| * \|Y\|}$ es el coseno del ángulo entre X e Y .

Esto reafirma su interpretación como medida de similitud entre las variables.

3.2. Correlaciones no lineales

Notar que la correlación de Pearson solo captura relaciones lineales entre las variables, y si queremos capturar otras posibles relaciones (por ejemplo, $Y = \log(X)$) corresponde utilizar otras métricas, como son la correlación de Spearman y la τ de Kendall.

3.2.1. Correlación de Spearman

Sea $rank_X[x]$ la función que dado un individuo nos dice su índice en la población ordenada,

$$Spearman(X, Y) = 1 - \frac{6}{N * (N^2 - 1)} * \sum_{i=1}^N (rank_X[X_i] - rank_Y[Y_i])^2$$

3.2.2. τ de Kendall

$$\tau(X, Y) = \frac{2}{N * (N - 1)} * (P_C - P_D)$$

Donde

- $P_C = ||\{(i, j) | i < j \wedge ((X_i < X_j) \wedge (Y_i < Y_j)) \vee (X_i > X_j) \wedge (Y_i > Y_j)\}||$ son los pares que tienen la misma relación ordinal en X y en Y .
- $P_D = ||\{(i, j) | i < j \wedge ((X_i < X_j) \wedge (Y_i > Y_j)) \vee (X_i > X_j) \wedge (Y_i < Y_j)\}||$ son los pares que tienen distinta relación ordinal en X que en Y .

Una forma alternativa de escribirla es:

$$\tau(X, Y) = \frac{2}{N * (N - 1)} * \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} (\text{signo}(X_i - X_j) * \text{signo}(Y_i - Y_j))$$

3.3. Bootstrap

Bootstrap es una técnica que consiste en utilizar los datos de una muestra para estimar la distribución de la misma, en base a esa estimación generar datos sintéticos y estudiar sobre esos datos sintéticos la distribución del indicador de interés.

En el caso de este trabajo se utilizará bootstrap no paramétrico de la siguiente forma:

Dada una muestra M de N individuos M_1, M_2, \dots, M_N , una nueva muestra se generará tomando N elementos de M con reposición (es decir, al seleccionar un elemento de M para incluirlo en nuestra nueva muestra, no lo eliminamos de M), y aplicamos el indicador (por ejemplo, la correlación entre 2 dimensiones de los individuos) a la población simulada.

PORQUE SE NECESITA USAR BOOTSTRAPPING SI USAS DATOS SINTÉTICOS

4. DATOS SINTÉTICOS

En este capítulo se utilizan datos simulados para explorar características de los indicadores (existentes y propuestos) en sí mismos.

4.1. Generación

Para la generación de los datos se modela la distribución del ingreso en una sociedad como $\logNorm(\mu, \sigma^2)$, basándose en (Gibrat, 1931)[2]. Es decir, sea X una población con N individuos cuyos ingresos son X_1, X_2, \dots, X_N , las variables X_i son IID (independientes e identicamente distribuidas) y $X_i \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

Recordar que

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2) \iff \log(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Notar que bajo esta distribución:

- El bienestar económico tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$
- $BE_N(X)$ es un estimador insesgado de μ

La metodología consistió en lo siguiente:

- Generar poblaciones con $N = 1,000,000$ individuos cada una.
- Ordenar a los individuos de la población, en orden creciente de ingresos.
- Para cada población X^i y para cada divisor G de N , calcular $BE_G(X^i)$
- Almacenar para posterior uso los valores $BE_j^i = BE_{G_j}(X^i)$

Notar que todas las observaciones y todas las poblaciones generadas son independientes entre si.

Como modificar μ es lo mismo que multiplicar a todos los X_i por $e^{\Delta\mu}$, utilizaremos $\mu = 0$ para la generación de datos sintéticos.

Respecto del valor de σ^2 , se generaron 2 datasets:

- **Datos $LN(0, 1)$:** Un dataset donde $X_i \sim LN(0, 1)$, para el que se simularon 20,000 poblaciones.
- **Datos $LN(0, \sigma^2)$:** Un dataset donde se tomaron diversos valores de σ^2 , en el cual se simularon 1,000 poblaciones para cada valor entero de σ^2 entre 1 y 10, generando 10,000 poblaciones en total.

La generación de datos se paralelizó utilizando GPU mediante CUDA[3].

4.2. Datos $LN(0, 1)$

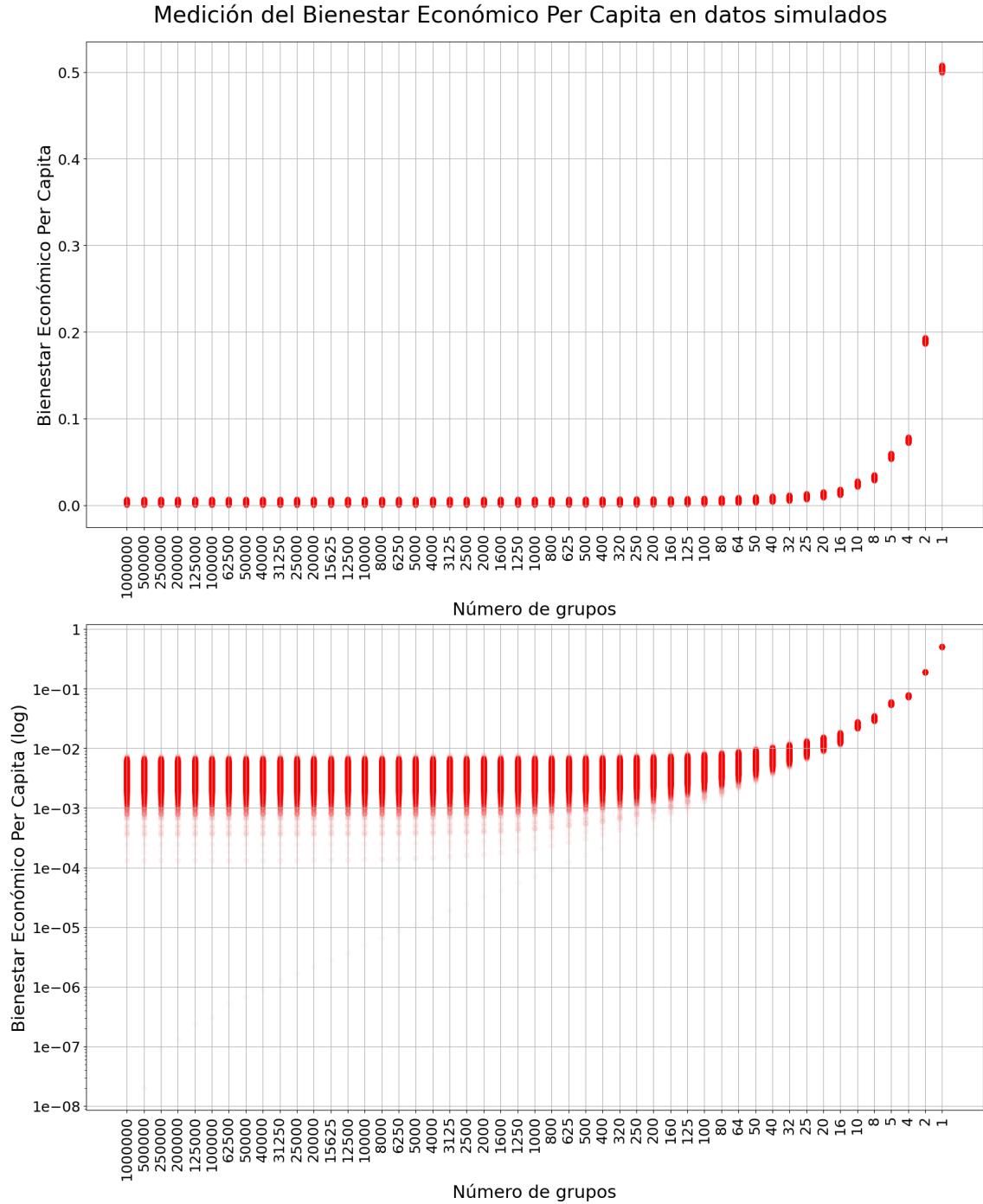


Fig. F4.1: Distribución de BE_j^i , donde el eje X es la granularidad (cantidad de grupos) de la medición. Para facilitar la visualización, a cada elemento se le restó el mínimo de todo el dataset

Como puede verse en F4.1, al tener más de 200 grupos es difícil distinguir las distintas distribuciones, inclusive en escala logarítmica. A su vez, se nota que cuando la granularidad es baja, cada aumento de granularidad acerca significativamente BE_{G_j} a BE_N

Esto nos permite formular la primera de las hipótesis del presente trabajo:

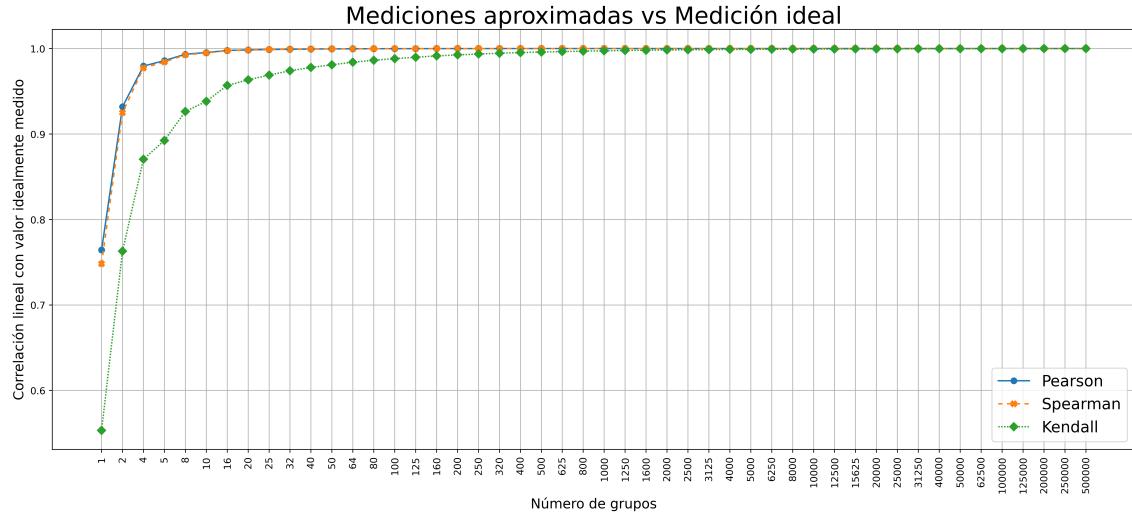
Hipótesis H4.1 (Mejora de la granularidad). *Sea P un conjunto de poblaciones, donde*

cada $P_i \in P$ es una población de N individuos $P_{i,j}$ ($1 \leq j \leq N$), con $P_{i,j}$ variables IID y $P_{i,j} \sim LN(0, 1)$, y sean G_1, G_2 tales que $G_1|N, G_2|N, G_1 < G_2$, entonces $\exists N_0 / \forall N > N_0$, $Pearson(BE_{G_1}, BE_N) < Pearson(BE_{G_2}, BE_N)$ para casi toda población P .

Para el intento de falsación empírica de esta hipótesis, es necesaria la hipótesis auxiliar de $N_0 \leq 1,000,000$

no puede ser empírica si tenes datos simulados

Como puede verse en la figura F4.2, la hipótesis H4.1 resulta verosímil con los datos simulados con distribución $LN(0, 1)$



expandir mejor esta definición, mostrar que elementos dependen de N_0

$\exists N_0 / \forall N > N_0, \text{Pearson}(BE_{G_1}, BE_N) < \text{Pearson}(BE_{G_2}, BE_N)$ para casi toda población P

Para la falsación **empírica** de esta hipótesis, es necesaria la hipótesis auxiliar de $N_0 \leq 1,000,000$
no seria empírica

Notar que la hipótesis H4.2 es una generalización no trivial de H4.1 ya que modificar el σ^2 tiene efectos no lineales en la distribución.

Como puede verse en la figura F4.3, esta hipótesis generalizada también resulta verosímil con los datos generados.

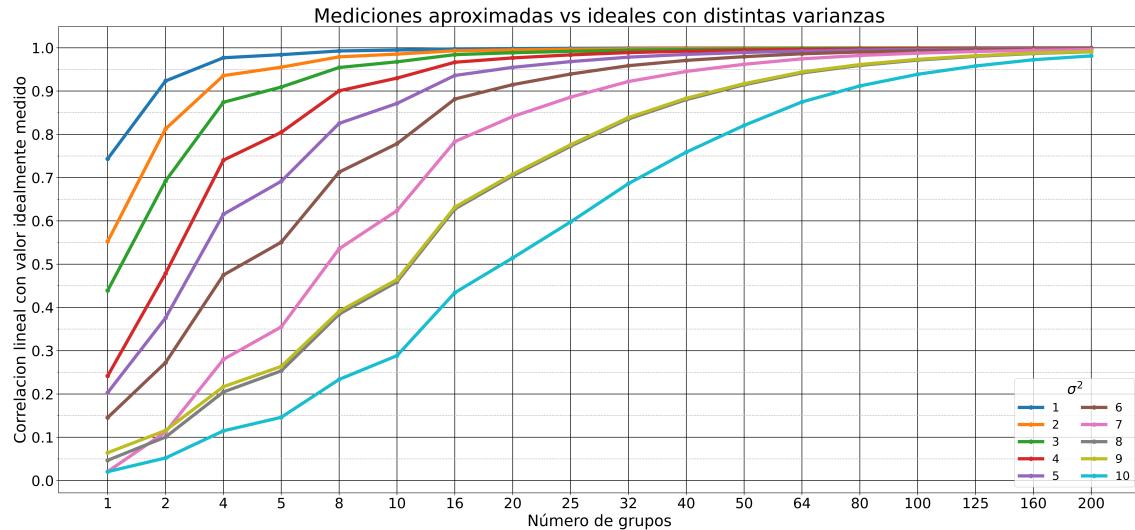


Fig. F4.3: Aplicación de métrica de correlación lineal entre BE_G y BE_N para todos los $G|N$ en muestras $LN(0, \sigma^2)$ con $N = 10^6$, condicional a distintos valores de σ^2

Algo que podemos notar observando F4.3 es que para varianzas altas la correlación lineal entre las granularidades bajas y la medición ideal es notablemente baja.

Esto puede apreciarse mejor en F4.4 , donde podemos ver que mientras que BE_1 y BE_N tienen una tendencia marcada para $\sigma^2 = 1$, para $\sigma^2 = 10$ se comportan como variables **prácticamente** independientes.

prácticamente

Distribución conjunta con distintas varianzas y cantidades de grupos

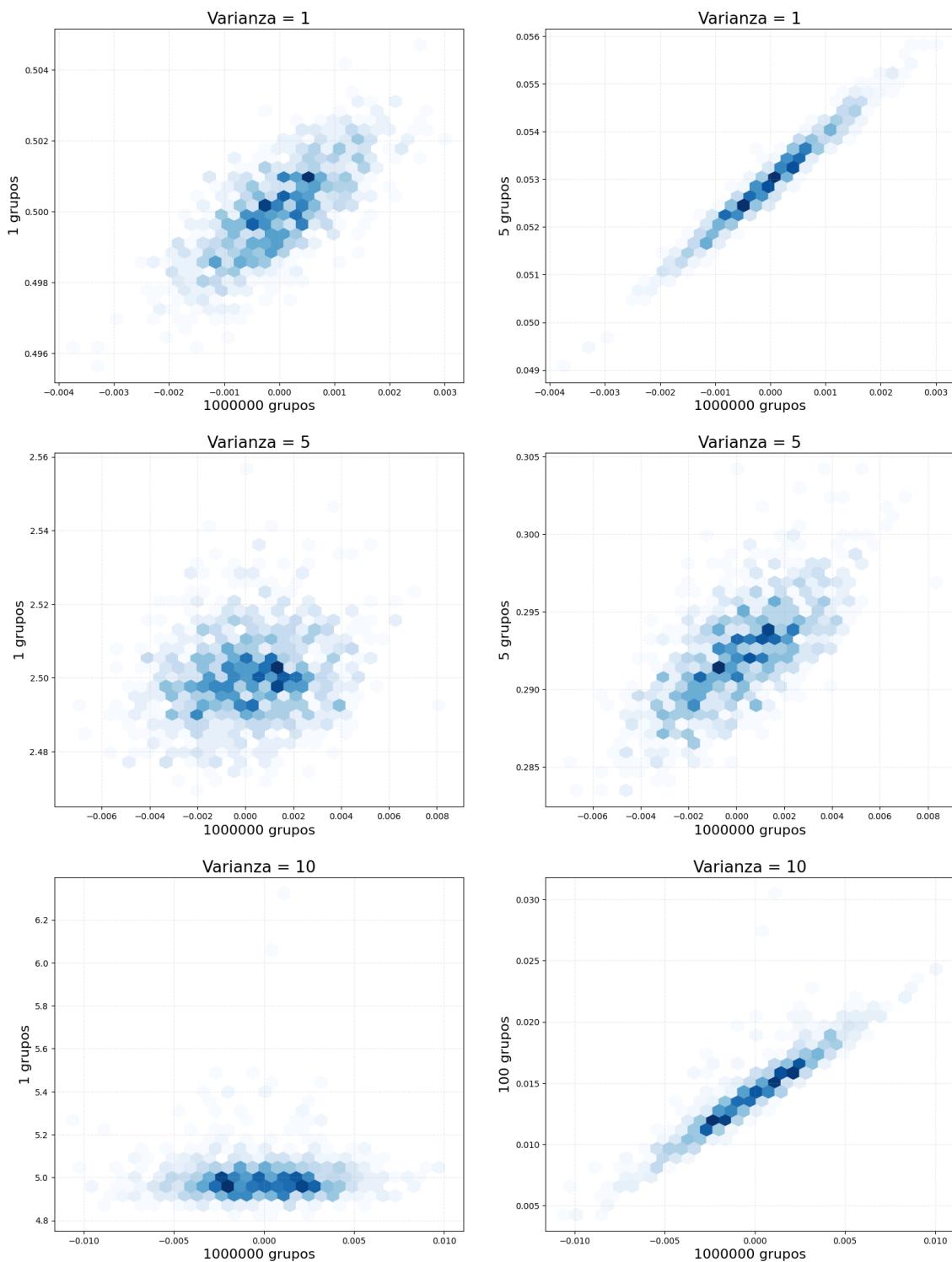


Fig. F4.4: Dispersión conjunta de las métricas entre distintas granularidades, condicional a distintos valores de σ^2 . Puede verse como la correlación entre las distintas granularidades (ejes X e Y de cada gráfico) disminuye al aumentar la varianza (indicada en el título de cada cuadro)

4.3.2. Interacción con granularidad

Lo observado en F4.3 y F4.4 nos puede llevar a proponer una hipótesis ambiciosa sobre la relación entre la varianza de la población y la granularidad de la medición:

Hipótesis H4.3 (Relación entre granularidad y varianza). *Sean:*

- P un conjunto de poblaciones, donde cada $P_i \in P$ es una población de N individuos $P_{i,j}$ ($1 \leq j \leq N$), con $P_{i,j}$ variables IID y $P_{i,j} \sim LN(0, \sigma_P^2)$
- Q un conjunto de poblaciones, donde cada $Q_i \in Q$ es una población de N individuos $Q_{i,j}$ ($1 \leq j \leq N$), con $Q_{i,j}$ variables IID y $Q_{i,j} \sim LN(0, \sigma_Q^2)$, con $\sigma_Q^2 > \sigma_P^2$
- $G_1, G_2 \in Divs(N)$, con $G_1 \neq G_2$.

expandir mejor esta definicion, mostrar que elementos dependen de N y N_0

Entonces, $\exists N_0 / \forall N > N_0$, $Pearson_P(BE_{G_1}, BE_{G_2}) > Pearson_Q(BE_{G_1}, BE_{G_2})$, $\forall G_1, G_2 (G_1 \neq G_2)$ y para casi toda tupla (P, Q) .

Para la falsación empírica de esta hipótesis, es necesaria la hipótesis auxiliar de $N_0 \leq 1,000,000$ no seria empirica

Sorprendentemente, la hipótesis H4.3 resulta ser inverosímil con los datos, como puede verse en la figura F4.5, y también lo es si cambiamos $Pearson_P(BE_{G_1}, BE_{G_2}) > Pearson_Q(BE_{G_1}, BE_{G_2})$ por $Spearmann_P(BE_{G_1}, BE_{G_2}) > Spearmann_Q(BE_{G_1}, BE_{G_2})$, como puede verse en F4.6

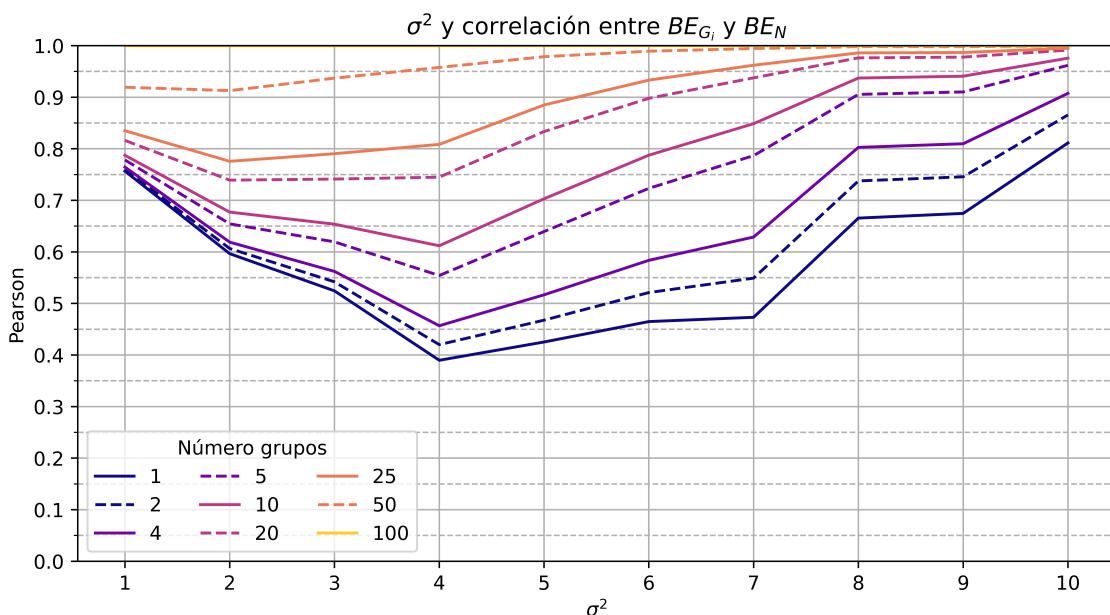


Fig. F4.5: En los datos simulados con diversas varianzas, la $Pearson(BE_i, BE_{100} | \sigma^2)$, donde cada serie representa un nivel de granularidad y el eje X los distintos σ^2

Observando F4.5 y F4.6 podemos también notar que:

- Para un mismo valor de σ^2 , aumentar la granularidad siempre mejora la correlación con el caso en el que tomamos 100 grupos. Esto es verosímil con H4.2
- Las series tienen un comportamiento similar, no en nivel pero si en cambio, frente a los cambios en σ^2

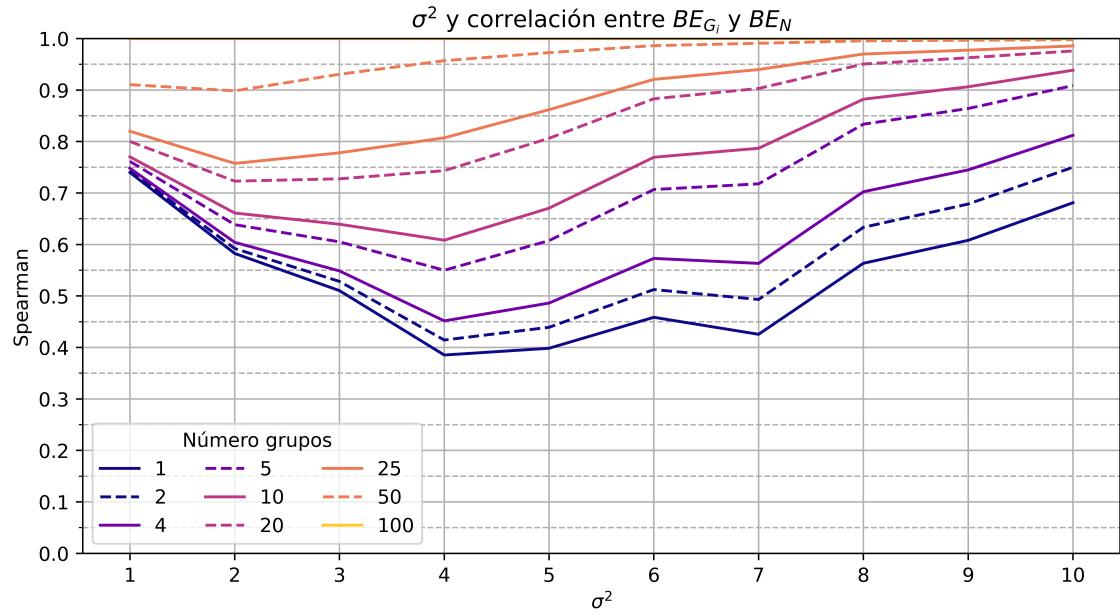


Fig. F4.6: En los datos simulados con diversas varianzas, la $Spearman(BE_i, BE_{100}|\sigma^2)$, donde cada serie representa un nivel de granularidad y el eje X los distintos σ^2

4.3.3. Comportamiento no condicional

Lo estudiado en H4.2 nos lleva a preguntarnos cómo se comporta la correlación entre granularidades cuando tenemos diferentes σ^2 coexistiendo en la misma muestra.

Lo observado en F4.7 nos indica que tener poblaciones con distintas σ^2 aumenta enormemente la correlación entre las distintas granularidades.

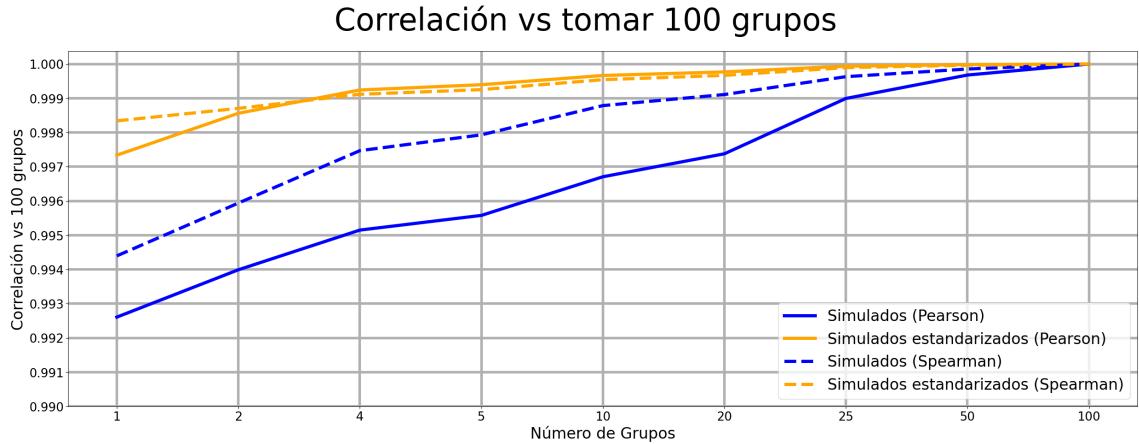


Fig. F4.7: En los datos simulados con diversas varianzas, $Spearman(BE_i, BE_{100})$, donde el eje X son las distintas granularidades (cantidad de grupos). Notar que el eje Y está en el rango [0.99,1]. La serie **simulados estandarizados** corresponde a, para una población P_i , restarle a cada $BE_{G_j}(P_i)$ el valor de $BE_N(P_i)$, para evitar que medias poblacionales ligeramente distintas (en los logaritmos) influyan en la correlación. Lo notable es que hacer esto aumenta la correlación en vez de reducirla.

Esta característica lleva a pensar que en el caso empírico, como no tenemos a lo países agrupados por σ^2 , va a haber una correlación fuerte entre las distintas granularidades.

5. DATOS REALES: DISTRIBUCIÓN DE LOS INGRESOS

En esta sección se utilizan datos reales de distribución del ingreso de distintos países y años para estudiar su distribución y compararlos con los datos sintéticos antes generados.

5.1. Datos disponibles

Se utilizarán datos del Banco Mundial [4] sobre distribución del ingreso en diversos países. Esta base de datos está construida en base a encuestas aportadas por los países, y tiene una granularidad al nivel de los percentiles.

Sobre este dataset, hay que tener en cuenta 2 aspectos importantes:

Alcance de la encuesta:

- Nacional
 - Urbano
 - Rural
- únicamente**

En este caso, se utilizarán **únicamente** los registros de alcance nacional y se ignorarán las encuestas que tienen solo alcance urbano o rural.

Tipo de encuesta

- Ingresos
 - Consumo
- sí**

Como estas dos metodologías son incompatibles entre **sí**, todos los análisis se harán por separado para cada uno de los tipos de encuestas.

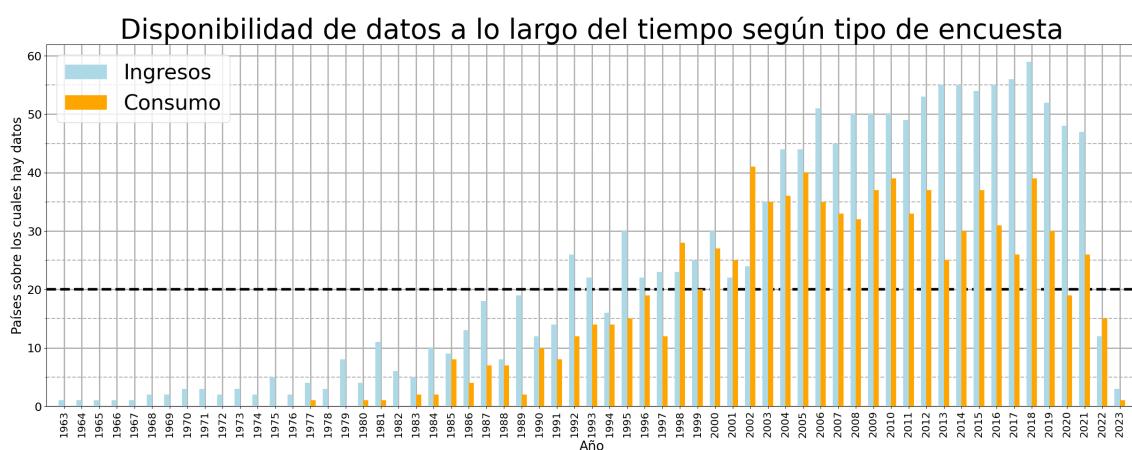


Fig. F5.1: Disponibilidad de las encuestas de ingresos y consumo a lo largo de los años

Como puede verse en F5.1, la disponibilidad de datos sobre la distribución del ingreso es irregular y ha aumentado en los últimos años. Para que la muestra sea significativa, solo se utilizarán los años para los cuales haya al menos 20 países con datos disponibles para ese tipo de encuesta.

5.2. Distribución empírica aca si va empírica

Se estudian las distribuciones empíricas disponibles y se las compara con los datos sintéticos generados en el capítulo anterior.

Correlación vs tomar 100 grupos

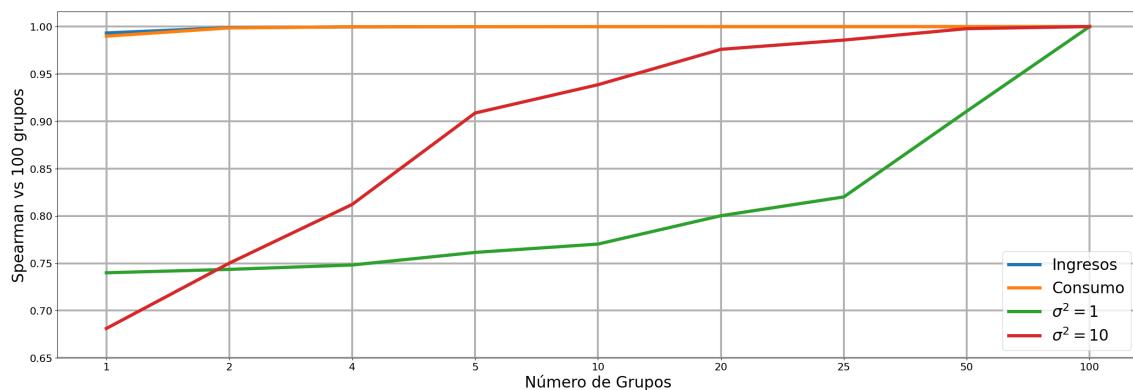
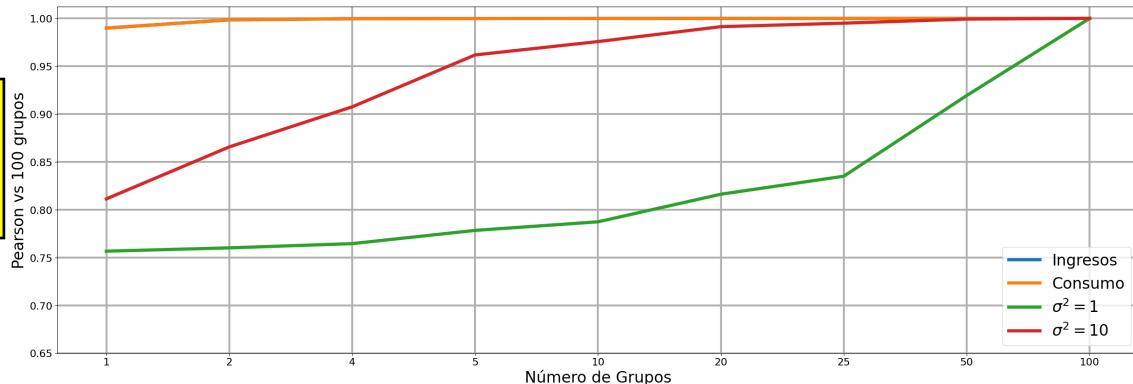


Fig. F5.2: Correlaciones de Pearson y Spearman entre BE_1 y BE_{100} en los datos reales (separados entre ingresos y consumo) y los datos simulados de $\sigma^2 = 1$ y $\sigma^2 = 10$. Se ve que en los datos reales la correlación es mucho mayor

Correlación vs tomar 100 grupos

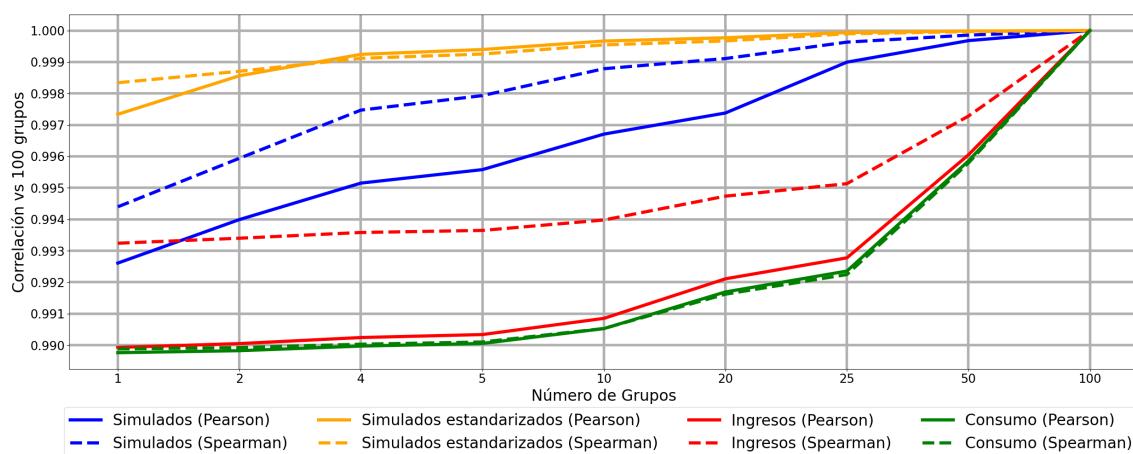


Fig. F5.3: Correlaciones de Pearson y Spearman entre BE_1 y BE_{100} en los datos reales (separados entre ingresos y consumo) y en los datos simulados sin condicionar por σ^2 . Se observa una mayor similitud entre ambas capacidades predictivas

Como puede verse en F5.2 y F5.3, la correlación entre las mediciones del bienestar económico sobre los datos reales condice más con lo observado en los datos sintéticos sin condicionar por σ^2 que cuando se condiciona por σ^2 . Lo interesante, que puede observarse en F5.4 y F5.5 es que cuando se condiciona por año este fenómeno se mantiene. Esto nos lleva a pensar que esa capacidad predictiva no es debido a una correlación entre el bienestar económico y el año.

C.C.de Pearson con la medición de granularidad 100

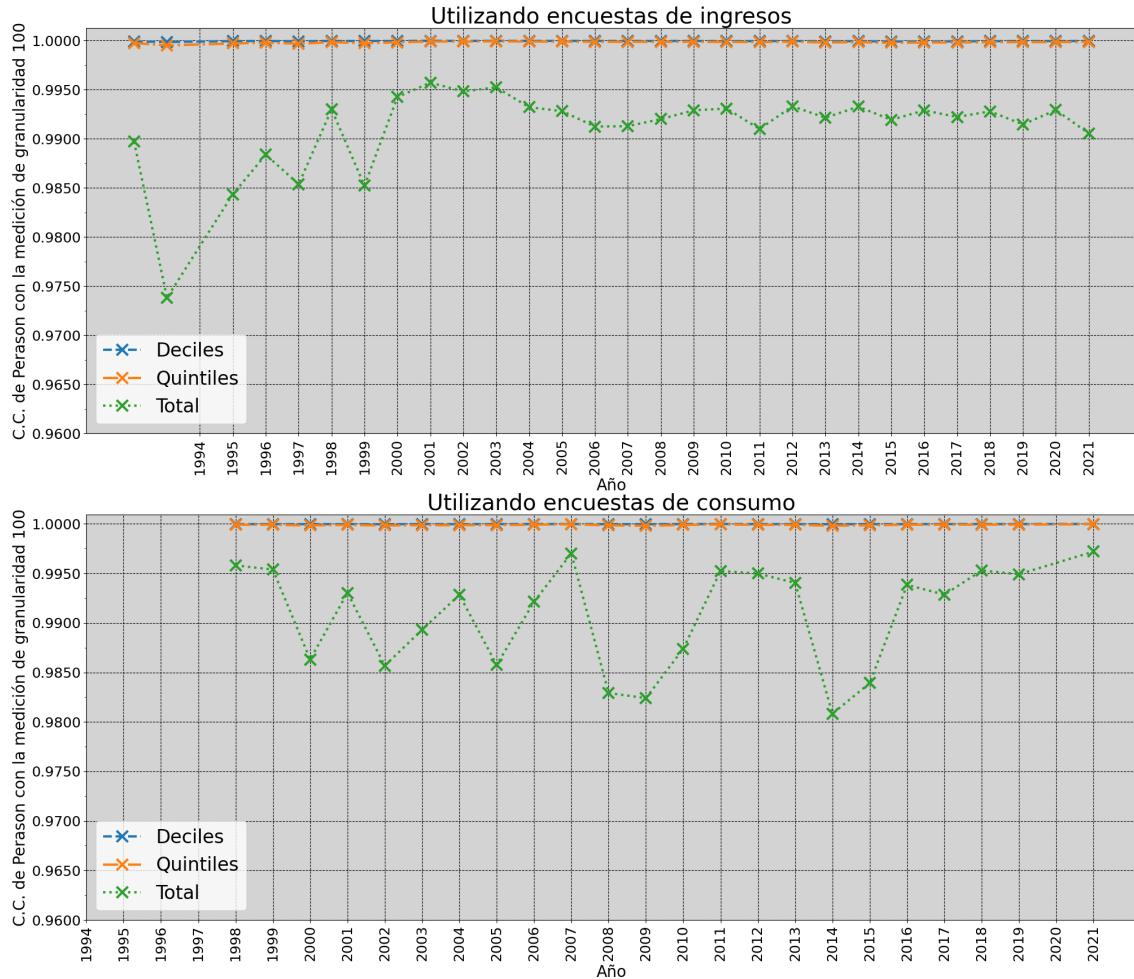


Fig. F5.4: Correlación de Pearson entre utilizar 1, 5 y 10 grupos frente a usar 100 grupos en los datos empíricos, condicionado por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles

C.C.de Spearman con la medición de granularidad 100

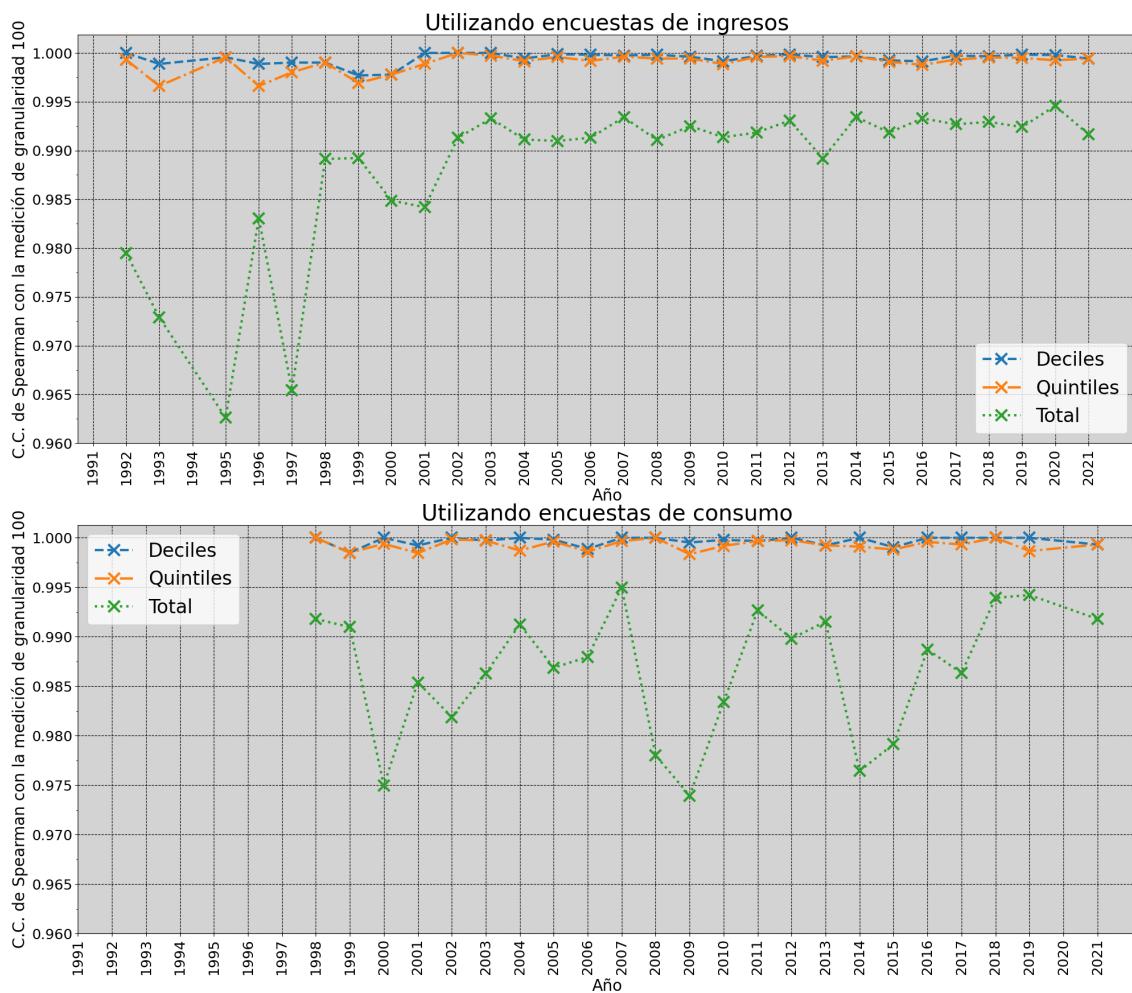


Fig. F5.5: Correlación de Spearman entre utilizar 1, 5 y 10 grupos frente a usar 100 grupos en los datos empíricos, condicionado por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles

6. DATOS REALES: MEJORA DE LA CAPACIDAD PREDICTIVA

En este capítulo exploramos si las modificaciones propuestas en la medición del bienestar económico mejoran la capacidad de predecir otros indicadores socio económicos.

6.1. Hipótesis

El objetivo del presente capítulo es intentar falsear H6.1 utilizando datos disponibles.

Hipótesis H6.1 (Mejora del indicador). *Sea una métrica M relacionada con el bienestar económico, la correlación entre B_{100} y M será mayor que entre las mediciones de menor granularidad $BE_{GNI}, BE_1, BE_5, BE_{10}$ con M , y también que la correlación entre M y las mediciones alternativas existentes, BE_I y BE_M*

6.2. Esperanza de Vida al Nacer (EVN)

Un indicador importante para evaluar el bienestar de una sociedad es la esperanza de vida al nacer (EVN) [5], es decir la edad promedio de muerte durante ese año.

Podemos conjeturar que el bienestar económico se relaciona positivamente con la esperanza de vida al nacer, entre otros medios, mediante los sistemas de saneamiento y sanidad:

- Un buen sistema de saneamiento (agua potable, cloacas, calles limpias, etc.) previene enfermedades.
- Si las personas se enferman menos, podrán ser más productivas (aumenta el ingreso) y a su vez podrán vivir más años.
- Si las personas tienen más ingresos, pueden destinar más recursos al cuidado de su salud (alimentación, atención médica), lo que a su vez también previene enfermedades y atiende enfermedades existentes.
- Un mejor sistema de salud, al ser eficaz tratando enfermedades, tiene un efecto como el de un buen sistema de saneamiento (aunque sin tener necesariamente la misma intensidad).

Como presumimos que hay una relación entre el bienestar económico de un individuo y su esperanza de vida, entonces cabe esperar que mejorar nuestra capacidad de medir el bienestar económico lleve a tener una variable más correlacionada con la EVN.

Por esto, vamos a comparar la correlación de los indicadores actualmente existentes (incluyendo los alternativos) con los indicadores propuestos con distintas granularidades.

C.C.de Pearson del ingreso con la esperanza de vida

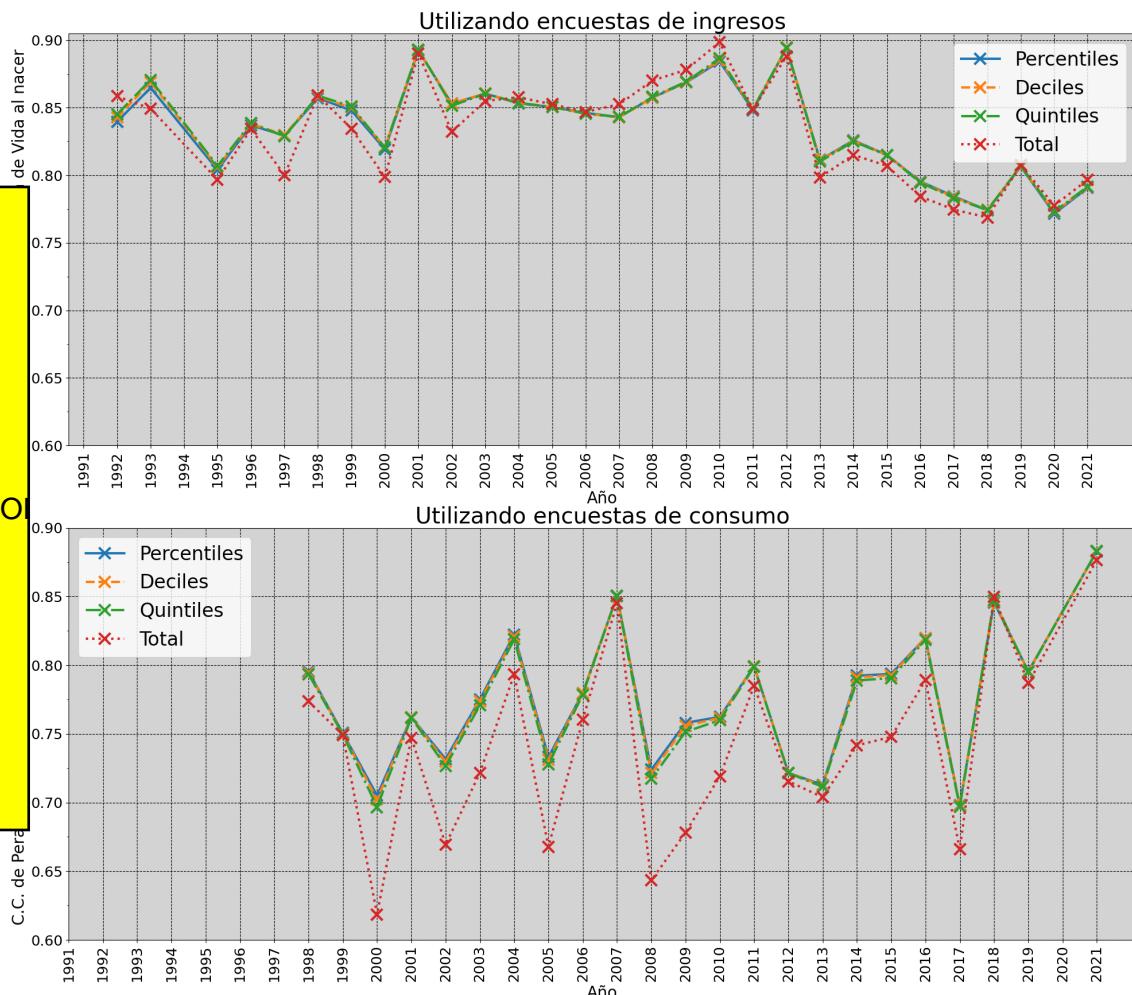


Fig. F6.1: Correlación de Pearson entre utilizar 1, 5 y 10 grupos frente a usar 100 grupos en los datos empíricos, condicionado por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles

Como puede verse en F6.1, la capacidad predictiva de los ingresos empeora en los últimos años, mientras que la del consumo mejora. A su vez, el beneficio de mejorar la granularidad parece agotarse al pasar de 1 a 5 grupos, ya que tomar quintiles, deciles o percentiles da un resultado similar.

A su vez, podemos utilizar bootstrap no paramétrico para estimar la varianza que tendría esta correlación en base a la muestra dada, como puede verse en F6.2, de la cual podemos extraer dos primeras observaciones importantes:

- Utilizando las muestras de ingreso el rango inter-cuartílico de los indicadores es mucho menor.
- Los cuartiles y medianas de las distribuciones de las correlaciones se comportan de forma similar entre **sí**, y similares a lo observado con la muestra original.

sí

C.C.de Pearson : Ingresos vs EVN con resampleo

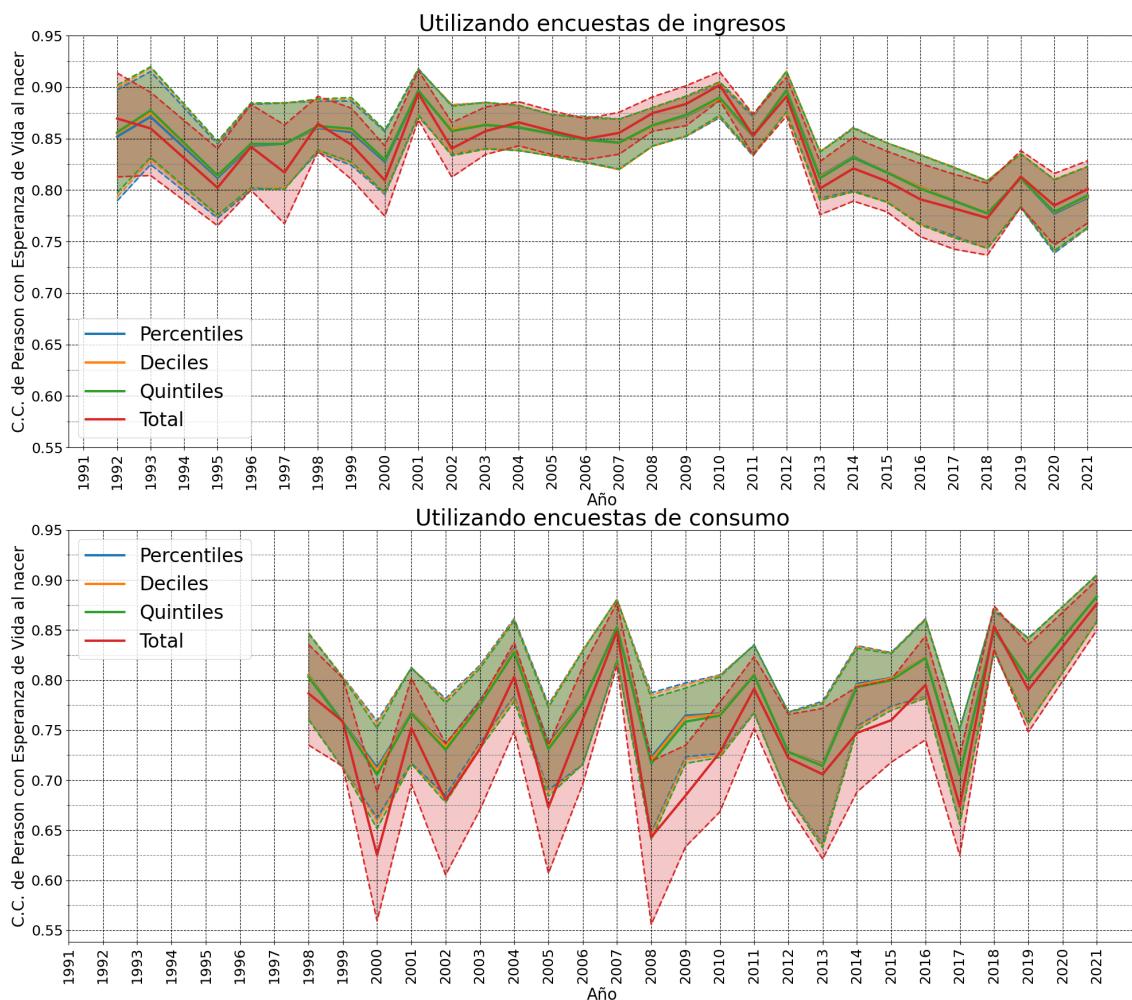


Fig. F6.2: Correlación de Pearson entre utilizar 1, 5, 10 y 100 grupos y la EVN en los datos empíricos, condicionada por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles y utilizando bootstrap no paramétrico con 1.000 remuestreos para estimar el rango inter-cuartílico condicional

Como puede observarse en F6.3 y F6.4, lo dicho anteriormente se preserva utilizando métricas de correlación no lineal como Spearman y Kendall.

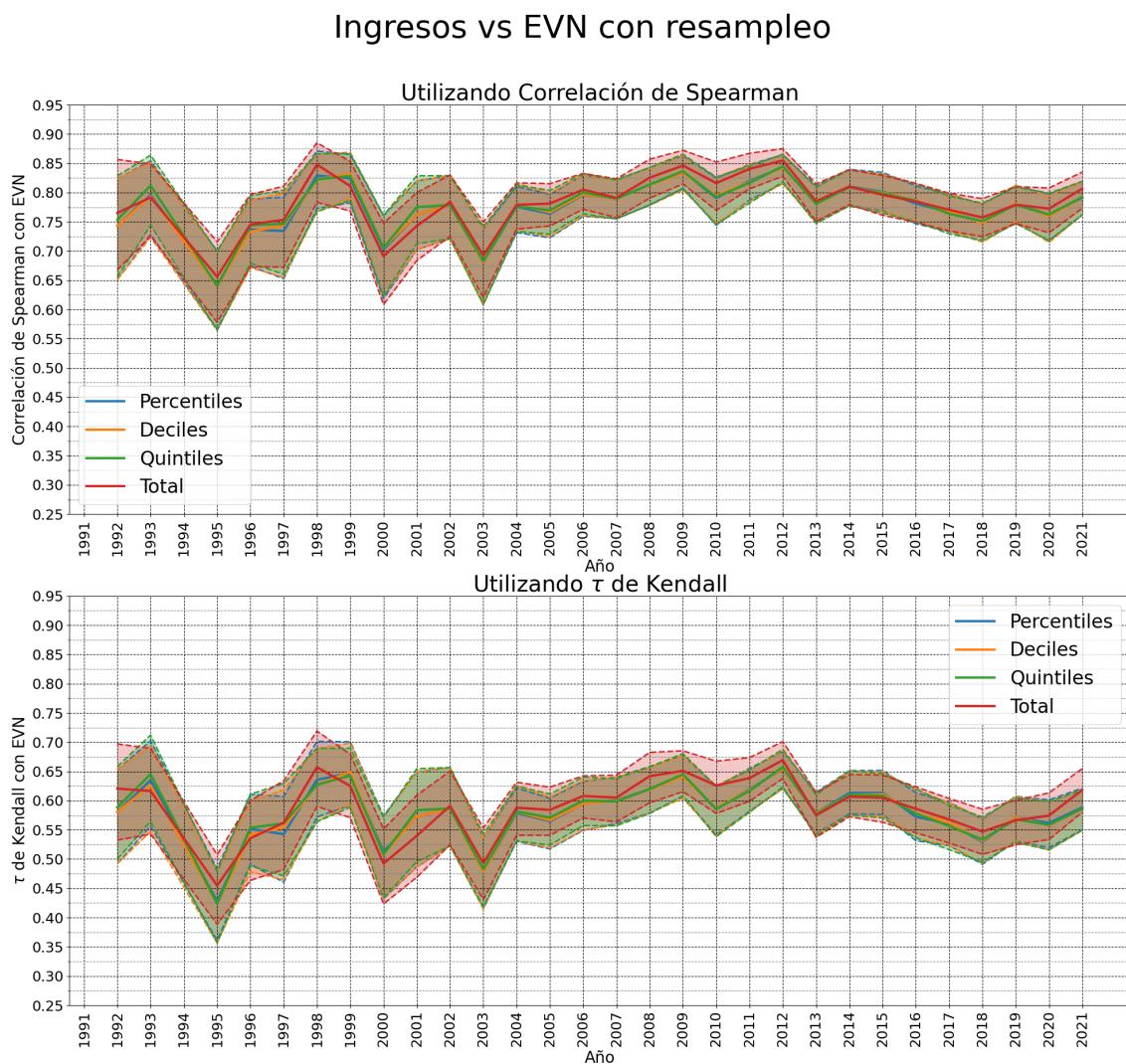


Fig. F6.3: Correlaciones de Spearman y Kendall entre utilizar 1, 5, 10 y 100 grupos y la EVN en los datos empíricos, condicionadas por año, para las muestras de ingresos. Solo para los años con al menos 20 países disponibles y utilizando bootstrap no paramétrico con 1.000 remuestreos para estimar el rango inter-cuartílico condicional

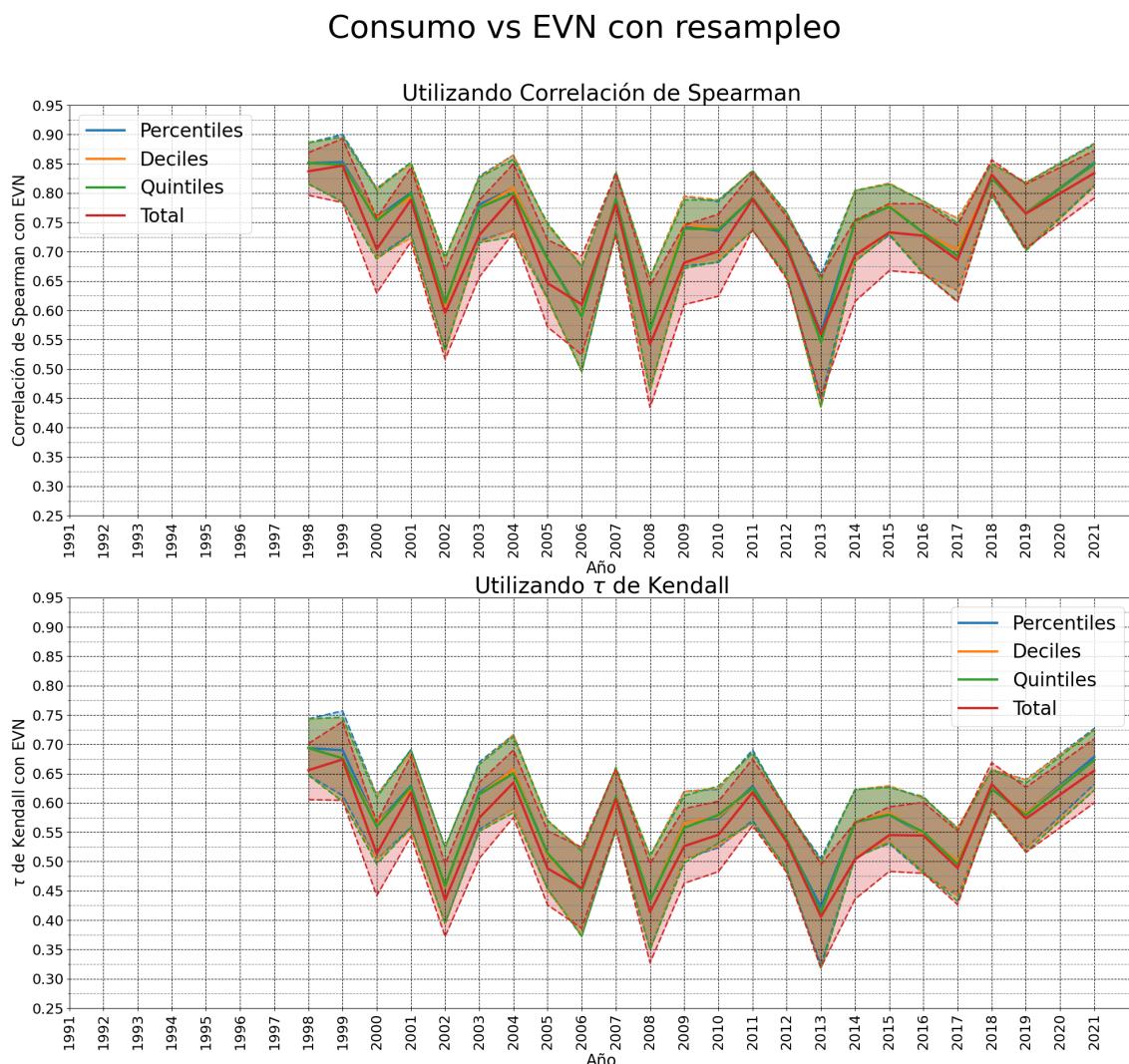


Fig. F6.4: Correlaciones de Spearman y Kendall entre utilizar 1, 5, 10 y 100 grupos y la EVN en los datos empíricos, condicionadas por año, para las muestras de consumo. Solo para los años con al menos 20 países disponibles y utilizando bootstrap no paramétrico con 1.000 remuestreos para estimar el rango inter-cuartílico condicional

Lo que puede apreciarse en F6.5 y F6.6 es que, comparando las métricas propuestas con el uso del GNI per capita y con las métricas alternativas existentes:

- Para los países con encuestas de ingresos, el GNI tiene un comportamiento ligeramente mejor al principio de la serie y luego pasa a ser ligeramente peor. **ligeramente**
- Para los países con encuestas de consumo, el GNI tiene un comportamiento mucho peor que para los que tienen encuestas de ingresos, y comparado con las demás métricas, aunque hay años en los que es superior, tiene un piso de predictividad notablemente menor y en general tiene un peor desempeño.
- El GNI per cápita corregido por desigualdad y el logaritmo de la mediana de los ingresos tienen un desempeño similar a las métricas propuestas.
- Se mantiene lo observado en las figuras anteriores, los cuantiles estimados con bootstrap se comportan de forma similar a los datos observados.

C.C.de Pearson del ingreso con la esperanza de vida

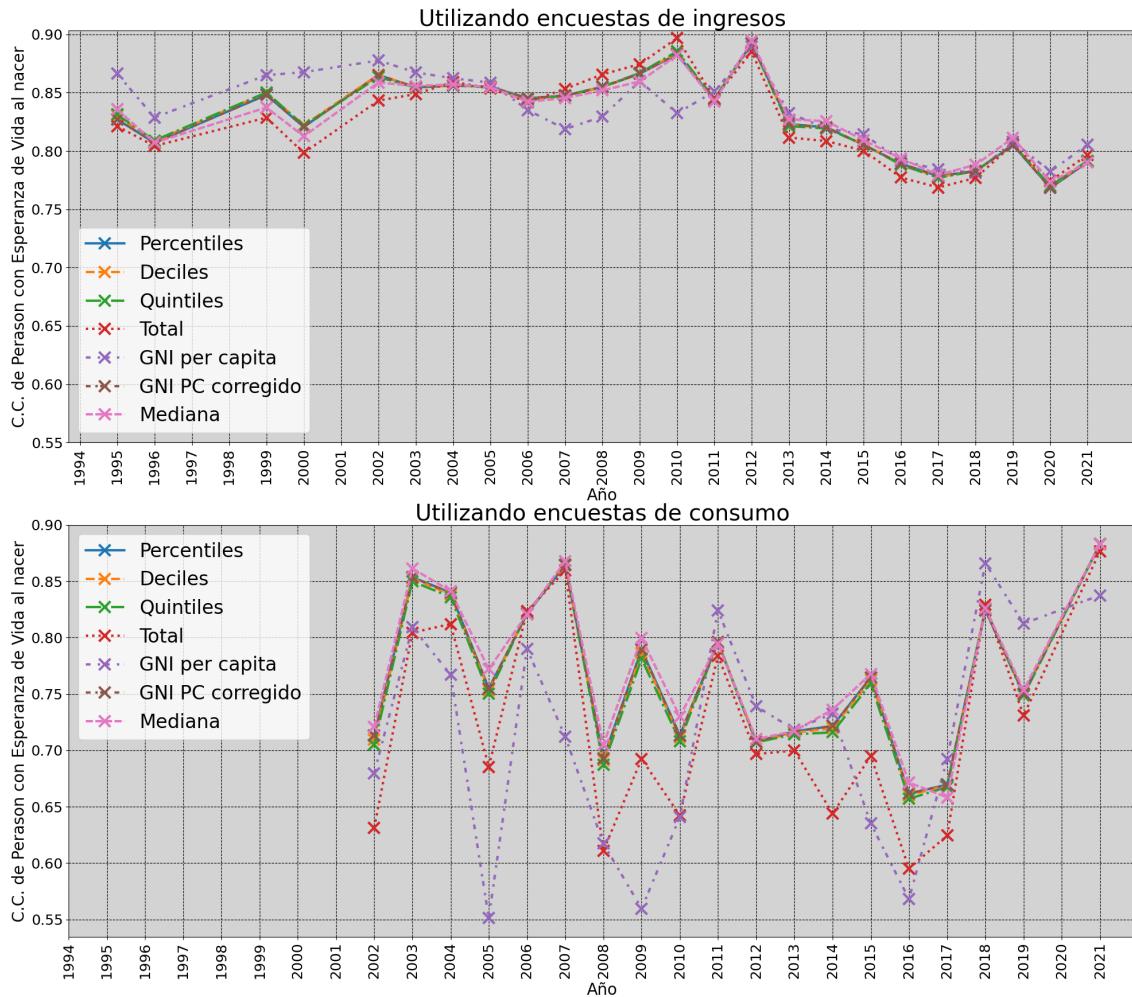


Fig. F6.5: Correlación de Pearson entre utilizar 1, 5, 10 y 100 grupos, el GNI PC, el GNI PC corregido y la mediana de los ingresos y la EVN en los datos empíricos, condicionada por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles.

C.C.de Pearson del ingreso con la esperanza de vida

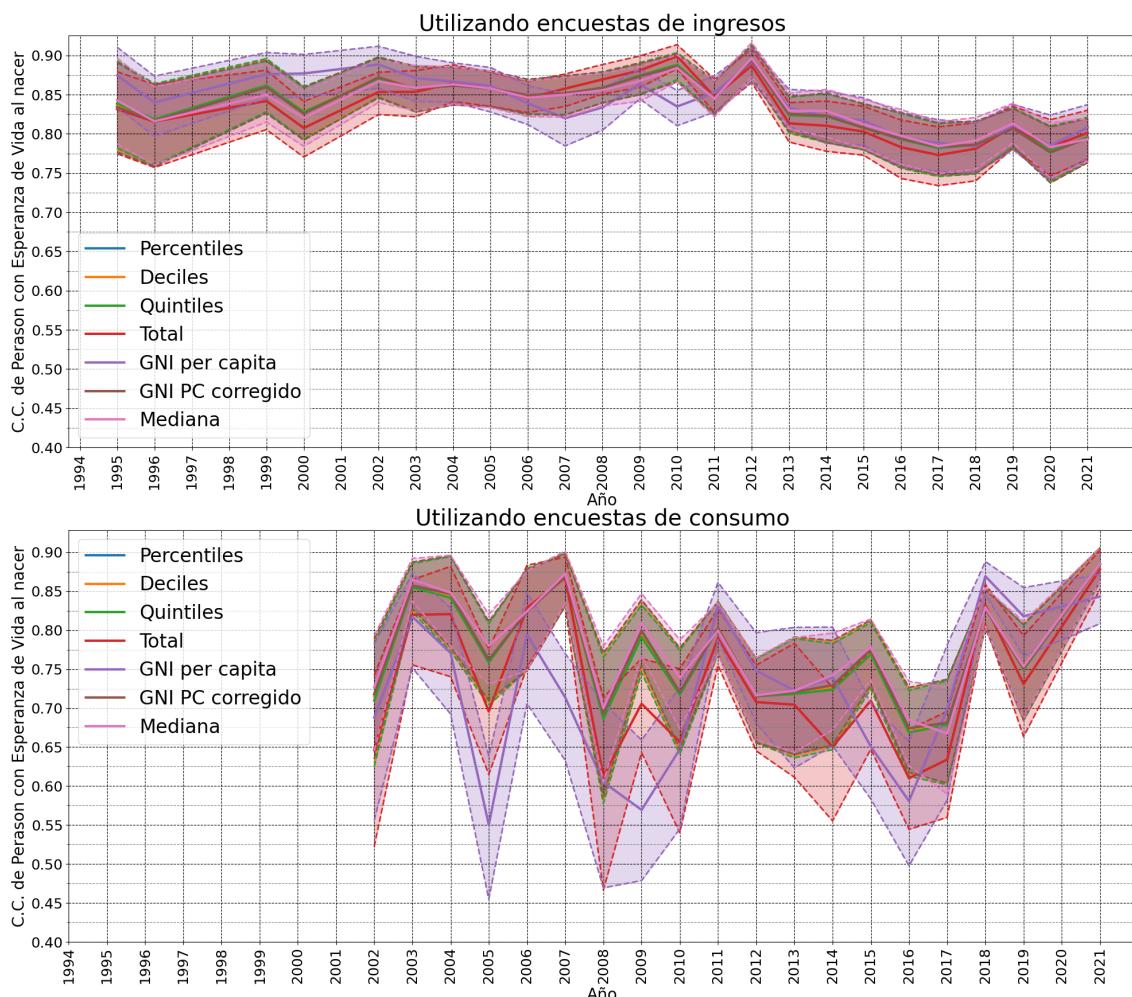


Fig. F6.6: Correlación de Pearson entre utilizar 1, 5, 10 y 100 grupos, el GNI PC, el GNI PC corregido y la mediana de los ingresos y la EVN en los datos empíricos, condicionado por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles y utilizando bootstrap no paramétrico con 1.000 remuestreos para estimar el rango intercuartílico condicional

El hecho de que en distintos años cambie sustancialmente la capacidad predictiva de los indicadores, y especialmente el hecho de que el GNI per cápita tenga distinta capacidad predictiva para distintas muestras de un mismo año, lleva a pensar que el hecho de que un país utilice encuestas de ingresos o de consumo tiene relación con al menos uno de los siguientes aspectos:

- La calidad de las estadísticas
- La capacidad de los ingresos de impactar en la esperanza de vida

En F6.7 puede verse que los comportamientos antes descriptos se conservan utilizando la correlación de Spearman.

C.C.de Spearman del ingreso con la esperanza de vida

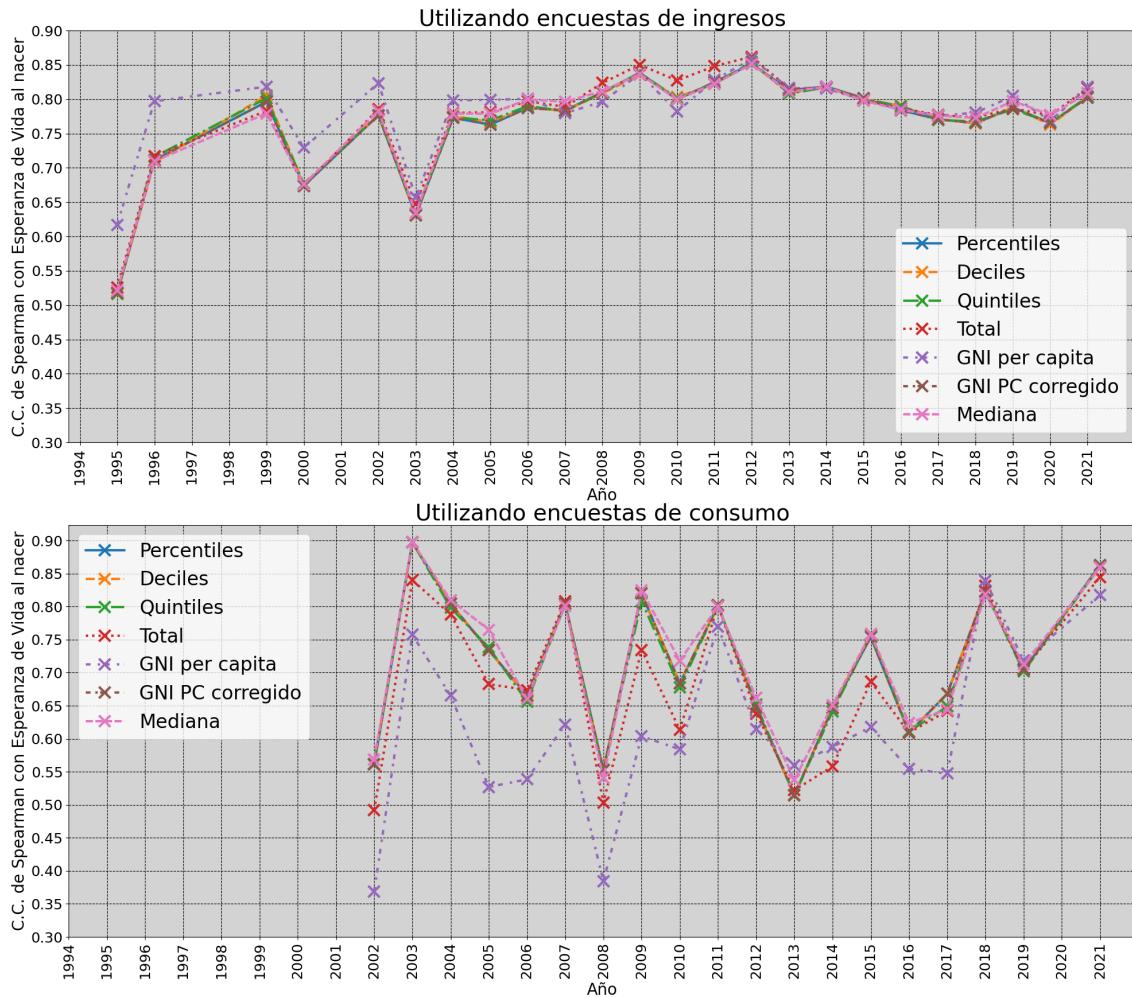


Fig. F6.7: Correlación de Spearman entre entre utilizar 1, 5, 10 y 100 grupos, el GNI PC, el GNI PC corregido y la mediana de los ingresos y la EVN en los datos empíricos, condicionada por año y tipo de encuesta. Solo para los años con al menos 20 países disponibles.

Llegados a este punto, cabe observar que para el caso de la EVN, H6.1 no se verifica, por los siguientes motivos:

- No hay una mejora significativa entre las granularidades 5 y 100.
- Las mediciones alternativas existentes, BE_I y BE_M , tienen un desempeño similar a las mediciones propuestas en este trabajo.
- No es consistentemente mejor que utilizar BE_1 o BE_{GNI} .

Sin embargo, esto no implica que no haya riqueza en explorar esta misma hipótesis para otros conjuntos de datos, que es lo que haremos en la siguiente sección.

poner numero de seccion

6.3. Otros indicadores

que aportan exactamente esta sección sobre

6.3.1. Años esperados de educación

Podemos conjeturar que los años esperados de educación de una sociedad tienen una correlación positiva con los ingresos porque:

- La ya estudiada ecuación de Mincer (Mincer, 1958) [6]:

$$\ln(w) = \beta_0 + \beta_1 * educacion + \beta_2 * experiencia + \beta_3 * experiencia^2$$

- Familias con mayores ingresos pueden destinar más recursos a la educación de sus hijos, y pueden postergar más el ingreso de los mismos al mercado laboral.

Lo que podemos observar en F6.8 es que de hecho, la medición más correlacionada con los años de educación esperados es BE_{GNI} .

6.3.2. Suscripciones de celular cada 100 habitantes

Podemos conjeturar una relación, sobre todo para hace algunos años, entre el acceso a la telefonía celular y el bienestar económico dado que:

- Los celulares son una herramienta que puede utilizarse para mejorar las comunicaciones, y por tanto la productividad.
- Un mayor ingreso permite destinar más recursos a gastos no vitales, como una línea celular.
- Es un proxy de la penetración de las TICs en la economía.

Lo llamativo que podemos observar en F6.9 es que, no solo el BE_{GNI} es de forma consistente el mejor predictor, mientras que todas las demás mediciones tienen una performance similar, sino que hay una diferencia cualitativa entre las muestras de ingresos y de consumo.

En las muestras de consumo se puede observar una estabilización alrededor de 0.5, y aunque hay una caída en la correlación al pasar los años, esta es mucho menos marcada. En cambio, en el caso de las encuestas de ingresos, se llega al punto de tener correlación negativa entre ambas variables (es decir, en los datos de 2021, un menor bienestar económico se asocia ligeramente a más líneas de telefonía celular).

Esta diferencia en las dinámicas es llamativa, y dispara preguntas que exceden el alcance de esta tesis.

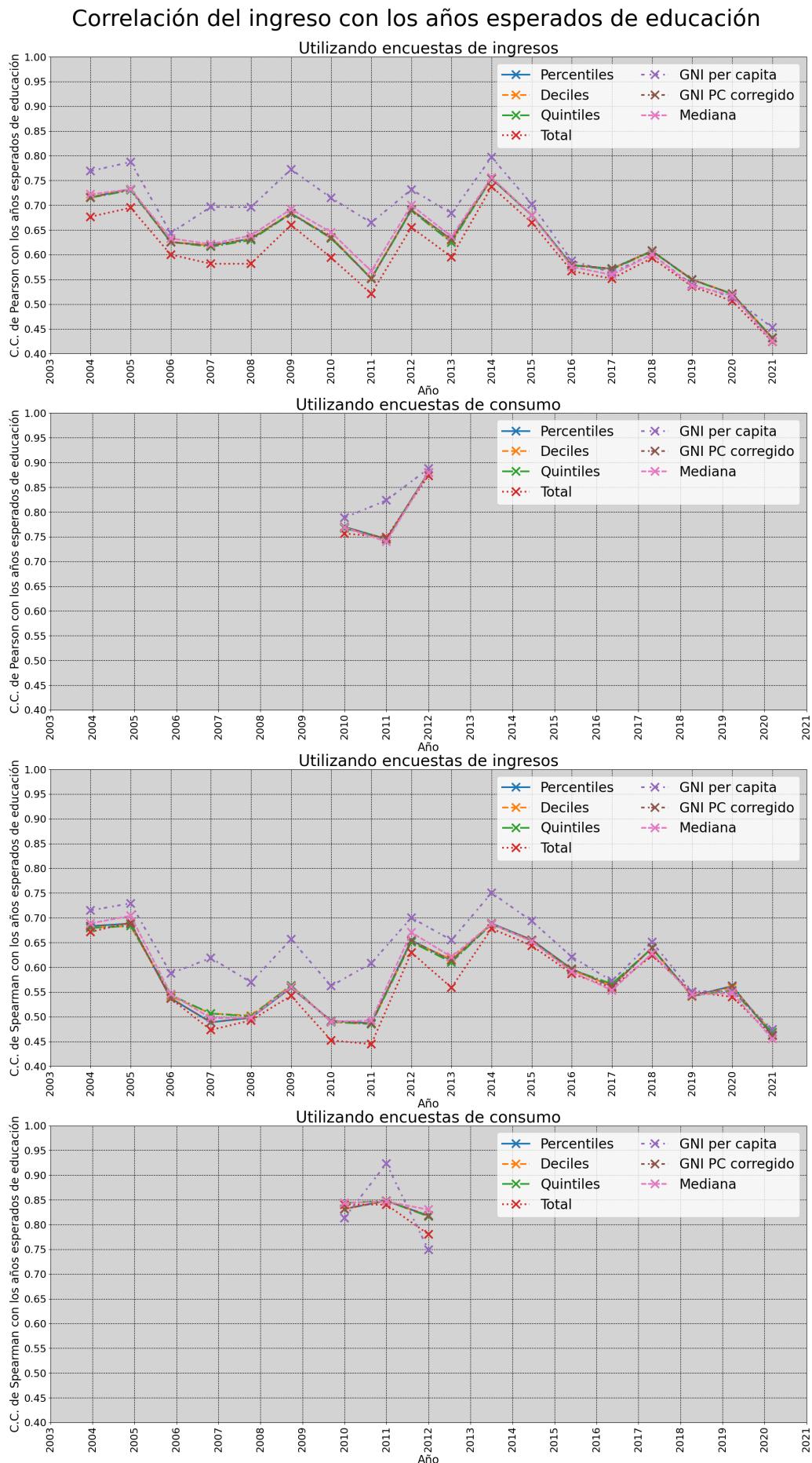


Fig. F6.8: Correlaciones de Pearson y Spearman entre las mediciones del bienestar económico estudiadas y los años de educación esperados. [7]

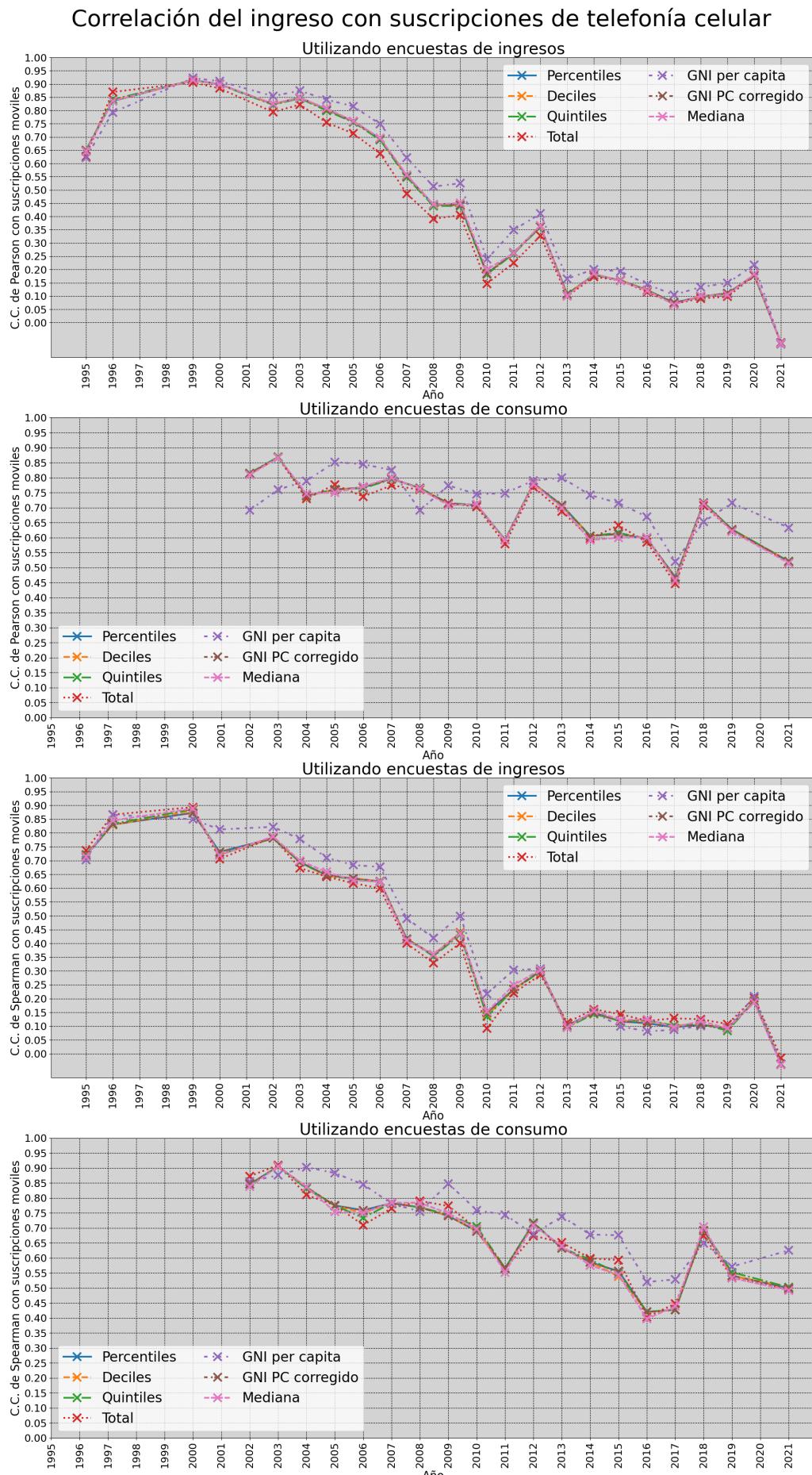


Fig. F6.9: Correlaciones de Pearson y Spearman entre las mediciones del bienestar económico estudiadas y la cantidad de suscripciones de telefonía móvil cada 100 habitantes. [7]

7. CONCLUSIONES

7.0.1. Conclusión principal

que aporta los estudios en "otros indicadores" a esta afirmación? n

La principal conclusión del presente trabajo es que el indicador propuesto puede ser aproximado satisfactoriamente con los datos disponibles, pero el mismo no captura mejor el concepto de bienestar económico que otras metodologías ya existentes.

Si asumimos que los datos se distribuyen de forma log-normal, esto se puede atribuir a que una de las otras metodologías (tomar la mediana de los ingresos) es también un estimador insesgado de la media, moda y mediana (el mismo valor) de la normal asociada.

7.0.2. Otras conclusiones

De lo trabajado en esta tesis también podemos decir:

- El uso discriminado de encuestas de ingresos y de consumo permitió distinguir comportamientos diferentes. Esto lleva a presumir que las condiciones que llevan a un país a utilizar uno u otro tipo de encuesta también influyen en los fenómenos estudiados, y/o que son dos metodologías de muy diferente calidad.
- El uso de correlaciones no lineales no permitió encontrar patrones o comportamientos no observados al utilizar la correlación de Pearson. En que momento se comparan los tipos de corr
- El uso de bootstrap no paramétrico no permitió, tampoco, observar patrones o comportamientos no observados originalmente. En que momento se compara usar bootstrap con no
- La fuerte correlación entre BE_1 y BE_N tanto en los datos simulados, cuando hay múltiples varianzas coexistiendo, como en los empíricos es una explicación parcial al hecho de que el indicador propuesto no fuera superador de lo ya existente.

Aclarar en que

7.0.3. Falsación de las hipótesis

Las hipótesis presentadas en este trabajo fueron:

1. H4.1 y H4.2, que dicen que mejorar la granularidad de BE_i aumenta la correlación entre BE_i y BE_N . Los resultados observados en los datos son verosímiles con estas hipótesis.
2. H4.3, que dice que al aumentar la varianza, la correlación entre BE_i y BE_j ($i \neq j$) se reduce. Los resultados observados no son verosímiles con esta hipótesis.
3. H6.1, que dice que la medida propuesta es mejor predictor de otras variables relacionadas al bienestar económico que las medidas existentes. Los resultados observados no son verosímiles con esta hipótesis.

8. POSIBLES TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo hubo diversas limitaciones que permiten generar nuevas líneas de trabajo en el futuro:

- La única variable de control utilizada fue el año. Es posible incorporar más variables de control.
- Unicamente se evaluaron correlaciones lineales y ordinales, sin embargo es posible formular otros modelos (junto a la idea de incorporar más variables de control) que relacionen los ingresos con las demás variables. Explicar aca que no es lo mismo que dice el 2do it
- Se pueden incorporar más variables socioeconómicas que se conjecture están relacionadas al bienestar económico.
- Se pueden proponer otras formas de aproximarse al bienestar económico y realizar sobre estas un estudio similar al realizado en el presente trabajo.

Bibliografía

- [1] United Nations Development Programme. Technical notes: Human development report 2023/24. Technical report, United Nations Development Programme (UNDP), 2023. Disponible en: https://hdr.undp.org/sites/default/files/2023-24_HDR/hdr2023-24_technical_notes.pdf, Accedido: 2024-10-11,.
- [2] R. Gibrat. *Les inégalités économiques*. Sirey, 1931. <https://books.google.com.ar/books?id=m9fuoAEACAAJ>.
- [3] Lautaro Lasorsa. Códigos para la generación de datos simulados, 2024. <https://gist.github.com/LautaroLasorsa/739dae8ec5f9041f243150183070815a>.
- [4] World Bank. Poverty and inequality platform (version 20240627_2017_01_02_prod) [data set], 2024. World Bank Group. Disponible en: <https://pip.worldbank.org/>.
- [5] World Bank. Health, nutrition, and population statistics, 2024. Disponible en: <https://databank.worldbank.org/source/health-nutrition-and-population-statistics>. Accedido: 2024-10-17.
- [6] Jacob Mincer. Investment in human capital and personal income distribution. *Journal of Political Economy*, 66(4):281–302, 1958. S2CID 153616441, Disponible en: <https://www.jstor.org/stable/1827422>.
- [7] World Bank. Expected years of school: Gender data portal indicator, 2024. World Bank Gender Data Portal. Disponible en: <https://genderdata.worldbank.org/en/indicator/se-sch-life>. Accedido: 2024-10-17.